KULIKOWSKIS VERSION AV TEORIN FÖR OPTIMAL STYRNING

ROLF L. JÖNSSON

Rapport RE - 12 juli 1967

1. KULIKOWSKIS VERSION AV TEORIN FÖR OPTIMAL STYRNING

Denna redogörelse behandlar den polske matematikern Kulikowskis version av teorin för optimal styrning av fysikaliska system. Vi begränsar oss till linjära, tidsinvarianta system, dvs system som beskrives av linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Ett system kan representeras på två sätt, antingen med hjälp av tillståndsvariabler eller också med hjälp av viktfunktionen.

(1) Representation genom tillståndsvariabler

Låt tillståndsvariablerna vara $x_i(t)$ samt låt systemet styras av styrsignalen $u(\tau)$. Representation genom tillståndsvariabler innebär att systemet är givet i form av en linjär differentialekvation

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_o x(t) = b_n u(t) + \dots + b_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}}$$

där $x(t)$ är någon storhet hos systemet.

Såsom känt från grundlägggande regleringsteknik kan denna n:te ordningens differentialekvation överföras till ett system av differentialekvationer av första ordningen genom att de n:st tillståndsvariablerna införes.

$$\left[\begin{array}{lcl}
\dot{x}_1(t) & = & \sum_{1}^{n} a_{1v} x_v + b_1 u \\
\dot{x}_2(t) & = & \sum_{1}^{n} a_{2v} x_v + b_2 u \\
\vdots & & \vdots \quad \vdots \\
\dot{x}_n(t) & = & \sum_{v=1}^{n} a_{nv} x_v + b_n u
\end{array}\right]$$

Detta skrives enklare i matrisform

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{Ax} + Bu$$

där

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Lösningen till detta system av differentialekvationer är

$$\underline{x}(t) = e^{At}\,\underline{x}(0) + \int_o^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau$$

där $\underline{x}(0)$ är en matris beskrivande systemets tillstånd vid $t = 0$ och

$$e^{At} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

(2) Representation av systemet med hjälp av viktfunktionen

Låt $u(\tau)$ vara styrsignalen och $x(t)$ utsignalen. Vårt system kan då beskrivas på följande sätt

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t - \tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

där $k(t,\tau)$ är systemets viktfunktion, vilken är karakteristisk för systemet. För linjära, tidsinvarianta system gäller att systemets viktfunktion $k(t,\tau) = k(t-\tau)$. Man kan visa matematiskt att viktfunktionen är systemets utsignal då styrsignalen är en Dirac-puls $\rho(\tau)$ under förutsättning att systemets initialtillstånd är noll. Detta ger en konstruktiv metod för bestämning av ett systems viktfunktion. Om systemet är givet i form av en differentialekvation dvs

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$

$$y(t) = C \cdot x$$

där $y(t)$ är den observerade utsignalen och $C = (c_i, \ldots, c_n)$ så blir systemets viktfunktion $C \cdot e^{At} \cdot B$.

Vårt problem består i att bestämma styrsignalen u( ), så att systemet överföres från ett givet begynnelsetillstånd vid $t = 0$ till ett önskat sluttillstånd på kortast möjliga tid T med vissa inskränkningar på styrsignalen $u(\tau)$. Dessa kan vara t.ex. begränsning av absolutbeloppet av styrsignalen dvs begränsning av styrsignalens amplitud eller begränsning av tillförd energi genom styrsignalen, dvs

$$\int_0^T u^2(\tau)\, d\tau \leq L$$

Då systemet är givet i form av dess viktfunktion är man intresserad av att utsignalen och dess derivator $x^{(i)}(t)$ $i = 0, \ldots n$ på kortast möjliga tid antar vissa önskade värden med begränsning på $u(\tau)$ enligt ovan.

Vid bestämningen av den optimala styrsignalen $u(\tau)$ använder sig Kulikowski bl.a. av resultat från funktionalanalysen.

Problemet att bestämma den optimala styrsignalen reduceras till följande matematiska problem:

Bestäm

$$\max_{\lambda_i} \frac{|\lambda e_d|}{||k(T-)||_q} \qquad \text{där}$$

$\underline{\lambda}$ godtycklig vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ med reella komponenter

$\underline{e}_d = \underline{x}(T) - e^{AT} \cdot x(0)$ med $\underline{x}(T)$ önskat sluttillstånd och $\underline{x}(0)$ begynnelsetillstånd i vektorform. Matrisen A erhålles vid systemrepresentationen genom tillståndsvariabler enligt ovan.

$k(T-\tau) = \sum_{i=1}^{n} h_i(T-\tau) \cdot \lambda_i$ med $h_i(T-\tau)$ som element till $\underline{H(T-\tau)} = e^{A(T-\tau)} \cdot B$ där matrisen B erhålles vid systemrepresentationen genom tillståndsvariabler enligt ovan.

$||k(T-\tau)||_q$ betecknar q-normen för $k(T-\tau)$ och är lika med $\{ \int_0^T |k(T-\tau)|^q \, d\tau \}^{1/q}$ där q är heltal som karakteriseras inskränkningen på styrsignalen.

T betecknar tidpunkten då det önskade sluttillståndet uppnåtts.

Då systemet givet genom sin viktfunktion k(t) reduceras problemet till exakt samma matematiska problem. Bestäm

$$\max_{\lambda_i} \frac{|\underline{\lambda}\ \underline{x}|}{||k(T-\tau)||_q} \qquad \text{där}$$

$\underline{x} = \int_0^T (k^{(i)}(T-\tau)) \cdot u(\tau)\, d\tau$ där $(k^{(i)}(T-\tau)$ är en n x 1 matris med viktfunktionen och dess derivator som komponenter. För komponenten x_i i $\underline{x}$ gäller:

$$x_i = x_o^{(i)}(T) - \int_{-\infty}^{o} k^{(i)}(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau - k^{(i-1)}(0)\, u(T)$$

med $x_o^{(i)}(T)$ som det önskade slutvärdet på i:te derivatan av utsignalen.

$\int_{-\infty}^{o} k^{(i)}(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$ representerar utsignalens i:te derivata vid t = 0 och anses känd.

$$k(T-\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} k^{(i)}(T-\tau) \cdot \lambda_i$$

Likartade matematiska problem uppstår vid momentproblemet: Givet en oändlig följd av reella tal s_k. En icke-avtagande funktion $\sigma(u)$ sökes som uppfyller

$$s_k = \int_{-\omega}^{\infty} u^k \, d\,\sigma(u) \qquad k = 0, 1 \ldots$$

Se "Some Questions in the Theory of Moments" av Akhiezer och Krein under rubriken "The L-moment problem and some of its applications". Där finns bl.a. följande problem beskrivet:

Givet $s_o, \ldots s_n$ och $-1 < \theta < 1$. Betrakta $P(u) = a_o + a_1 u + \ldots + a_n u^n$ samt $a_o s_o + \ldots + a_n s_n = 1$.

$$\text{Finn} \qquad \min I(P) = \int_{-1}^{+1} \{ |P(n)| + \theta\, P(n) \}\, dn$$

Se under rubriken: The L-Problem is an abstract linear normed space.

Givet n linjärt oberoende element $x_1 \ldots x_n$. Sök

$$\frac{1}{\lambda} = \inf || \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n ||$$

under bivillkoret $c_1 \xi_1 + \ldots + c_n \xi_n = 1$ där c_i är givna.

I de allra flesta fall leder bestämningen av den optimala styrsignalen till maximeringsproblem som ej kan lösas analytiskt. I vissa fall är detta dock möjligt och dessa fall genomgås i redogörelsen. Dessa är bl.a.

1. Begynnelsetillstånd noll och tillståndsvariabel ändras samt $q = 1$
2. System representerat av differentialekvation av låg ordning $n = 2$, med $q = 1$
3. Begynnelsetillstånd noll, en tillståndsvariabel ändras, $q = 2$
4. Begynnelsetillstånd noll, en tillståndsvariabel ändras och $q = \infty$

2. MATEMATISK BAKGRUND TILL KULIKOWSKIS VERSION AV TEORIN FÖR OPTIMAL STYRNING

Det var Krasovski som först observerade att vissa egenskaper hos funktionaler i normerade rum, såsom Krein har beskrivit dem, kan tillämpas på tidsoptimala styrningsproblem. Han använde dessa egenskaper för att härleda uttrycket för en optimal styrsignal, vars amplitud är begränsad. Krasovskis arbete utvidgades av Kulikowski, som demonstrerade att Kreins resultat direkt kan tillämpas på en allmännare typ av inskränkningar på styrsignalen.

En mängd R av element x, y, z ... säges utgöra ett linjärt rum om följande villkor uppfylles:

(1) För varje par av element $x, y \varepsilon R$ är entydigt ett tredje element $z = x + y$, som kallas summan, definierat sådant att

a) $x + y = y + x$

b) $x + (y + z) = (x + y) + z$

c) det existerar ett element 0 med egenskapen
$x + 0 = x$ för alla $x \varepsilon R$

d) för varje $x \varepsilon R$ finns ett element $-x$ sådant att $x + (-x) = 0$

(2) För varje godtyckligt tal α och $x \varepsilon R$ är det definierat ett element $\alpha \cdot x$ sådant att

a) $\alpha(\beta x) = (\beta\alpha)x$

b) $1 \cdot x = x$

(3) Operationerna addition och multiplikation hör samman på följande sätt:

a) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Ett linjärt rum säges vara normerat om till varje element $x \varepsilon R$ det definieras ett icke-negativt tal $||x||$ som kallas normen av x och som uppfyller:

(1) $||x|| = 0$ då och endast då $x = 0$

(2) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$

(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Ett linjärt rum vari en norm definierats kallas ett <u>pre-Banachrum</u>

<u>Exempel</u>:

B^P = {kontinuerliga funktioner $x(t)$ på $\{0,T\}$ med

$\int_0^T |x(t)|^P \, dt < \infty$ med normen $||x(t)||_p = \{ \int_0^T |x(t)|^P \}^{1/P}$

P godtyckligt heltal ≥ 1.

En reell funktion på en mängd R tillordnar varje element i R ett element på reella linjen. När R-normerad, linjär mängd, själv består av funktioner kallar man funktionerna av elementen i R för <u>funktionaler</u>. En funktional säges vara linjär, om

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ där x,y funktioner ϵ R och α,β godtyckliga tal.

<u>Exempel på linjär funktional:</u>

$f(x) = \int_a^b x(t) \cdot y_o(t) \, dt$ linjär funktional ty

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t)) \cdot y_o(t) \, dt = \alpha \int_a^b x(t) \cdot y_o(t) \, dt +$$

$$+ \beta \int_a^b y(t) \cdot y_o(t) \, dt = \alpha f(x) + \beta f(y)$$ där $x, y, y_o \; \epsilon \; B^P$

Ovannämnda linjära funktional erhåller man som lösning till det linjära, tidsinvarianta reglersystemet förut beskrivet med $\{b,a\} = \{0,t\}$. $y_o(t)$ motsvarar styrsignalen. Analogin kan föras vidare, ty $y_o(t) \; \epsilon \; B^P$, som medför att

$$||y_o(t)||_p = \{ \int_0^t |y_o(t)|^p \, dt\}^{1/p}$$

Sätt $y_o(t) = u(\tau)$

$p = 1$ ger $||u(\tau)||_1 = \int_o^t |u(\tau)|d\tau$ = totala arean av $u(\tau)$ i $\{0,t\}$

$p = 2$ ger $||u(\tau)||_2 = \{ \int_o^t |u(\tau)|^2 \, d\tau \}^{1/2}$ som är ett mått på roten ur totala energin som tillföres system genom u( ) under $\{0,t\}$

$p = \infty$ ger $||u(\tau)||_\infty = \max |u(\tau)|$ i $\{0,t\}$

Vi konstaterar sålunda att som normen definieras i B^P-rummet kan densamma användas som mått på inskränkningen av styrsignalen $u(\tau)$. Arten av inskränkningen erhålles genom att man ger p ett lämpligt heltalsvärde.

Man definierar en norm för linjära funktionaler:

$$||f|| = \sup \{|f(x)|/ ||x|| , x \neq 0 \}$$

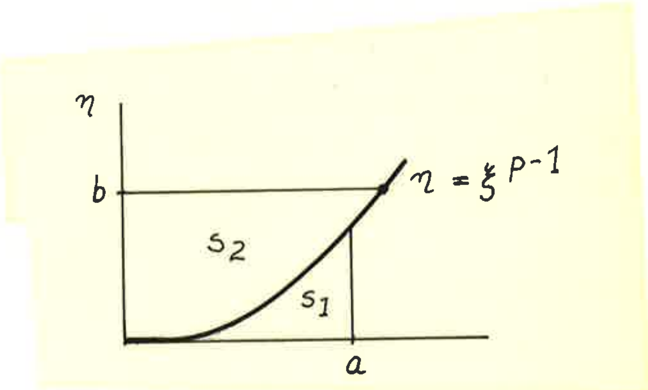
Vid beräkningen av den optimala styrsignalens utseende använder sig Kulikowski av följande olikheter.

1) <u>Hölders olikhet för integraler</u>

$$\int_a^b |x(t)\cdot y(t)| dt \leq \left[\int_a^b |x(t)|^p dt \right]^{1/p} \cdot \left[\int_a^b |y(t)|^q dt \right]^{1/q} \quad \text{där } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

<u>Bevis:</u> Betrakta i $(\xi,\ )$-planet kurvan $\ = \xi^{p-1}$ eller ekvivalent $\xi = \eta^{q-1}$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Av figuren framgår att för varje godtyckligt val av positiva värden på a och b gäller :



$$S_1 + S_2 \geq ab$$

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = a^p/p$$

$$S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = b^q/q$$

dvs $ab \leq a^p/p + b^q/q$;

Av figuren framgår att för varje godtyckligt val av positiva värden på a och b gäller:

$$s_1 + s_2 \geq ab$$

$$s_1 = \int_0^a \xi^{p-1}\, d\xi = a^p/p$$

$$s_2 = \int_0^b \quad ^{q-1}\, d \quad = b^q/q$$

dvs $\quad ab \leq a^p/p + b^q/q$

Av utseendet på Hölders olikhet framgår att om den gäller för $x(t)$, $y(t)$ så gäller den även för $\mu x(t)$ och $\lambda y(t)$ där μ, λ är godtyckliga tal. Det räcker därför att visa olikheten för

$$\int_a^b |x(t)|^p\, dt = \int_a^b |y(t)|^q = 1$$

Vi skall således visa att $\quad \int_a^b x(t) \cdot y(t)\, dt \leq 1$

Sätt $\; a = |x(t)| \;$ och $\; b = |y(t)| \;$ vilket medför

$$|x(t) \cdot y(t)| \leq \frac{|x(t)|^p}{p} + \frac{|y(t)|^q}{q}$$

Integrera $\quad \int_a^b |x(t) \cdot y(t)|dt \leq \int_a^b \frac{|x(t)|^p}{p} dt + \int_a^b \frac{|y(t)|^q}{q} dt = 1$

V.S.B.

2) $\qquad \left| \int_a^b x(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |x(t)|dt$

Betrakta den linjära funktionalen $\int_0^T x(t) \cdot y(t)\, dt$ där $y(t) \in B^q$, $x(t) \in B^p$. För denna gäller

$$\left| \int_0^T x(t) \cdot y(t)\, dt \right| \leq \int_0^T |x(t) \cdot y(t)| dt \leq \{ \int_0^T |x(t)|^q\, dt\}^{1/q} \cdot$$

$$\cdot \{ \int_0^T |y(t)|^q\, dt\}^{1/q}$$

Vi undersöker vilket samband som skall råda mellan x(t) och y(t) för att likhetstecknet skall gälla i båda olikheterna.

