5016

DATAMASKINPROGRAM FÖR ANALYS AV REGLERSYSTEM: TRANSFORMATIONER AV SYSTEMEKVATIONERNA

LARS-GÖRAN ELDHAGEN

Rapport RE-16 sept. 1967

DATAMASKINPROGRAM FÖR ANALYS AV REGLERSYSTEM. TRANSFORMATIONER AV SYSTEMEKVATIONERNA

Sammanfattning

I detta examensarbete behandlas numeriska algoritmer för att transformera systemet S(A,B,C,D) på observerbar och styrbar kanonisk form. Programmen kan även användas för att beräkna koefficienterna i överföringsfunktionen för S(A,B,C,D).

Lineära tidsinvarianta system

Innehåll:

Inledning

1. Transformation av system

2. Överföringsfunktionen för ett system

Bil.1 Proceduren "invers"

Bil.2 Proceduren "sekular"

Bil.3 Proceduren "BAIRSTOW"

Inledning

Givet: ett linjärt tidsinvariant system av typ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Problem: finn systemets överföringsfunktion.

I avd.1 behandlas en metod att via en koordinattransformation i tillståndsrummet överföra systemet på en form som ger koefficienterna i överföringsfunktionen $\frac{Y}{U}$ samtidigt som information om observerbarhet och kontrollerbarhet erhålls.
I avd.2 behandlas ett sätt att genom direkt uträkning finna systemets överföringsfunktion. Metoden är mycket snabbare än den i avd.1 använda och troligen överlägsen ur numerisk sybpunkt. Emellertid ger den inte lika goda upplysningar om observerbarhet och kontrollerbarhet.
För båda metoderna har program skrivits och testexempel körts på SMIL. ~~[illegible]~~
I bilaga 1 och 2 redovisas procedurer som utnyttjats i de två större programmen. Testprogrammet i bilaga 3 har använts direkt för faktorering av de polynom som erhålls i avd. 1 och 2.

~~Lineära tidsinvarianta system.~~

1. Transformation av system.

Inledning.

Givet är ett system:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Vid en koordinattransformation i tillståndsrummet: $z = Tx$ överföres systemekvationerna på formen:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = TAT^{-1}z + TBu \\ y = CT^{-1}z + Du \end{cases}$$

Vissa transformationer ger systemet en speciellt enkel form. I Ref(1) ex.4.3, 4.4 och 4,5 anges tre olika normalformer för systemekvationerna.

Problemformuleringen blir nu : Givet matriserna A,B,C representerande det otransformerade syst. ovan. Finns det en transformation $z = Tx$ som överför systemet till resp. normalform? Om det finns en sådan matris T skall denna bestämmas och de transformerade matriserna TAT^{-1}, TB och CT^{-1} beräknas.

1.1 Normalform 1 och 2.

Med Normalform 1 resp.2 avses den form som anges i Ref(1) ex.4.4 resp. ex.4.5 .Ett ALGOL-program har skrivits för att i dessa fall lösa det ovan formulerade problemet. Se sid. [illegible]

Programmet följer ex.4.4 för både Normalform 1 och 2. Genom övergång till duala systemet före och efter transformationen enl.4.4 kan samma beräkningsgång användas även vid transformation till Normalform 2.

Transformation till Normalform 1 förutsätter att matrisen P, där

$$P = \begin{bmatrix} CA^{n-1} \\ CA^{n-2} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix}$$

är icke-singulär, dvs. inverterbar.

Enligt teorin för observerbarhet och kontrollerbarhet är detta liktydigt med att alla tillstånd är observerbara. Den teoretiska förutsättningen för att en transformation till Normalform 1 skall vara möjlig är alltså att alla tillstånd är observerbara. P.s.s. förutsätter transformation till Normalform 2 att alla tillstånd är kontrollerbara.

Transformation enl.ex.4.4 kräver bildandet av P^{-1}, med P def. enl. ovan. I programmet har använts en inversrutin som kombinerar Algoritm 230 och Algoritm 231 ur Ref(3). Rutinen ~~kom-~~bygger på Gauss-Jordans metod. Test av inversrutinen se bilaga 1. Innan anrop "invers(p,n,eps,singular)" sker sättes

eps = $\cancel{10^{-8}}$ test × norm(p,n) där norm(p,n) är den matrisnorm som för matrisen p av ordn.n och elementen a_{ik} har värdet:

$$\min\left(\max_i \sum_k |a_{ik}|,\ \max_k \sum_i |a_{ik}|\right)$$

Standardvärdet på test = 10^{-5}.

Om vid inverteringen något pivotelement blir abs. mindre än eps, sker uthopp till singular. Före uthoppet tilldelas då eps värdet av det pivotelement som orsakade uthoppet. Nya inverteringsförsök göres med mindre ~~eps~~ värden på test tills antingen inversrutinen löper igenom utan hopp till singular eller matrisen betraktas som singulär.

Som ex.4. visar kan ett alltför lågt värde på eps medföra att en helt felaktig "invers" bildas.

Fördelen med dessa upprepade försök är att invertering kan ske också av nästan singulära matriser, men att i så fall utskrift anger svårigheter vid inverteringen.

Ett antal testexempel har körts på SMIL. Se ex.8- ex.22. Några kommentarer till exemplen.

Ex.8. Den exakta lösningen är för Normalform 1:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Programmet ger här alltså minst 6 signifikanta siffror korrekt.

Ex.9. Här gäller exakt:

$$\det \begin{bmatrix} CA^3 \\ CA^2 \\ CA \\ C \end{bmatrix} = 1000 \qquad \det\left[B,\ AB,\ A^2B,\ A^3B\right] = 0$$

Dvs. alla tillstånd är observerbara och något tillstånd är inte kontrollerbart. Utskriften är alltså riktig i detta avseende.

Exakt ges sekularekvationen av :

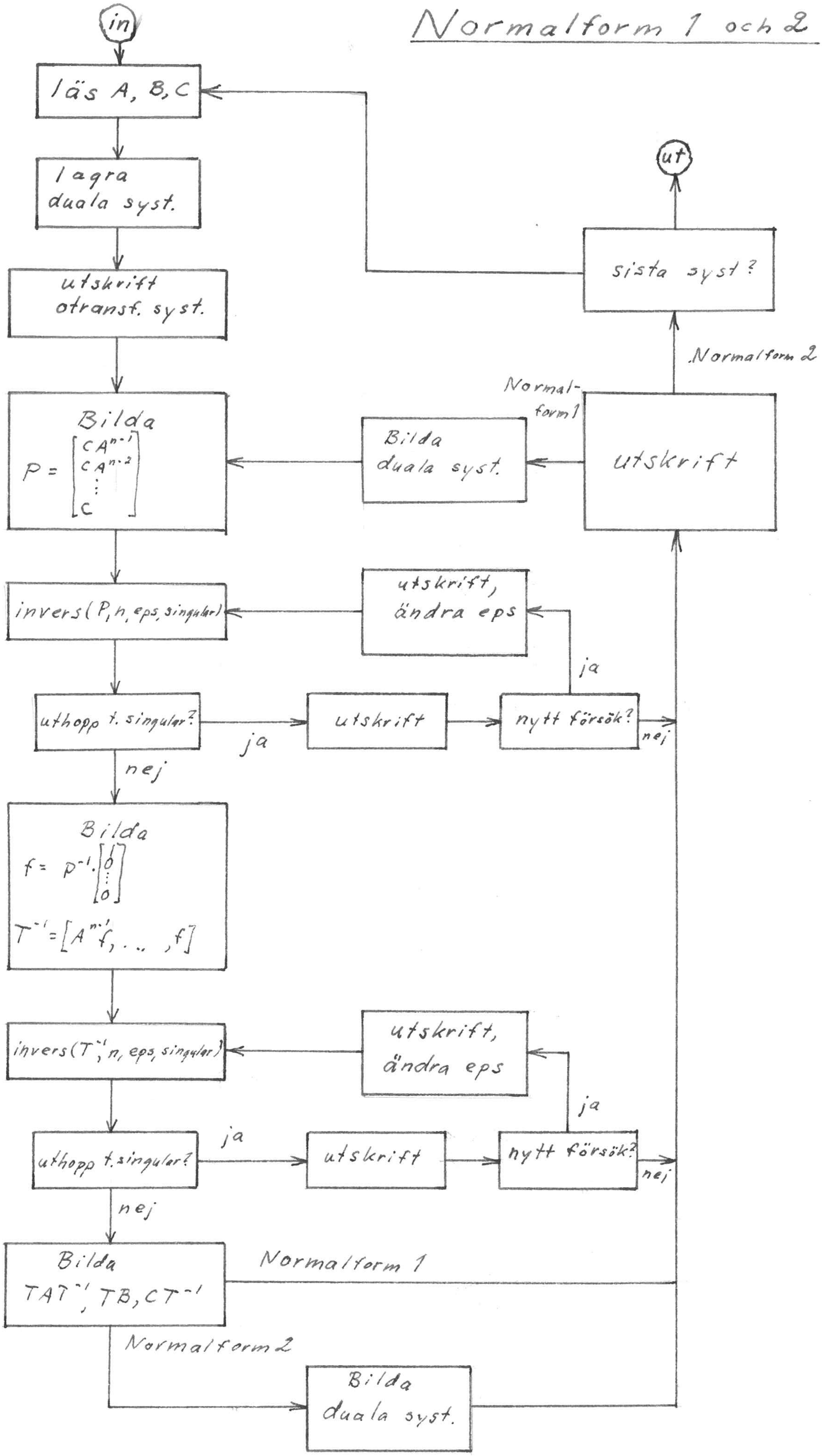
$$x^4 + 100x^3 + 2100x^2 + 210000x = 0.$$

Programmet ger här även en konstant term = 0.035.

Jfr. ~~även~~ bilaga 2, ex. 5 .

Ex. 10-ex.22 demonstrerar verkan av "avtagande" observerbarhet.

Normalform 1 och 2



```
begin comment Test av proceduren normal.Programmet är uppdelat på 5 avsnitt
    och innehåller alltså 4 dubbla semikolon för inläsningen.;
    integer k,n,u; real eps,matrisnorm;array a,b,c,a1,b1,c1[1:10,1:10],
    test[1:2]; switch L:= L1,L2,L3,L4;;
```

```
procedure transp(a,b,m,n); value m,n; array a,b; integer m,n;
comment Matrisen a av typ (m,n) transponeras. Den transponerade
matrisen av typ (n,m) lagras i b.;
begin integer i,j;
     for i:=1 step 1 until m do
     for j:=1 step 1 until n do
     b[j,i]:=a[i,j]
end;

procedure läs(A,m,n); array A; integer m,n;
comment En matris av typ (m,n)läses in från remsa till fältet A.
Härvid förutsättes följande stansordning:
m,n,a11,a21,a31,...,am1,a12,...,am2,......,a1n,...,amn.Antalet rader
placeras i m och antalet kolonner i n;
begin integer i,j;
     m:=read; n:=read;
     for j:=1 step 1 until n do
     for i:=1 step 1 until m do
     A[i,j]:=read
end;

procedure skriv(a,m,n);value m,n; array a; integer m,n;
comment Matrisen a av typ (m,n) skrives ut.;
begin integer i,j;
     for i:= 1 step 1 until m do
     begin for j:= 1 step 1 until n do
          print(-5,8,a[i,j]); punch(1)
     end;punch(1)
end;
```

```
procedure mult(A,B,C,m,n,p);value m,n,p;array A,B,C;integer m,n,p;
comment Proceduren multiplicerar matrisen A av typ(m,n) med matrisen
B av typ (n,p). Den resulterande matrisen av typ (m,p) placeras i C.
Proceduren mult utnyttjas av proceduren normal.;
begin integer i,j,k;real sum;
    for i:=1 step 1 until m do
    for k:=1 step 1 until p do
    begin sum:=0;
        for j:=1 step 1 until n do
        sum:=sum + A[i,j]×B[j,k];
        C[i,k]:=sum;
    end
end;

procedure slask(A,B,m,n);value m,n;array A,B;integer m,n;
comment Matrisen A av typ (m,n) lagras i B.Proceduren slask
utnyttjas av proceduren normal.;
begin integer i,j;
    for i:=1 step 1 until m do
    for j:=1 step 1 until n do
    B[i,j]:=A[i,j]
end;

real procedure norm(A,n);array A;integer n;
comment Proceduren beräknar den minsta av maximumnormerna
för matrisen A av typ(n,n) och dess transponat. Proceduren
utnyttjas av proceduren normal.;
begin real radsum,kolsum,radmax,kolmax; integer i,j;
    radsum:=kolsum:=radmax:=kolmax:=0;
    for i:=1 step 1 until n do
    begin for j:=1 step 1 until n do
        radsum:=radsum+abs(A[i,j]);
        if radsum>radmax then radmax:=radsum;radsum:=0
    end;for j:=1 step 1 until  n do
    begin for i:=1 step 1 until n do
        kolsum:=kolsum + abs(A[i,j]);
        if kolsum>kolmax then kolmax :=kolsum;kolsum:=0
    end;if radmax > kolmax then norm:=kolmax else norm:=radmax
end;;
```

```
procedure normal(a,b,c,n,eps,singular,m,matrisnorm,test); value n;
array a,b,c;integer n,m; real eps,matrisnorm; label singular;array test;
comment Systemekvationerna givna av matriserna a,b och c överföras på
normalform av den typ som förutsätter observerbarhet.De transformerade
matriserna placeras i a,b resp. c.Teori och metod, se K.-J.Åström
Reglerteknik Allmän kurs, komp.TLTH/VBV 1966,spec. Ex.4.4. Proceduren
kan genom övergång till duala systemet även utnyttjas för transformation
enl. Ex.4.5, dvs den transformation som förutsätter kontrollerbarhet;
begin array p,q,r[1:10,1:10]; integer i,j;
    for i:=1 step 1 until n do
    p[n,i]:=q[1,i]:=c[1,i];
    for i:=n-1 step -1 until 1 do
    begin mult(q,a,r,1,n,n); slask(r,q,1,n);
        for j:=1 step 1 until n do
        p[i,j]:=q[1,j]
    end;
    matrisnorm:=norm(p,n); eps:=matrisnorm×test[1]; m:=1;
    invers(p,n,eps,singular); slask(p,q,n,1);
    for j:= n step -1 until 1 do
    begin for i:=1 step 1 until n do
        p[i,j]:=q[i,1];
        mult(a,q,r,n,n,1);
        slask(r,q,n,1);
    end;
    matrisnorm:=norm(p,n); eps:=matrisnorm×test[2]; m:=2;
    slask(p,q,n,n); invers(p,n,eps,singular);
    mult(p,a,r,n,n,n); mult(r,q,a,n,n,n);
    mult(p,b,r,n,n,1); slask(r,b,n,1);
    mult(c,q,r,1,n,n); slask(r,c,1,n)
end;;
```

```
procedure invers(a,n,eps,singular); value n; array a;
integer n; real eps; label singular;
comment Inverterar matrisen a av ordning n med Gauss-Jordans metod.
Matrisen a blir förstörd då inversen bildas utan extra fält. Vid
varje steg användes det abs. största elementet som pivoelement.
Index för succesiva pivoelement placeras i vektorerna r och c,
vilka sedan användes för återpermutering. Om något pivoelement
är mindre än eps går proceduren till läge singular i huvudprogrammet.
Då uthopp till singular sker tilldelas eps värdet av det pivotelement
som orsakade uthoppet.Proceduren kombinerar Algorithm 230 och
Algorithm 231 ur Collected Algorithms from CACM.Den utnyttjas av
proceduren normal;
begin integer i,j,k,l,pivi,pivj,p; real pivot; integer array r,c[1:30];
    for i:=1 step 1 until n do r[i]:=c[i]:=i;
    comment sök startvärde för pivot; pivi:=pivj:=1;
    for i:=1 step 1 until n do for j:=1 step 1 until n do
    if abs(a[i,j])>abs(a[pivi,pivj]) then
    begin pivi:=i; pivj:=j end;
comment start lösning;
    for i:=1 step 1 until n do
    begin l:=r[i]; r[i]:=r[pivi]; r[pivi]:=l; l:=c[i];c[i]:=c[pivj]; c[pivj]:=l;
        if eps>abs(a[r[i],c[i]]) then begin eps:=abs(a[r[i],c[i]]);
        go to singular end;
        for j:=n step -1 until i+1,i-1 step -1 until 1 do
        a[r[i],c[j]]:=a[r[i],c[j]]/a[r[i],c[i]];
        a[r[i],c[i]]:=1/a[r[i],c[i]];
        pivot:=0;
        for k:=1 step 1 until i-1,i+1 step 1 until n do
        begin for j:=n step -1 until i+1,i-1 step -1 until 1 do
            begin  a[r[k],c[j]]:=a[r[k],c[j]]-a[r[i],c[j]]×a[r[k],c[i]];
                if k>i^j>i^abs(a[r[k],c[j]])>abs(pivot) then
                begin pivi:=k; pivj:=j; pivot:=a[r[k],c[j]] end test
            end j loop;
            a[r[k],c[i]]:=-a[r[i],c[i]]×a[r[k],c[i]];
        end k loop;
    end i loop och lösning;
    comment start återpermutation av rader för z=1 och av kolonner för z=2;
    begin  integer array tag, loc[1:30]; integer z,i,t; real w;
        for z:=1,2 do
        begin for i:=1 step 1 until n do tag[i]:=loc[i]:=i;
            for i:=1 step 1 until n do
            begin if z=1 then
                begin t:=r[i]; j:=loc[t]; k:=c[i] end
                else begin t:=c[i]; j:=loc[t]; k:=r[i] end;
                if j≠k then
                begin for p:=1 step 1 until n do
                    begin if z=1 then
                        begin w:=a[j,p]; a[j,p]:=a[k,p]; a[k,p]:=w end
                        else begin w:=a[p,j]; a[p,j]:=a[p,k]; a[p,k]:=w end
                    end p loop;
                    tag[j]:=tag[k]; tag[k]:=t;
                    loc[t]:=loc[tag[j]]; loc[tag[j]]:=j
                end j,k test
            end i loop
        end z loop
    end permutation
end invers;;
```

```
Systemmatriserna läses in:
LÄS:läs(a,n,n); läs(b,n,u); läs(c,u,n);
Duala systemet lagras:
    transp(a,a1,n,n);transp(b,c1,n,1); transp(c,b1,1,n);
    write(‹URSPRUNGLIGA,SYSTEMET›); punch(1);
    skriv(a,n,n);skriv(b,n,1);skriv(c,1,n);punch(1);
    write(‹NORMALFORM,1,,ALLA,TILLSTÅND,OBSERVERBARA›);punch(1);
    k:=1;test[1]:=test[2]:=⏨-5;
L1:normal(a,b,c,n,eps,singular,u,matrisnorm,test);
    skriv(a,n,n); skriv(b,n,1);skriv(c,1,n); punch(1);
L2: write(‹NORMALFORM,2,ALLA,TILLSTÅND,KONTROLLERBARA›); punch(1);
    k:=3; test[1]:=test[2]:=⏨-5;
L3: normal(a1,b1,c1,n,eps,singular,u,matrisnorm,test);
    transp(a1,a,n,n); transp(b1,c,n,1); transp(c1,b,1,n);
    skriv(a,n,n);skriv(b,n,1); skriv(c,1,n);
L4: punch(15); go to LÄS;

singular:
    write(‹SINGULARITET,:›); punch(1);
    write(‹INVERSION›); print(1,0,u);space(3);
    write(‹TEST=›); print(-1,2,test[u]); space(3);
    write(‹MATRISNORM›); print(1,0,u);
    write(‹=›); print(-1,2,matrisnorm); space(3);
    write(‹PIVOTELEMENTET=›); print(-1,2,eps); punch(1);
    if test[u]>⏨-10^eps>0 then
    begin test[u]:=eps/2/matrisnorm;
        write(‹NYTT,FÖRSÖK:,TEST=›); print(-1,2,test[u]); punch(1);punch(1);
        go to L[k]
    end
    else
    begin if k=1 then write(‹NÅGOT,TILLSTÅND,EJ,OBSERVERBART›)
        else write(‹NÅGOT,TILLSTÅND,EJ,KONTROLLERBART›);punch(1);punch(1);
        go to L[k+1]
    end
end;
```

2. Överföringsfunktionen.