(a) $\left| \int_0^T x(t) \cdot y(t)\, dt \right| = \int_0^T |x(t) \cdot y(t)| dt$

Likhet inträffar då och endast då

$x(t) \cdot y(t) \geq 0$ för alla $t \in \{0,T\}$ eller

$x(t) \cdot y(t) \leq 0$ för alla $t \in \{0,T\}$

(b) $\int_0^T |x(t)| \cdot |y(t)| dt = \{ \int_0^T |x(t)|^q\, dt\}^{1/p} \cdot \{ \int_0^T |y(t)|^q\, dt\}^q =$

$= ||x||_p \cdot ||y||_q$

Likhet inträffar då och endast då $|x(t)| = |K| \cdot |y(t)|^{q-1}$.
Detta framgår av beviset för Hölders olikhet (se figuren).
$ab = a^{p/p} + b^{q/q}$ då och endast då linjerna från a och b skär kurvan $= \xi^{p-1}$ i samma punkt, dvs $|y(t)| = |x(t)|^{p-1}$ eller ekvivalent $|x(t)| = |y(t)|^{q-1}$.

Om man i beviset för Hölders olikhet i stället använder kurvan $= |K| \cdot \xi^{p-1}$ erhålles samma olikhet. Med andra ord likhet råder då $|x(t)| = |K| \cdot |y(t)|^{q-1}$.

Kombineras a och b erhålles $x(t) = K\, |y(t)|^{q-1}$ sign $\{y(t)\}$

Att detta uttryck på x(t) satisfierar b är omedelbart klart.

$x(t) \cdot y(t) = K \cdot |y(t)|^q$, ty $y(t) \cdot$ sign $\{y(t)\} = |y(t)|$.
$x(t) \cdot y(t)$ har konstant tecken i $\{0,t\}$ - tecknet beror på den godtyckliga konstanten K - varför även a är satisfierad.

3. BESTÄMNING AV STYRSIGNALENS UTSEENDE DÅ ENDAST UTSIGNALEN x(t) ÄR AV INTRESSE

Vi närmar oss det allmänna problemet att bestämma styrsignalens utseende genom att betrakta ett specialfall nämligen då endast utsignalen för systemet är av intresse, samt då systemets initialtillstånd är noll dvs utsignalens värde vid $t = 0$ är 0.

Vårt problem lyder sålunda: Sök den styrsignal $u(\tau)$ som på minimal tid överför systemet från noll till x_d under inskränkningen $||u(\tau)||_p \leq L$, där x_d är önskat sluttillstånd.

Vi söker först den styrsignal $u(\tau)$ som på given tid T överför systemet från noll till x_d med miniminormen $||u(\tau)||_p$; $||u(\tau)||_p \leq L$, varefter vi minimerar tiden T.

Systemet beskrives med $x(t) = \int_0^t k(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$, med $k(t-\tau)$ som den kända viktfunktionen för systemet. Vid tiden T:

$x_d = \int_0^T k(T-\tau) \cdot u(\tau)\, d\tau$ enligt förutsättningen om sluttillståndet.

Härur fås

$$|x_d| = \left| \int_0^T k(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_0^T |k(T-\tau)|\,|u(\tau)|\, d\tau \leq$$

$$\leq \left\{ \int_0^T |k(T-\tau)|^q\, d\tau \right\}^{1/q} \cdot \left\{ \int_0^T |u(\tau)|^p\, d\tau \right\}^{1/p} = ||k(T-\tau)||_q \cdot ||u(\tau)||_p$$

enligt kapitlet om matematisk bakgrund till Kulikowskis version.

Dessa olikheter medför: $$||u(\tau)||_p \geq \frac{|x_d|}{||k(T-\tau)||_q}$$

Av denna olikhet erhålles att miniminormen $$||u(\tau)||_p = \frac{|x_d|}{||k(T-\tau)||_q}$$

Detta innebär att likhetstecken skall råda överallt i ovanstående olikhetskedja. I föregående kapitel undersöktes just denna kedja och med $x(t) = u(\tau)$ och $y(t) = k(T-\tau)$ erhålles således

$$u(\tau) = K \cdot |k(T-\tau)|^{q-1} \operatorname{sign} \{k(T-\tau)\} .$$

Konstanten K bestämmes med hjälp av det önskade sluttillståndet x_d.

$$x_d = \int_0^T k(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \int_0^T k(T-\tau) \cdot K \cdot |k(T-\tau)|^{q-1} \operatorname{sign} \{k(T-\tau)\} d\tau =$$

$$= K \int_0^T |k(T-\tau)|^q\, d\tau \quad = K\, ||k(T-\tau)||_q^q$$

vilket medför att

$$K = \frac{x_d}{||k(T-\tau)||_q^q}$$

Vi har således funnit att en styrsignal $u(\tau)$ som ger miniminorm skall ha utseendet

$$u(\ ) = \frac{x_d}{||k(T-\tau)||_q^q} \cdot |k(T-\tau)|^{q-1} \cdot \operatorname{sign} \{k(T-\tau)\}$$

Låt nu inskränkningen på styrsignalen vara $||u(\tau)||_p \leq L$

Vi hade förut olikheten

$$||u(\tau)||_p = \frac{|x_d|}{||k(T-\tau)||_q} \text{, dvs} \qquad L \geq \frac{|x_d|}{||k(T-\tau)||_q} \quad \text{eller}$$

$$||k(T-\tau)||_q \geq \frac{|x_d|}{L} \quad , \ldots \quad \text{(i)}$$

Låt oss studera $\quad ||k(T - \tau)||q = ||\ k(\tau)||q = \{\int_0^T |\ k(\tau)^q\, d\tau\}^{\frac{1}{q}}$

Integranden är här en positiv funktion, dvs. $||k(T-\tau)||q$ är växande med växande T.

Antag att x_d och L är givna. Vi ser då att lösningen $u(\tau)$ enligt ovan är möjlig för alla T, som uppfyller (i). Eftersom $||k(T-\tau)||_q = f(T)$ växande, positiv funktion fås minimitiden T_o då likhet råder, dvs. $||k(T-\tau)||_q = \frac{x_d}{L}$. Detta torde även kunna inses resonemangsmässigt ur utseendet på styrsignalen $u(\tau)$. $||k(T-\tau)||_q$ ingår i nämnaren, och gör man denna norm så liten som möjligt, blir $u(\tau)$ i varje ögonblick så stor som möjligt. Med andra ord så maximerar man den kraft med vilken styrsignalen i varje ögonblick påverkar systemet.

Den sökta styrsignalen har alltså följande utseende:

$$u(\tau) = L^q \cdot \left(\frac{k(T_o-\tau)}{x_d}\right)^{q-1} \cdot \operatorname{sign} \frac{k(T_o-\tau)}{x_d}$$

$p = \infty$ medför att $u(\tau) = L \cdot \operatorname{sign} \frac{k(T_o-\tau)}{x_d}$

$p = 2$ medför att $u(\tau) = L^2 \cdot \frac{k(T_o-\tau)}{x_d}$

Fallet $p = 1$ dvs. $q = \infty$ måste undersökas speciellt.

$$\left| \int_o^T k(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_o^T |k(T-\tau)| \cdot |u(\tau)|\, d\tau \leq ||u(\tau)||_1 \cdot ||k(T-\tau)||_\infty =$$

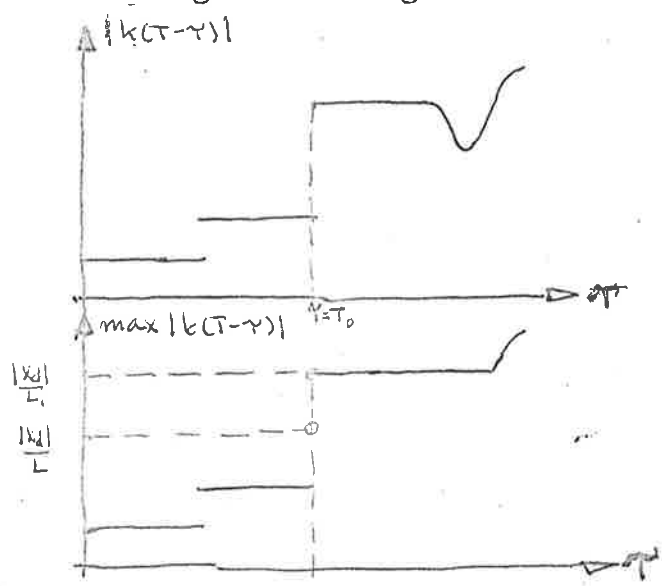
$= ||u(\tau)||_1 \cdot \max\limits_{(o,T)} |k(T-\tau)|$. Antag att $\max |k(T-\tau)$ ernås vid tidpunkterna τ_j $j = 1 - n$. Båda olikheterna satisfierade med likhetstecken om $u(\tau) =$

$= \{ (\pm)\sum\limits_j |kj| \cdot \delta(\tau-\tau_j) \} \cdot \operatorname{sign} \{k(T-\tau)\}$ där $\sum\limits_j |kj| = ||u(\tau)||_1 \leq L$.

Enligt föregående är $||k(T-\tau)||_\infty = \max\limits_{(o,T)} |k(T-\tau)| \geq \frac{|x_d|}{L}$ . ...(ii). Men max $|k(T-\tau)|$ behöver ej vara kontinuerlig funktion av T, t.ex. $k(T-\tau)$ styckvis konstant. Låt T_o vara det minsta T som uppfyller (ii). Om för detta T_o (ii) satisfieras av olikhetstecken, kan vi definiera en mindre gräns $L_1 < L$

sådan att max l $k(T - \tau)| = \frac{|x_d|}{L_1}$ för samma T_o.

Figurbeskrivning av ovanstående: Antag att olikheten max $|k(T-\tau)| \geq \frac{|x_d|}{L}$ byter riktning vid T_o och $\frac{|x_d|}{L}$ enligt figuren. Vi kan då definiera ett mindre L_1 så att $\frac{|x_d|}{L_1}$ enligt figuren.



Sammanfattningsvis bestämmer man den optimala tiden T_o för alla q ur relationen $||k(T-\tau)||_q = \frac{|x_d|}{L}$. Styrsignalen blir $u(\tau) =$
$$L^q \cdot \left|\frac{k(T_o-\tau)}{x_d}\right|^{q-1} \text{ sign } \left[\frac{k(T_o-\tau)}{x_d}\right].$$

<u>Bestämning av styrsignalens utseende då flera tillståndsstorheter är av intresse.</u>

Vi skall nu betrakta ett lineärt tidsinvariant fysikaliskt system med n st tillståndsvariabler, vilket kan påverkas av en styrsignal $u(\tau)$. Dessutom är systemets initialtillstånd ej noll. Som nämndes i kapitel 1 beskrives systemet av en lineär, n:te ordningens differentialekvation. <u>Vårt problem lyder</u>: Sök den styrsignal $u(\tau)$, som på kortast möjliga tid T, överför x(+)= tillståndsvektorn från ett givet starttillstånd $\underline{x}(0)$ till ett önskat sluttillstånd $\underline{x}(T)$ med en begränsning på $u(\tau)$ given genom $||u(\tau)||_p \leq L$. Här är $\underline{x}(0)$ och $\underline{x}(T)$ matriser

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} ; \quad \underline{x}(T) = \begin{bmatrix} x_1(T) \\ \vdots \\ x_n(T) \end{bmatrix}$$

Först söker vi en styrsignal $u(\tau)$ som på given tid T ger den önskade tillståndsvektorn $\underline{x(T)}$ med miniminorm $||u(\tau)||_p, ||u(\tau)||_p \leqslant L$.
Därefter minimerar vi T.
Enligt kapitel 1 har vi följande uttryck på utsignalen $\underline{x(t)}$ =

$$e^{At} \cdot \underline{x}^{(0)} + \int_0^t e^{A(t-\gamma)} B \cdot u(\tau)\, d\gamma$$

där matriserna A och B erhålles enligt kapitel 1. Varje $u(\tau)$, som skall ge tillståndsvektorn $\underline{x}(T)$ vid $\tau = T$ måste uppfylla relationen:

$$\underline{e_d} = \int_0^T H(T-\tau) \cdot u(\tau)\, d\gamma \text{ där } \underline{e_d} = \underline{x(T)} - e^{AT}\, \underline{x(0)} \text{ och } \underline{H(T-\tau\ )} = e^{A(T-\tau)} \cdot B$$

Låt elementen i $\underline{e}$d vara

$$e_i^d = \int_0^T h_i(T-\tau) \cdot u(\tau)\ d\gamma \quad \text{där } h_i(T-\tau) \text{ elementen i } \underline{H(T}-\tau).$$

e_i^d kan uppfattas som en lineär funktional enligt kapitel 2. Beteckna den lineära funktionalen $f(h_i\ (T-\tau))$. För att få fram miniminormen $||u(\tau)||_p$ inför vi en hjälpvektor $\underline{\lambda}$ med komponenterna $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, där λ_i är godtyckliga reella tal. Bilda skalärprodukten

$$\underline{\lambda} \cdot \underline{e_d} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i^d = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(h_i(T-\tau)$$

. Eftersom $f(h_i(T-\tau))$ är en lineär funktional följer att

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ f(h_i(T-\tau)) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ h_i\ (T-\tau)) = f(k(T-\tau))$$

Vi har $\underline{\lambda}.\underline{e}_d = \int_0^T k(T-\tau).\, u(\tau)d\tau| \leqslant \int_0^T |k(T-\tau)||\, u(\tau)|\, d\tau \leqslant$

$$\leqslant \left[\int_0^T |u(\tau)|^p\, d\tau\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_0^T |k(T-\tau)|^{\,q}\, d\tau\right]^{\frac{1}{q}} = ||u(\tau)||_p \cdot ||k(T-\tau)||_q$$

Enligt kapitel 2 är q-normen för den lineära funktionalen

$f(k(T-\tau))$ lika med $\max\limits_{R(T-\tau)} \dfrac{f(k(T-\tau))}{||k(T-\tau)||_q} = \max\limits_{T,\lambda_i} \dfrac{|\underline{\lambda}\cdot\underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q} = \max\limits_{\lambda_i} \dfrac{|\underline{\lambda}\,\underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q}$

ty T givet och konstant.