Föregående avsnitt behandlade en metod att finna koefficienterna i överföringfunktionen för ett lineärt, tidsinvariant system under förutsättning att alla tillstånd är antingen observerbara eller kontrollerbara.

I det fallet att systemet innehåller ~~någon~~ ett/ tillstånd som inte är observerbart och ett (ev. samma) som inte är kontrollerbart lämnas upplysning om detta, men metoden medger då inte beräkning av överföringsfunktionen. I detta avsnitt skall behandlas en ~~xx~~ alternativ metod att finna överföringsfunktionen, oberoende av observerbarhet och kontrollerbarhet. ~~Metoden är snabbare, då inga inversioner krävs. Den används med fördel också för flervariabla system.~~

~~Nackdelen är att information~~

Den senare metoden kräver faktorering av täljare och nämnare i överföringsfunktionen för att ge information om observerbarhet och kontrollerbarhet. Förekomsten av en ~~xxxx~~ gemensam faktor i täljare och nämnare anger att alla tillstånd inte är både observerbara och kontrollerbara. T.ex. i ett fall där alla tillstånd är observerbara, men ett inte är kontrollerbart, ger den förra metoden mer information.

De båda metoderna kompletterar alltså i viss mån varandra. Räknetiden för den ~~xx~~ nedan angivna metoden blir avsevärt kortare eftersom den inte kräver några matrisinversioner. En vinst i numerisk noggrannhet fås troligen också, eftersom a_i-koefficienterna beräknas oberoende av B- och C-matriserna.

Teori:

Systemet är
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Utgå från ~~$y = Cx$, derivera!~~

~~$\frac{dy}{dt} =$~~

(1) $y = Cx$, derivera!

(2) $\dfrac{dy}{dt} = C \cdot \dfrac{dx}{dt} = C \cdot (Ax + Bu)$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = C \cdot \left(A(Ax + Bu) + B\dfrac{du}{dt} \right) =$

$= C\left(A^2x + ABu + B\dfrac{du}{dt} \right)$

Efter n deriveringar fås

$$(n) \quad \frac{d^n y}{dt^n} = C\left(A^n x + A^{n-1}Bu + \dots + B\frac{d^{n-1}}{dt^n}u\right)$$

Multiplicera relationerna (1) – (n) med koefficienterna i karakteristiska polynomet för A, dvs med $a_n, a_{n-1}, \dots 1$.

Summera!

Man får då

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y =$$

$$= C(A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I)x +$$

$$+ C(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I)Bu +$$

$$+ \dots + CB\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u$$

$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I = 0$ enl. Cayley-Hamiltons sats.

Överföringsfunktionen ~~definieras~~ $\frac{Y}{U} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$

Identifiering ger

$b_1 = CB$

$\vdots$

$b_k = C(A^{k-1} + a_1 A^{k-2} + \dots + a_{k-1} I)B$

$\vdots$

$b_n = C(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I)B$

Genom att beräkna $A, A^2, \ldots A^n$ kan man först finna $a_1, \ldots a_n$ (se bilaga 2) och därefter beräkna $b_1 \ldots b_n$.

En förbättring, som lär vara motiverad vid system av högre ordning, vore att beräkna $a_1 \ldots a_n$ med någon bättre metod än den i bil.2 använda. Den procedur, "HEMUL", som skrivits och testats med några exempel, beräknar först $a_1 \ldots a_n$ enl. bil.2. Därefter beräknas, för $k=1, \ldots, n$, matriserna

$A^{k-1} + a_1 . A^{k-2} + \ldots + a_{k-1} . I = R$ varur b_k fås enl. $b_k = C.R.B$

~~Härefter bildas~~ ~~ekv. b_k~~

Ursprungligen skrevs proceduren HEMUL för ~~ett enkelt system~~ system med en insignal och en utsignal, där b_k alltså är tal. Testprogram, se sid .... Senare modifierades proceduren för tillämpning på flervariabla system. Testprogram sid..... Här blir b_k koefficientmatriser. Om elementet b_{ij} i matrisen b_k betecknas b_{ijk} fås resp. överföringsfunktion som

$$\frac{Y_i}{U_j} = \frac{b_{ij1} \cdot s^{n-1} + b_{ij2} \cdot s^{n-2} + \ldots + b_{ijn}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Ett antal testexempel kördes. Enkla system: ex.23-27 (jämför ex9,10,12,13). Här erhölls resultat med 8 korrekta decimaler. I ex. 28-30 behandlades flervariabla system. Systemet i ex.29 är detsamma som i ex.28 efter transformationen $z = T.x$ där:

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ex. 30 är ett empiriskt exempel.

Faktorering av överföringsfunktionen.

Om det förekommer något tillstånd som inte är både observerbart och kontrollerbart har täljare och nämnare i överföringsfunktionen en gemensam faktor. Se ex.22.

Överföringsfunktionen är:

$$\frac{Y}{U} = \frac{2.(s+3).(s+25)}{(s+1).(s+5).(s+25)}$$

Täljare och nämnare har en gemensam faktor som kan förkortas bort. Den i ex. 22 använda metoden, enl. avsnitt 1, ger direkt upplysningen att orsaken är att något tillstånd inte är observerbart.

I ex. 10 är överföringsfunktionen:

$$\frac{Y}{U} = \frac{2.01(s+2.999)(s+24.891)}{(s+1)(s+5)(s+25)}$$

Täljarens nollställe 24.891 ligger nära nämnarens i 25.000 . Orsaken är (jfr. systemmatriserna) att ett tillstånd är "svagt" observerbart.

För faktörering av överföringsfunktionerna i ex.28 och ex.30 användes testprogrammet för proceduren BAIRSTOW som beskrivits i bilaga 3.

Ex.28

Karakteristiska ekvationen är

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$$

Rötter enl. ex34 : -1.00000000
-2.00000000
-3.00000000
-4.00000000

Med beteckningen $(s+1)(s+2)(s+3)(s+4) = N$

och konventionen $(s+1) \equiv (s+1.000000)$ etc.

erhölls följande överföringsfunktioner mellan resp. in- och utsignaler:

$$\frac{Y_1}{U_1} = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{N} = \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{Y_2}{U_1} = \frac{(s+1)(s+3)(s+4)}{N} = \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{Y_3}{U_1} = \frac{0}{N} = 0$$

$$\frac{Y_4}{U_1} = \frac{2(s+1.500\cancel{000})(s+3)(s+4)}{N} = \frac{2\cdot(s+1.500\cancel{000})}{(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{Y_1}{U_2} = \frac{0}{N} = 0$$

$$\frac{Y_2}{U_2} = \frac{2(s+1)(s+2.500\cancel{000})(s+4)}{N} = \frac{2(s+2.500)}{(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{Y_3}{U_2} = \frac{(s+1)(s+2)(s+4)}{N} = \frac{1}{s+3}$$

$$\frac{Y_4}{U_2} = \frac{Y_2}{U_2} = \frac{2(s+2.500)}{(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{Y_1}{U_3} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{N} = \frac{1}{s+4}$$

$$\frac{Y_2}{U_3} = \frac{Y_3}{U_2} = \frac{1}{s+3}$$

$$\frac{Y_3}{U_3} = \frac{2(s+1)(s+2)(s+3.500)}{N} = \frac{2(s+3.500)}{(s+3)(s+4)}$$

$$\frac{Y_4}{U_3} = \frac{Y_3}{U_3} = \frac{2(s+3.500)}{(s+3)(s+4)}$$

$$\frac{Y_1}{U_4} = \frac{2(s+2)(s+2.500)(s+3)}{N} = \frac{2(s+2.500)}{(s+1)(s+4)}$$

$$\frac{Y_2}{U_4} = \frac{Y_2}{U_2} = \frac{2(s+2.500)}{(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{Y_3}{U_4} = \frac{Y_3}{U_3} = \frac{2(s+3.500)}{(s+3)(s+4)}$$

$$\frac{Y_4}{U_4} = \frac{4\cdot(s+1.382)(s+2.500)(s+3.618)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Ex. 30

Rötter till karakteristiska ekv. se ex 35a och 35b

~~Proceduren ger alltså~~ Faktoriseringen av överförings-funktionens nämnare, N, fås som

$$N = s(s+9.78\cdot10^{-6})(s+0.000336)(s+0.0482)(s+0.310)$$

Resp. överföringsfunktioner ~~fås~~ enl. nedan.

$$\frac{Y_1}{U_1} = \frac{2.15\cdot10^{-9}(s+3.02\cdot10^{-8})(s+0.000332)(s+0.310)}{N}$$

$$\frac{Y_2}{U_1} = \frac{1.42\cdot10^{-11}(s+2.63\cdot10^{-8})(s+0.590)(s-0.0583)}{N}$$

$$\frac{Y_1}{U_2} = \frac{8.30\cdot10^{-6}(s-0.649)(s+1.74\cdot10^{-6})(s+0.000339)(s+0.0481)}{N}$$

$$\frac{Y_2}{U_2} = \frac{1.25\cdot10^{-5}(s+8.37\cdot10^{-6})(s+0.000260)(s+0.0482)(s+4.42)}{N}$$

$$\frac{Y_1}{U_3} = \frac{-5.18 \cdot 10^{-5}(s+8.03 \cdot 10^{-7})(s+0.000351)(s+0.0481)(s+0.297)}{N}$$

$$\frac{Y_2}{U_3} = \frac{4.39 \cdot 10^{-4}(s-0.0000118)(s+0.0000330)(s+0.0482)(s+0.300)}{N}$$

I många fall har täljare och nämnare rötter som ligger mycket nära varandra. Motsvarande faktorer bör kunna förkortas bort.

Enkla system (en insignal - enutsignal)

```
begin comment Test av proceduren HEMUL;
    integer i,n; array A,B,C[1:10,1:10],a,b[1:10];
    procedure HEMUL(A,B,C,a,b,n); value n;array A,B,C,a,b;integer n;
    comment Proceduren HEMUL bestämmer överföringsfunktionen för ett
    enkelt system av n:te ordningen med systemmatriserna A,B,C. Vid
    uthoppet ges överföringsfunktionen av  ( b[1]×s↑(n-1)+...+b[n])/
    (s↑n+ a[1]×s↑(n-1)+...+a[n]);
    begin integer i,j,k,l;arrayA3[1:10,1:10,1:10],R,T[1:10,1:10],S[1:10];
        real sum;
        real procedure spår(A,n);value n;array A;integer n;
        begin integer i;real sum;
            sum:=0;
            for i:=1 step 1 until n do
            sum:=sum + A[i,i];
            spår:=sum
        end;
        procedure mult(A,B,C,m,n,p);value m,n,p;array A,B,C;integer m,n,p;
        comment Proceduren multiplicerar matrisen A av typ(m,n) med matrisen
        B av typ (n,p). Den resulterande matrisen av typ (m,p) placeras i C.;
        begin integer i,j,k;real sum;
            for i:=1 step 1 until m do
            for k:=1 step 1 until p do
            begin sum:=0;
                for j:=1 step 1 until n do
                sum:=sum + A[i,j]×B[j,k];
                C[i,k]:=sum;
            end
        end;
        procedure slask(A,B,m,n);value m,n;array A,B;integer m,n;
        begin integer i,j;
            for i:=1 step 1 until m do
            for j:=1 step 1 until n do
            B[i,j]:=A[i,j]
        end;
        procedure store(A,A3,m,n);value m,n;array A,A3;integer m,n;
        begin integer i,j;
            for i:=1 step 1 until n do
            for j:=1 step 1 until n do
            A3[i,j,m]:=A[i,j]
        end;
        comment a[i], i=1,..n bestämmes ur Newtons identiteter.Matriserna
        A,A↑2,...,A↑n lagras i fältet A3;
        slask(A,R,n,n); S[1]:=spår(R,n);
        for i:=1 step 1 until n-1 do
        begin store(R,A3,i,n); mult(A,R,T,n,n,n);
            slask(T,R,n,n); S[i+1]:= spår(T,n)
        end;
        a[1]:= -S[1];
        for k:=2 step 1 until n do
        begin sum:= 0;
            for i:=1 step 1 until k-1 do
            sum:= sum + S[i]×a[k-i];
            a[k]:= -(sum + S[k])/k;
        end;
```

```
        comment b[i], i=1,..n beräknas;
        mult(C,B,R,1,n,1); b[1]:= R[1,1];
        for k:= 2 step 1 until n do
        begin for i:= 1 step 1 until n do
              for j:= 1 step 1 until n do
            begin R[i,j]:= A3[i,j,k-1];
                for l:= 1 step 1 until k-2 do
                R[i,j]:= R[i,j] + a[l]×A3[i,j,k-l-1];
                if i=j then R[i,j]:= R[i,j] + a[k-1]
            end;
            mult(C,R,T,1,n,n);
            mult(T,B,R,1,n,1);
            b[k]:= R[1,1]
        end
    end HEMUL;
    procedure läs(A,m,n); array A; integer m,n;
    comment En matris av typ (m,n)läses in från remsa till fältet A.
    Härvid förutsättes följande stansordning:
    m,n,a11,a21,a31,...,am1,a12,...,am2,......,a1n,...,amn.Antalet rader
    placeras i m och antalet kolonner i n;
    begin integer i,j;
        m:=read; n:=read;
        for j:=1 step 1 until n do
        for i:=1 step 1 until m do
        A[i,j]:=read
    end;
    procedure skriv(a,m,n);value m,n; array a; integer m,n;
    comment Matrisen a av typ (m,n) skrives ut.;
    begin integer i,j;
        for i:= 1 step 1 until m do
        begin for j:= 1 step 1 until n do
            print(-5,8,a[i,j]); punch(1)
        end;punch(1)
    end;

    LÄS:
    läs(A,n,n); läs(B,n,i); läs(C,i,n);
    write(⟨SYSTEMMATRISERNA⟩); punch(1);
    skriv(A,n,n); skriv(B,n,1); skriv(C,1,n);
    HEMUL(A,B,C,a,b,n);
    for i:= 1 step 1 until n do
    begin write(⟨A⟩); print(1,0,i); print(-5,8,a[i]); space(5);
          write(⟨B⟩); print(1,0,i); print(-5,8,b[i]); punch(1)
    end;
    punch(15); go to LÄS
end
```

```
begin comment Test av proceduren HEMUL;
    integer n,p,r; array A,B,C[1:10,1:10];
    procedure HEMUL(A,B,C,n,p,r); value n,p,r; array A,B,C;integer n,p,r;
    comment Proceduren HEMUL bestämmer överföringsfunktionen för ett n:te
    ordningens system med systemmatriserna A,B,C där antalet insignaler
    är r och antalet utsignaler p.Koefficienterna i sekularekvationen
    x↑n+ A1×x↑(n-1)+...+An skrivs ut liksom koefficientmatriserna B1,...Bn;
    begin integer i,j,k,l;arrayA3[1:10,1:10,1:10],R,T[1:10,1:10],a,S[1:10];
        real sum;
        real procedure spår(A,n);value n;array A;integer n;
        begin integer i;real sum;
            sum:=0;
            for i:=1 step 1 until n do
            sum:=sum + A[i,i];
            spår:=sum
        end;
        procedure mult(A,B,C,m,n,p);value m,n,p;array A,B,C;integer m,n,p;
        comment Proceduren multiplicerar matrisen A av typ(m,n) med matrisen
        B av typ (n,p). Den resulterande matrisen av typ (m,p) placeras i C.;
        begin integer i,j,k;real sum;
            for i:=1 step 1 until m do
            for k:=1 step 1 until p do
            begin sum:=0;
                for j:=1 step 1 until n do
                sum:=sum + A[i,j]×B[j,k];
                C[i,k]:=sum;
            end
        end;
        procedure slask(A,B,m,n);value m,n;array A,B;integer m,n;
        begin integer i,j;
            for i:=1 step 1 until m do
            for j:=1 step 1 until n do
            B[i,j]:=A[i,j]
        end;
        procedure store(A,A3,m,n);value m,n;array A,A3;integer m,n;
        begin integer i,j;
            for i:=1 step 1 until n do
            for j:=1 step 1 until n do
            A3[i,j,m]:=A[i,j]
        end;
        comment Sekularekvationens koefficienter beräknas ur Newtons
        identiteter och skrivs ut.Matriserna A,A↑2,...A↑n lagras i A3;
        slask(A,R,n,n); S[1]:=spår(R,n);
        for i:=1 step 1 until n-1 do
        begin store(R,A3,i,n); mult(A,R,T,n,n,n);
            slask(T,R,n,n); S[i+1]:= spår(T,n)
        end;
        a[1]:= -S[1];
        for k:=2 step 1 until n do
        begin sum:= 0;
            for i:=1 step 1 until k-1 do
            sum:= sum + S[i]×a[k-i];
            a[k]:= -(sum + S[k])/k;
        end;
        for i:=1 step 1 until n do
        begin write({A}); print(1,0,i); print(-5,8,a[i]);punch(1) end;
```

```
        comment Matriserna B1,...Bn beräknas och skrivs ut;
        mult(C,B,R,p,n,r); write(⟨B1⟩);punch(1);skriv(R,p,r);
        for k:= 2 step 1 until n do
        begin for i:= 1 step 1 until n do
                for j:= 1 step 1 until n do
            begin R[i,j]:= A3[i,j,k-1];
                  for l:= 1 step 1 until k-2 do
                  R[i,j]:= R[i,j] + a[l]×A3[i,j,k-l-1];
                  if i=j then R[i,j]:= R[i,j] + a[k-1]
            end;
            mult(C,R,T,p,n,n);mult(T,B,R,p,n,r);
            write(⟨B⟩); print(1,0,k); punch(1); skriv(R,p,r)
        end
    end HEMUL;
    procedure läs(A,m,n); array A; integer m,n;
    comment En matris av typ (m,n)läses in från remsa till fältet A.
    Härvid förutsättes följande stansordning:
    m,n,a11,a21,a31,...,am1,a12,...,am2,......,a1n,...,amn.Antalet rader
    placeras i m och antalet kolonner i n;
    begin integer i,j;
        m:=read; n:=read;
        for j:=1 step 1 until n do
        for i:=1 step 1 until m do
        A[i,j]:=read
    end;
    procedure skriv(a,m,n);value m,n; array a; integer m,n;
    comment Matrisen a av typ (m,n) skrives ut.;
    begin integer i,j;
        for i:= 1 step 1 until m do
        begin for j:= 1 step 1 until n do
            print(-5,8,a[i,j]); punch(1)
        end;punch(1)
    end;

    LÄS:
    läs(A,n,n); läs(B,n,r); läs(C,p,n);
    write(⟨SYSTEMMATRISERNA⟩); punch(1);
    skriv(A,n,n); skriv(B,n,r); skriv(C,p,n);
    HEMUL(A,B,C,n,p,r);
    punch(15); go to LÄS
end
```

Bilaga 1.