Av ovanstående olikhetskedja erhålles att

$$||u(\tau)||_p \geqslant \frac{|\underline{\lambda}\cdot\underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q}$$

d v s $\max\limits_{\lambda_i} \dfrac{|\underline{\lambda}\cdot\underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q} \leqslant ||u(\tau)||_p$. Detta ger att

$$\min||u(\tau)||_p = \max_{\lambda_i} \frac{|\underline{\lambda}\,\underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q}$$

Genom denna maximering bestämmes den uppsättning λ_i som minimerar $||u(\tau)||_p$. Indicera med * de uttryck vari maximerande λ_i ingår

$$\min||u(\tau)||_p = \frac{|\underline{\lambda}^*\underline{e}_d|}{||k^*(T-\tau)||_q}$$

Normen av $u(\tau)$ har inskränkningen $\min||u(\tau)||_p \leqslant L$. Detta kombineras med

ovanstående och vi får : $L \geqslant \dfrac{|\underline{\lambda}^*\cdot\bar{e}_d|}{||k^*(T-\tau)||_q}$ eller $||k^*(T-\tau)||_q \geqslant \dfrac{|\underline{\lambda}\,\underline{e}d|}{L}$

$||k^*(T-\tau)||_q$ är en positiv, växande funktion av T. Minimitiden T_0 erhålles då likhet råder i ovanstående olikhet.

$$||k^*(T-\tau)||_q = \frac{|\underline{\lambda}^*\cdot\underline{e}_d|}{L}.$$

Vi skall till sist bestämma utseendet på den optimala styrsignalen $u(\tau)$. Förut kom vi fram till olikhetskedjan

$$\left| \int_0^T k(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \int_0^T |k(T-\tau)| \cdot | u(\tau)| - d\tau \leqslant$$

$\leqslant ||u(\tau)||_p \cdot ||k(T-\tau)||_q$. Dessa olikheter är analoga med de som vi erhöll i kapitel 3. Vi får sålunda

$$u(\tau) = k \cdot |k^*(T-\tau)|^{q-1} \text{ sign } \left[k^*(T-\tau)\right]$$

Bestämning av konstanten K sker med hjälp av slutvillkoret $\underline{x}(T)$

$$\underline{\lambda}^* \cdot \underline{e}_d = \sum_1^n \lambda_i^* f |h_i(T-\tau)| = \sum_1^n \cdot \int_0^T \lambda_i^* \cdot h_i (T-\tau) \cdot u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_1^n \int_0^T \lambda_i^* h_i (T-\tau) \cdot K |k^*(T-\tau)|^{q-1} \cdot \text{sign} \left[k^*(T-\tau)\right] d\tau =$$

$$= K \int_0^T | k^*(T-\tau)|^{q-1} \cdot \text{sign} \left[k^*(T-\tau)\right] \cdot \sum_1^n \lambda_i^* h_i (T-\tau)\, d\tau$$

där $\sum_1^n \lambda_i^* h_i^* (T-\tau) = k^*(T-\tau)$. Detta medför att

$$\underline{\lambda}^* \cdot \underline{e}_d = k \cdot \int_0^T |k^*(T-\tau)|^q d\tau = k \cdot ||k^*(T-\tau)||_q^q ;$$

d v s

$$K = \frac{\underline{\lambda}^* \cdot \underline{e}_d}{||k^* (T-\tau)||_q^q} = \frac{\underline{\lambda}^* \cdot \underline{e}_d}{|\underline{\lambda}^* \cdot \underline{e}_d|^q} \cdot L^q$$

<u>Alltså</u>: $u(\tau) = \dfrac{L^q \cdot \underline{\lambda}^* \cdot \underline{e}_d}{|\underline{\lambda}^* \cdot \underline{e}_d|^q} \cdot |k^* (T_0-\tau)|^{q-1} \text{ sign } \left[k^* (T_0-\tau)\right]$

Fallet $q=\infty$ analyseras med samma resonemang som i kapitel 3.

Styrsignalens utseende då utsignalen och dess derivator är av intresse.

Vårt system är givet genom sin viktfunktion k(t). Problemet består i att bestämma den optimala styrsignalen $u(\tau)$ så att utsignalen och dess derivator upp till en viss ordning på kortast möjliga tid antar de önskade värdena. Enligt kapitel 1

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t-\tau) \,.\, u(\tau)\, d\tau$$

Vi får: $\frac{d^i c(t)}{dt^i} = x^{(i)}(t) = \int_0^t k^{(i)}(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau + k^{(i-1)}(0).\, u(t) +$

$$+ \int_{-\infty}^{\emptyset} k^{(i)}(t-\tau)\, n(\tau)\, d\tau$$

Vid tiden T: $\int_0^T k^{(i)}(t-\tau)\, u(\tau) d = x_o^{(i)}(T) - \int_{-\infty}^{0} k^{(i)}(T-\tau)\, u(\tau) d\tau -$

$- k^{(i-1)}(0)\quad u(T) = x_i$ där $x_0^{(i)}(T)$ är det önskade värdet på i:et

derivaten av utsignalen. Vi har således $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \int_0^T (k^{(i)}(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

med $(k^{(i)}(t-\tau))$ en n x 1- matris där elementen består av viktfunktionen och dess derivator. Ve erhöll exakt samma uttryck i föregående avsnitt med $\underline{e}_d = \begin{bmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$ och $(k^{(i)}(t-\tau)) = \underline{H(T-\tau)}$. Vi kan således använda oss av resultaten där och får: $u(\tau) = \frac{L^q.\underline{\lambda}^*.\, \underline{x}}{|\underline{\lambda}^*.\, \underline{x}|^q} \,.\, |k^*(T_0-\tau)|^{q-1} \left[\text{sign } k^*(T_0-\tau)\right]$

där $k^*(T_0-\tau) = \sum_i \lambda_i^* k^{(i)}(T_0-\tau)$

$\underline{\lambda}^*$ bestämmes ur $\max_{\lambda_i} \frac{|\underline{\lambda} \cdot \underline{x}|}{||k(T_0-\tau)||_q}$

Den optimala tiden T_0 bestämmes ur: $L = \frac{|\underline{\lambda}^*.\, \underline{x}|}{||k^*(T_0-\tau)||_q}$

Sammanfattning: Om systemet är givet av en differentialekvation, omskrives den enligt kapitel 1 till ett system av differentialekvationer $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu$. Lösningarna till detta system blir $\underline{x(T)} - e^{AT}\underline{x(0)} = \int_0^T e^{A(T-\tau)}.B.n(\tau)d\tau$

Bilda $\underline{e}_d$ och $k(T-\tau)$. Den sökta uppsättningen λ_i bestämmes ur $\max\limits_{\lambda i}$

$$\frac{|\underline{\lambda}\ \underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q}$$, där q beror av arten av inskränkning på $u(\tau)$;

$||u(\tau)||_p \leqslant L$; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Minimaltiden T_0 bestämmes ur $\min||u(\tau)||_p =$

$$= \frac{|\underline{\lambda}^*\cdot\ \underline{e}_d|}{||\ k^*(T-\tau)||_q} = L$$ Det minsta T som satisfierar denna relation sättes lika

med T_0. Den optimala styrsignalen $u(\tau)$ blir då $u(\tau) = \frac{L^q\cdot\underline{\lambda}^*\underline{e}_d}{|\underline{\lambda}^*\cdot\ \underline{e}_d|^q}\cdot$

$|k^*(T_0-\tau)|^{\,q-1}\ \mathrm{sign}\left[k^*(T_0-\tau)\right]$. Om systemet är givet i form av viktfunk-

tionen $k_v(T-\tau)$ förfar man på följande sätt.

Bilda $x_i = x_o(i)\ (T) - \int_{-\infty}^{0} k^{(i)}\ (T-\tau)\ u(\tau) - k^{(i-1)}(0)\ u(T)$

där $\int_{-\infty}^{0} k^{(i)}\ (T-\tau)\ u(\tau)$ noll om systemet initiellt i vila.

$\underline{\lambda}^*$ bestämmes ur $\max\limits_{\lambda i} \frac{|\underline{\lambda}\ \underline{x}\ |}{||k(T_0-\tau)||_q}$. Den optimala tiden T_0 ur:

$$L = \frac{\underline{\lambda}^*\cdot\ \underline{x}}{||k^*(T_0-\tau)||_q}$$. Svårigheten med Kulikowskis metod att bestämma den

optimala styrsignalen ligger i den matematiska svårigheten att beräkna den uppsättning λ_i som maximerar

$$\frac{|\underline{\lambda}\ \underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q}\cdot$$

I fortsättningen skall några exempel ges där system, givna genom differentialekvationer. behandlas med Kulikowskis metod.

<u>Genomgång av metoder för bestämning av maximerande λ_i då p antar olika värden.</u>

Maximerande λ_i bestämmes ur $\max\limits_{\lambda i} \dfrac{|\bar{\lambda} \cdot \bar{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q}$.

Vi startar med fallet q=1 d v s p =β vilket innebär att /n(τ)/ begränsad.

$$\frac{|\lambda \cdot \underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_q} = \frac{|\sum\limits_i \lambda_i \cdot e_i^d|}{\int_0^T |\sum\limits_i \lambda_i h_i(T-\tau)|d\tau}$$

Eftersom t_i ingår symetriskt kan vi sätta $\lambda_1 = 1$, vilket i praktiken betyder att man bryter ut λ_1 ur både täljare och nämnare och förkortar. Vi har alltså

$$\max_{\lambda i} \frac{|e_i^d + \lambda_2 e_2^d + \ldots + \lambda_n d_n^d|}{\int_0^T |h_1(T-\tau) + \lambda_2 h_2(T-\tau) + \ldots + \lambda_n h_n(T-\tau)|\, d\tau}$$

Falla: Antag att initialtillståndet $x(0) = 0$, samt att endast första tillståndsvariabeln $x_1(t)$ ändras. Detta medför att $e_2^d = \ldots = e_n^d = 0$. Uttrycket som skall maximeras förenklas då till $\max\limits_{\lambda i}$

$$\frac{|e_i^d|}{\int_0^T |h_i(T-\tau) + \lambda_2 h_2(T-\tau) + \ldots + \lambda_n h_n(T-\tau)|\, d\tau}$$

Antag vidare att integranden i nämnaren är ett polynom i τ . Att söka maximum för ovanstående uttryck är ekvivalent med att söka minimum för nämnaren. Man kan visa (se bevis nedan) att det polynom av n:te graden $P_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{y-1} + \ldots a_o$ som minimerar $\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|dx$ är

Chebyskev-polynomen av andra ordningen: $u_n(x) = \dfrac{1}{2^n} \dfrac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Genom en variabelsubstitution i vårt integraluttryck överför man

$\int_0^T$ till $\int_{-1}^{+1}$: $\left[x = \dfrac{2\tau}{T} - 1 \right]$. Efter variabelsubstitutionen bryter man

sålunda ut koefficienten för x^n -termen och identifierar det återstående polynomet med motsvarande Chebyskev-polynom. Härur fås λ_i.

Bevis för att $U_n(x)$ minimerar $\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|dx$.

Zolatarev- Korkins teorem: Om vi för alla polynom $P_n(x)$ av grad n med koefficienten för x^n lika med 1, bildar integralen $\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|\, dx$ så

minimerar $U_n(x) = \dfrac{1}{2^n} \dfrac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ integralens värde.

Lemma 1 : Låt n vara ett positivt heltal och m vara ett av talen 0,1...n.

Då
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos \frac{km\pi}{n+1} = \frac{(-1)^{n+m}-1}{2} \quad \ldots (1)$$

Bevis:
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos \frac{km\pi}{n+1} = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(-e^{\frac{im\pi}{n+1}}\right)^k\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^{m+n} - e^{\frac{im\pi}{n+1}}}{1+e^{\frac{im\pi}{n+1}}}\right]$$

Om ett av talen n och m är jämt och det andra udda så $\mathrm{Re}\left[\;\right] = -1$,
men om n och m båda är antingen udda eller jämna så $\left[\;\right] = -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\Theta}{2}$.

Lemmat är därmed bevisat.

Lemma 2 : Om n är ett positivt heltal och r är ett av talen 0,1...n-1

så
$$I = \int_0^{\pi} \cos^r\Theta \sin\Theta \,\mathrm{sign}\left[\sin(n+1)\Theta\right] d\Theta = 0$$

Bevis: För $k\pi < (n+1)\Theta < (k+1)\pi$ har vi $\mathrm{sign}\left[\sin(n+1)\Theta\right] = (-1)^k$, varav

följer att
$$I = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_{\frac{k\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} \cos^r\Theta \sin\Theta\, d\Theta$$
och därför

$$I = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \left[\cos^{r+1}\left[\frac{k+1}{n+1}\right]\pi - \cos^{r+1}\left[\frac{k\pi}{n+1}\right]\right]$$

Men $\cos^{r+1}\Theta = \sum_{m=0}^{r+1} a_m \cos m\Theta$ varigenom alltihopa reduceras till att bevisa

ekvationen

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \left[\cos \frac{k+1}{n+1} m\pi - \cos \frac{km\pi}{n+1}\right] = 0 \quad \ldots (2)$$

Det sista kan skrivas om som

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos \frac{km\,\pi}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos \frac{km\pi}{n+1} = 0.$$

vilket är en ekvation ekvivalent med (1)

Corollarium: Om n är ett positivt heltal och r ett av talen 0,1....n-1 så

$$\int_{-1}^{+1} x^r \operatorname{sign}\left[U_n(x)\right] dx = 0 \quad \ldots (3)$$ eftersom $\int_{-1}^{+1} x^r \operatorname{sign}$

$$\left[\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx = \left[x = \cos\theta\right] = \int_0^{\pi} \cos^r\theta \sin\theta \left[\operatorname{sign}\left[\sin(n+1)\theta\right]\right] d\theta$$

enligt lemma 2.

Lemma 3: Ekvationen $\int_{-1}^{+1} x^n \operatorname{sign} U_n(x)\, dx = 2^{-nt} \quad \ldots (4)$

Bevis: Beviset inskränker sig till i likhet med föregående lemma att visa att ekvationen $\int_0^{\pi} \cos^n\theta \sin\theta \operatorname{sign}\left[\sin(n+1)\theta\right] d\theta = \frac{1}{2^{n-1}}$ gäller.

Denna integral är lika med $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \left[\cos^{n+1}\left(\frac{k+1}{n+1}\right)\pi - \cos^{n+1}\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right]$.

Genom att notera att $\cos^{n+1}\theta = \frac{\cos(n+1)\theta}{2^n} + \sum_{m=0}^{n} a_m \cos m\,\theta$ och genom att använda (2) begränsar sig lemmat till att identiteten

$$\frac{1}{2^n(n+1)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \left[\cos (k+1)\pi - \cos k\pi\right] = \frac{1}{2^{n-1}}$$ vilket uppenbarligen stämmer. Vi återvänder nu till beviset av Zolatarev- Korkins teorem

Bevis: Låt $P_n(x)$ vara godtyckligt polynom av grad n med koefficienten för x^n lika med 1. Av (3) och (4) får vi då $\int_{-1}^{+1} P_n(x) \operatorname{sign}\left[U_n(x)\right] dx = \frac{1}{2^{n-1}}$

varav $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \int_{-1}^{+1} |P_n(x)|\, dx$. Men för $P_n(x) = U_n(x)$ gäller likhetstecknet.

Kalla integralen i nämnaren för I. Dess värde förblir oförändrat om vi gör transformationen $T-\tau \to \tau$. Vårt problem är således att söka $\min_{\lambda i}$ I. Gör transformationen $\left[x = \frac{2\tau}{T} - 1\right]$

$$I = \int_{-1}^{+1} \left| \left[(x+1)\frac{T}{2}\right]^{n-1} + (n-1)\left[(x+1\frac{T}{2}\right]^{n-2} + \ldots \right| \frac{T}{2}\,dx$$

Bryt ut $\left[\frac{T}{2}\right]^{n-1}$. Kvar står mellan absolutbeloppstecknen ett polynom av grad n-1 och med koeff. för $x^{n-1} = 1$. Det polynom som minimerar I är enligt föregående $U_{n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin(n.\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Detta medför att

$$I = \left[\frac{T}{2}\right]^n \cdot 2^{2-n}.$$

Minimitiden T_o bestämmes ur $L = \frac{|\lambda^* . \underline{x}|}{||k^*(T-\tau)||}$

$$1 = \frac{|a|}{\left[\frac{T_o}{2}\right]^n \cdot 2^{2-n}} \quad ; \quad T_0 = 4\sqrt[n]{\frac{|a|}{4}}$$

Vi fann alltså att $k^*(x) \sim \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$

Vid beräkningen gjordes två transformationer

$T-\tau \to \tau \to (x+1)\frac{T}{2} = D \quad x = 1- \frac{2\tau}{T}$, vilket medför

$$k^*(T_0-\tau) \sim \frac{\sin(n \arccos(1-\frac{2\tau}{T_o}))}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$u(\tau) = \text{sign}\left[a \cdot \sin(n \arccos(1- \frac{2\tau}{T_o}))\right]$$

<u>Ex 2</u> Ett system har begynnelse-tillståndet noll. Bestäm en styrsignal $|u(\tau)| \leq 1$ sådan att systemet på kortast möjliga tid går till tillståndet $x_1(T) = a$ och resten av tillståndsvariablerna = 0

Systemet givet genom

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$\underline{x(T)} - e^{AT}\underline{x(0)} = \int_0^T e^{A(T-\tau)} . B . u(\tau)\, d\tau.$$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ medför att

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x(T)} = \int_0^T \begin{bmatrix} 1, & T-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$\underline{x(T)} = \int_0^T \begin{matrix} T-\tau \\ 1 \end{matrix} \cdot u(\tau)\, d\tau$$

d v s $h_1(T-\tau) = T-\tau$

$h_2(T-\tau) = 1$

$$n(\tau) = L \text{ sign}\left[\underline{\lambda}^{*} \cdot \underline{e}_d\right] \cdot \text{sign}\left[k^{*}(T_0-\tau)\right]$$

$$\underline{e}_d = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}; \quad L = 1$$

Uppsättningen λ_i bestämmes ur $\max\limits_{\lambda i} \dfrac{|\underline{\lambda}\, \underline{e}_d|}{||k(T- \ )||}$

I detta fallet: $\max\limits_{\lambda i} \dfrac{|a|}{\int_0^T |T-\tau + \lambda_2|\, d\tau}$ där vi satt $\lambda_1 = 1$

Gör transformationerna $T-\tau \rightarrow \tau \rightarrow (x+1)\frac{T}{2}$

Sätt integralen i nämnaren = I

$$I = \int_{-1}^{+1} \left| (x+1)\frac{T}{2} + \lambda_2 \right| dx \cdot \frac{T}{2} = \frac{T^2}{4} \int_{-1}^{+1} \left| x + 1 + \lambda_2 \cdot \frac{2}{T} \right| dx$$

Vårt problem är att söka $\min\limits_{\lambda 2} I.$

Detta ernås för $U_1(x) = x$ d v s $\lambda_2 = -\frac{T}{2}$ $\quad I = \frac{T^2}{4} \cdot 1$

Minimitiden T_o bestämmes ur L =

$$L = \frac{|\underline{\lambda}^{*} \cdot \underline{e}_d|}{||k^{*}(T- \ )||}$$

$$1 = \frac{|a|}{\frac{T^2}{4}}; \quad T_o = 2\sqrt{|a|}$$

$$u(\tau) = \text{sign}\left[a(T_0 - \tau - \frac{T_0}{2})\right] = \text{sign}\left[a(\frac{T_0}{2} - \tau)\right]$$

Ex 3 Som Ex 2. Systemet givet av $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 1, & T, & \frac{T^2}{2} \\ 0, & 1, & T \end{bmatrix}$$

Analogt med ex 2 får vi

$$x(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 1, & T-\tau, & \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ 0, & 1, & T-\tau \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau.$$

$$x(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ T-\tau \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{cases} h_1\ (T-\tau) = \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ h_2\ (T-\tau) = T-\tau \\ h_3(T-\tau) = 1 \end{cases} \qquad \underline{e}_d = \begin{bmatrix} a \\ o \\ o \end{bmatrix}$$

Bestämning av maximerande λ_i

$$\max_{\lambda_i} \frac{|a|}{\int_o^T \left| \frac{(T-\tau)^2}{2} + (T-^{\tau})^{\lambda}{}_2 + {}^{\lambda}{}_3 \right| d^{\tau}} \qquad \text{med } \lambda_1 = 1$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \left| \left[(x+1)\frac{T}{2}\right]^2 \cdot \frac{1}{2} + (x+1)\frac{T}{2}\lambda_2 + \lambda_3 \right| \frac{T}{2}\, dx =$$

$$= \frac{T^3}{16} \int_{-1}^{+1} \left| x^2 + 2x + 1 + \frac{\lambda_1 \cdot 4}{T} x + \frac{\lambda_1 \cdot 4}{T} + \frac{\lambda_2 \cdot 8}{T^2} \right| dx$$

Minimum för $U_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}$

$I = \frac{T^3}{16} \cdot \frac{1}{2}$; Minimitiden T_o bestämmes ur

$$1 = \frac{|a|}{\frac{T_o^3}{32}} \; ; \qquad \underline{\underline{T_o = 2\sqrt[3]{|a| \cdot 4}}}$$

$$u(\tau) = \text{sign } a \cdot \text{sign } u_2 \left(1- \frac{2\tau}{T}\right)$$

$$u(\tau) = \text{sign}\left[a\left(\left(1- \frac{2\,\tau}{T}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)\right] = \text{sign}\left[a\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{T_o\tau}{2} + \frac{3T_o^2}{32}\right)\right]$$

Ex 4 Som ex 2. Systemet givet av

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 1, & T, & \frac{T^2}{2}, & \frac{T^3}{6} \\ 0, & 1, & T, & \frac{T^2}{2} \\ 0, & 0, & 1, & T \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{(T-\tau)^3}{6} \\ \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ T-\tau \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{cases} h_1(T-\tau) = \frac{(T-\tau)^3}{6} \\ h_2(T-\tau) = \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ h_3(T-\tau) = T-\tau \\ h_4(T-\tau) = 1 \end{cases}$$

$$\underline{e}_d = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bestämning av maximerande λ_i

$$\max_{\lambda i} \frac{|a|}{\int_0^T \left| \frac{(T-\tau)^3}{6} + \lambda_2 \frac{(T-\tau)^2}{2} + \lambda_3 (T-\tau) + \lambda_4 \right| d\tau}$$

Gör som förut transformationerna $T-\tau \to \tau \to (x+1)\frac{T}{2}$

Bryt ut $\frac{T^3}{8}$. Vi får

$$I = \frac{T^4}{96} \int_{-1}^{+1} x^3 + \ldots \quad dx$$

Minimum I för $u_3(x) = x^3 - x/2$

$I = \frac{T^4}{96} \cdot \frac{1}{4}$. Bestämning av minimal tid T_o sker genom

$$L = \frac{|\lambda^* . \bar{e}_d|}{||k^*(T-\tau)||}, \quad ; \quad 1 = \frac{|a|}{\frac{T^4}{96} \cdot \frac{1}{4}} \quad ; \quad \underline{\underline{T_o = 2\sqrt[4]{24 . a}}}$$

$$\underline{u(\tau)} = \text{sign } a . \text{sign } u_3 \left[1- \frac{2\tau}{T_o}\right] = \text{sign}\left[a\left[(-\frac{2\tau}{T_o})^3 - \frac{1}{2}(1- \frac{2\tau}{T_o})\right]\right] =$$

$$\underline{\underline{= \text{sign}\left[a . \left[\frac{T_o^{\,3}}{96} - \frac{5}{48} T_o^{\,2} . \tau + \frac{1}{4} T_o \tau^{\,2} - \frac{\tau^3}{6}\right]\right]}}$$

Sammanfattning för $|a| = 1$

	T_o
ex 2	2,00
ex 3	3,17
ex 4	4,42

$$I = \int_{-1}^{+1} \left| \left[(x+1) \frac{T}{2}\right]^2 \cdot \frac{T}{2} + (x+1) \frac{T}{2} \lambda_2 + \lambda_3 \right| \frac{T}{2} dx =$$

$$= \frac{T^3}{16} \int_{-1}^{+1} \left| x^2 + 2x + 1 + \frac{\lambda_1 . 4}{T} x + \frac{\lambda_1 . 4}{T} + \frac{\lambda_2 . 8}{T^2} \right| dx$$

Minimum för $u_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}$

$= = \frac{T^3}{16} \cdot \frac{1}{2}$; Minimitiden T_o bestämmes ur

$$I = \frac{|a|}{\frac{T_o^{\,3}}{32}} \quad ; \quad \underline{\underline{T_o = 2\sqrt[3]{|a| . 4}}}$$

$$u(\tau) = \text{sign } a . \text{sign } u_2(1- \frac{2\tau}{T})$$

$$\underline{\underline{u(\tau) = \text{sign}\left[a\left((1- \frac{2\tau}{T})^2 - \frac{1}{4}\right)\right] = \text{sign}\left[a\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{T_o \tau}{2} + \frac{3}{32} T_o^{\,2}\right)\right]}}$$

<u>Ex 4</u> Som ex 2 Systemet givet av

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 1, & T, & \frac{T^2}{2}, & \frac{T^3}{6} \\ 0, & 1, & T, & \frac{T^2}{2} \\ 0, & 0, & 1, & T \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{(T-\tau)^3}{6} \\ \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ T-\tau \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau \qquad \begin{cases} h_1(T-\tau) = \frac{(T-\tau)^3}{6} \\ h_2(T-\tau) = \frac{(T-\tau)^2}{2} \\ h_3(T-\tau) = T-\tau \\ h_4(T-\tau) = 1 \end{cases}$$

$$\underline{e}_d = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Bestämning av maximerande</u> λ_i <u>då styrsignalen begränsad av</u> $\underline{\int_0^T u^2(\tau)\, d\tau^{\frac{1}{2}} \leq L}$

d v s $||u(\tau)||_2 \leq L$. medför $p = q = 2$
I detta fallet bestämmes λ_i ur $\max_{\lambda_i} \dfrac{|\lambda \cdot \underline{e}_d|}{||k(T- \ )||_2} =$

$$= \max_{\lambda_i} \frac{|\sum_i \lambda_i e_i^d|}{\left[\int_0^T |\sum_i \lambda_i . h_i(T-\tau)|^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}} = \max_{\lambda_i} \frac{|\sum \lambda_i e_i^d|}{\left[\int_0^T (\sum \lambda_i h_i(T-\tau))^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}} .$$

Vi betraktar fallet då initialtillståndet $\underline{x(0)} = 0$ och endast en tillståndsvariabel ändras, d v s $\underline{x(T)} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Detta medför att $e_2^d =$

$\ldots = e_n^d = 0$. Uttrycket som skall maximeras förenklas till

$$\max_{\lambda_i} \frac{|a|}{\left[\int_0^T (h_1(T-\tau) + \lambda_2\, h_2(T-\tau) + \ldots + \lambda_n h_n(T-\tau))^2\, d\tau\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Här har vi precis som i fallet med $p = \infty$ satt $\lambda_i = 1$. Antag vidare att integranden i nämnaren är ett polynom i τ. Att söka maximum för ovanstående uttryck är ekvivalent med att söka minimum för nämnaren. Man kan visa (se bevis nedan) att det polynom av n:te graden $P_n(x) = x^n + a_n - 1\, x^{n-1} + \ldots + a_o$ som minimerar $\int_{-1}^{+1} (P_n(x))^2 dx$ är legendre

polynomen $\dfrac{n\,!}{2n!} \cdot \dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$.

<u>Problem</u>: Sök den funktion $f(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_o$ som minimerar

$$\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx.$$

<u>Bevis:</u> $\frac{D}{D\alpha_i} \int_{-1}^{+1} f^2(x)\,dx = 2 \int_{-1}^{+1} x^i . f(x)\,dx = 0$

Vi skall visa att $\int_{-1}^{+1} x^i f(x)\,dx = 0$ om $0 \leq i < n$ för $f(x) =$

$$= \frac{n!}{2n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \text{ ; ty } \int_{-1}^{+1} x^r \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = \left[\underbrace{x^r \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n}_{=0} \right]_{-1}^{+1} -$$

$$\int_{-1}^{+1} rx^{+1} ! \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx = \ldots = (-1)^r r! \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}(x^2-1)^n dx = 0$$

De första legendre polynomen $x_n(x)$ är

$$\begin{cases} x_o(x) = 1 \\ x_1(x) = x \\ x_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \\ x_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} x \\ x_4(x) = x^4 - \frac{6}{7} x^2 + \frac{3}{35} \\ x_5(x) = x^5 - \frac{10}{9} x^3 + \frac{5}{21} x \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} x_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1} \left[\frac{n!}{1.3.5..(2n-1)} \right]^2$$

<u>Ex 5</u>

Som ex 1 med den skillnaden att inskränkningen på $u(\tau)$ är $||u(\tau)||_2 \leq 1 = L$ Arten av begränsning på u( ) erhålles om man sätter p=g=2. Den optimala styrsignalen blir:

$$u(\tau) = \frac{L^2 . \overset{\max *}{\underline{\lambda}} . \underline{x}}{|\underline{\lambda}^* . \underline{x}|^2} . (k^*(T_o-\tau)) = \frac{L^2}{\underline{\lambda}^* \underline{x}} . k^*(T_o-\tau)$$

λ_i^* bestämmes ur $||u||_2 = \max\limits_{\lambda_i} \frac{|\underline{\lambda} \; \underline{x}|}{||k(T-\tau)||_2} =$

$$= \max_{\lambda i} \frac{|a|}{\left[\int_0^T \left((T-\tau)^{n-1} + (n-1)(T-\tau)^{n-2} \lambda_2 + \ldots + (n-1)(n-2)\,..1 \lambda \lambda_n \right)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}}}$$

där vi som förut satt $\lambda_1 = 1$. Beteckna nämnaren med I. Vårt problem är ekvivalent med att minimera I. Gör substitutionerna $T-\tau \to \tau \to (x+1)\frac{T}{2}$ och bryt ut så att vi får ett polynom av grad n-1 med koeff 1 för x^{n-1}.

$$I = \left[\frac{T}{2}\right]^{n-\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^{+1} \left[x^{n-1} + \dots\right]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Legendrepolynomet $\frac{(n-1)!}{(2n-2)!} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-1}}$ minimerar I.

$$I = \frac{T}{2}^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{2n-1} \left[\frac{(n-1)!}{1.3.5.\,.\,.(2n-3)}\right]^2}$$

Minimitiden T_o bestämmes ur $L = \frac{|\lambda^*\cdot \underline{e}_d|}{||k^*(T-\tau)||_2}$.

$$1 = \frac{|a|}{\left[\frac{T}{2}\right]^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{2n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{1.3.5\dots(2n-3)}^2}}$$

$$T_o = 2 \sqrt[n-\frac{1}{2}]{\frac{|a| \sqrt{n-\frac{1}{2}} \cdot (1.3.5 \dots 2n-3)}{(n-1)!}}$$

Vi fann att $k^*(x) = \frac{T_o}{2}^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(2n-2)} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-1}} \to k^*(T_o-\tau) =$

$$= \frac{(n-1)!}{(2n-2)!} \frac{d^{n-1}\left(4\frac{\tau^2}{T_o^2} - \frac{4\tau}{T_o}\right)^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1}$$

$$\text{varav } u(\tau) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(n-1)!}{(2n-2)!} \cdot \frac{d^{n-1}\left(\frac{4\tau^2}{T_o^2} - \frac{4\tau}{T_o}\right)}{d\tau^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1}$$

<u>Ex 6</u> Som ex 2. Skillnaden är att begränsningen på $u(\tau)$ är $||u(\tau)||_2 \leq 1 = L$ d v s p=q=2.

λ_2^* bestämmes ur $\max\limits_{\lambda i} \frac{|\lambda\, \underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_2} = \max\limits_{\lambda_i} \frac{|a|}{\left[\int_0^T (T-\tau+\lambda_2)^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}}$

där vi satt $\lambda_1 = 1$. Gör subst. $T-\tau \to$

$\to \tau \to (x+1)\frac{T}{2}$ medför $\max\limits_{\lambda i} \frac{|a|}{\left[\frac{T^3}{8} \int_{-1}^{+1} \left[x + 1 + \frac{2}{T}\lambda_2\right]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}}$

Minimum för nämnaren ernås för legendrepolynomet $x_1(x) = x$.