Test av proceduren "invers".

Proceduren invers(a,n,eps,singular) testkördes på SMIL med några exempel. Testprogram se sid . . .
I ex.1 och ex.2 är resultaten korrekta med minst 6 signifikanta siffror. Matriserna i ex.3 resp. ex.4 är båda singulära. I ex.3 har korrekt skett utskriften "Matrisen singulår". I ex.4 däremot har en "invers" skrivits ut. Detta beror på att "nytt försök" skett med alltför lågt värde på variabeln "test". Slutsatsen blir alltså att inverteringar i programmet "Normalform 1 och 2", där "test" getts ett värde som alltför mycket underskrider standardvärdet 10^{-5}, ger tvivelaktiga resultat.

```
begin comment Test av invers;
   integer i,j,l,n;real eps,matrisnorm,test;
   array A[1:30,1:30];
   real procedure norm(A,n);array A;integer n;
   comment Proceduren beräknar den minsta av maximumnormerna
   för matrisen A av typ(n,n) och dess transponat.;
   begin real radsum,kolsum,radmax,kolmax; integer i,j;
       radsum:=kolsum:=radmax:=kolmax:=0;
       for i:=1 step 1 until n do
       begin for j:=1 step 1 until n do
           radsum:=radsum+abs(A[i,j]);
           if radsum>radmax then radmax:=radsum;radsum:=0
       end;for j:=1 step 1 until  n do
       begin for i:=1 step 1 until n do
           kolsum:=kolsum + abs(A[i,j]);
           if kolsum>kolmax then kolmax :=kolsum;kolsum:=0
       end;if radmax > kolmax then norm:=kolmax else norm:=radmax
   end;;
```

```
procedure invers(a,n,eps,singular); value n; array a;
integer n; real eps; label singular;
comment Inverterar matrisen a av ordning n med Gauss-Jordans metod.
Matrisen a blir förstörd då inversen bildas utan extra fält. Vid
varje steg användes det abs. största elementet som pivoelement.
Index för succesiva pivoelement placeras i vektorerna r och c,
vilka sedan användes för återpermutering. Om något pivoelement
är mindre än eps går proceduren till läge singular i huvudprogrammet.
Då uthopp till singular sker tilldelas eps värdet av det pivotelement
som orsakade uthoppet.Proceduren kombinerar Algorithm 230 och
Algorithm 231 ur Collected Algorithms from CACM.Den utnyttjas av
proceduren normal;
begin integer i,j,k,l,pivi,pivj,p; real pivot; integer array r,c[1:30];
    for i:=1 step 1 until n do r[i]:=c[i]:=i;
    comment sök startvärde för pivot; pivi:=pivj:=1;
    for i:=1 step 1 until n do for j:=1 step 1 until n do
    if abs(a[i,j])>abs(a[pivi,pivj]) then
    begin pivi:=i; pivj:=j end;
comment start lösning;
    for i:=1 step 1 until n do
    begin l:=r[i]; r[i]:=r[pivi]; r[pivi]:=l; l:=c[i];c[i]:=c[pivj]; c[pivj]:=l;
        if eps>abs(a[r[i],c[i]]) then begin eps:=abs(a[r[i],c[i]]);
        go to singular end;
        for j:=n step -1 until i+1,i-1 step -1 until 1 do
        a[r[i],c[j]]:=a[r[i],c[j]]/a[r[i],c[i]];
        a[r[i],c[i]]:=1/a[r[i],c[i]];
        pivot:=0;
        for k:=1 step 1 until i-1,i+1 step 1 until n do
        begin for j:=n step -1 until i+1,i-1 step -1 until 1 do
            begin  a[r[k],c[j]]:=a[r[k],c[j]]-a[r[i],c[j]]×a[r[k],c[i]];
                if k>i^j>i^abs(a[r[k],c[j]])>abs(pivot) then
                begin pivi:=k; pivj:=j; pivot:=a[r[k],c[j]] end test
            end j loop;
            a[r[k],c[i]]:=-a[r[i],c[i]]×a[r[k],c[i]];
        end k loop;
    end i loop och lösning;
    comment start återpermutation av rader för z=1 och av kolonner för z=2;
    begin  integer array tag, loc[1:30]; integer z,i,t; real w;
        for z:=1,2 do
        begin for i:=1 step 1 until n do tag[i]:=loc[i]:=i;
            for i:=1 step 1 until n do
            begin if z=1 then
                begin t:=r[i]; j:=loc[t]; k:=c[i] end
                else begin t:=c[i]; j:=loc[t]; k:=r[i] end;
                if j≠k then
                begin for p:=1 step 1 until n do
                    begin if z=1 then
                        begin w:=a[j,p]; a[j,p]:=a[k,p]; a[k,p]:=w end
                        else begin w:=a[p,j]; a[p,j]:=a[p,k]; a[p,k]:=w end
                    end p loop;
                    tag[j]:=tag[k]; tag[k]:=t;
                    loc[t]:=loc[tag[j]]; loc[tag[j]]:=j
                end j,k test
            end i loop
        end z loop
    end permutation
end invers;;
```

```
LÄS: En matris stansad kolonnvis läses in:
    n:= read;
    for i:= 1 step 1 until n do
    for j:= 1 step 1 until n do
    A[i,j]:= read;
    l:= 0; punch(15);
    write(⟨URSPRUNGLIG,MATRIS⟩);
    punch(1); punch(1);
SKRIV:for j:= 1 step 1 until n do
    begin for i:= 1 step 1 until n do
        print(-4,8,A[i,j]);
        punch(1)
    end; punch(1);
    if l=1 then go to LÄS;
    matrisnorm:= norm(A,n);
    test:=₁₀-5;
INVERS: eps:= test×matrisnorm;
    invers(A,n,eps,SINGULAR);
    l:=1; write(⟨INVERS⟩);
    punch(1); punch(1);
    go to SKRIV;
SINGULAR:  write(⟨FÖR,LITET,PIVOTELEMENT⟩); punch(1);
    write(⟨TEST=⟩); print(-1,2,test); punch(1);
    write(⟨MATRISNORM=⟩); print(-1,2,matrisnorm);punch(1);
    write(⟨PIVOTELEMENT=⟩); print(-1,2,eps); punch(1);
    if test>₁₀-10^eps>0 then
    begin test:= eps/2/matrisnorm;
        write(⟨NYTT,FÖRSÖK:,TEST=⟩);
        print(-1,2,test); punch(1); punch(1);
        go to INVERS
    end;
    write(⟨MATRISEN,SINGULÄR⟩);
    go to LÄS
end
```

OBS! utgår

Bilaga 2.

Test av proceduren "sekular".

Proceduren sekular(A,n,a) bestämmer koefficienterna i sekularekvationen för matriden A av ordningen n. Koefficienterna placeras i vektorn a och sekularekvationen ges sedan av

$x^n + a[1].x^{n-1} + \ldots + a[n] = 0$

Metoden baseras på de s.k. Newtonska identiteterna. Se ref( ).. Beräkningen av a[k] kräver bildandet av A^2, A^3,... A^k, dvs k st matrismultiplikationer. Vid matriser av högre ordning kan därför avrundningsfel orsaka felaktiga resultat. Främsta anledningen till detta är att vid bildandet av "skalärprodukten" mellan en rad i matrisen A och en kolonn i matrisen A^{k-1} för beräkningen av ett element i A^k sker avrundning n + 1 gånger, en gång vid varje multiplikation och en gång vid bildandet av slutsumman. Detta går inte att undvika i ALGOL, men vid maskinkodning kan dubbel precision användas vid bildandet av "skalärprodukten" och resultatet härigenom förbättras.

Testprogram, se sid . Tre testexempel, ex. 5,6,7 har körts på SMIL. Många element i matrisen i ex.5 är noll, vilket förklarar det goda resultatet, alla 8 decimalerna korrekta. I ex.6 fås 5 korrekta decimaler. I ex.7 demonstreras verkan av de succesiva matrismultiplikationerna, a[1] fås med 8 korrekta decimaler, a[2] med 6 och a[3] med endast 1 riktig decimal.

ersätter föreg. sida.

Bilaga 2.

Test av proceduren "sekular".

Proceduren sekular(A,n,a) bestämmer koefficienterna i sekularekvationen för matrisen A av ordningen n. Koefficienterna placeras i vektorn a och sekularekvationen ges vid uthoppet av

$$x^n + a[1].x^{n-1} + \ldots + a[n] = 0$$

Metoden baseras på de s.k. Newtonska identiteterna. Se ref(2). Beräkningen av a n kräver bildandet av A^2, A^3,... A^n. Antalet utförda multiplikationer är alltså i stort sett n^4 (i A^n behövs endast diagonalelementen). Med hänsyn främst till ökande avrundningsfel blir ~~med~~ metoden lämplig främst för matriser av lägre gradtal.

Testprogram, se sid . Tre testexempel , ex. 5,6,7 har körts på SMIL. Många element i matrisen i ex.5 är noll, vilket förklarar det goda resultatet, alla koefficienterna med 8 korrekta decimaler. I ex.6 fås 5 korrekta decimaler. I ex. 7 fås a[1] med 8 korrekta decimaler, a[2] med 6 och a[3] med endast 1 riktig decimal. Den avtagande noggrannheten beror på att koefficienterna erhålles genom rekursiv lösning av ett ekvationssystem, där värdet av a[i] beror på $A, A^2, \ldots A^i$.

Bilaga 3.

Test av proceduren "BAIRSTOW"

I litteraturen anges ofta Bairstows metod som lämplig för lösning av algebraiska ekvationer med reella koefficienter. Komplexa rötter förekommer parvis konjugerade och svarar mot faktorer $x^2 + p.x + q$, där p och q är reella. En procedur "BAIRSTOW" som kombinerar Fröbergs behandling av Bairstows metod (ref.2) med Algoritm 3, ref.3, har skrivits och testats. Testprogram se sid... Programmet förutsätter vid inläsningen stansordningen $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Den ekvation som löses är då:
$x^n + a_1.x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$

Genom inläsning av n=0 kan ett antal parametrar ges önskade värden, nämligen eps0, eps1, eps2, eps3, N, pstart, qstart. eps0 är minsta värde för determinanten i det ekvationssystem som ger ~~xxxxxxxx~~ de succesiva förbättringarna i p och q. eps1, eps2, eps3 och N är testkvantiteter som avgör när uthopp ur resp. iterationsloop skall ske. Utskrift sker, under rubriken "EXIT", av vilket villkor som uppfyllts, enl. följande:

1) abs(R)<eps1 och abs(S)<eps1 (R.x + s är den rest som erhålls vid division med $x^2 + p.x + q$)
2) abs(dp)<eps2 och abs(dq)<eps2 (dp och dq är de sist funna korrektionerna till p och q).
3) abs(dp)/(abs(p)+0.001)<eps3 och abs(dq)/(abs(q)+0.001)<eps3 (För att undvika division med 0 har talet 0.001 lagts till)
4) Antalet iterationer är N. Härvid sker uthopp och inget försök görs att finna ev. kvarvarande rötter.

pstart och qstart är startvärden för p och q vid varje iterationsloop. Standardvärden bör vara 0, ty störst noggrannhet fås om rötterna erhålls i ordning med stigande absolutbelopp. Vill man ha maximal noggrannhet går man tillbaks med varje funnet par p, q och itererar med resp. par som startvärden i det ursprungliga polynomet. Funnes möjlighet till ~~xxxxx~~ räkning med multipel precision i detta moment skulle noggrannheten naturligtvis förbättras ytterligare.

En viss kontroll på erhållen noggrannhet ~~xxxxxx~~ fås genom att de funna faktorerna multipliceras ihop. Det så erhållna polynomet skrivs ut och bör alltså överensstämma med det ursprungliga.

Om särskilda parametervärden inte läses in används standard-

~~xäxdexxxepsOx10x12x,epsix~~

```
begin comment test av proceduren sekular;
    integer i,j,n;array A[1:10,1:10], a[1:10];
    procedure sekular(A,n,a);value n;integer n;array A,a;
    comment Proceduren sekular(A,n,a) bestämmer koefficienterna i sekular-
    ekvationen för matrisen A av ordningen n. Koefficienterna placeras i
    vektorn a, och sekularekvationen ges sedan av : x↑n + a[1]×x↑(n-1)+.....
    .....+ a[n] = 0.Metoden baseras på de s.k. Newtonska identiteterna.Se
    Fröberg:Lärobok i numerisk analys;
    begin integer i,k;real sum;array B,C[1:10,1:10],S[1:10];
        real procedure spår(A,n);value n;array A;integer n;
        begin integer i;real sum;
            sum:=0;
            for i:=1 step 1 until n do
            sum:=sum + A[i,i];
            spår:=sum
        end;
        procedure mult(A,B,C,m,n,p);value m,n,p;array A,B,C;integer m,n,p;
        comment Proceduren multiplicerar matrisen A av typ(m,n) med matrisen
        B av typ (n,p). Den resulterande matrisen av typ (m,p) placeras i C.;
        begin integer i,j,k;real sum;
            for i:=1 step 1 until m do
            for k:=1 step 1 until p do
            begin sum:=0;
                for j:=1 step 1 until n do
                sum:=sum + A[i,j]×B[j,k];
                C[i,k]:=sum;
            end
        end;
        procedure slask(A,B,m,n);value m,n;array A,B;integer m,n;
        begin integer i,j;
            for i:=1 step 1 until m do
            for j:=1 step 1 until n do
            B[i,j]:=A[i,j]
        end;

        slask(A,B,n,n); S[1]:=spår(B,n);
        for i:=1 step 1 until n-1 do
        begin mult(A,B,C,n,n,n); slask(C,B,n,n); S[i+1]:=spår(C,n) end;
        a[1]:= -S[1];
        for k:= 2 step 1 until n do
        begin  sum:=0;
            for i :=1 step 1 until k-1 do
            sum:= sum + S[i]×a[k-i];
            sum:= -(sum+ S[k])/k;
            a[k]:= sum
        end k-loop;
    end proceduren sekular;
    comment Nu börjar programmet.Matrisen A stansad kolonnvis läses in;
LÄS:n:=read;
    for j:=1 step 1 until n do
    for i:=1 step 1 until n do
    A[i,j]:=read;
    write(⟨MATRISEN,A⟩); punch(1);
    for i:=1 step 1 until n do
    begin for j:=1 step 1 until n do
        print(-5,8,A[i,j]);punch(1);
    end;
    punch(1);
    sekular(A,n,a);
    write(⟨SEKULAREKVATIONENS,KOEFFICIENTER⟩);punch(1);
    for i:=1 step 1 until n do
    begin write(⟨A⟩); print(1,0,i); space(3);
        print(-2,8,a[i]);punch(1)
    end;
   punch(15); go to LÄS
end
```

värden, eps0= 10^{-12}, eps1=eps2=eps3= 10^{-10}, N = 20, pstart= = qstart = 0. De flesta körningarna har gjorts med dessa värden.

Lämpliga värden på eps0, eps1, eps2 och eps3 beror dels på det ~~erkåtix~~ aktuella polynomet(koefficienternas storlek, rötternas lägen), dels på den använda datamaskinens ordlängd.

I flytande räkning representeras ett tal på formen $p = m \cdot 2^e$. I SMIL representeras m med 31 bitar. Detta innebär att om

$$\frac{dp}{|m|} < 2^{-31}$$

så representeras p och p + dp som samma tal. Man bör alltså välja eps3 så att det testas om

$$\text{abs}(dp)/\text{abs}(p) < 2^{-31} \leq \text{eps3} \; .$$

$2^{-31} \leq 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ varför man lämpligen väljer eps 3 = $5 \cdot 10^{-10}$.

Testexempel

Följande ekvationer löstes, alla hämtade ur ref3, "Certifications", sid 3P1, 3P2, 3P3.

$x^4-3x^3+20x^2+44x+54= 0$

$x^6-2x^5+2x^4+x^3+6x^2-6x+8 =0$

$x^5+x^4-8x^3-16x^2+7x+15 = 0$

$x^6-14x^4+49x^2-36 = 0$

$x^8-30x^6+273x^4-820x^2+576 = 0$

Resultatet för den sista ekv. se ex.31. I inget fall erhölls sämre noggrannhet än de i "Certifications".