Medför att $k^*(T-\tau) = \frac{T_o}{2}\left(1-\frac{2\tau}{T_o}\right)$

Optimala tiden bestämmes ur $L = \frac{|\lambda^* e_d|}{\|k^*(T-\tau)\|_2}$

$$l = \frac{|a|}{\sqrt{\frac{T_o^3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}} \; ; \quad \underline{\underline{T_o = |a|^{\frac{2}{3}} \cdot 12^{\frac{1}{3}}}}$$

$$\underline{u(\tau)} = \underline{\underline{\frac{L^2}{\lambda^* e_d} \cdot k^*(T_o-\tau) = \frac{1}{a}\cdot\frac{T_o}{2}\left(1-\frac{2\tau}{T_o}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{T_o}{2}-\tau\right)}}$$

Ex 7 Som ex 3. Skillnaden är att begränsningen på $u(\tau)$ är $\|u(\tau)\|_2 \leq l = L$; $p=q=2$

λ_i^* bestämmes ur $\max\limits_{\lambda_i} \frac{|\lambda e_d|}{\|k(T-\tau)\|_2} = \max\limits_{\lambda_i} \frac{|a|}{\left[\int_0^T \left(\frac{(T-\tau)^2}{2}+\lambda_2(T-\tau)+\lambda_3\right)^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}}$

där vi satt $\lambda_1 = 1$. Gör substit. $T-\tau \to \tau \to (x+1)\frac{T}{2}$ medför

$$\max_{\lambda_i} \frac{|a|}{\left[\frac{T^5}{128}\int_{-1}^{+1}\left[x^2+2x+1+\frac{\lambda_2 4}{T}x+\lambda_2\frac{4}{T}+\lambda_3\frac{8}{T^2}\right]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Minimum för nämnaren ernås för legendrepolynomet $x_2(x) = x^2 - 1/3$. Detta medför att $k^*(T_o-\tau) = \frac{T_o^2}{8}\left[\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)^2 - 1/3\right] = \frac{T_o^2}{12} - \frac{T_o\tau}{2} + \frac{\tau^2}{2}$

Optimala tiden bestämmes ur $L = \frac{|\lambda e_d|}{\|k^*(T_o-\tau)\|_2}$

$$l = \frac{|a|}{\sqrt{\frac{T_o^5}{128}}\cdot\sqrt{\frac{8}{45}}} \quad \text{Medför} \quad \underline{\underline{T_o = 720^{\frac{1}{5}} \cdot |a|^{\frac{2}{5}}}}$$

$$\underline{u(\tau)} = \frac{L^2}{\lambda^* e_d} \cdot k^*(T_o-\tau) = \underline{\underline{\frac{1}{a}\cdot\left[\frac{T_o^2}{12} - \frac{T_o}{2} + \frac{\tau^2}{2}\right]}}$$

Ex 8 Som ex 4 med $||u(\tau)||_2 \leq 1$ p=q=z

λ_i^* bestämmes ur $\max\limits_{\lambda\, i} \dfrac{|\underline{\lambda}\, \underline{e}_d|}{||k(T-\tau)||_2} = \max\limits_{\lambda_i} \dfrac{|a|}{\left[\int_0^T \left(\frac{(T-\tau)^3}{6} + \lambda_2 \frac{(T-\tau)^2}{2} + \lambda_3 (T-\tau) + \lambda_4\right)^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}}$

där vi satt $\lambda_1 = 1$ Gör subst. $T-\tau \to \tau \to (x+1)\frac{T}{2}$ medför

$$\max_{\lambda_i} \frac{|a|}{\left[\frac{T^7}{48^2 \cdot 2} \int_{-1}^{+1} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Minimum för nämnaren ernås för legendrepolynomet

$x_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} x$. Detta medför att $k^*(T_o - \tau) = \frac{T_o^3}{48} \left((1 - \frac{2\tau}{T})^3 - \frac{3}{5}(1 - \frac{2\tau}{T})\right) =$

$$= \frac{T_o^3}{120} - \frac{T_o^2}{10} + \frac{T_o \tau^2}{4} - \frac{\tau^3}{6}$$

Optimala tiden bestämmes ur $L = \dfrac{|\underline{\lambda}\, \underline{e}_d|}{||k^*(T_o - \tau)||_2}$

$$1 = \frac{|a|}{\sqrt{\frac{T_o^7}{48^2 \cdot 2}} \cdot \sqrt{\frac{8}{175}}} \; ; \qquad \underline{T_o = |a|^{2/7} \cdot \left(\frac{48^2 \cdot 2 \cdot 175}{8}\right)^{\frac{1}{7}}}$$

$$u(\tau) = \frac{L^2}{\underline{\lambda}\, \underline{e}_d} k^*(T_o - \tau) = \frac{1}{a}\left[\frac{T_o^3}{120} - \frac{T_o^2 \tau}{10} + \frac{T_o \tau^2}{4} - \frac{\tau^3}{6}\right]$$

Sammanfattning för $|a| = 1$

	T_o
Ex 6	2,30
Ex 7	3,73
Ex 8	5,18

Geronomus metod för bestämning av $u(\tau)$ då flera tillståndsvariabler ändras och $q=1$.

Det uttryck vi skall maximera har följande utseende:

$$\max_{\lambda i} \frac{\left|\sum_i \lambda_i \, e_i^d\right|}{\int_0^T \left|\sum_i \lambda_i h_i (T-\tau)\right| d\tau} .$$

I det allmänna fallet är två eller flera e_i^d skilda från noll. Då detta inträffar kan vi ej använda oss av Chebyshev-polynomen vid maximeringen, eftersom vi då λ_i även i täljaren. Den ryska matematikern Geronimus har utvecklat en metod för lösande av ovanstående maximeringsproblem.

Presentation av Geronimus metod.

Problemställning: Sök maximum av $\omega(P) = a_o A_o + a_, A_, + \dots + A_s a_s$

$s \leq n$ för alla polynom $P(x)$ av grad $\leq n$.

$P(x) = A_o x^n + A_, x^{n-1} + \dots + A_n$ under bivillkoret $\int_{-1}^{+1} |P(x)|\, dx \quad 1.$ $a_o \dots a_s$ kända tal.

Man kan visa att om det polynom $P(x)$, för vilket maximum erhålles, är av grad n måste det ha n st. steckenväclingar inuti intervallet $-1,+1$, d v s dess rötter är $-1 < \eta_, < \eta_2 \dots < \eta_n < 1$. Om polynomet $P(x)$ bara har n-k teckenväxlingar i $[-1\ ,\ +1]$ och är $P(x) = P_{n-k}(x) . \Theta(x)$ där $\Theta(x) \geq 0$ för $-1 \leq x \leq 1$ så kan $P(x)$ ersättas med $P_{n-k}(x)$ som har n-k teckenväxlingar i $[-1, +1]$. I fortsättningen antar vi att $P(x)$ är av grad n och har n rötter inuti $[-1, +1]$. Det är lämpligt att skriva om $P(x)$ som $\sum_{i=0}^{n} B_i U_{n-1}(x)$ där $u_k(x) = \frac{\sin(k+1)\rho}{\sin}$; $\rho = \arccos x$

$$\omega(P) = \sum_{i=0}^{s} a_i A_i = \sum_{i=0}^{s} b_i B_i .$$

Vi skall först beräkna b_i.

Teorem: Om man i uttrycket $\frac{1}{2} A(x) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{s} \frac{a_r}{x^{n-r+1}}$ byter ut x mot $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ och söker koeff för

$\frac{1}{z^{n+1}}, \frac{1}{z^n}, \dots \frac{1}{z^{n-s+1}}$ erhålles b_i dvs

$$\frac{1}{2} A. \left[\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right] = \frac{b_s}{z^{n-s+1}} + \dots + \frac{b_1}{z^n} + \frac{b_0}{z^{n+1}} + \left(\frac{1}{z^{n+2}}\right) \text{ där}$$

$\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right)$ betyder termerna $\frac{1}{z^{n+2}}, \frac{1}{z^{n+3}}$ o s v

Av detta teorem erhålles

$$b_k = \sum_{r=0}^{\boxed{\frac{s-k}{2}}} \frac{2^{n-k-2r}}{a_{k+2r}} \binom{-n+k+2r-1}{r}; \quad k = 0,1 \ldots . s$$

Vårt problem lyder nu sålunda: Bestäm maximum för $\omega(P) = \sum_{k=0}^{s} b_k B_k$

under villkoret $L(P) = \int_{-1}^{+1} \left| \sum_{i=0}^{n} B_i U_{n-1}(x) \right| dx = 1$

Låt rötterna till P(x) vara $-1 < \eta_1 < \eta_2 \ldots . < \eta_n < 1$

Eftersom $\int U_i(x)\,dx = \frac{T_i + 1\,(x)}{i+1} + c$ där $T_i(x) = \cos(v \arccos x)$ får vi

$$L(P) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n B_n - i}{i+1} \left\{ (-1)^1 + 2\,T_{i+1}(\eta_1) - {}^{\eta}2\,T_{i+1}(\eta_2) + \ldots + 2(-1)^{n-1} \right.$$

$\left. T_i + 1\,(\eta_n) + (-1)^n \right\}$. Villkor för maximum: $b_{n-1} =$

$$\frac{\lambda\,(-1)^n}{i+1} \left\{ (-1)^i + 2\,T_{i+1}(\eta_1) - 2\,T_{i+1}(\eta_2) + \ldots + \ldots + 2(-1)^{n-1} \right.$$

$$\left. T_i + 1\,(\eta_n) + (-1)^n \right\} \ldots (1)$$

Genom att multiplicera med B_{n-i} och summeraerhåller vi $\omega(P) = \lambda\, L(P)$

För att finna λ och η_i dividerar vi båda sidorna i (1) med $(-1)^n \cdot \frac{z^{i+2}\lambda}{i+1}$

och summerar. Vi får

$$\frac{(-1)^n}{\lambda} \sum_{i=n-s}^{n} \frac{b_{n-1}\,(i+1)}{z^{i+2}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i + (-1)^n}{z^{i+2}} + 2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{n} \frac{T_i + 1(\eta_k)}{z^{i+2}};$$

Då gäller för $|z|>1$

$$2 \sum_{i=0}^{n} \frac{T_{i+1}(\eta_k)}{z^{i+2}} = -\frac{2}{z} + \left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z-z_k^{-1}}\right) + \left(\frac{1}{z^{n+3}}\right)$$

Vidare gäller:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n + (-1)^i}{z^{i+2}} = \begin{cases} \frac{2}{z^2-1} + \left(\frac{1}{z^{n+4}}\right) & \text{n-jämn} \\ -\frac{2}{z(z^2-1)} + \left(\frac{1}{z^{n+4}}\right) & \text{n-udda} \end{cases}$$

Antag n uddag:

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=n-s}^{n}\frac{b_{n-i}(i+1)}{z^{i+2}} = -\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}+\sum_{k=1}^{v}\left(\frac{1}{z-z_{2k-1}}+\frac{1}{z-z_{2k-1}^{-1}}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{v-1}\left(\frac{1}{z-z_{2k}}+\frac{1}{z-z_{2k}^{-1}}\right)+\left(\frac{1}{z^{n+3}}\right)\ ;\ v=\left[\frac{n+1}{2}\right] \quad \ldots\ldots(2)$$

Sätt $\psi(x)=\prod_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(x\ \eta_{2k-1})$; $\psi(x)=\prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(x-\eta_{2k})$

Integrera (2) från till z.

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=n-s}^{n}\frac{b_{n-i}}{z^{i+1}} = \log\frac{2z}{z^{2}-1}+\log\frac{\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\right]}{\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}+\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right)\ \ldots(3)$$

varav $$\log\left\{\frac{z-z^{-1}}{2}\cdot\frac{\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}{\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}\right\} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{s}\frac{b_i}{z^{n-i+1}}+\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right)$$

Antag $s\leq\left[\frac{n}{2}\right]$

(3) kan skrivas $$\log\left\{1+\frac{\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]-\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}{\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}\right\}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{s}\frac{b_i}{z^{n-i+1}}$$

$\ldots\ldots(4)$

Man kan visa att $\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]+\psi\left[\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^{v-s}\cdot q(z)$

där q(z) polynom av grad s med reella koeff $q(z)=\sum_{i=0}^{s}d_i z^{s-i}$

Dessutom $\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\right]=z^{-(v-s)}.q\left(\frac{1}{z}\right)\ \ldots(5)$

Vårt problem är således reducerat till att finna koeff för polynomet q(z)

Utveckla (4) : $$\frac{\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}{\psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{s}\frac{b_i}{z^{n-i+1}}+\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right)$$

Om vi använder (5) fås:

$$\frac{1}{z^{v-s}}\, q\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=0}^{s} \frac{b_i}{z^{n-i+1}} \cdot \sum_{i=0}^{s} \alpha_i \left[z^{v-i} + z^{-(v-i)} \right] + \left(\frac{1}{z^{v+1}}\right)$$

där vi använt $(x) = \sum_{i=o}^{s} \alpha_i\, T_{v-i}(x)$

Varur följer:

$$\mu(\alpha_o + a_1 z + \ldots + \alpha_s z^s) = (\alpha_o z^s + \ldots\ \alpha_s).(b_s + \frac{b_{s-1}}{z} + \ldots + \frac{b_o}{z^s}) + (\frac{1}{z})$$

där $\mu = 2\lambda$

Ur ovanstående erhålles följande ekv. system.

$$\begin{cases} \alpha_o b_o + \alpha_1 b_1 + \ldots + {}_s b_s = \mu\alpha_o \\ \alpha_o b_1 + \alpha_1 b_2 + \ldots + \alpha_s{-1}\, b_s = \mu\alpha_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_o b_s = \mu\alpha_s \end{cases}$$

<u>μ beräknas ur</u>

$$\begin{vmatrix} b_o - \mu, & b_1, & b_2 \ldots b_s \\ b_1, & b_2 - \mu, & \ldots\ b_s,\ 0 \\ \vdots & & \\ b_s, & 0, & \ldots\ldots\ldots\ \mu \end{vmatrix} = 0$$

Låt μ_o vara roten med störst absolutvärde.
Lösningen på vårt problem är då
$\omega(P) = \frac{1}{2} |\mu_o|$

P(x) bestämmes på följande sätt

$$q(z) = \Sigma\alpha_i\, z^{s-i} = K \begin{vmatrix} b_o - \mu_o, & b_1 \ldots\ldots b_s \\ b_1, & b_2 - \mu_o \ldots\ 0 \\ b_{s-1}, & b_s,\ 0 \ldots,\ \mu - {}_o,\ 0 \\ z^s, & z^{s-1}, \qquad 1 \end{vmatrix}.$$ Härav erhålles α_i

Man kan visa: $P(x) = \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=0}^{s} \alpha_i \alpha_k\, U_{n-i-k}(x)$

För n jämt erhålles exakt samma uttryck.

Lösning av maximeringsproblemet då $s \geq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Antag n udda, sätt $x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ i 4 och använd 6
Vi erhåller:

$$\frac{\rho(x)}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{a_n}{x} + \frac{a_{n-1}}{x^2} + \ldots + \frac{a_o}{x^{n+1}}\right)\right] = 4(x) + \left(\frac{1}{x^{v+2}}\right)$$

sätt $\mu = -\frac{1}{\lambda}$

Utveckla VL förutom $\rho(x)$ efter $\frac{1}{x}$ $\quad \frac{\tau_0}{x} + \frac{\tau_1}{x^2} + \frac{\tau_2}{x^3} + \ldots$

Låt $\rho(x) = \gamma_o x^v + \gamma_1 x^{v-1} + \ldots + \gamma_v$

Då erhåller vi följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} \gamma_v \tau_o + \gamma_{v-1}\tau_1 + \ldots + \gamma_o \tau_v = 0. \\ \gamma_v \tau_1 + \gamma_{v-1}\gamma_2 + \ldots + \gamma_o \tau_{v+1} = 0 \\ \vdots \\ \gamma_v \tau_v + \gamma_{v-1}\tau_{v+1} + \ldots + \gamma_o \tau_{2v} = 0 \end{cases}$$

varav vi får en ekvation för μ.

$$\begin{vmatrix} \tau_o, & \tau_1 & \cdots & \tau_v \\ \tau_1, & \tau_2 & \cdots & \tau_{v+1} \\ \vdots & & & \\ \tau_v, & \tau_{v+1} & \cdots & \tau_{2v} \end{vmatrix} = 0.$$

Lösningen på vårt problem blir:
Max $|\omega(P)| = \left|\frac{1}{\mu_o}\right|$ där μ_o är roten med lägsta absolutbeloppet.

$$\rho(x) = k \cdot \begin{vmatrix} \tau_0, & \tau_1 & \cdots & \tau_v \\ \tau_{v-1}, & \tau_v & \cdots & \tau_{2v-1} \\ 1, & x, & \ldots & x^v \end{vmatrix}$$

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{v-1} \delta_i \, x^{v-i-1} \quad \text{gives ur}$$

$$\gamma_o \tau_o = \delta_o$$

$$\gamma_o \tau_1 + \gamma_1 \tau_o = \delta_1$$

$$\vdots$$

$$\gamma_o \tau_{v-1} + \gamma_1 \tau_{v-2} + \ldots + \gamma_{v-1} \tau_o = \delta_{v-1}$$

Det är nödvändigt att visa att $P(x) = \rho(x)\ \psi(x)$ verkligen har n teckenväxlingar i $[-1, +1]$.