Multipla rötter och rötter som ligger tätt samlade ger konvergenssvårigheter. I ex.32 löses ekv. $(x+1)^3= 0$ och i ex.33 ekv. $(x+1)^4= 0$.

```
begin comment Test av BAIRSTOW; integer i,n,m,N; real eps0,eps1,eps2,
    eps3,pstart,qstart;array A[1:20],P,Q,EX[1:10];
    procedure BAIRSTOW(n,A,eps0,eps1,eps2,eps3,N,pstart,qstart,
    m,P,Q,EX); value n,eps0,eps1,eps2,eps3,N,pstart,qstart;
    integer n,N,m; real eps0,eps1,eps2,eps3,pstart,qstart;
    array A,P,Q,EX;
    comment Proceduren söker rötter till ekvationen x↑n + A[1]×x↑(n-1)+..
    ..+ A[n] =0 med Bairstows metod.Se Fröberg:Lärobok i numerisk analys
    och Algoritm 3 ur Collected Algorithms from CACM. Rötterna fås parvis
    som faktorer x↑2+p×x+q. Vid uthoppet innehåller m antalet funna rotpar,
    P[i] och Q[i] det i:te paret p,q. EX[i] anger vilket villkor som upp-
    fylldes då motsvarande iteration avbröts.EX[i]= 1,2 resp.3: se senare
    delen av procedurkroppen.(R×x+S är den rest som erhålls vid division med
    x↑2+p×x+q, dp och dq är de sist funna korrektionerna till p och q).
    EX[i]=4 om antalet iterationer är N. Härvid sker uthopp och inga försök
    görs att finna ev. kvarvarande rötter.
    eps0 är minsta värde för determinanten i det ekv.syst. som ger dp och dq,
    pstart och qstart är startvärden vid iterationerna;
    begin integer i,j; array B,C[-1:20]; real det,R,S,p,q,dp,dq;
        B[0]:=C[0]:=1; B[-1]:=C[-1]:=0; j:=0; m:=1;
        i:=2×entier((n+1)/2);
        if n<i then begin n:=n+1; A[n]:=0 end;
    L1: p:=pstart; q:=qstart;
    L2: if j=N then begin EX[m]:=4; go to L4 end;
        j:=j+1;
        for i:=1 step 1 until n do
        B[i]:=A[i]-p×B[i-1]-q×B[i-2];
        for i:=1 step 1 until n do
        C[i]:=B[i]-p×C[i-1]-q×C[i-2];
        R:=B[n-1]; S:=B[n]+p×B[n-1];
        print(6,10,p);print(q);print(R);print(S);punch(1);
        det:=C[n-2]↑2-C[n-3]×(C[n-1]-B[n-1]);
        if abs(det)<eps0 then
        begin p:=p+1; q:=q+1; go to L2 end;
        dp:=(B[n-1]×C[n-2]-C[n-3]×B[n])/det;
        dq:=(B[n]×C[n-2]-B[n-1]×(C[n-1]-B[n-1]))/det;
        p:=p+dp; q:=q+dq;
        if abs(R)<eps1 then
        begin if abs(S)<eps1 then
            begin EX[m]:=1; go to L3 end
        end;
        if abs(dp)<eps2 then
        begin if abs(dq)<eps2 then
            begin EX[m]:=2; go to L3 end
        end;
        if abs(dp)/(abs(p)+0.001)<eps3 then
        begin if abs(dq)/(abs(q)+0.001)<eps3 then
            begin EX[m]:=3; go to L3 end
        end;
        go to L2;
    L3: P[m]:=p; Q[m]:=q; m:=m+1;n:=n-2;
        print(6,10,p);print(q); punch(1);punch(1);
        for i:=1 step 1 until n do A[i]:=B[i];
        if n>2 then begin j:=0; go to L1 end;
        P[m]:=A[1]; Q[m]:=A[2]; EX[m]:=1;punch(1);print(6,10,P[m]);
        print(Q[m]);punch(1);punch(1); go to L5;
    L4: P[m]:=p; Q[m]:=q;
    L5:
    end;
```

```
procedureMULT(P,Q,EX,m);value m; integer m;arrayP,Q,EX;
comment Proceduren multiplicerar ihop defunna faktorerna
x↑2+p×x+q och skriver ut koefficienterna i det så erhållna
polynomet;
begin integer i,j,k; arrayC[1:20],F[-1:20]; real p,q;
    if EX[m]=4 then m:=m-1; F[-1]:=0; F[0]:=1;
    for i:=1 step 1 until m do
    begin p:=P[i]; q:=Q[i];k:=2×i; F[k]:=F[k-1]:=0;
        for j:=1 step 1until k do
        C[j]:=F[j]+p×F[j-1]+q×F[j-2];
        for j:=1 step 1 until k doF[j]:=C[j];
    end; punch(1);
    for i:=1 step 1 until 2×m do
    begin write(‹A›);print(1,0,i);print(5,10,F[i]);punch(1) end;
end;
procedure ROT(P,Q,EX,m); value m;integer m; arrayP,Q,EX;
comment Proceduren beräknar nollställena till de i P och Q lagrade
faktorerna.Utskrift av real- och imaginärdel sker;
begin real a,b; integer i;
    punch(1); write(‹RÖTTER›); punch(1); space(8);
    write(‹REALDEL›); space(13); write(‹IMAGINÄRDEL›); space(10);
    write(‹EXIT›); punch(1);
    for i:=1 step 1 until m do
    begin a:=P[i]; b:=Q[i]; b:=a×a-4×b; if b>0 then
        begin b:=sqrt(b)/2; a:= -a/2;
            print(8,10,a+b); space(18);print(11,0,EX[i]);
            punch(1); print(8,10,a-b); punch(1)
        end else
        begin b:=sqrt(-b)/2; a:=-a/2;
            print(8,10,a); print(b);print(11,0,EX[i]);
            punch(1);print(8,10,a);print(-b); punch(1)
        end
    end
end;

L:  n:=read; comment Genom inläsning av n=0 kan ett antal parametrar ges
    önskade värden; if n=0 then
    begin eps0:=read; eps1:=read;eps2:=read;eps3:=read;N:=read;
        pstart:=read; qstart:=read; n:=read
    end else
    begin eps0:=⏨-12; eps1:=eps2:=eps3:=⏨-10; N:=20;pstart:=qstart:=0 end;
    for i:= 1 step 1 until n do
    begin A[i]:=read; write(‹A›);print(1,0,i);print(5,10,A[i]);
        punch(1)
    end;
    write(‹EPS0=›); print(-1,1,eps0);write(‹,EPS1=›); print(eps1);
    write(‹,EPS2=›); print(eps2); write(‹,EPS3=›);print(eps3);
    write(‹,N=›); print(3,0,N); punch(1); punch(1); space(6);
    write(‹P›); space(17); write(‹Q›);space(17);write(‹R›);
    space(17); write(‹S›); punch(1); punch(1);
    BAIRSTOW(n,A,eps0,eps1,eps2,eps3,N,pstart,qstart,m,P,Q,EX);
    ROT(P,Q,EX,m);
    MULT(P,Q,EX,m);
    punch(15); go to L
end
```

ref 1. Åström: Kompendium i Reglerteknik
LTH 1965

ref 2. Fröberg: Lärobok i numerisk analys

ref 3. Collected Algorithms from CACM

Ex. 1.

URSPRUNGLIG MATRIS

5.00000000₁₀+ 0	7.00000000₁₀+ 0	6.00000000₁₀+ 0	5.00000000₁₀+ 0
7.00000000₁₀+ 0	1.00000000₁₀+ 1	8.00000000₁₀+ 0	7.00000000₁₀+ 0
6.00000000₁₀+ 0	8.00000000₁₀+ 0	1.00000000₁₀+ 1	9.00000000₁₀+ 0
5.00000000₁₀+ 0	7.00000000₁₀+ 0	9.00000000₁₀+ 0	1.00000000₁₀+ 1

INVERS

6.80000140₁₀+ 1	-4.10000085₁₀+ 1	-1.70000035₁₀+ 1	1.00000021₁₀+ 1
-4.10000083₁₀+ 1	2.50000051₁₀+ 1	1.00000021₁₀+ 1	-6.00000125₁₀+ 0
-1.70000037₁₀+ 1	1.00000022₁₀+ 1	5.00000092₁₀+ 0	-3.00000055₁₀+ 0
1.00000022₁₀+ 1	-6.00000134₁₀+ 0	-3.00000055₁₀+ 0	2.00000033₁₀+ 0

Exakt:

68	-41	-17	10
-41	25	10	-6
-17	10	5	-3
10	-6	-3	2

(Ur Basic Theorems in Matrix Theory, s.22)

Ex. 2

URSPRUNGLIG MATRIS

3.00000000₁₀+ 0	7.00000000₁₀+ 0	8.00000000₁₀+ 0	1.50000000₁₀+ 1
2.00000000₁₀+ 0	5.00000000₁₀+ 0	6.00000000₁₀+ 0	1.10000000₁₀+ 1
2.00000000₁₀+ 0	6.00000000₁₀+ 0	1.00000000₁₀+ 1	1.90000000₁₀+ 1
4.00000000₁₀+ 0	1.10000000₁₀+ 1	1.90000000₁₀+ 1	3.80000000₁₀+ 1

INVERS

2.50000014₁₀+ 1	-4.10000024₁₀+ 1	1.60000010₁₀+ 1	-6.00000035₁₀+ 0
-1.60000009₁₀+ 1	2.70000016₁₀+ 1	-1.10000006₁₀+ 1	4.00000023₁₀+ 0
1.60000009₁₀+ 1	-2.70000016₁₀+ 1	1.30000006₁₀+ 1	-5.00000023₁₀+ 0
-6.00000033₁₀+ 0	1.00000006₁₀+ 1	-5.00000023₁₀+ 0	2.00000008₁₀+ 0

Exakt:

25	-41	16	-6
-16	27	-11	4
16	-27	13	-5
-6	10	-5	2

(Ur Problemsamling i Numerisk Analys, Lund 1963, Ex. 48)

Ex. 3

URSPRUNGLIG MATRIS

$1.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$	$3.00000000_{10}+0$
$7.00000000_{10}+0$	$8.00000000_{10}+0$	$9.00000000_{10}+0$
$2.00000000_{10}+0$	$4.00000000_{10}+0$	$6.00000000_{10}+0$

FöR LITET PIVOTELEMENT
TEST= $1.00_{10}-5$
MATRISNORM= $1.80_{10}+1$
PIVOTELEMENT= $0.00_{10}+0$
MATRISEN SINGULÄR

Ex. 4

URSPRUNGLIG MATRIS

1.00000000$_{10}$+ 0	9.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$- 1
2.00000000$_{10}$+ 0	8.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$- 1
3.00000000$_{10}$+ 0	7.00000000$_{10}$+ 0	3.00000000$_{10}$- 1

FöR LITET PIVOTELEMENT
TEST= 1.00$_{10}$- 5
MATRISNORM= 1.03$_{10}$+ 1
PIVOTELEMENT= 5.82$_{10}$-11
NYTT FöRSöK: TEST= 2.83$_{10}$-12

INVERS

-5.00000000$_{10}$+ 0	1.50000000$_{10}$+ 0	-9.31322575$_{10}$-10
4.99999999$_{10}$+ 0	5.00000000$_{10}$- 1	-9.31322575$_{10}$-10
-4.00000000$_{10}$+ 1	5.00000001$_{10}$+ 0	-1.00000000$_{10}$+ 1

Den ursprungliga matrisen saknar invers.

Ex 5

MATRISEN A

$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-3$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+3$	$-1.00000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-1.00000000_{10}+2$

SEKULAREKVATIONENS KOEFFICIENTER

A 1	$1.00000000_{10}+2$
A 2	$2.10000000_{10}+3$
A 3	$2.10000000_{10}+5$
A 4	$0.00000000_{10}+0$

Exakt:

A1	100
A2	2100
A3	210000
A4	0

Ex. 6

MATRISEN A

$1.88750000_{10}+1$	$3.62500000_{10}+1$	$-9.08749999_{10}+1$
$2.15000000_{10}+1$	$3.90000000_{10}+1$	$-9.95000000_{10}+1$
$1.38750000_{10}+1$	$2.62500000_{10}+1$	$-6.58749999_{10}+1$

SEKULAREKVATIONENS KOEFFICIENTER

A 1	$7.99999994_{10}+0$
A 2	$1.70000000_{10}+1$
A 3	$1.00000142_{10}+1$

Exakt:

A1	8
A2	17
A3	10

Ex 7

MATRISEN A

$1.00000000_{10}+4$	$0.00000000_{10}+0$	$3.14000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$4.00000000_{10}+0$

SEKULAREKVATIONENS KOEFFICIENTER

A 1	$-1.00050000_{10}+4$
A 2	$5.00008749_{10}+4$
A 3	$-4.01066666_{10}+4$

Exakt:

A1	-10005.00
A2	50000.86
A3	-39996.86

ex 8

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$1.88750000_{10}+1$	$3.62500000_{10}+1$	$-9.08749999_{10}+1$
$2.15000000_{10}+1$	$3.90000000_{10}+1$	$-9.95000000_{10}+1$
$1.38750000_{10}+1$	$2.62500000_{10}+1$	$-6.58749999_{10}+1$

$5.10000000_{10}+1$
$4.00000000_{10}+1$
$2.70000000_{10}+1$

$-2.50000000_{10}-1$	$-5.00000000_{10}-1$	$1.25000000_{10}+0$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA

$-7.99999993_{10}+0$	$1.00000003_{10}+0$	$2.23517418_{10}-8$
$-1.70000000_{10}+1$	$2.98023224_{10}-8$	$1.00000001_{10}+0$
$-9.99999989_{10}+0$	$-1.49011612_{10}-8$	$-7.45058060_{10}-9$

$1.00000066_{10}+0$
$7.00000470_{10}+0$
$1.20000078_{10}+1$

$9.99999761_{10}-1$	$-5.96046448_{10}-8$	$0.00000000_{10}+0$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-8.00000048_{10}+0$	$-1.70001526_{10}+1$	$-1.00000763_{10}+1$
$1.00000024_{10}+0$	$2.81333923_{10}-5$	$1.52587891_{10}-5$
$-6.70552254_{10}-8$	$9.99995709_{10}-1$	$-2.74181366_{10}-6$

$1.00000286_{10}+0$
$-2.38418579_{10}-7$
$0.00000000_{10}+0$

$9.99998957_{10}-1$	$6.99999380_{10}+0$	$1.19999897_{10}+1$

ex 9

```
URSPRUNGLIGA SYSTEMET
     0.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0    -2.00000000⏨+ 0     1.00000000⏨- 3
     0.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0     1.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0
     1.00000000⏨+ 3    -1.00000000⏨+ 2     0.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0
     0.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0    -1.00000000⏨+ 2

     1.00000000⏨+ 0
     0.00000000⏨+ 0
     0.00000000⏨+ 0
     0.00000000⏨+ 0

     0.00000000⏨+ 0     1.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0


NORMALFORM 1  ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 1    TEST= 1.00⏨- 5    MATRISNORM 1= 2.10⏨+ 3    PIVOTELEMENTET= 4.76⏨- 4
NYTT FÖRSÖK: TEST= 1.13⏨- 7

SINGULARITET :
INVERSION 2    TEST= 1.00⏨- 5    MATRISNORM 2= 1.00⏨+ 6    PIVOTELEMENTET= 2.00⏨- 2
NYTT FÖRSÖK: TEST= 1.00⏨- 8

SINGULARITET :
INVERSION 2    TEST= 1.00⏨- 8    MATRISNORM 2= 1.00⏨+ 6    PIVOTELEMENTET= 5.00⏨- 6
NYTT FÖRSÖK: TEST= 2.50⏨-12

    -1.00000000⏨+ 2     1.00000000⏨+ 0     1.10389919⏨-11    -1.10389919⏨-13
    -2.09999999⏨+ 3    -8.16944519⏨- 8     1.00000000⏨+ 0    -1.41299097⏨-11
    -2.09999999⏨+ 5     7.62939453⏨- 6     5.96046448⏨- 8     1.00000000⏨+ 0
    -3.51905823⏨- 2     3.51905824⏨- 4    -5.96046448⏨- 6     5.96046448⏨- 8

    -4.65661287⏨-10
    -5.96046448⏨- 8
     1.00000000⏨+ 3
     1.00000000⏨+ 5

     1.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0     0.00000000⏨+ 0


NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 1    TEST= 1.00⏨- 5    MATRISNORM 1= 2.10⏨+ 6    PIVOTELEMENTET= 5.00⏨- 1
NYTT FÖRSÖK: TEST= 1.19⏨- 7

SINGULARITET :
INVERSION 1    TEST= 1.19⏨- 7    MATRISNORM 1= 2.10⏨+ 6    PIVOTELEMENTET= 0.00⏨+ 0
NÅGOT TILLSTÅND EJ KONTROLLERBART
```

a 10

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-2$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$1.00000000_{10}+0$	$-2.91038305_{10}-11$
$-1.55000000_{10}+2$	$3.72529030_{10}-9$	$1.00000000_{10}+0$
$-1.25000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$4.65661287_{10}-10$

$2.00999999_{10}+0$
$5.60599998_{10}+1$
$1.50049999_{10}+2$

$1.00000000_{10}+0$	$1.16415322_{10}-10$	$-3.63797881_{10}-12$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$-1.55000000_{10}+2$	$-1.25000000_{10}+2$
$1.00000000_{10}+0$	$7.45058060_{10}-9$	$3.72529030_{10}-9$
$-2.91038305_{10}-11$	$1.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$1.00000000_{10}+0$
$-8.73114914_{10}-11$
$9.09494702_{10}-12$

$2.01000000_{10}+0$	$5.60600000_{10}+1$	$1.50050000_{10}+2$

ex11

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-3$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 2   TEST= $1.00_{10}-5$ MATRISNORM 2= $1.30_{10}+3$ PIVOTELEMENTET= $8.00_{10}-3$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $3.07_{10}-6$

$-3.10000000_{10}+1$	$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$-1.55000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$
$-1.25000000_{10}+2$	$-7.45058060_{10}-9$	$-2.32830644_{10}-10$