<u>n jämt</u>

Samma svar. $v = \frac{n}{2}$ och τ_i erhålles ur

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\mu}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{n-k+1}}\right] = 1 + \frac{\gamma_0}{x} + \frac{\gamma_1}{x^2} + \ldots$$

<u>Kommentar</u>: Det uttryck vi skall maximera ser ut så här

$$\max_i \frac{\left|\sum_i \lambda_i e_i^d\right|}{\int_0^T \left|\sum_i \lambda_i h_i(T-\tau)\right| d\tau}$$. Då vi använder Geronimus metod betyder

det att vi sätter nämnaren = 1 efter variabelsubstitutionerna. $T-\tau \to \tau \to (x+1)\frac{T}{2}$.

Detta är möjligt efterson λ_i ingår i alla termer i både täljare och nämnare. Om $\underline{\lambda}$ maximerar så maximerar sålunda också $\alpha\underline{\lambda}$ där α godtyckligt tal. Välj α så att nämnaren blir ett.

<u>Sammanfattning av Geronimus metod.</u>

Sök max $\omega(P) = a_o A_o + \ldots + A_s a_s$. $s \leq n$ för alla polynom $P(x)$ av grad $\leq n$.

$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ under bivillkoret $\int_{-1}^{+1} |P(x)|dx = 1$

1) $s \leq \left[\frac{n}{2}\right]$. Maximum erhålles ur

$$\begin{vmatrix} b_o - \mu_2 & b_1 & \ldots & b_s \\ b_1, & b_2 - \mu, & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ b_s, & 0 & \ldots & -\mu \end{vmatrix} = 0$$

$$b_k = \sum_{r=0}^{\left[\frac{s-k}{2}\right]} 2^{n-k-2r}\, a_{k+2r} \binom{-n+k+2r-1}{r}$$

$\max |\omega(P)| = \frac{1}{2} \mid \mu_o \mid$ där μ_o roten med största abs.beloppet.

Maximerande polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=0}^{s} \alpha_i\, \alpha_k\, U_{n-i-k}(x)$

där α_i erhålles ur $\sum_{i=0}^{s} \alpha_i\, z^{s-i} = k \begin{vmatrix} b_o & -\mu_o, & b_1 & \ldots b_s \\ & & & \\ b_{s-1}, & b_s & 0 & \ldots -\mu_{010} \\ z^s, & z^{s-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$

(2) $s \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ $\underline{n \text{ udda}}$

Utveckla $\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[+ \frac{\mu}{2} \left(\frac{a_n}{x} + \frac{a_{n-1}}{x^2} + \ldots + \frac{a_o}{x^{n+1}}\right)\right] = \frac{\tau_0}{x} + \frac{\tau_1}{x^2} + \ldots$

μ bestämmes ur $\begin{vmatrix} \tau_o, & \tau_1 \ldots & \tau_v \\ \tau_1, & \tau_2, & \ldots \tau_{v+1} \\ \tau_v, & \tau_{v+1} & \ldots \tau_{2v} \end{vmatrix} = 0 \qquad v = \frac{n+1}{2}$

$\text{Max } |\omega(P)| = \left| \frac{1}{\mu_\theta} \right|$ där μ_o roten med lägsta absolutbeloppet.

$$\rho(x) = \gamma_o x^v + \gamma_1 x^{v-1} + \ldots + \gamma_v = k \begin{vmatrix} \tau_o, & \gamma, & \ldots \tau_v \\ \tau_1, & & \tau_{v+1} \\ \tau_{v-1} & & \tau_{2v-1} \\ 1 & x & x^v \end{vmatrix}$$

$\psi(x) = \sum_{i=0}^{v-1} \delta_i\, x^{v-i-1}$ ges av $\quad \begin{aligned} &\gamma_o \tau_o = \delta_o \\ &\gamma_o \tau_1 + \gamma_1 \tau_o = \delta_1 \\ &\vdots \\ &\gamma_o \tau_{v-1} + \ldots + \gamma_{v-1} \tau_o = \delta_{v-1} \end{aligned}$

Maximerande $P(x) = \rho(x)\, \psi(x)$

Utveckla $\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{\mu}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{n-k+1}}\right] = 1 + \frac{\gamma_o}{x} + \frac{\tau_1}{x^2} + \ldots$

$v = \frac{n}{2}$. Annars som för n udda.

Ex 9 Betrakta följande system $\frac{d^2x}{dt^2} = u \quad |u| \leq 1$

Bestäm en styrsignal sådan att $\begin{cases} x(T) = 0 \\ \frac{dx(T)}{dt} = 0 \end{cases}$ för minsta möjliga T då $\begin{cases} x(0) = 1 \\ \frac{dx}{dt}(0) = 1 \end{cases}$

Sätt = $\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$ Medför $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

Lösningen till detta system av diff. ekv blir

$$\underline{x(t)} - e^{At}x(0) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \,.\, B.u(\tau)\, d$$

$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ enligt ex 2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

Vid t = T : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+T \\ 1 \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix} T-\tau \\ 1 \end{pmatrix} u(\tau)\, d$

$\begin{cases} e_1 d = -(1+T) \\ e_2 d = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1(T-\tau) = T-\tau \\ h_2(T-\tau) = 1 \end{cases}$

Maximerande λ_i bestämmes ur $\max\limits_{\lambda i} \dfrac{|-\lambda(1+T) - \lambda_2|}{\int_0^T |(T-\tau)\lambda_1 + \lambda_2|\, d\tau}$

Gör subst. $T-\tau \to \tau \to (x+1)\frac{T}{2}$ $\qquad \max\limits_{\lambda i} \dfrac{|-\lambda_1(1+T) - \lambda_2|}{\int_{-1}^{+1} \frac{T}{2} \left| \frac{(x+1)}{2} \,.\, T\lambda_1 + \lambda_2 \right| dx}$

Använd Geronimus metod då $s > \frac{n}{2}$ och n udda.

Vi har då: $\begin{cases} \omega(P) = \sum\limits_{i=0}^{1} a_i A_i = -\lambda_1(1+T) - \lambda_2 \\ P_1(x) = \sum\limits_{0}^{1} A_i\, x^{1-i} = \frac{T\lambda_1 x}{2} + \frac{T\lambda_1}{2} + \lambda_2 \end{cases}$

Härur erhålles $\begin{cases} A_o = \frac{T.\lambda}{2} \\ A_1 = \frac{T_{\lambda 1}}{2} + \lambda_2 \end{cases}$ och $\begin{cases} a_o = -\frac{T+2}{T} \\ a_1 = -1 \end{cases}$

d v s $s = n = 1$ medför $v = \frac{n+1}{2} = 1$

Utveckla $\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_o}{x^2}\right)\right] = \frac{1}{x} + \frac{\mu a_1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}\left[\frac{\mu a_o}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu^2 a_1^2}{8}\right] + \ldots$

$$\begin{cases} \tau_o = 1 \\ \tau_1 = \frac{\mu a_1}{2} \\ \tau_2 = \frac{\mu a_o}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu^2}{8} \cdot a_1^2 \end{cases}$$

μ bestämmes ur:

$$\begin{vmatrix} 1 \ ; & \frac{\mu a_1}{2} \\ \frac{\mu a_1}{2} \ , & \frac{\mu a_o}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mu^2 a_1^2}{8} \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \mu = \frac{2a_o}{a_1^2} \pm \sqrt{\frac{4a_o^2}{a_1^4} + \frac{4a_1^2}{a_1^4}} \ ;$$

I vårt fall: $\mu = -\frac{2\ T+4}{T} \pm \frac{2}{T}\sqrt{2T^2 + 4\ T + 4}$

Roten med lägst absolutbelopp fås med plustecknet.

Minimaltiden T_o bestämmes ur $\frac{|\lambda^*.\ e_d|}{||k*(T-\tau)||}, = L = \max_{\lambda i} \frac{|-\lambda_1(1+T) - \lambda_2|}{\int_{-1}^{+1} \frac{T}{2}\left|\left(\frac{x+1}{2}\right)T\lambda_1 + \lambda_2\right| dx}$

Med Gerónimus metod fann vi att

$$\max_{\lambda i} \frac{\qquad}{\int_{-1}^{+1} |\qquad| dx} = \left|\frac{1}{\mu}\right|$$ vilket medför

$$\frac{T}{(2\sqrt{2T^2 + 4T + 4} - 2T - 4)\ \frac{T}{2}} = 1$$ varur $\underline{T_o = 1 + \sqrt{6} \simeq 3,45}$

<u>Bestämning av maximerande P(x)</u>

$$\rho(x) = K\begin{vmatrix} 1 & \frac{\mu a_1}{2} \\ 1 & x \end{vmatrix} = K\left(x - \frac{\mu a_1}{2}\right)$$

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{v-1} \delta_i x^{v-i-1} \quad ; \quad S_o = \gamma_o \gamma_o = K \cdot 1$$

$$P(x) = \rho(x) \cdot \psi(x) = K^2 \left[x - \frac{\mu a_1}{2}\right] = \left[x = \frac{2\tau}{T} - 1 \text{ och } \tau \to T-\tau\right] =$$

$$= K^2 \left[1 + \frac{\sqrt{2T^2+4T+4}}{T} - \frac{T+2}{T} - \frac{2\tau}{T}\right]$$

$$u(\tau) = L \operatorname{sign}\left[\underline{\lambda}^* \underline{e}_d\right] \cdot \operatorname{sign}\left[k^*(T_o - \tau)\right]$$

$$A_o = \frac{T\lambda_1}{2} = K^2 \text{ medför } \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{2K^2}{T} \\ \lambda_2 = K^2\left(\dfrac{\mu}{2} - 1\right) \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{T\lambda_1}{2} + \lambda_2 = \frac{k^2\mu}{2}$$

$$k^*(T_o - \tau) \sim K^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2T_o^2 + 4T_o + 4}}{T_o} - \frac{T_o+2}{T_o} - \frac{2\tau}{T_o}\right)$$

$$\operatorname{sign}\ (\underline{\lambda}^* \underline{e}_d) = \operatorname{sign}\ (-(1+T) \cdot \frac{2}{T} - \frac{\mu}{2} + 1) = -1$$

$$\underline{u(\tau)} = \operatorname{sign}\left[2\tau + T_o + 2 - \sqrt{2T_o^2 + 4T_o + 4} - T_0\right] = \underline{\underline{\operatorname{sign}\left[\tau - 2{,}22\right]}}$$

Ex 10   Som ex 9 med den skillnaden att

$$\begin{cases} x(0) = 10 \\ \dfrac{dx(0)}{dt} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1^d = -10\,(1+T) \\ e_2^d = -10 \end{cases}$$

Maximerande λ_i bestämmes ur : $\max\limits_{\lambda_i} \dfrac{|-10\lambda_1(1+T) - 10\lambda_2|}{\int_0^T |(T-\tau)\lambda_1 + \lambda_2|\, d\tau}$

Gör samma substitutioner som i ex 9

$$\begin{cases} \omega(P) = a_o A_o + a_1 A_1 = -10\,\lambda_1(1+T) - 10\,\lambda_2 \\ P(x) = A_o x + A_1 = \dfrac{T\lambda_1 x}{2} + \dfrac{T\lambda_1}{2} + \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_o = \dfrac{T\lambda_1}{2} \\ A_1 = \dfrac{T\lambda_1}{2} + \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_o = & = -\dfrac{10\,T + 20}{T} \\ a_1 & = -10 \end{cases}$$

De fortsatta beräkningarna som i ex 9

$$\mu = \frac{2ao}{a_1^2} \pm \sqrt{\frac{4a_o^2 + 4a_1^2}{a_1^4}} \quad ; \quad \text{I vårt fall:}$$

$$\mu = -\frac{0{,}2\,T + 0{,}4}{T} \pm \frac{0{,}2}{T}\sqrt{2T^2 + 4\,T + 4}$$

Roten med lägst absolutbelopp fås med plustecknet.

Minimaltiden T_o bestämmes ur $\left|\frac{\lambda^* \cdot e_d}{|k^*(T_o - \tau)|}\right|_T$, $\max_{\lambda_i} L = \dfrac{|-10\lambda_1(1+T) - 10\lambda_2|}{\int_{-1}^{+1} \frac{T}{2}\left|\left(\frac{x+1}{2}\right)T\lambda_1 + \lambda_2\right| dx}$

Med Geronimus metod fann vi att

$$\max_{\lambda_i} \left|\frac{\qquad}{\int_{-1}^{+1} \left|\qquad\right| dx}\right| = \left|\frac{1}{\mu}\right| \text{ vilket medför}$$

$$\frac{T}{(0{,}2\sqrt{2T^2+4T+4} - 0{,}2T - 0{,}4)\,\frac{T}{2}} = 1 \text{ varur } \underline{T_o = 10 \pm \sqrt{240} \approx 25{,}49}$$

Bestämning av maximerande P(x):

$$\rho(x) = k\begin{vmatrix} 1, & \mu a_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = K\left(x - \frac{\mu a_1}{2}\right)$$

$$\psi(x) = \delta_o \;;\; \delta_o = \gamma_o \tau_o = K.1$$

$$P(x) = \rho(x) \,.\, \psi(x) = K^2\left[x - \frac{\mu a_1}{2}\right] = K^2\left[1 - \frac{2\tau}{T_o} + \frac{\sqrt{2T_o^2 + 4T_o + 4}}{T_o} - \frac{T_o + 2}{T_o}\right)\Big]$$

$$u(\tau) = L \text{ sign}\left[\underline{\lambda}^* \underline{e}_d\right] . \text{ sign}\left[k^*(T_o - \tau)\right]$$

$$\begin{cases} A_o = \dfrac{T\lambda_1}{2} = K^2 \\ A_1 = \dfrac{T\lambda_1}{2} + \dfrac{\lambda}{2} K^2 \,.\, 5^{\mu} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{2}{T} \quad K^2 \\ \lambda_2 = K^2\,[5\mu - 1] \end{cases}$$

$$\text{sign}\,(\underline{\lambda}^* \underline{e}_d) = \text{sign}\,\left(-\frac{2}{T}(1+T) \,.\, 10 - (5\mu - 1).\, 10\right) = -1$$

$k^*(T_o - \tau) \;\omega P(T-\tau)$ medför $\underline{\underline{u(\tau)}} = \text{sign}\left[\dfrac{2\tau}{T_o} - 1 - \dfrac{\sqrt{2T_o^2 + 4\,T_o + 4}}{T_o} + \dfrac{T_o + 2}{T_o}\right] =$

$\underline{\underline{\text{sign}\left[\tau - 17{,}77\right]}}$

Fallet p=q=2 med flera tillståndsvariabler ändras.