$2.00100000_{10}+0$
$5.60060000_{10}+1$
$1.50005000_{10}+2$

$1.00000000_{10}+0$	$2.91038305_{10}-11$	$-2.00088834_{10}-11$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$-1.55000000_{10}+2$	$-1.25000000_{10}+2$
$1.00000000_{10}+0$	$7.45058060_{10}-9$	$3.72529030_{10}-9$
$-2.91038305_{10}-11$	$1.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$1.00000000_{10}+0$
$-8.73114914_{10}-11$
$9.09494702_{10}-12$

$2.00100000_{10}+0$	$5.60060000_{10}+1$	$1.50005000_{10}+2$

47/2

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-4$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 2   TEST= $1.00_{10}-5$ MATRISNORM 2= $1.30_{10}+4$ PIVOTELEMENTET= $5.00_{10}-2$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $1.92_{10}-6$

SINGULARITET :
INVERSION 2   TEST= $1.92_{10}-6$ MATRISNORM 2= $1.30_{10}+4$ PIVOTELEMENTET= $8.00_{10}-3$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $3.07_{10}-7$

$-3.10000000_{10}+1$	$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$-1.55000000_{10}+2$	$-7.45058060_{10}-9$	$1.00000000_{10}+0$
$-1.25000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$2.00010000_{10}+0$
$5.60005999_{10}+1$
$1.50000500_{10}+2$

$1.00000000_{10}+0$	$2.91038305_{10}-11$	$9.09494702_{10}-12$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$-1.55000000_{10}+2$	$-1.25000000_{10}+2$
$1.00000000_{10}+0$	$7.45058060_{10}-9$	$3.72529030_{10}-9$
$-2.91038305_{10}-11$	$1.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$1.00000000_{10}+0$
$-8.73114914_{10}-11$
$9.09494702_{10}-12$

$2.00010000_{10}+0$	$5.60006000_{10}+1$	$1.50000500_{10}+2$

ex 13

```
URSPRUNGLIGA SYSTEMET
    -1.00000000⏨+ 0      0.00000000⏨+ 0      0.00000000⏨+ 0
     0.00000000⏨+ 0     -5.00000000⏨+ 0      0.00000000⏨+ 0
     0.00000000⏨+ 0      0.00000000⏨+ 0     -2.50000000⏨+ 1

     1.00000000⏨+ 0
     1.00000000⏨+ 0
     1.00000000⏨+ 0

     1.00000000⏨+ 0      1.00000000⏨+ 0      1.00000000⏨- 5


NORMALFORM 1  ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 2   TEST= 1.00⏨- 5   MATRISNORM 2= 1.30⏨+ 5   PIVOTELEMENTET= 5.00⏨- 2
NYTT FÖRSÖK: TEST= 1.92⏨- 7

SINGULARITET :
INVERSION 2   TEST= 1.92⏨- 7   MATRISNORM 2= 1.30⏨+ 5   PIVOTELEMENTET= 8.00⏨- 3
NYTT FÖRSÖK: TEST= 3.07⏨- 8

    -3.10000000⏨+ 1      1.00000000⏨+ 0      2.91038305⏨-11
    -1.55000000⏨+ 2     -7.45058060⏨- 9      1.00000000⏨+ 0
    -1.25000000⏨+ 2     -7.45058060⏨- 9     -2.32830644⏨-10

     2.00001000⏨+ 0
     5.60000599⏨+ 1
     1.50000050⏨+ 2

     1.00000000⏨+ 0      2.91038305⏨-11      9.09494702⏨-12


NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA
    -3.10000000⏨+ 1     -1.55000000⏨+ 2     -1.25000000⏨+ 2
     1.00000000⏨+ 0      7.45058060⏨- 9      3.72529030⏨- 9
    -2.91038305⏨-11      1.00000000⏨+ 0     -4.65661287⏨-10

     1.00000000⏨+ 0
    -8.73114914⏨-11
     9.09494702⏨-12

     2.00001000⏨+ 0      5.60000600⏨+ 1      1.50000050⏨+ 2
```

Ex 14

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-2$	$1.00000000_{10}+0$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$1.00000000_{10}+0$	$-8.73114914_{10}-11$
$-1.55000000_{10}+2$	$-3.72529030_{10}-9$	$1.00000000_{10}+0$
$-1.25000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$2.01000000_{10}+0$
$3.62599999_{10}+1$
$1.30250000_{10}+2$

$1.00000000_{10}+0$	$5.82076609_{10}-11$	$7.27595761_{10}-12$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$-1.55000000_{10}+2$	$-1.25000000_{10}+2$
$1.00000000_{10}+0$	$7.45058060_{10}-9$	$3.72529030_{10}-9$
$-2.91038305_{10}-11$	$1.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$1.00000000_{10}+0$
$-8.73114914_{10}-11$
$9.09494702_{10}-12$

$2.01000000_{10}+0$	$3.62600000_{10}+1$	$1.30250000_{10}+2$

ex 15

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-3$	$1.00000000_{10}+0$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 1   TEST= $1.00_{10}-5$ MATRISNORM 1= $6.26_{10}+2$ PIVOTELEMENTET= $3.08_{10}-3$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $2.46_{10}-6$

$-3.10000000_{10}+1$	$1.00000000_{10}+0$	$1.45519152_{10}-10$
$-1.55000000_{10}+2$	$3.72529030_{10}-9$	$1.00000000_{10}+0$
$-1.25000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$1.16415322_{10}-9$

$2.00100001_{10}+0$
$3.60260001_{10}+1$
$1.30025000_{10}+2$

$1.00000000_{10}+0$	$-2.91038305_{10}-11$	$7.27595761_{10}-12$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$-1.55000000_{10}+2$	$-1.25000000_{10}+2$
$1.00000000_{10}+0$	$7.45058060_{10}-9$	$3.72529030_{10}-9$
$-2.91038305_{10}-11$	$1.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$1.00000000_{10}+0$
$-8.73114914_{10}-11$
$9.09494702_{10}-12$

$2.00100000_{10}+0$	$3.60260000_{10}+1$	$1.30025000_{10}+2$

a 16

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-4$	$1.00000000_{10}+0$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 1 TEST= $1.00_{10}-5$ MATRISNORM 1= $6.26_{10}+2$ PIVOTELEMENTET= $3.08_{10}-4$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $2.46_{10}-7$

SINGULARITET :
INVERSION 2 TEST= $1.00_{10}-5$ MATRISNORM 2= $3.13_{10}+3$ PIVOTELEMENTET= $8.00_{10}-3$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $1.28_{10}-6$

$-3.10000000_{10}+1$	$1.00000000_{10}+0$	$-2.32830644_{10}-10$
$-1.55000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$9.99999999_{10}-1$
$-1.25000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$-1.39698386_{10}-9$

$2.00010000_{10}+0$
$3.60026000_{10}+1$
$1.30002500_{10}+2$

$1.00000000_{10}+0$	$2.91038305_{10}-11$	$0.00000000_{10}+0$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$-1.55000000_{10}+2$	$-1.25000000_{10}+2$
$1.00000000_{10}+0$	$7.45058060_{10}-9$	$3.72529030_{10}-9$
$-2.91038305_{10}-11$	$1.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$1.00000000_{10}+0$
$-8.73114914_{10}-11$
$9.09494702_{10}-12$

$2.00010000_{10}+0$	$3.60026000_{10}+1$	$1.30002500_{10}+2$

et 17

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-5$	$1.00000000_{10}+0$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA

SINGULARITET :
INVERSION 1 TEST= $1.00_{10}-5$ MATRISNORM 1= $6.26_{10}+2$ PIVOTELEMENTET= $3.08_{10}-5$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $2.46_{10}-8$

SINGULARITET :
INVERSION 2 TEST= $1.00_{10}-5$ MATRISNORM 2= $3.13_{10}+4$ PIVOTELEMENTET= $2.08_{10}-1$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $3.33_{10}-6$

SINGULARITET :
INVERSION 2 TEST= $3.33_{10}-6$ MATRISNORM 2= $3.13_{10}+4$ PIVOTELEMENTET= $8.00_{10}-3$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $1.28_{10}-7$

$-3.10000000_{10}+1$	$1.00000000_{10}+0$	$-2.32830644_{10}-10$
$-1.55000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$
$-1.25000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$2.00001000_{10}+0$
$3.60002600_{10}+1$
$1.30000250_{10}+2$

$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$-1.55000000_{10}+2$	$-1.25000000_{10}+2$
$1.00000000_{10}+0$	$7.45058060_{10}-9$	$3.72529030_{10}-9$
$-2.91038305_{10}-11$	$1.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$1.00000000_{10}+0$
$-8.73114914_{10}-11$
$9.09494702_{10}-12$

$2.00001000_{10}+0$	$3.60002600_{10}+1$	$1.30000250_{10}+2$

e418

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

-1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	-5.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	-2.50000000$_{10}$+ 1

1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0

1.00000000$_{10}$- 2	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA

-3.10000000$_{10}$+ 1	1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
-1.55000000$_{10}$+ 2	0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0
-1.25000000$_{10}$+ 2	0.00000000$_{10}$+ 0	-4.65661287$_{10}$-10

2.01000000$_{10}$+ 0
3.23000000$_{10}$+ 1
3.12500000$_{10}$+ 1

1.00000000$_{10}$+ 0	-2.91038305$_{10}$-11	1.81898940$_{10}$-12

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

-3.10000000$_{10}$+ 1	-1.55000000$_{10}$+ 2	-1.25000000$_{10}$+ 2
1.00000000$_{10}$+ 0	7.45058060$_{10}$- 9	3.72529030$_{10}$- 9
-2.91038305$_{10}$-11	1.00000000$_{10}$+ 0	-4.65661287$_{10}$-10

1.00000000$_{10}$+ 0
-8.73114914$_{10}$-11
9.09494702$_{10}$-12

2.01000000$_{10}$+ 0	3.23000000$_{10}$+ 1	3.12500000$_{10}$+ 1

ex 19

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}-3$	$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 1 TEST= $1.00_{10}-5$ MATRISNORM 1= $6.50_{10}+2$ PIVOTELEMENTET= $7.68_{10}-4$
NYTT FÖRSÖK: TEST= $5.91_{10}-7$

$-3.10000000_{10}+1$	$1.00000000_{10}+0$	$2.03726813_{10}-10$
$-1.55000000_{10}+2$	$-3.72529030_{10}-9$	$1.00000000_{10}+0$
$-1.25000000_{10}+2$	$3.72529030_{10}-9$	$4.65661287_{10}-10$

$2.00100000_{10}+0$
$3.20300000_{10}+1$
$3.01250000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$	$-2.91038305_{10}-11$	$9.09494702_{10}-12$

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

$-3.10000000_{10}+1$	$-1.55000000_{10}+2$	$-1.25000000_{10}+2$
$1.00000000_{10}+0$	$7.45058060_{10}-9$	$3.72529030_{10}-9$
$-2.91038305_{10}-11$	$1.00000000_{10}+0$	$-4.65661287_{10}-10$

$1.00000000_{10}+0$
$-8.73114914_{10}-11$
$9.09494702_{10}-12$

$2.00100000_{10}+0$	$3.20300000_{10}+1$	$3.01250000_{10}+1$

ex20

```
URSPRUNGLIGA SYSTEMET
   -1.00000000⏨+ 0      0.00000000⏨+ 0      0.00000000⏨+ 0
    0.00000000⏨+ 0     -5.00000000⏨+ 0      0.00000000⏨+ 0
    0.00000000⏨+ 0      0.00000000⏨+ 0     -2.50000000⏨+ 1

    1.00000000⏨+ 0
    1.00000000⏨+ 0
    1.00000000⏨+ 0

    1.00000000⏨- 4      1.00000000⏨+ 0      1.00000000⏨+ 0


NORMALFORM 1  ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 1   TEST= 1.00⏨- 5   MATRISNORM 1= 6.50⏨+ 2   PIVOTELEMENTET= 7.68⏨- 5
NYTT FÖRSÖK: TEST= 5.91⏨- 8

   -3.10000000⏨+ 1      1.00000000⏨+ 0     -3.49245966⏨-10
   -1.55000000⏨+ 2      0.00000000⏨+ 0      1.00000000⏨+ 0
   -1.25000000⏨+ 2      3.72529030⏨- 9     -1.39698386⏨- 9

    2.00010000⏨+ 0
    3.20030000⏨+ 1
    3.00125000⏨+ 1

    1.00000000⏨+ 0     -2.91038305⏨-11      9.09494702⏨-12


NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA
   -3.10000000⏨+ 1     -1.55000000⏨+ 2     -1.25000000⏨+ 2
    1.00000000⏨+ 0      7.45058060⏨- 9      3.72529030⏨- 9
   -2.91038305⏨-11      1.00000000⏨+ 0     -4.65661287⏨-10

    1.00000000⏨+ 0
   -8.73114914⏨-11
    9.09494702⏨-12

    2.00010000⏨+ 0      3.20030000⏨+ 1      3.00125000⏨+ 1
```

ea21

```
URSPRUNGLIGA SYSTEMET
    -1.00000000⏨+ 0       0.00000000⏨+ 0       0.00000000⏨+ 0
     0.00000000⏨+ 0      -5.00000000⏨+ 0       0.00000000⏨+ 0
     0.00000000⏨+ 0       0.00000000⏨+ 0      -2.50000000⏨+ 1

     1.00000000⏨+ 0
     1.00000000⏨+ 0
     1.00000000⏨+ 0

     1.00000000⏨- 5       1.00000000⏨+ 0       1.00000000⏨+ 0


NORMALFORM 1  ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 1    TEST= 1.00⏨- 5   MATRISNORM 1= 6.50⏨+ 2   PIVOTELEMENTET= 7.68⏨- 6
NYTT FÖRSÖK: TEST= 5.91⏨- 9

    -3.10000000⏨+ 1       1.00000000⏨+ 0       2.03726813⏨-10
    -1.55000000⏨+ 2      -3.72529030⏨- 9       1.00000000⏨+ 0
    -1.25000000⏨+ 2       3.72529030⏨- 9       4.65661287⏨-10

     2.00001000⏨+ 0
     3.20003000⏨+ 1
     3.00012500⏨+ 1

     1.00000000⏨+ 0      -2.91038305⏨-11       9.09494702⏨-12


NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA
    -3.10000000⏨+ 1      -1.55000000⏨+ 2      -1.25000000⏨+ 2
     1.00000000⏨+ 0       7.45058060⏨- 9       3.72529030⏨- 9
    -2.91038305⏨-11       1.00000000⏨+ 0      -4.65661287⏨-10

     1.00000000⏨+ 0
    -8.73114914⏨-11
     9.09494702⏨-12

     2.00001000⏨+ 0       3.20003000⏨+ 1       3.00012500⏨+ 1
```

ex 22

URSPRUNGLIGA SYSTEMET

-1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	-5.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	-2.50000000$_{10}$+ 1

1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0

1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0

NORMALFORM 1 ALLA TILLSTÅND OBSERVERBARA
SINGULARITET :
INVERSION 1 TEST= 1.00$_{10}$- 5 MATRISNORM 1= 2.60$_{10}$+ 1 PIVOTELEMENTET= 0.00$_{10}$+ 0
NÅGOT TILLSTÅND EJ OBSERVERBART

NORMALFORM 2 ALLA TILLSTÅND KONTROLLERBARA

-3.10000000$_{10}$+ 1	-1.55000000$_{10}$+ 2	-1.25000000$_{10}$+ 2
1.00000000$_{10}$+ 0	7.45058060$_{10}$- 9	3.72529030$_{10}$- 9
-2.91038305$_{10}$-11	1.00000000$_{10}$+ 0	-4.65661287$_{10}$-10

1.00000000$_{10}$+ 0
-8.73114914$_{10}$-11
9.09494702$_{10}$-12

2.00000000$_{10}$+ 0	5.60000000$_{10}$+ 1	1.50000000$_{10}$+ 2

Ex 23

SYSTEMMATRISERNA

$-4.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$
$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$

$-5.00000000_{10}+0$
$-1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$

A 1	$4.00000000_{10}+0$	B 1	$-6.00000000_{10}+0$
A 2	$-5.00000000_{10}+0$	B 2	$6.00000000_{10}+0$

Exakt:

A1	4	B1	−6
A2	−5	B2	6

Ex 24

SYSTEMMATRISERNA

$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-3$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+3$	$-1.00000000_{10}+2$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-1.00000000_{10}+2$

$1.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$

$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$

A 1	$1.00000000_{10}+2$	B 1	$0.00000000_{10}+0$
A 2	$2.10000000_{10}+3$	B 2	$0.00000000_{10}+0$
A 3	$2.10000000_{10}+5$	B 3	$1.00000000_{10}+3$
A 4	$0.00000000_{10}+0$	B 4	$1.00000000_{10}+5$

Exakt!

Ex 25

SYSTEMMATRISERNA

-1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	-5.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	-2.50000000$_{10}$+ 1

1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0

1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$- 2

A 1	3.10000000$_{10}$+ 1	B 1	2.01000000$_{10}$+ 0
A 2	1.55000000$_{10}$+ 2	B 2	5.60600000$_{10}$+ 1
A 3	1.25000000$_{10}$+ 2	B 3	1.50050000$_{10}$+ 2

Exakt!

Ex 26

SYSTEMMATRISERNA

$-1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-5.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-2.50000000_{10}+1$

$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$

$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}-4$

A 1	$3.10000000_{10}+1$	B 1	$2.00010000_{10}+0$
A 2	$1.55000000_{10}+2$	B 2	$5.60006000_{10}+1$
A 3	$1.25000000_{10}+2$	B 3	$1.50000500_{10}+2$

Exakt!

Ex 27

SYSTEMMATRISERNA

-1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	-5.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	-2.50000000$_{10}$+ 1

1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0

1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$- 5

A 1	3.10000000$_{10}$+ 1	B 1	2.00001000$_{10}$+ 0
A 2	1.55000000$_{10}$+ 2	B 2	5.60000600$_{10}$+ 1
A 3	1.25000000$_{10}$+ 2	B 3	1.50000050$_{10}$+ 2

Exakt!