Styrsignalen begränsas av $||u(\tau)||_2 \leq L$

Två eller flera $e_i d$ skilda från noll. Uttrycket som skall maximeras har följande utseende

$$\max_{\lambda i} \frac{|\lambda e_d|}{||k(T-\tau)||_2} = \max \frac{\left|\sum_i \lambda_i e_i^d\right|}{\left[\int_0^T \left(\sum_i h_i(T_o-\tau) \cdot \lambda_i\right)^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Eftersom λ_i ingår symmertriskt i uttrycket så $\alpha\lambda$ lösning om $\underline{\lambda}$ lösning. Därför väljer vi speciellt $\sum_i \lambda_i e_i^d = 1$ och för-in detta bivillkor i nämnaren. Vårt problem övergår då i bestämning av minimum för nämnaren, vilket kan ske genom pariell derivation efter λ_i t ex sedan integralen beräknats. Vi kan ej använda oss av legendrepolynomen i detta fall eftersom koefficienten för x^n- om integranden polynomen av grad n- innehåller λ_i.

Ex 11 Som ex 9 $||u(\tau)||_2 \leq 1$ d v s $\left[\int_0^T u(\tau)^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \leq 1$

Enligt ex 9 fås vid t = T: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1+T\\1\end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix}T-\tau\\1\end{pmatrix} u(\tau)\, d\tau$

$$\begin{cases} e_1 d = -(1+T) \\ e_2 d = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1(T-\tau) = T-\tau \\ h_2(T-\tau) = 1 \end{cases}$$

Maximerande λ_i bestämmes ur $\max_{\lambda i} \dfrac{\left|-\lambda_1(1+T) - \lambda^2\right|}{\left[\int_0^T ((T-\tau)\lambda_1 + \lambda_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$:

Sätt $-\lambda_1(1+T) - \lambda_2 = 1$ medför $\lambda_2 = -\lambda_1(1+T)-1$

Nämnaren blir: $\left[\int_0^T ((T-\tau)\lambda_1 - \lambda_1(1+T) - 1)^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}} =$

$$= \left[\frac{T^3\lambda_1^2}{3} + \lambda_1^2 T + T + T^2\lambda_1^2 + T^2\lambda_1 + 2\lambda_1 T\right]^{\frac{1}{2}}$$

Derivation ger: $\frac{2}{3}\lambda_1 T^3 + 2\lambda_1 T + 2T^2\lambda_1 + T^2 + 2T = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{2+T}{\frac{2}{3}T^2 + 2T + 2} \\ \lambda_2 = \dfrac{\frac{1}{3}T^2 + T}{\frac{2}{3}T^2 + 2T + 2} \end{cases}$$

d v s nämnaren minimeras av ovanstående λ_1 och λ_2.

Minimaltiden T_o bestämmes ur $\dfrac{|\lambda^* \underline{e}_d|}{||k^*(T_o-\tau)||_2} = L = \max\limits_{\lambda i} \dfrac{|\quad|}{\left[\int_0^T (\quad)^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}}$

Vi beräknar först integralens värde:

$I = \dfrac{T^3}{4T^2+12T+12}$ varav $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{T^3}{4T^2+12T+12}}} = 1$ d v s $T^3 = 4T^2+12T+12$

$$\underline{\underline{T_o \simeq 6,24}}$$

$u(\tau) = \dfrac{L^2}{\lambda^* \underline{e}_d} \cdot k^*(T_o-\tau)$ där $k^*(T_o-\tau) = h_1(T_o-\tau)\,\lambda_1^* + h_2(T_o-\tau)\lambda_2^*$

$$u(\tau) = \frac{1}{\frac{2}{3}T_0^{\,2}+2T_o+2}\left[\tau(2+T_o) - T_o - \frac{2}{3}T_o^{\,2}\right]$$

$$\underline{\underline{u(\tau) = \frac{1}{4,93}\left[\tau - 3,93\right]}}$$

<u>Fallet $q=1$ och polynomen av oändlig grad som integrand i uttrycket som skall maximeras.</u>

Vi skall nedan ge ett exempel på ett system som ger ett polynom av oändlig grad i integranden till det uttryck som skall maximeras. Polynomet erhålles genom beräkning av e^{At}.

<u>Ex 13</u> Betrakta följande system

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = u \text{ med } |u(\tau)| \leq 1$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(T) = a \\ \dfrac{dx(T)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Bestäm den optimala styrsignalen $u(\tau)$

Sätt $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases}$ Då $\dot{x}_2 = u - x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad e^{Ab} = \begin{bmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} \cos(t-\tau), & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau), & \cos(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

Vid $t = T$ $$\begin{bmatrix} a \\ o \end{bmatrix} = \int_0^T \begin{bmatrix} \sin(T-\tau) \\ \cos(T-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{cases} e_1^d = a \\ e_2^d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1(T-\tau) = \sin(T-\tau) \\ h_2(T-\tau) = \cos(T-\tau) \end{cases}$$

Uttrycket vi skall maximera: $\dfrac{|\lambda\, e_d|}{\|k(T-\tau)\|}$, =

$$= \frac{|\lambda_1 a_1|}{\int_0^T |\lambda_1 \sin(T-\tau) + \lambda_2 \cos(T-\tau)|\, d\tau} = \frac{|a|}{\int_0^T |\sin(T-\tau) + \lambda_2 \cos(T-\tau)|\, d\tau}$$

där vi satt $\lambda_1 = 1$

Vårt problem har övergått till att söka minimum för nämnaren.

$$\int_0^T |\sin(T-\tau) + \lambda_2 \cos(T-\tau)|\, d\tau = \int_0^T |\sin\tau + \lambda_2 \cos|\, d\tau = \sqrt{1+\lambda_2^2} \cdot \int_0^T |\sin(\tau+\alpha)|\, d\tau$$

där $\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} = \sin\alpha$; $\dfrac{1}{1+\lambda_2^2} = \cos\alpha$ $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Vi observerar först $\int_0^{\pi} |\sin(x+\alpha)|\, dx = 2$

Antag $k\pi \leq T \leq (k+1)\pi$ där $k = 0, 1, \ldots$

$$\int_0^T |\sin(\tau+\ )|\, d\tau = 2k + \int_0^{T-k\pi} |\sin(\tau+\alpha)|\, d\tau = 2k + \int_{\alpha}^{T+\alpha-k\pi} |\sin\tau|\, d\tau = 2k +$$

Vi erhåller fyra fall för I

(1) $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$

$T + \alpha \leq k\pi$

$$I = -\int_{\alpha}^{T+\alpha-k\pi} \sin\tau\, d\tau = (-1)^k \cos(T+\alpha) - \cos\alpha$$

(2) $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$

$T + \alpha > k\pi$

$$I = -\int_{\alpha}^{0} \sin\tau\, d\tau + \int_{0}^{T+\alpha-k\pi} \sin\tau\, d\tau = 1 - \cos\alpha - (-1)^k\cos(T+\alpha) + 1$$

(3) $\frac{\pi}{2} \geq \alpha > 0$

$T + \alpha < (k+1)\pi$

$$I = \int_{\alpha\ 2}^{T+\alpha-k\pi} \sin\tau\, d\tau = -(-1)^k \cos(T+\alpha) + \cos\alpha$$

(4) $\frac{\pi}{2} \geq \alpha > 0$

$T + \alpha \geq (k+1)\pi$

$$I = \int_{\alpha}^{\pi} \sin\tau\, d\tau - \int_{\pi}^{T+\alpha-k\pi} \sin\tau\, d\tau = 1 + \cos\alpha + (-1)^k \cdot \cos(T+\alpha) + 1$$

Vi går tillbaka till integralen $\sqrt{1+\lambda_2^{\,2}} \int_0^T |\sin(\tau+\alpha)|\, d\tau = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \int_0^T |\sin(\tau+\alpha)|\, d\tau = K$

(1) $K = (-1)^k (\cos T - \sin T \cdot \operatorname{tg}\alpha) - 1 + \frac{2k}{\cos\alpha}$

$$\frac{dk}{d\alpha} = -(-1)^k \frac{\sin T}{\cos^2\alpha} + \frac{2k\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2k\sin\alpha - (-1)^k \sin T}{\cos^2\alpha}$$

Vi har att $\lambda = \operatorname{tg}\alpha$ vilket medför att derivation efter λ kan ersättas med derivation efter α $f'_{\lambda} = \cos^2\alpha \cdot f_{\alpha}^{1}$

(2) $K = \frac{2k+2}{\cos\alpha} - 1 - (-1)^k \left[\cos T - \sin T\, kg\, \alpha\right]$

$$\frac{dK}{d\alpha} = \frac{(2k+2)\sin\alpha + (-1)^k \sin T}{\cos^2\alpha}$$

(3) $K = \frac{2k}{\cos\alpha} - (-1)^k \left[\cos T - \sin T \operatorname{tg}\alpha\right] + 1$

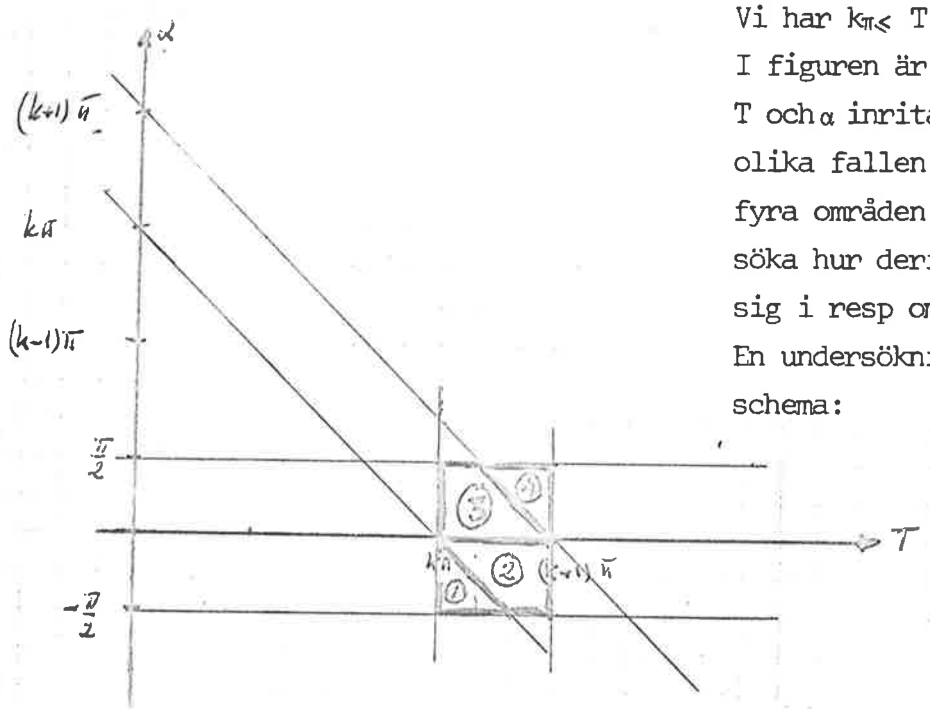
$$\frac{dK}{\lambda\alpha} = \frac{2k\sin\alpha + (-1)^k \sin T}{\cos^2\alpha}$$

(4) $K = \frac{2k+2}{\cos\alpha} + 1 + (-1)^k \left[\cos T - \sin T \operatorname{tg}\alpha\right]$

$$\frac{dK}{d\alpha} = \frac{(2k+2)\sin\alpha - (-1)^k \sin T}{\cos^2\alpha}$$

Vi skall nedan undersöka hur derivatorna uppför sig i resp intervall.

$(k+1)\pi$



Vi har $k\pi \leq T \leq (k+1)\pi$
I figuren är gränserna för T och α inritade för de fyra olika fallen. Vi erhåller fyra områden. Vi skall undersöka hur derivatorna uppför sig i resp områden.
En undersökning ger följande schema:

	k. udda.	k jämn
	$\frac{dK}{d\alpha}$	$\frac{dK}{d\alpha}$
1	<0	<0
2	-0+	-0+
3	>0	>0
4	>0	>0

Alltså: Då α går från $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$ genomlöper $\frac{dK}{d}$ följande:

1 2 3 4
- -0+ + +   Detta gäller för k både jämn och udda.

K har alltså minimum i 2

K jämn

$\frac{dK}{d\alpha} = 0$ medför $\frac{(2k+2)\sin\alpha + \sin T}{\cos^2\alpha} = 0$ d v s $\sin T = -(2k+2)\sin$.

Minimaltiden T_o bestämmes ur $L = \max_{\lambda_i} \frac{|\lambda e_d|}{||k(T-\tau)||_1}$

d v s $1 = \frac{|a|}{K}$ Vi får $\begin{cases} |a| = \frac{2k+2}{\cos\alpha} - 1 - \cos T + \sin T \, tg_\alpha \\ -(2k+2)\sin\alpha = \sin T \end{cases}$

Löser man detta ekvationssystem erhålles:

$$\cos T = \frac{(2k+2)^2 - (|a| + 1)^2 - 1}{2(|a| + 1)} \qquad \text{Men} \quad -1 \leqslant \quad \cos T \leqslant 1$$

medför $-1 \leqslant \dfrac{(2k+2)^2 - (|a| + 1)^2 - 1}{2(|a| + 1)} \leqslant 1$

Dessa två olikheter ger villkoret $2k \leqslant |a| \leqslant 2k+2$ k udda

$\dfrac{dK}{d\alpha} = 0$ medför $\dfrac{(2k+2)\sin\alpha - \sin T}{\cos^2\alpha} = 0$ d v s $\sin T = (2k+2)\sin\alpha$

Ur bestämningen av minimaltiden T_o erhålles på samma sätt som för k jämn

$1 = \dfrac{|a|}{K}$ Alltså $\begin{cases} \sin T = (2k+2)\sin\alpha \\ \dfrac{2k+2}{\cos\alpha} - 1 + \cos T - \sin T \operatorname{tg}\alpha = |a| \end{cases}$

Lösningen till detta ekvationssystem blir

$$\cos T = \frac{-(2k+2)^2 + (|a| + 1)^2 + 1}{2(|a| + 1)} \qquad \text{Men } -1 \leqslant \cos T \leqslant 1$$

Dessa två olikheter ger villkoret $2k \leqslant |a| \leqslant 2k + 2$

$$u(\tau) = L \operatorname{sign}(\underline{\lambda}^* \cdot \underline{e}_d) . \operatorname{sign}(k^*(T_o - \tau))$$
$$= \operatorname{sign}\left\{a(\sin(T_o - \tau) + \lambda_2^* \cos(T_o - \tau))\right\}$$ där $\lambda_2 = \operatorname{tg}\alpha$ och α bestämmes ur $\dfrac{dK}{d\alpha} = 0$

Sammanfattning:

Bestäm i vilket intervall $2k \leqslant |a| \leqslant 2k+2$ $|a|$ ligger: Härur erhålles om k jämt eller udda samt k:s värde.