Ex28

SYSTEMMATRISERNA

-1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	-2.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	-3.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	-4.00000000$_{10}$+ 0

1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0

1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0

A 1	1.00000000$_{10}$+ 1
A 2	3.50000000$_{10}$+ 1
A 3	5.00000000$_{10}$+ 1
A 4	2.40000000$_{10}$+ 1

B1

1.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$+ 0
1.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$+ 0
0.00000000$_{10}$+ 0	1.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$+ 0
2.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$+ 0	4.00000000$_{10}$+ 0

B 2

9.00000000$_{10}$+ 0	0.00000000$_{10}$+ 0	6.00000000$_{10}$+ 0	1.50000000$_{10}$+ 1
8.00000000$_{10}$+ 0	1.50000000$_{10}$+ 1	7.00000000$_{10}$+ 0	1.50000000$_{10}$+ 1
0.00000000$_{10}$+ 0	7.00000000$_{10}$+ 0	1.30000000$_{10}$+ 1	1.30000000$_{10}$+ 1
1.70000000$_{10}$+ 1	1.50000000$_{10}$+ 1	1.30000000$_{10}$+ 1	3.00000000$_{10}$+ 1

B 3

2.60000000$_{10}$+ 1	0.00000000$_{10}$+ 0	1.10000000$_{10}$+ 1	3.70000000$_{10}$+ 1
1.90000000$_{10}$+ 1	3.30000000$_{10}$+ 1	1.40000000$_{10}$+ 1	3.30000000$_{10}$+ 1
0.00000000$_{10}$+ 0	1.40000000$_{10}$+ 1	2.50000000$_{10}$+ 1	2.50000000$_{10}$+ 1
4.50000000$_{10}$+ 1	3.30000000$_{10}$+ 1	2.50000000$_{10}$+ 1	7.00000000$_{10}$+ 1

B 4

2.40000000$_{10}$+ 1	0.00000000$_{10}$+ 0	6.00000000$_{10}$+ 0	3.00000000$_{10}$+ 1
1.20000000$_{10}$+ 1	2.00000000$_{10}$+ 1	8.00000000$_{10}$+ 0	2.00000000$_{10}$+ 1
0.00000000$_{10}$+ 0	8.00000000$_{10}$+ 0	1.40000000$_{10}$+ 1	1.40000000$_{10}$+ 1
3.60000000$_{10}$+ 1	2.00000000$_{10}$+ 1	1.40000000$_{10}$+ 1	5.00000000$_{10}$+ 1

Ex 29

SYSTEMMATRISERNA

$3.40000000_{10}+2$	$-2.05000000_{10}+2$	$-8.50000000_{10}+1$	$4.80000000_{10}+1$
$4.72000000_{10}+2$	$-2.85000000_{10}+2$	$-1.17000000_{10}+2$	$6.60000000_{10}+1$
$3.98000000_{10}+2$	$-2.38000000_{10}+2$	$-1.00000000_{10}+2$	$5.40000000_{10}+1$
$2.93000000_{10}+2$	$-1.75000000_{10}+2$	$-7.00000000_{10}+1$	$3.50000000_{10}+1$

$1.20000000_{10}+1$	$1.30000000_{10}+1$	$1.10000000_{10}+1$	$2.30000000_{10}+1$
$1.70000000_{10}+1$	$1.80000000_{10}+1$	$1.50000000_{10}+1$	$3.20000000_{10}+1$
$1.40000000_{10}+1$	$1.80000000_{10}+1$	$1.90000000_{10}+1$	$3.30000000_{10}+1$
$1.20000000_{10}+1$	$1.60000000_{10}+1$	$1.90000000_{10}+1$	$3.10000000_{10}+1$

$7.80000000_{10}+1$	$-4.70000000_{10}+1$	$-2.00000000_{10}+1$	$1.20000000_{10}+1$
$-5.80000000_{10}+1$	$3.50000000_{10}+1$	$1.50000000_{10}+1$	$-9.00000000_{10}+0$
$-7.00000000_{10}+0$	$4.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$	$-1.00000000_{10}+0$
$2.00000000_{10}+1$	$-1.20000000_{10}+1$	$-5.00000000_{10}+0$	$3.00000000_{10}+0$

A 1	$1.00000000_{10}+1$
A 2	$3.50000000_{10}+1$
A 3	$5.00000000_{10}+1$
A 4	$2.40000000_{10}+1$

B1

$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$
$1.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$
$2.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+0$	$4.00000000_{10}+0$

B 2

$9.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$6.00000000_{10}+0$	$1.50000000_{10}+1$
$8.00000000_{10}+0$	$1.50000000_{10}+1$	$7.00000000_{10}+0$	$1.50000000_{10}+1$
$0.00000000_{10}+0$	$7.00000000_{10}+0$	$1.30000000_{10}+1$	$1.30000000_{10}+1$
$1.70000000_{10}+1$	$1.50000000_{10}+1$	$1.30000000_{10}+1$	$3.00000000_{10}+1$

B 3

$2.60000000_{10}+1$	$0.00000000_{10}+0$	$1.10000000_{10}+1$	$3.70000000_{10}+1$
$1.90000000_{10}+1$	$3.30000000_{10}+1$	$1.40000000_{10}+1$	$3.30000000_{10}+1$
$0.00000000_{10}+0$	$1.40000000_{10}+1$	$2.50000000_{10}+1$	$2.50000000_{10}+1$
$4.50000000_{10}+1$	$3.30000000_{10}+1$	$2.50000000_{10}+1$	$7.00000000_{10}+1$

B 4

$2.40000000_{10}+1$	$0.00000000_{10}+0$	$6.00000000_{10}+0$	$3.00000000_{10}+1$
$1.20000000_{10}+1$	$2.00000000_{10}+1$	$8.00000000_{10}+0$	$2.00000000_{10}+1$
$0.00000000_{10}+0$	$8.00000000_{10}+0$	$1.40000000_{10}+1$	$1.40000000_{10}+1$
$3.60000000_{10}+1$	$2.00000000_{10}+1$	$1.40000000_{10}+1$	$5.00000000_{10}+1$

Ex. 30

SYSTEMMATRISERNA

$-3.85400000_{10}-4$	$0.00000000_{10}+0$	$5.53799999_{10}-4$	$5.12999999_{10}-5$	$-7.22599999_{10}-3$
$1.93200000_{10}-3$	$0.00000000_{10}+0$	$-3.57899999_{10}-3$	$3.37999999_{10}-7$	$-6.61799999_{10}-1$
$1.94300000_{10}-1$	$0.00000000_{10}+0$	$-3.10200000_{10}-1$	$9.37699998_{10}-7$	$1.84100000_{10}+0$
$2.59900000_{10}-2$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$-4.81299999_{10}-2$	$0.00000000_{10}+0$
$7.01599998_{10}-7$	$0.00000000_{10}+0$	$-1.39800000_{10}-6$	$3.17899999_{10}-8$	$-3.26200000_{10}-4$

$0.00000000_{10}+0$	$8.30199999_{10}-6$	$-5.17699999_{10}-5$
$0.00000000_{10}+0$	$1.25200000_{10}-5$	$4.38999999_{10}-4$
$0.00000000_{10}+0$	$-1.43800000_{10}-2$	$1.21800000_{10}-3$
$4.19199999_{10}-5$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$-3.67999999_{10}-8$	$2.29499999_{10}-7$

$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$
$0.00000000_{10}+0$	$1.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$	$0.00000000_{10}+0$

A 1	$3.59041600_{10}-1$
A 2	$1.50786814_{10}-2$
A 3	$5.16511015_{10}-6$
A 4	$4.91127139_{10}-11$
A 5	$0.00000000_{10}+0$

B1

$0.00000000_{10}+0$	$8.30199999_{10}-6$	$-5.17699999_{10}-5$
$0.00000000_{10}+0$	$1.25200000_{10}-5$	$4.38999999_{10}-4$

B 2

$2.15049599_{10}-9$	$-4.98581430_{10}-6$	$-1.78947614_{10}-5$
$1.41689599_{10}-11$	$5.60016144_{10}-5$	$1.53008137_{10}-4$

B 3

$6.67797487_{10}-10$	$-2.61035416_{10}-7$	$-7.46769626_{10}-7$
$7.53742851_{10}-12$	$2.68273266_{10}-6$	$6.35321341_{10}-6$

B 4

$2.21516427_{10}-13$	$-8.83966323_{10}-11$	$-2.60855387_{10}-10$
$-4.87388505_{10}-13$	$7.15539816_{10}-10$	$1.34689072_{10}-10$

B 5

$6.69929388_{10}-21$	$-1.53856957_{10}-16$	$-2.09034873_{10}-16$
$-1.28433977_{10}-19$	$5.80334790_{10}-15$	$-2.47069165_{10}-15$

Ex. 31

A 1	0.0000000000
A 2	-30.0000000000
A 3	0.0000000000
A 4	273.0000000000
A 5	0.0000000000
A 6	-820.0000000000
A 7	0.0000000000
A 8	576.0000000000

EPS0= 1.0$_{10}$-12 EPS1= 1.0$_{10}$-10 EPS2= 1.0$_{10}$-10 EPS3= 1.0$_{10}$-10 N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	576.0000000000
0.0000000000	-0.7024390245	0.0000000000	124.5493466854
0.0000000000	-0.9621929517	0.0000000000	13.8820962905
0.0000000000	-0.9992709257	0.0000000000	0.2625670433
0.0000000000	-0.9999997206	0.0000000000	0.0001010895
0.0000000000	-1.0000000018	0.0000000000	-0.0000004768
0.0000000000	-1.0000000009	0.0000000000	0.0000000000
0.0000000000	-1.0000000009		
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	-575.9999995231
0.0000000000	-2.3606557361	0.0000000000	-148.4529538154
0.0000000000	-3.5597905442	0.0000000000	-29.7922067642
0.0000000000	-3.9541361201	0.0000000000	-2.7876882553
0.0000000000	-3.9994160253	0.0000000000	-0.0350437164
0.0000000000	-3.9999998938	0.0000000000	-0.0000057220
0.0000000000	-3.9999999888	0.0000000000	0.0000000000
0.0000000000	-3.9999999888		
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	144.0000002384
0.0000000000	-5.7600000016	0.0000000000	33.1776001453
0.0000000000	-8.2212463021	0.0000000000	6.0577332973
0.0000000000	-8.9291315525	0.0000000000	0.5011016130
0.0000000000	-8.9992967844	0.0000000000	0.0049231052
0.0000000000	-8.9999999403	0.0000000000	0.0000004768
0.0000000000	-9.0000000074	0.0000000000	0.0000001192
0.0000000000	-9.0000000223	0.0000000000	0.0000000000
0.0000000000	-9.0000000223		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
1.0000000000		1
-1.0000000000		
1.9999999972		1
-1.9999999972		
3.0000000037		1
-3.0000000037		
3.9999999981		1
-3.9999999981		

A 1	0.0000000000
A 2	-30.0000000000
A 3	0.0000000000
A 4	273.0000000000
A 5	0.0000000000
A 6	-819.9999995231
A 7	0.0000000000
A 8	576.0000000000

Ex 32a

A 1 3.0000000000
A 2 3.0000000000
A 3 1.0000000000
EPS0= $1.0_{10}-12$ EPS1= $1.0_{10}-10$ EPS2= $1.0_{10}-10$ EPS3= $1.0_{10}-10$ N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	1.0000000000	0.0000000000
0.3333333332	0.0000000000	0.2962962961	0.0000000000
0.5555555550	0.0000000000	0.0877914960	0.0000000000
0.7037037047	-0.0000000000	0.0260122945	0.0000000000
0.8024691357	-0.0000000000	0.0077073467	0.0000000000
0.8683127579	0.0000000000	0.0022836584	-0.0000000000
0.9122085091	0.0000000000	0.0006766394	-0.0000000000
0.9414723403	0.0000000000	0.0002004853	-0.0000000000
0.9609815222	-0.0000000000	0.0000594039	0.0000000000
0.9739878154	0.0000000000	0.0000176001	-0.0000000000
0.9826582535	-0.0000000000	0.0000052149	0.0000000000
0.9884384423	0.0000000000	0.0000015451	-0.0000000000
0.9922913848	-0.0000000000	0.0000004573	0.0000000000
0.9948564921	-0.0000000000	0.0000001360	0.0000000000
0.9965697252	-0.0000000000	0.0000000414	0.0000000000
0.9977438366	0.0000000000	0.0000000121	-0.0000000000
0.9985367613	-0.0000000000	0.0000000028	0.0000000000
0.9989717332	-0.0000000000	0.0000000023	0.0000000000
0.9997061635	-0.0000000000	-0.0000000009	0.0000000000
0.9961219341	0.0000000000	0.0000000591	0.0000000000

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		4
-0.9974327529		

a 326

A 1 3.0000000000
A 2 3.0000000000
A 3 1.0000000000

EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀- 9 EPS2= 1.0₁₀- 9 EPS3= 1.0₁₀- 9 N= 40

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	1.0000000000	0.0000000000
0.3333333332	0.0000000000	0.2962962961	0.0000000000
0.5555555550	0.0000000000	0.0877914960	0.0000000000
0.7037037047	-0.0000000000	0.0260122945	0.0000000000
0.8024691357	-0.0000000000	0.0077073467	0.0000000000
0.8683127579	0.0000000000	0.0022836584	-0.0000000000
0.9122085091	0.0000000000	0.0006766394	-0.0000000000
0.9414723403	0.0000000000	0.0002004853	-0.0000000000
0.9609815222	-0.0000000000	0.0000594039	0.0000000000
0.9739878154	0.0000000000	0.0000176001	-0.0000000000
0.9826582535	-0.0000000000	0.0000052149	0.0000000000
0.9884384423	0.0000000000	0.0000015451	-0.0000000000
0.9922913848	-0.0000000000	0.0000004573	0.0000000000
0.9948564921	-0.0000000000	0.0000001360	0.0000000000
0.9965697252	-0.0000000000	0.0000000414	0.0000000000
0.9977438366	0.0000000000	0.0000000121	-0.0000000000
0.9985367613	-0.0000000000	0.0000000028	0.0000000000
0.9989717332	-0.0000000000	0.0000000023	0.0000000000
0.9997061635	-0.0000000000	-0.0000000009	0.0000000000
0.9961219341	0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-0.9961219341		
-1.0001469179	0.0002571457	1
-1.0001469179	-0.0002571457	

A 1 2.9964157696
A 2 2.9928304888
A 3 0.9964147177
A 4 0.0000000000

Ex 35a

A 1 4.0000000000
A 2 6.0000000000
A 3 4.0000000000
A 4 1.0000000000

EPS0= $1.0_{10}-12$ EPS1= $1.0_{10}-10$ EPS2= $1.0_{10}-10$ EPS3= $1.0_{10}-10$ N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	4.0000000000	1.0000000000
0.5555555555	0.1666666666	1.2482853224	0.3467078190
0.9451959696	0.3090328159	0.4060339964	0.1336021716
1.2237882409	0.4353993388	0.1391611844	0.0564437606
1.4260679967	0.5469480287	0.0502981842	0.0250925317
1.5744556430	0.6426609978	0.0190121671	0.0113129670
1.6839838856	0.7221691515	0.0074250065	0.0050697032
1.7651156010	0.7863937136	0.0029629394	0.0022417696
1.8253325168	0.8371568717	0.0011982201	0.0009772908
1.8700757939	0.8766363160	0.0004884163	0.0004207147
1.9033421203	0.9069788940	0.0002000052	0.0001792534
1.9280856745	0.9301005448	0.0000821250	0.0000757622
1.9464980494	0.9476136127	0.0000337772	0.0000318285
1.9601907143	0.9608085690	0.0000138981	0.0000132997
1.9703947342	0.9707361967	0.0000057304	0.0000055473
1.9779899176	0.9781784755	0.0000023600	0.0000023057
1.9834845690	0.9835924035	0.0000009425	0.0000009255
1.9875232959	0.9875859823	0.0000003800	0.0000003734
1.9910932257	0.9911222648	0.0000001900	0.0000001883
1.9937149118	0.9937281380	0.0000000792	0.0000000805

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
-0.9944075495	0.0049123822	4
-0.9944075495	-0.0049123822	

& 33 f

A 1	4.0000000000
A 2	6.0000000000
A 3	4.0000000000
A 4	1.0000000000

EPS0= 1.0$_{10}$-12 EPS1= 1.0$_{10}$- 9 EPS2= 1.0$_{10}$- 9 EPS3= 1.0$_{10}$- 9 N= 40

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	4.0000000000	1.0000000000
0.5555555555	0.1666666666	1.2482853224	0.3467078190
0.9451959696	0.3090328159	0.4060339964	0.1336021716
1.2237882409	0.4353993388	0.1391611844	0.0564437606
1.4260679967	0.5469480287	0.0502981842	0.0250925317
1.5744556430	0.6426609978	0.0190121671	0.0113129670
1.6839838856	0.7221691515	0.0074250065	0.0050697032
1.7651156010	0.7863937136	0.0029629394	0.0022417696
1.8253325168	0.8371568717	0.0011982201	0.0009772908
1.8700757939	0.8766363160	0.0004884163	0.0004207147
1.9033421203	0.9069788940	0.0002000052	0.0001792534
1.9280856745	0.9301005448	0.0000821250	0.0000757622
1.9464980494	0.9476136127	0.0000337772	0.0000318285
1.9601907143	0.9608085690	0.0000138981	0.0000132997
1.9703947342	0.9707361967	0.0000057304	0.0000055473
1.9779899176	0.9781784755	0.0000023600	0.0000023057
1.9834845690	0.9835924035	0.0000009425	0.0000009255
1.9875232959	0.9875859823	0.0000003800	0.0000003734
1.9910932257	0.9911222648	0.0000001900	0.0000001883
1.9937149118	0.9937281380	0.0000000792	0.0000000805
1.9888150990	0.9888705061	0.0000001583	0.0000001552
1.9911361299	0.9911711718	0.0000000745	0.0000000734
1.9927945947	0.9928183453	0.0000000363	0.0000000337
1.9997230414	0.9996972675	0.0000000140	0.0000000149
1.9998008823	0.9997930522	0.0000000065	0.0000000051
2.0024761874	1.0023787450	-0.0000004992	-0.0000004883
2.0013273693	1.0012812502	-0.0000001248	-0.0000001231
2.0005101691	1.0004810392	-0.0000000298	-0.0000000298
1.9999963976	0.9999667471	0.0000000000	0.0000000009
1.9999944893	0.9999805442		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
-0.9962629228		1
-1.0037315664		
-1.0000018011	0.0054452288	1
-1.0000018011	-0.0054452288	

A 1	3.9999980926
A 2	6.0000099800
A 3	4.0000256858
A 4	1.0000137966

& 34

A 1   10.0000000000
A 2   35.0000000000
A 3   50.0000000000
A 4   24.0000000000

EPS0= 1.0_{10}-12 EPS1= 1.0_{10}- 8 EPS2= 1.0_{10}- 8 EPS3= 1.0_{10}- 8 N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	50.0000000000	24.0000000000
1.2326530609	0.6857142858	15.0118968784	7.8807848989
2.0469772499	1.2153956955	4.5017007663	2.7245619595
2.5635262969	1.6102773463	1.2998122051	0.9309626445
2.8554057795	1.8636054210	0.3197642117	0.2657196633
2.9762779381	1.9769134959	0.0465732887	0.0426996895
2.9991955887	1.9992051972	0.0015722886	0.0015146229
2.9999990109	1.9999990183	0.0000019670	0.0000019222
3.0000000093	2.0000000093	0.0000000074	-0.0000000074
3.0000000186	2.0000000149		
6.9999999925	11.9999999478		

RöTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
-0.9999999962		1
-2.0000000223		
-2.9999999664		1
-4.0000000260		

A 1   10.0000000149
A 2   35.0000000596
A 3   50.0000001490
A 4   24.0000000745

&35a

A 1	0.3590415990
A 2	0.0150786814
A 3	0.0000051651
A 4	0.0000000000
A 5	0.0000000000

EPS0= $1.0_{10}-12$ EPS1= $1.0_{10}-10$ EPS2= $1.0_{10}-10$ EPS3= $1.0_{10}-10$ N= 40

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1.0000000000	1.0000000000	-0.3439629175	0.6409635660
0.8621436762	0.6589281423	-0.0761084820	0.2000091612
0.7446329789	0.4393419737	-0.0136019341	0.0623598484
0.6443047136	0.2953669428	-0.0008260059	0.0194489459
0.5586736663	0.1995043491	0.0009469042	0.0060773923
0.4853721400	0.1348139239	0.0007515494	0.0019084040
0.4218109431	0.0905944817	0.0004295313	0.0006054797
0.3649385184	0.0599874751	0.0002323175	0.0001955868
0.3114271967	0.0386821706	0.0001277712	0.0000645518
0.2596389891	0.0242187866	0.0000684178	0.0000214543
0.2125237759	0.0150774059	0.0000330231	0.0000070637
0.1737775248	0.0095919954	0.0000146091	0.0000023256
0.1434343126	0.0062733762	0.0000061987	0.0000007720
0.1199824323	0.0042101779	0.0000025729	0.0000002581
0.1019675283	0.0028946486	0.0000010476	0.0000000866
0.0882477775	0.0020367497	0.0000004158	0.0000000289
0.0779280208	0.0014641354	0.0000001589	0.0000000096
0.0702657367	0.0010714325	0.0000000577	0.0000000031
0.0646194501	0.0007938597	0.0000000198	0.0000000010
0.0604554141	0.0005923572	0.0000000065	0.0000000003
0.0573685700	0.0004435854	0.0000000021	0.0000000001
0.0550701957	0.0003328913	0.0000000007	0.0000000000
0.0533547464	0.0002502787	0.0000000002	0.0000000000
0.0520727458	0.0001885405	0.0000000001	0.0000000000
0.0511139855	0.0001423688		

0.0000000000	0.0000000000	0.0000042863	-0.0000000168
0.0003836392	0.0000153314	0.0000000569	0.0000000020
0.0001615162	0.0000145304	0.0000000155	0.0000000001
0.0001490857	0.0000145312	0.0000000000	-0.0000000000
0.0001490664	0.0000145313		

0.3068197676 -0.0011548438

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
-0.0029563051		1
-0.0481576804		
-0.0000745332	0.0038112614	1
-0.0000745332	-0.0038112614	
0.0037188412		1
-0.3105386088		

A 1	0.3580828197
A 2	0.0147381933
A 3	-0.0000079590
A 4	0.0000000465
A 5	-0.0000000002
A 6	-0.0000000000

E 356

A 1 0.3590415990
A 2 0.0150786814
A 3 0.0000051651
A 4 0.0000000000
EPS0= $1.0_{10}-20$ EPS1= $1.0_{10}-15$ EPS2= $1.0_{10}-10$ EPS3= $1.0_{10}-10$ N= 50

P	Q	R	S
0.0500000000	0.0002000000	-0.0000279733	0.0000001147
0.0496636246	0.0000741893	0.0000001083	0.0000000268
0.0490150737	0.0000413120	0.0000001313	0.0000000066
0.0486918561	0.0000257248	0.0000000323	0.0000000016
0.0485477116	0.0000187830	0.0000000064	0.0000000003
0.0485000233	0.0000164864	0.0000000007	0.0000000000
0.0484933317	0.0000161642	0.0000000000	0.0000000000
0.0484931945	0.0000161576	0.0000000000	0.0000000000
0.0484931945	0.0000161576		
0.3105484046	0.0000030396		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
-0.0003355140		2
-0.0481576804		
-0.0000097881		1
-0.3105386164		

A 1 0.3590415990
A 2 0.0150786813
A 3 0.0000051651
A 4 0.0000000000

36

```
A 1     -3.0000000000
A 2     20.0000000000
A 3     44.0000000000
A 4     54.0000000000
```

EPS0= $1.0_{10}-12$ EPS1= $1.0_{10}-9$ EPS2= $1.0_{10}-9$ EPS3= $1.0_{10}-9$ N= 40

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	44.0000000000	54.0000000000
2.6050000004	2.6999999992	-23.9686701744	-32.1327674686
2.0241711605	2.0405185427	-2.6865302026	-3.3982844389
1.9426946341	1.9551765015	-0.0457795635	-0.0547057781
1.9412783607	1.9537893002	-0.0000138059	-0.0000155657
1.9412779388	1.9537889147	0.0000000373	0.0000000723
1.9412779398	1.9537889165	0.0000000149	-0.0000000009
1.9412779398	1.9537889165		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
-0.9706389699	1.0058075888	2
-0.9706389699	-1.0058075888	
2.4706389699	4.6405331604	1
2.4706389699	-4.6405331604	

```
A 1     -3.0000000000
A 2     20.0000000000
A 3     44.0000000000
A 4     54.0000000000
```

A 1	-2.0000000000
A 2	2.0000000000
A 3	1.0000000000
A 4	6.0000000000
A 5	-6.0000000000
A 6	8.0000000000

EPS0= $1.0_{10}-12$ EPS1= $1.0_{10}-10$ EPS2= $1.0_{10}-10$ EPS3= $1.0_{10}-10$ N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	-6.0000000000	8.0000000000
-1.2222222220	1.3333333330	2.0673000384	-3.2588528133
-1.0146976290	0.9973305300	0.1493623433	0.0094816808
-0.9999706959	0.9999869586	-0.0002800003	0.0001466751
-1.0000000000	0.9999999995	0.0000000009	0.0000000028
-1.0000000000	1.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
-1.0000000000	1.0000000000		
0.0000000000	0.0000000000	2.0000000000	8.0000000000
1.0000000000	1.0000000000	3.0000000000	7.0000000000
3.3333333339	2.3333333339	-28.2592592388	-20.2592592239
2.4389958977	1.8975946167	-7.3035127036	-4.3155831247
2.0526974555	1.8961155358	-1.1823261789	-0.2863069660
1.9988519987	1.9910777173	-0.0308241323	0.0293503549
1.9999979501	1.9999973298	0.0000112504	0.0000258423
2.0000000000	2.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2.0000000000	2.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.5000000000	0.8660254036	1
0.5000000000	-0.8660254036	
-1.0000000000	1.0000000000	1
-1.0000000000	-1.0000000000	
1.5000000000	1.3228756552	1
1.5000000000	-1.3228756552	

A 1	-2.0000000000
A 2	2.0000000000
A 3	1.0000000000
A 4	6.0000000000
A 5	-6.0000000000
A 6	8.0000000000

38

A 1 1.0000000000
A 2 -8.0000000000
A 3 -16.0000000000
A 4 7.0000000000
A 5 15.0000000000

EPS0= $1.0_{10}-12$ EPS1= $1.0_{10}-10$ EPS2= $1.0_{10}-10$ EPS3= $1.0_{10}-10$ N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	15.0000000000	0.0000000000
2.1428571436	0.0000000000	-18.8492890000	0.0000000000
1.5432024002	0.0000000000	-7.5859555602	0.0000000000
0.9544048453	0.0000000000	0.7376314699	0.0000000000
0.9995177327	0.0000000000	0.0077172145	0.0000000000
0.9999999422	0.0000000000	0.0000009239	0.0000000000
1.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1.0000000000	0.0000000000		

0.0000000000	0.0000000000	-8.0000000000	15.0000000000
1.0000000000	-1.8750000000	-4.7500000000	5.3906250000
-6.6272727288	5.2670454531	160.2442725896	-146.4544224739
-5.0458129607	3.8470437880	41.2781200706	-37.3705173730
-4.2532394006	3.1711890995	7.9397257715	-6.9410016536
-4.0190055556	3.0051149185	0.6094164997	-0.4682001695
-4.0000883713	2.9998619407	0.0041092560	-0.0018447171
-3.9999999981	2.9999999776	0.0000001118	0.0000000894
-4.0000000000	3.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
-4.0000000000	3.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-1.0000000000		
3.0000000000		1
1.0000000000		
-2.0000000000	1.0000000000	1
-2.0000000000	-1.0000000000	

A 1 1.0000000000
A 2 -8.0000000000
A 3 -16.0000000000
A 4 7.0000000000
A 5 15.0000000000
A 6 0.0000000000

```
A 1      0.0000000000
A 2    -14.0000000000
A 3      0.0000000000
A 4     49.0000000000
A 5      0.0000000000
A 6    -36.0000000000
```

EPS0= 1.0$_{10}$-12 EPS1= 1.0$_{10}$-10 EPS2= 1.0$_{10}$-10 EPS3= 1.0$_{10}$-10 N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	-36.0000000000
0.0000000000	-0.7346938773	0.0000000000	-7.1602818667
0.0000000000	-0.9729894869	0.0000000000	-0.6562972664
0.0000000000	-0.9996721209	0.0000000000	-0.0078702867
0.0000000000	-0.9999999511	0.0000000000	-0.0000011623
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298
0.0000000000	-1.0000000009	0.0000000000	0.0000000298
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298
0.0000000000	-1.0000000009	0.0000000000	0.0000000298
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298
0.0000000000	-1.0000000009	0.0000000000	0.0000000298
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298
0.0000000000	-1.0000000009	0.0000000000	0.0000000298
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298
0.0000000000	-1.0000000009	0.0000000000	0.0000000298
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298
0.0000000000	-1.0000000009	0.0000000000	0.0000000298
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298
0.0000000000	-1.0000000009	0.0000000000	0.0000000298
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
1.0000000000		4
-1.0000000000		

40

```
A 1      0.0000000000
A 2    -14.0000000000
A 3      0.0000000000
A 4     49.0000000000
A 5      0.0000000000
A 6    -36.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀- 8 EPS2= 1.0₁₀- 8 EPS3= 1.0₁₀- 8 N=  40
```

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	-36.0000000000
0.0000000000	-0.7346938773	0.0000000000	-7.1602818667
0.0000000000	-0.9729894869	0.0000000000	-0.6562972664
0.0000000000	-0.9996721209	0.0000000000	-0.0078702867
0.0000000000	-0.9999999511	0.0000000000	-0.0000011623
0.0000000000	-0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000298
0.0000000000	-1.0000000009		
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	36.0000000000
0.0000000000	-2.7692307699	0.0000000000	7.6686390489
0.0000000000	-3.7969865184	0.0000000000	1.0562818944
0.0000000000	-3.9923762008	0.0000000000	0.0381771326
0.0000000000	-3.9999884143	0.0000000000	0.0000579357
0.0000000000	-4.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.0000000000	-4.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
1.0000000000		2
-1.0000000000		
2.0000000000		1
-2.0000000000		
3.0000000000		1
-3.0000000000		

```
A 1      0.0000000000
A 2    -14.0000000000
A 3      0.0000000000
A 4     49.0000000000
A 5      0.0000000000
A 6    -36.0000000298
```

41

```
A 1      0.0000000000
A 2      0.0000000000
A 3      0.0000000000
A 4    -16.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20

         P                  Q                  R                  S

     0.0000000000       0.0000000000       0.0000000000     -16.0000000000
     1.0000000000       1.0000000000       1.0000000000     -16.0000000000
   -10.0000000000      -5.0000000000    1100.0000000000     509.0000000000
    -6.5476635508      -3.5112149529     326.6912720203     146.8610801696
    -4.2158202342      -2.7167010251      97.8346106410      39.6647727489
    -2.5615922361      -2.6403165832      30.3353690356       8.2963816523
    -1.1622913628      -3.5380849987       9.7947353348       1.2977195382
    -0.0972197196      -4.4235670641       0.8610347877       3.6097556799
    -0.0089482737      -4.0245609357       0.0720264623       0.1974129825
    -0.0000545305      -4.0001147352       0.0004362563       0.0009179101
    -0.0000000016      -4.0000000037       0.0000000125       0.0000000298
    -0.0000000000      -4.0000000000       0.0000000000      -0.0000000000
     0.0000000000      -4.0000000000

RÖTTER
        REALDEL              IMAGINÄRDEL           EXIT
        2.0000000000                               1
       -2.0000000000
       -0.0000000000         2.0000000000            1
       -0.0000000000        -2.0000000000

A 1      0.0000000000
A 2      0.0000000000
A 3     -0.0000000000
A 4    -16.0000000000
```

```
A 1      7.5000000000
A 2     17.5000000000
A 3     12.5000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20
```

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	12.5000000000	0.0000000000
0.7142857140	0.0000000000	3.4620991274	0.0000000000
1.1305872043	0.0000000001	0.8562820469	-0.0000000014
1.3262697141	-0.0000000000	0.1498182044	0.0000000002
1.3782370844	0.0000000000	0.0093690082	-0.0000000001
1.3819475006	-0.0000000000	0.0000462756	0.0000000000
1.3819660097	0.0000000000	0.0000000074	-0.0000000000
1.3819660125	-0.0000000000	-0.0000000074	0.0000000000
1.3819660097	-0.0000000000	0.0000000074	0.0000000000
1.3819660125	-0.0000000000	-0.0000000074	0.0000000000
1.3819660097	-0.0000000000	0.0000000074	0.0000000000
1.3819660125	-0.0000000000	-0.0000000074	0.0000000000
1.3819660097	-0.0000000000	0.0000000074	0.0000000000
1.3819660125	-0.0000000000	-0.0000000074	0.0000000000
1.3819660097	-0.0000000000	0.0000000074	0.0000000000
1.3819660125	-0.0000000000	-0.0000000074	0.0000000000
1.3819660097	-0.0000000000	0.0000000074	0.0000000000
1.3819660125	-0.0000000000	-0.0000000074	0.0000000000
1.3819660097	-0.0000000000	0.0000000074	0.0000000000
1.3819660125	-0.0000000000	-0.0000000074	0.0000000000

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		4
-1.3819660097		

43 a.

A 1   40.0000000000
A 2   599.9899997711
A 3 3999.7999992370
A 4 9999.0000000000
EPS0= 1.0_{10}-12 EPS1= 1.0_{10}- 6 EPS2= 1.0_{10}- 6 EPS3= 1.0_{10}- 6 N= 100

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	3999.7999992370	9999.0000000000
5.5554074048	16.6652777642	1248.2128267288	3466.6947860717
9.4516580179	30.9004205167	406.0039730072	1335.8477802276
12.2374045103	43.5353434979	139.1467914581	564.3449125289
14.2599858716	54.6880619823	50.2903089523	250.8693733215
15.7435863614	64.2565994858	19.0073804855	113.0927705764
16.8385085761	72.2038078904	7.4218673706	50.6712669730
17.6493483483	78.6214878559	2.9607753753	22.3990131318
18.2508823722	83.6914481520	1.1966867446	9.7591299712
18.6974740922	87.6309651732	0.4873104095	4.1969611197
19.0290076583	90.6539201736	0.1991930007	1.7848909385
19.2749334275	92.9509797096	0.0815229416	0.7518836343
19.4569967240	94.6817066669	0.0333309174	0.3139400822
19.5913850367	95.9757130146	0.0135860443	0.1299694741
19.6897742301	96.9320241808	0.0054874420	0.0530767068
19.7614628672	97.6334727406	0.0022001266	0.0214592884
19.8128881156	98.1390771865	0.0008687973	0.0085158740
19.8514839857	98.5196593999	0.0003623962	0.0035701408
19.8828442841	98.8295696377	0.0001754761	0.0017418321
19.9143262058	99.1412517428	0.0001211166	0.0011912531
19.8181761205	98.1894586086	0.0013990402	0.0138485569
19.8575240224	98.5788010358	0.0004558563	0.0045279469
19.8812788426	98.8142997026	0.0001287460	0.0012855269
19.8864010125	98.8654324412	0.0000123978	0.0001015885
19.9542638510	99.5363884568	0.0002126694	0.0021074303
19.7260580509	97.2785482406	0.0079784393	0.0789148347
19.7928517460	97.9392012357	0.0023956299	0.0237041889
19.8375163525	98.3811332583	0.0007266998	0.0071985125
19.8662983775	98.6661180257	0.0002183914	0.0021489929
19.9003951698	99.0031389594	0.0001583099	0.0015711456
23.0973967313	130.6306988000	-31.8115119934	-314.7074489593
22.0412984043	120.1828466057	-9.4250259399	-93.2406560182
21.3373234570	113.2185064554	-2.7921810150	-27.6227057874
20.8681508302	108.5770416259	-0.8270130157	-8.1815493106
20.5555912256	105.4849184751	-0.2448310852	-2.4220672622
20.3476372808	103.4277058243	-0.0723705292	-0.7159469630
20.2097259610	102.0634438991	-0.0213060379	-0.2107939603
20.1185249835	101.1610075235	-0.0062208176	-0.0615474114
20.0593054890	100.5749126076	-0.0017633438	-0.0174423750
20.0238311290	100.2240186929	-0.0004529953	-0.0044701765
20.0074683874	100.0629302263	-0.0000972748	-0.0009696596
20.0005050301	99.9934341907	-0.0000019073	-0.0000228891
20.0003388673	99.9914841055	0.0000009537	0.0000038150
20.0003875941	99.9915570616	-0.0000038147	-0.0000152603
20.0002097934	99.9913424253	0.0000019073	0.0000076298
20.0003392547	99.9916429519	0.0000009537	0.0000038150
20.0003885924	99.9917125701	-0.0000038147	-0.0000152603
20.0002091079	99.9915129542	0.0000028610	0.0000038153
20.0003822445	99.9910218119	-0.0000038147	-0.0000076309
20.0002335757	99.9914910793	0.0000019073	0.0000076298
20.0003576278	99.9917526245	-0.0000028610	-0.0000114451
20.0002139061	99.9915730953	0.0000028610	0.0000038153
20.0003853142	99.9910598993	-0.0000038147	-0.0000076309
20.0002373754	99.9915382266	0.0000028610	0.0000038154
20.0003961026	99.9910010099	-0.0000038147	-0.0000076309
20.0002518743	99.9914754033	0.0000019073	0.0000076299
20.0003702193	99.9917120933	-0.0000038147	-0.0000152602

43 b.

20.0001840591	99.9914874434	0.0000028610	0.0000038152
20.0003716647	99.9910475611	-0.0000038147	-0.0000076308
20.0002193748	99.9915141463	0.0000019073	0.0000076298
20.0003483742	99.9917967915	-0.0000038147	-0.0000152601
20.0001522898	99.9915471673	0.0000028610	0.0000038151
20.0003635287	99.9911680221	-0.0000038147	-0.0000076308
20.0002075731	99.9916517138	0.0000019073	0.0000076298
20.0003430247	99.9919514060	0.0000019073	0.0000076300
20.0004434734	99.9920727610	-0.0000038147	-0.0000152605
20.0002780258	99.9919725060	0.0000028610	0.0000038155
20.0004221498	99.9912791848	-0.0000038147	-0.0000152604
20.0002585798	99.9910841584	0.0000009537	0.0000114443
20.0003377646	99.9920226931	0.0000019073	0.0000076300
20.0004399865	99.9921445250	-0.0000028610	-0.0000114453
20.0003145486	99.9920729994	0.0000019073	0.0000076300
20.0004227906	99.9922132492	-0.0000038147	-0.0000152604
20.0002492070	99.9921085834	0.0000019073	0.0000076299
20.0003771632	99.9923253059	-0.0000038147	-0.0000152602
20.0001851469	99.9921801090	0.0000028610	0.0000038152
20.0003861933	99.9915366768	-0.0000028610	-0.0000114452
20.0002526789	99.9913730621	0.0000019073	0.0000076299
20.0003694742	99.9916112422	-0.0000038147	-0.0000152602
20.0001844763	99.9913765788	0.0000019073	0.0000076297
20.0003235787	99.9917212724	0.0000009537	0.0000038150
20.0003749579	99.9917959570	-0.0000038147	-0.0000152602
20.0001893937	99.9915859103	0.0000028610	0.0000038152
20.0003755539	99.9911119937	-0.0000038147	-0.0000076308
20.0002240985	99.9915935397	0.0000028610	0.0000038153
20.0003902912	99.9910603165	-0.0000038147	-0.0000076309
20.0002439022	99.9915419220	0.0000028610	0.0000038154
20.0003995299	99.9909960031	-0.0000047684	-0.0000038166
20.0002384334	99.9921268224	0.0000019073	0.0000076298
20.0003704726	99.9923589229	-0.0000028610	-0.0000114452
20.0002240091	99.9922465682	0.0000019073	0.0000076298
20.0003635883	99.9924966096	-0.0000028610	-0.0000190745
20.0001765638	99.9914029240	0.0000019073	0.0000076297
20.0003192722	99.9917630553	0.0000019073	0.0000076300
20.0004234164	99.9919145703	-0.0000028610	-0.0000114453
20.0002958029	99.9918109178	0.0000019073	0.0000076300
20.0004061609	99.9919837117	-0.0000038147	-0.0000152603
20.0002294629	99.9918333292	0.0000019073	0.0000076298
20.0003600716	99.9920917153	-0.0000028610	-0.0000114451
20.0002132356	99.9919418692	0.0000028610	0.0000038153

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
-9.8880391120		4
-10.1123516112		

Exakt faktorering : $(x+9.9)(x+10)^2(x+10.1)$

A 1 0.3105318439
A 2 0.0001030071
A 3 0.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.0000000302	0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-0.0000000302		
-0.0003320670		1
-0.3101997768		

A 1 0.3105318741
A 2 0.0001030165
A 3 0.0000000000
A 4 0.0000000000

45

```
A 1      0.5319676632
A 2     -0.0343983261
A 3     -0.0000000091
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20
```

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	-0.0000000091	0.0000000000
0.0000002635	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.0000002635	0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-0.0000002635		
0.0582782235		1
-0.5902456231		

```
A 1      0.5319676632
A 2     -0.0343983261
A 3     -0.0000000091
A 4      0.0000000000
```

```
A 1     -0.6005558050
A 2     -0.0314424736
A 3     -0.0000106476
A 4     -0.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20

        P                 Q                 R                 S

        0.0000000000      0.0000000000     -0.0000106476     -0.0000000000
        0.0003386272      0.0000000006     -0.0000000689     -0.0000000000
        0.0003408473      0.0000000006     -0.0000000000     -0.0000000000
        0.0003408474      0.0000000006

RÖTTER
         REALDEL           IMAGINÄRDEL          EXIT
       -0.0000017496                             1
       -0.0003390978
        0.6490266630                             1
       -0.0481300107

A 1     -0.6005558050
A 2     -0.0314424736
A 3     -0.0000106476
A 4     -0.0000000000
```

```
A 1      4.4729723781
A 2      0.2142757704
A 3      0.0000571517
A 4      0.0000000005
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20

         P                   Q                   R                   S

         0.0000000000        0.0000000000        0.0000571517        0.0000000005
         0.0002666753        0.0000000022        0.0000003181        0.0000000000
         0.0002681762        0.0000000022        0.0000000000        0.0000000000
         0.0002681763        0.0000000022

RÖTTER
          REALDEL                IMAGINÄRDEL           EXIT
         -0.0000083733                                 1
         -0.0002598030
         -0.0481577702                                 1
         -4.4245464317

A 1      4.4729723781
A 2      0.2142757707
A 3      0.0000571517
A 4      0.0000000005
```

```
A 1      0.3485378974
A 2      0.0144720123
A 3      0.0000003068
A 4     -0.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20

      P                 Q                 R                 S

      0.0000000000      0.0000000000      0.0000003068     -0.0000000000
      0.0000212095     -0.0000000004      0.0000000002     -0.0000000000
      0.0000212204     -0.0000000004     -0.0000000000      0.0000000000
      0.0000212204     -0.0000000004

RÖTTER
        REALDEL              IMAGINÄRDEL            EXIT
        0.0000117877                                1
       -0.0000330080
       -0.0481577775                                1
       -0.3003588994

A 1      0.3485378974
A 2      0.0144720123
A 3      0.0000003068
A 4     -0.0000000000
```

```
A 1      0.3456589027
A 2      0.0144247561
A 3      0.0000050387
A 4      0.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20

       P                 Q                 R                 S

       0.0000000000      0.0000000000      0.0000050387      0.0000000000
       0.0003493050      0.0000000003      0.0000000421      0.0000000000
       0.0003522755      0.0000000003      0.0000000000      0.0000000000
       0.0003522757      0.0000000003


RÖTTER
         REALDEL              IMAGINÄRDEL          EXIT
        -0.0000008032                              1
        -0.0003514725
        -0.0481300069                              1
        -0.2971766202

A 1      0.3456589030
A 2      0.0144247562
A 3      0.0000050387
A 4      0.0000000000
```

A 1	7.5000000000
A 2	17.5000000000
A 3	12.5000000000

EPS0= $1.0_{10}-12$ EPS1= $1.0_{10}-8$ EPS2= $1.0_{10}-8$ EPS3= $1.0_{10}-8$ N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	12.5000000000	0.0000000000
0.7142857140	0.0000000000	3.4620991274	0.0000000000
1.1305872043	0.0000000001	0.8562820469	-0.0000000014
1.3262697141	-0.0000000000	0.1498182044	0.0000000002
1.3782370844	0.0000000000	0.0093690082	-0.0000000001
1.3819475006	-0.0000000000	0.0000462756	0.0000000000
1.3819660097	0.0000000000	0.0000000074	-0.0000000000
1.3819660125	-0.0000000000		
6.1180339902	9.0450849756		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-1.3819660125		
-2.5000000000		1
-3.6180339884		

A 1	7.5000000037
A 2	17.5000000149
A 3	12.5000000149
A 4	-0.0000000000

```
A 1      7.5000000000
A 2     18.5000000000
A 3     15.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20
```

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	15.0000000000	0.0000000000
0.8108108108	0.0000000000	4.3975677639	0.0000000000
1.3399955574	0.0000000000	1.2709128260	0.0000000000
1.6756093874	-0.0000000001	0.3541745995	0.0000000009
1.8735984247	0.0000000000	0.0891864001	-0.0000000002
1.9697939381	-0.0000000000	0.0164991916	0.0000000001
1.9976005302	-0.0000000000	0.0012083948	0.0000000000
1.9999829381	0.0000000000	0.0000085309	-0.0000000000
1.9999999981	-0.0000000000	0.0000000149	0.0000000000
2.0000000279	-0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2.0000000279	-0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-2.0000000279		
-2.4999999199		1
-3.0000000540		

```
A 1      7.5000000037
A 2     18.5000000000
A 3     15.0000000000
A 4     -0.0000000000
```

```
A 1     6.5000000000
A 2    12.5000000000
A 3     7.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20
```

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	7.0000000000	0.0000000000
0.5600000000	0.0000000000	1.8627839982	0.0000000000
0.8623607321	0.0000000001	0.4130116733	-0.0000000005
0.9796833093	-0.0000000000	0.0522448011	0.0000000000
0.9994471403	-0.0000000000	0.0013832189	0.0000000000
0.9999995725	-0.0000000000	0.0000010692	0.0000000000
1.0000000000	0.0000000000	-0.0000000000	-0.0000000000
1.0000000000	0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-1.0000000000		
-2.0000000000		1
-3.5000000000		

```
A 1     6.5000000000
A 2    12.5000000000
A 3     7.0000000000
A 4     0.0000000000
```

```
A 1      6.0000000000
A 2     11.0000000000
A 3      6.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20

        P                   Q                   R                   S

        0.0000000000        0.0000000000        6.0000000000        0.0000000000
        0.5454545454        0.0000000000        1.6228399686        0.0000000000
        0.8489532098        0.0000000000        0.3739851303        0.0000000000
        0.9746740702        0.0000000000        0.0525923111        0.0000000000
        0.9990915479       -0.0000000000        0.0018193834        0.0000000000
        0.9999987659       -0.0000000000        0.0000024699        0.0000000000
        1.0000000009        0.0000000000       -0.0000000000       -0.0000000000
        1.0000000009        0.0000000000

RöTTER
         REALDEL              IMAGINÄRDEL             EXIT
         0.0000000000                                 1
        -1.0000000009
        -1.9999999962                                 1
        -3.0000000037

A 1      6.0000000000
A 2     11.0000000000
A 3      6.0000000000
A 4      0.0000000000
```

```
A 1      7.0000000000
A 2     14.0000000000
A 3      8.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20
```

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	8.0000000000	0.0000000000
0.5714285713	0.0000000000	2.0991253629	0.0000000000
0.8721804507	0.0000000000	0.4508982896	0.0000000000
0.9829235547	0.0000000000	0.0524007343	0.0000000000
0.9996250565	0.0000000000	0.0011253953	-0.0000000000
0.9999998137	0.0000000000	0.0000005588	-0.0000000000
1.0000000000	-0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1.0000000000	0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-1.0000000000		
-2.0000000000		1
-4.0000000000		

```
A 1      7.0000000000
A 2     14.0000000000
A 3      8.0000000000
A 4      0.0000000000
```

```
A 1      7.5000000000
A 2     16.5000000000
A 3     10.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20
```

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	10.0000000000	0.0000000000
0.6060606059	0.0000000000	2.5322091467	0.0000000000
0.9035818623	-0.0000000001	0.4766120244	0.0000000007
0.9919144622	-0.0000000000	0.0366796330	0.0000000001
0.9999354346	-0.0000000000	0.0002905577	0.0000000000
0.9999999948	0.0000000000	0.0000000224	-0.0000000000
1.0000000000	-0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1.0000000000	0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-1.0000000000		
-2.5000000000		1
-4.0000000000		

```
A 1      7.5000000000
A 2     16.5000000000
A 3     10.0000000000
A 4      0.0000000000
```

```
A 1      8.5000000000
A 2     22.5000000000
A 3     18.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20

         P                  Q                  R                  S

         0.0000000000       0.0000000000      18.0000000000       0.0000000000
         0.7999999998       0.0000000000       4.9280000030       0.0000000000
         1.2554528648       0.0000000000       1.1708896905       0.0000000000
         1.4543879767       0.0000000000       0.1794618070       0.0000000000
         1.4979346441       0.0000000000       0.0077621639       0.0000000000
         1.4999954672       0.0000000000       0.0000170022       0.0000000000
         1.5000000009       0.0000000000       0.0000000000       0.0000000000
         1.5000000009       0.0000000000

RÖTTER
          REALDEL            IMAGINÄRDEL          EXIT
          0.0000000000                            1
         -1.5000000009
         -2.9999999925                            1
         -4.0000000074

A 1      8.5000000000
A 2     22.5000000000
A 3     18.0000000000
A 4      0.0000000000
```

```
A 1      8.0000000000
A 2     19.0000000000
A 3     12.0000000000
EPS0= 1.0₁₀-12 EPS1= 1.0₁₀-10 EPS2= 1.0₁₀-10 EPS3= 1.0₁₀-10 N=  20
```

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	12.0000000000	0.0000000000
0.6315789474	0.0000000000	2.9392039626	0.0000000000
0.9228368750	0.0000000000	0.4932089298	0.0000000000
0.9954798365	0.0000000000	0.0272232294	0.0000000000
0.9999830699	-0.0000000000	0.0001015812	0.0000000000
0.9999999995	0.0000000000	-0.0000000000	-0.0000000000
0.9999999995	0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-0.9999999995		
-3.0000000074		1
-3.9999999925		

```
A 1      8.0000000000
A 2     19.0000000000
A 3     12.0000000000
A 4      0.0000000000
```

S. 58.

A 1 9.0000000000
A 2 26.0000000000
A 3 24.0000000000
EPS0= $1.0_{10}-12$ EPS1= $1.0_{10}-10$ EPS2= $1.0_{10}-10$ EPS3= $1.0_{10}-10$ N= 20

P	Q	R	S
0.0000000000	0.0000000000	24.0000000000	0.0000000000
0.9230769230	0.0000000000	6.8821119666	0.0000000000
1.4994282228	0.0000000000	1.8782891929	0.0000000000
1.8257950730	0.0000000000	0.4447385817	0.0000000000
1.9675999404	0.0000000000	0.0679834187	0.0000000000
1.9985359506	0.0000000000	0.0029345452	-0.0000000001
1.9999968027	0.0000000000	0.0000063926	-0.0000000000
1.9999999990	-0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1.9999999990	0.0000000000		

RÖTTER

REALDEL	IMAGINÄRDEL	EXIT
0.0000000000		1
-1.9999999990		
-3.0000000074		1
-3.9999999925		

A 1 9.0000000000
A 2 26.0000000000
A 3 24.0000000000
A 4 0.0000000000

Linjära tidsinvarianta system

1. Grunder

Matrisrutiner.

Invers. [Gauss Jordan, kvadrats

Bestämning av egenvärden och egenvektorer.

$\Rightarrow$ Transformation på diagonalform.

2. Transformation av system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + (Du) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

{ Undersök kontrollerbarhet och observerbarhet.

$[A, AB, \quad A^{n-1}B]$ }

$$\Updownarrow$$

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} B\, U(s)$$

Spec en insignal en utsignal

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

Beräkna a_i och b_i ur A, B och C

Explicit.

Beräkna f m (4.1)

Beräkna T & T^{-1} m (4.6)

Transformera

$$\frac{dz}{dt} = TAT^{-1}z + TBu$$

$$y = T^{-1}Cz + Du$$

Alt. eller kontroll.

Beräkna kar. ekv för A med annan metod.

Rutiner för att finna samtliga rötter (även komplexa) till polynom

---

Transformation på diagonalform.

1. Skilda egenvärden

Finn T sådan att

$$TAT^{-1} = \Lambda$$

2. Hur göra med komplexa egenvärden???

- komplex aritmetik?
- annan standardform

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \square \end{bmatrix}$$

$$\square = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

3. Hur göra med multipelrötter
(Jordans kanoniska form)

Lösning av systemekvationerna.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

u är godtycklig känd funktion bestäm $x \equiv x(t)$!

— runge kutta. korrektor prediktor

— exponentialmatris (~~antag~~ approx. u med styckvis konstant funktion)

$$x(t+T) = e^{AT}x(t) + \left(\int_0^T e^{As} B\,ds\right) u(t)$$

Beräkna

— undersök test av noggrannhet.?
antal termer i exponentialserien etc.

Bestämning av Lyapunovfunktioner etc.

Lös ekvationen

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + R_1$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{bmatrix} A & -R_1 \\ -R_2 & -A^T \end{bmatrix} \Phi$$

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + R_1 - PR_2P$$

speciellt bestäm stationära lösning dvs

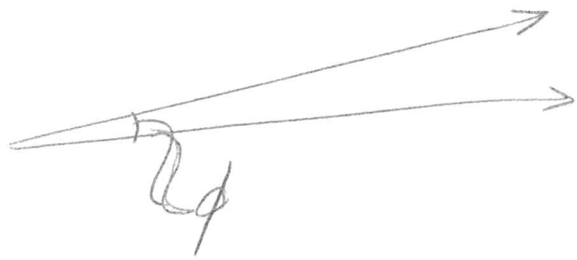
$$AP + PA^T + R_1 = 0$$

Tillägg till observerbarhet etc.

Studera matrisen

$$\mathcal{A} = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$$

om $\mathcal{A}$ är singulär bestäm rangen av $\mathcal{A}$ eller bestäm antalet linjärt oberoende kolonnvektorer i $\mathcal{A}$.



$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \alpha \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^3$$

$$(\lambda - 1)^n = a$$

$$\begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ \varepsilon & & -a \end{bmatrix}$$

$$n = 10$$

$$\varepsilon = 10^{-10}$$

$$(\lambda - a)^n + \varepsilon = 0$$

$$(\lambda - a) = \sqrt[n]{-\varepsilon}$$