Om k jämn så $\cos T_o = \dfrac{(2k+2)^2 - (|a| + 1)^2 - 1}{2(|a| + 1)}$

Om K udda så $\cos T_o = \dfrac{-(2k+2)^2 + (|a| + 1)^2 + 1}{2(|a| + 1)}$

$u(\tau) = \operatorname{sign}\left\{a(\sin(T_o - \ ) + \lambda_2^* \cos(T_o - \tau))\right\}$

där λ_2^* $\operatorname{tg}\alpha$ och α bestämmes ur

$$\begin{cases} \text{k jämn: } \sin\alpha = -\dfrac{1}{2k+2} \sin T_o \\ \text{k Udda } \sin\alpha = \dfrac{1}{2k+2} \sin T_o \end{cases}$$

Ex a = 1 medför k = 0 jämn

$\cos T_o = -\frac{1}{4}$; $T_o = 1{,}82$; $\lambda_2^* = -0{,}538$

$u(\tau) = \operatorname{sign}\left\{\sin(1{,}82 - \tau) - 0{,}538 \cos(1{,}82 - \tau)\right\}$

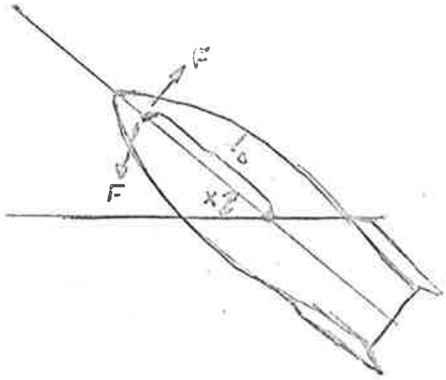
Optimal styrsignal med ytbegränsning.

Ytbegränsning innebär att inskränkningen är av typen $\int_0^T |u(\tau)|\, d\tau \leq L$

d v s P=1; q=∞ .

Ett exempel härpå utgör den styrda raketen, vilketn kontrolleras i två mot varandra vinkelräta plan av jetstrålar som åstadkommer vridningsmomenten $T = F.\ \ell_o$ där ℓ_o är avståndet från tryckcentrum till tyngdpunkten och F är reaktionskraften från en jetstråle.

Antag att raketen ej rullar och vinkeländringen är så liten att icke-lineära effekter under tiden för styrjetstrålarnas aktion kan försummas. Då kan x(t) skrivas



$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

där $(k(t-\tau))$ är viktfunktionen

$k(t-\tau)$ kan bestämmas approximativt genom att man påverkar styrjetstrålarna med Dirac-pulser.

$F = \mu v_e$ där v_e är effektiva gashastigheten, och $\mu = -\frac{dm}{dt}$ massflödet.

$$\text{Impulsen } \mathbb{J} = \int_0^T F(t)\, dt = v_e\, (m(o) - m(T)).$$

Bränsleförbrukningen beror huvudsakligen på impulsen $\mathbb{J}$ eller om bränsleinsprutningen styrs av styrsignalen $u(\tau)$, på $\int_0^T |u(\tau)| d\tau. = L$

Låt oss bestämma den optimala sturs\-ignalen, som för en given bränsleförbrukning L, ändrar vinkeln och dess derivator på minimitid T_o till det önskade läget x_d.

1 Vi intresserar oss bara för vinkeln och ej dess derivator.

Antag för enkelhetens skull att $x(0) = 0$ Då $x(t) = \int_0^t k(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

$$x_d = \int_0^T k(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

Enligt kap 3 blir styrsignalen $u(\tau) = K.\delta(\tau-\tau j)\ .\ \text{sign}\left[k(T_o-\tau)\right]$ där τ_j är den tidpunkt då $\max\limits_{0\leq\tau\leq T_o} k(T_o -)$ ernås.

Vidare: $x_d = \int_0^T k(T-\tau).\ K.\delta\ (\tau_o-\tau_j).\ \text{sign}\left[k(T_o-\tau)\right] d\tau =$

$= K|\ k(T_o - \tau_j)| = K\ .\ \max |k(T_o - \tau)|$

$$K = \frac{x_d}{\max|k(T_o-\tau)|} \qquad \text{varför}$$

$$u(\tau) = \frac{x_d}{\max|k(T_o-\tau)|} \cdot \delta(\tau-\tau_j) \cdot \operatorname{sign}\left[k(T_o-\tau)\right]$$

Minimaltiden T_o bestämmes ur $L = \dfrac{|x_d|}{\max|k(T_o-\tau)|}$

(2) Vi intresserar oss för derivatorna också. D v s $\underline{x}_d = \int_0^T (k(T-\tau))u(\tau)$

där $(k(T-\tau))$ som förut viktfunktionen

Enligt kap 3 blir styrsignalen $u(\tau) = \sum_j K_j \delta(\tau-\tau_j) \cdot \operatorname{sign}\left[k(T_o-\tau)\right]$

där $k(T_o-\tau) = \sum_i \lambda_i k^{(i)}(T_o-\tau) \quad i = 0 \ldots n-1$

$k^{(i)}(T_o-\tau)$ = i:te derivaten av viktfunktionen.

τ_j är de punkter där $\max\limits_{0\leq\tau\leq T_o} |k(T_o-\tau)|$ ernås.

Konstanterna K_j $j = 1 \ldots r$ bestämmes ur

$$x_i = \int_0^T k^{(i)}(T-\tau) \cdot \sum_j K_j \delta(\tau-\tau_j) \operatorname{sign}\left[k(T-\tau)\right] =$$

$$= \sum_j K^{(i)}(T-\tau_j) \operatorname{sign}\left[k(T-\tau_j)\right]$$ d v s man får ett ekv system: $i = 0,\ldots,r-1$.

Maximerande λ_i bestämmes som vanligt ur

$$\max_{\lambda i} \frac{|\underline{\lambda}\,\underline{x}|}{\max\limits_{0\leq\tau\leq T}|k(T-\tau)|} = L$$

Det är tyvärr synnerligen svårt att i det allmänna fallet beräkna explicita uttryck på de λ_i som optimerar styrsignalen. För approximativ lösning kan "minima equalization process" användas.

Vi sätter $\underline{\lambda}\,\underline{x} = 1$ och får $L^{-1} = \min\limits_{\lambda_i}\left\{\max|\rho_n(\tau) - P(\tau)|\right\}$ där

$$P(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \rho_i(\tau) \; ; \quad \rho_n(\tau) = \frac{k^{(n)}(T-\tau)}{e_n^d}$$

$$\rho_i(\tau) = \frac{e_i^d}{e_n^d} k^{(n)}(T-\tau) - k^{(i)}(T-\tau)$$

Processen innebär att man konstruerar en mängd av polynom $P^{(v)}(\tau)$ som konvergerar mot optimala $P(\tau)$. För att detta skall gälla måste mängden av polynom $\{P^{(v)}(\tau)\}$ uppfylla följande interpolationsvillkor:

1 Varje funktion $P^{(v)}(\;)$ bestämmes av $(n+1)$ ordinator och beror kontinuerligt av dessa.

2 Två funktioner som tillhör $\{P^{(v)}(\tau)\}$ är identiska om deras skillnad har mer än n nollställen i $[0,T]$.

Allmänt: Bestäm $\underline{\lambda}$ så att $\min_{\underline{\lambda}} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - F(x,\underline{\lambda})|$ .....(1)

$$F(x,\underline{\lambda}) = \sum_1^n \rho_i(x)\lambda_i \; ; \quad \rho_i(x) \text{ lineärt oberoende och bildar ett}$$

Chebyskev-system, vilket innebär att $F(x,\underline{\lambda})$ ej får ha mer än n-1 nollställen i intervallet $[a,b]$. Det polynom $F(x,\lambda)$ som ger bästa approximationen av $f(x)$ i Chebyshevs mening, (1), har egenskapen:

$\Delta x = f(x) - F(x,\underline{\lambda})$ antar värdet $\underline{F} = \max_{a \leq x \leq b} |\Delta x|$ minst i n+1 punkter

med alternerande tecken för konsekutiva intervall.

Vi återgår till $\min_{\lambda i} \max_{0 \leq \tau \leq T} |\rho_n(\tau) - P(\tau)|$ där $\rho_n(\tau)$ motsvarar $f(x)$ och

$$P(\tau) = \sum_0^{n-1} \lambda_i \rho_i(\tau) \text{ motsvarar } F(x,\underline{\Lambda})$$

Starta med godtyckligt valda τ_k' $0-\tau_1 \leq \tau_2 \leq .. \leq \tau_{n+1} \leq T$

Sätt upp ekv. systemet:

$$\begin{cases} \Delta' \tau_1' = \rho_n(\tau_1') - P^{(o)}(\tau_1') = L^{(1)} \\ \Delta' \tau_2' = \rho_n(\tau_2') - P^{(o)}(\tau_2') = -L^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta' \tau_{n+1}' = \rho_n(\tau_{n+1}') - P^{(o)}(\tau_{n+1}') = (-1)^{n+2} L^{(1)} \end{cases}$$

$P^{(0)}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^{(0)} \rho_i$: Härur löses $\lambda_i^{(0)}$ och $L^{(1)}$.

Betrakta $\rho_n(\tau) - P^{o}(\tau)$ och bestäm de u+1, τ_k där avvikelsen från

$\rho_n(\tau)$ är störst. $0 \leq \tau_1^{(2)} \leq \tau_2^{(2)} \leq \ldots \leq \tau_{n+1}^{(2)} \leq 0$

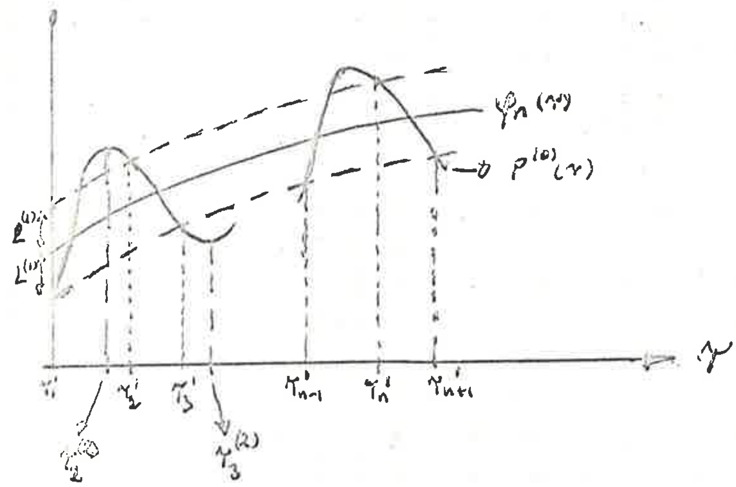
Sätt upp ekv. systemet

$$\begin{cases} \Delta^2 \, \tau_1^{(2)} = \rho_n(\tau_1^{(2)}) - P^{(1)}(\tau_2^{(2)}) = L^{(2)} \\ \vdots \\ \Delta^{(2)} \, \tau_{n+1}^{(2)} = \rho_n(\tau_{n+1}^{(2)}) - P^{(1)}(\tau_{n+1}^{(2)}) = (-1)^{n+2} L^{(2)} \end{cases}$$

där $P^{(1)}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^{(1)} \rho_i$. Härur löses $\lambda_i^{(1)}$ och $L^{(2)}$.

Betrakta $\rho_n(\tau) - P^{(1)}(\tau)$ och bestäm de n+1 st $\tau_k^{(3)}$ där

avvikelsen från $\rho_n(\tau)$ är störst o s v. Det kan bevisas $P^{(v)}(\tau) \to P(\tau)$ (4) $P(\tau)$ ger maximerande λ_i.



Exempel 14 System med viktfunktionen $k(t,\tau)$ som för varje t kan utvecklas i Taylorserie:

$k(t,\tau) \simeq \sum_{i=0}^{n} \beta_i(t) \, (t-\tau)^i$ med en noggrannhet som är tillräcklig för praktiksa syften. Vi har som förut: $\min_{\sum e_i^d \lambda_i = 1} \left\{ \max_{0 \leq \tau \leq T} \left| \sum \lambda_i \, k(i) \, (T-\tau) \right| \right\}$.

Låt $x_1' = \ldots = x_n' = 0$ Då $x_0' \cdot \lambda_0 = 1$

Varav $\min\limits_{\substack{x_o^1\ \lambda_o = 1 \\ \ell_i}} \left\{ \max\limits_{0 \leq \tau \leq T} \left| \frac{\beta_n(T)}{x_o^1} \tau^n + \ell_1 \tau^{n-1} + \ldots + \ell_n \right| \right\} = L^{-1}$

Gör subst. $\tau \to (x+1)\frac{T}{2}$

Medför $\min\limits_{m_i} \left\{ \max\limits_{0 \leq \tau \leq T} \left| \left(\frac{\beta_n(T)}{x_o} \left(\frac{T}{2}\right)^n \left\{ x^n + m_1 x^{n-1} + \ldots + m_n \right\} \right| \right\}$

För lösning av ovanstående skall vi först nämna något om Chebyshev-polynom av första ordningen. Dessa definieras: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ Chebyshev upptäckte följande anmärkningsvärda egenskap hos polynomen $T_n(x)$. Man betraktar för $| - \leq x \leq |$ alla polynom $p_n(x)$ av graden n där koeff för x^n är lika mid 1. Med $\alpha_n = \sup\limits_{-1 \leq x \leq 1} |p_n(x)|$ uppsökes det polynom $p_n(x)$ för, vilket a_n är så litet som möjligt. Det sökta polynomet är $2^{-(n-1)} \cdot T_n(x)$. Vidare är $_n = 2^{-(n-1)}$

Om vi återgår till vårt problem ser vi att

$$\frac{bn^{(T)}}{x_o^d} \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = T_n(x) \text{ minimerar uttrycket.}$$

$$\frac{b_n(T)}{x_o} \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = L^{-1}$$ Härur kan minimaltiden T_o bestämmas.

och $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$

d v s polynomet är $L^{-1} \cos\left(n \operatorname{arc cn}\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right)\right) = P_n(\tau) =$
$u(\tau) = \sum\limits_j k_j \delta(\tau - \tau_j) \operatorname{sign}(K(T-\tau))$

där τ_j är de tidpunkter då max $|k(T-\tau)|$ ernås i fårt fall
$k(T-\tau) = P_n(\tau) = \sum\limits_i \lambda_i k^{(i)}(T-\tau)$

Sök max o min punkter till $P_n(\tau)$ 1 L! Dessa är ± 1. D v s $\max |P_n(\tau)| = 1$
$\cos\left(n \arccos\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right)\right) = \pm 1$ medför att $n \arccos$
$\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right) = k\pi$; $\tau_k = \left[1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right]\frac{T}{2}$; $k = 0, .., n$

Sätt t ex n=2 vilket medför att $\tau_o = 0$; $\tau_1 = \frac{T}{2}$; $\tau_2 = T$

$$u(\tau) = \left[K_o \cdot \delta(\tau) + K_1\, \delta(\tau - \tfrac{T}{2}) + K_2 \delta(\tau - T)\right] \operatorname{sign}\left[\cos 2 \operatorname{arc} \cos 1 - \frac{2}{T}\right]$$

Bestämning av konstanterna $K_o\ K_1\ K_2$:

Som nämnts tidigare beräknas K_j ur $\quad x_i = \int_0^T k^{(i)}(T-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

I vårt fall med n=2: $k^{(0)}(T-\tau) = \beta_2(T-\tau)^2 + \beta_1(T-\tau) + \beta_2$

Vi kan förenkla uttrycket på styrsignalen om vi tar hänsyn till tecknet för $P_2(\tau)$ i $\tau=0$; $\tau_1 = \frac{T}{2}$; $\tau_2 = T$. Detta ger:

$u(\tau) = K_o\delta(\tau) - K_1\delta(\tau - \frac{T}{2}) + K_2\delta(\tau - T)$ Här är $K_o,\ K_1\ K_2 \geq 0$

Vidare är $||u(\tau)||_1 = L$ vilket medför $K_o + K_1 + K_2 = L$

$$x_2 = \int_0^T 2\beta_2\, n(\tau)\, d\tau = 2\beta_2(K_o - K_1 + K_2) = 0$$

$$x_1 = \int_0^T (2\beta_2(T-\tau) + \beta_1) n(\tau)\, d\tau = (2\beta_2 T + \beta_1) K_o - (\beta_2 T + \beta_1)\, K_1 + \beta_1 K_2 = 0$$

Ur dessa tre ekvationer erhålles $\begin{cases} K_o = K_2 = \frac{L}{4} \\ K_1 = \frac{L}{2} \end{cases}$

$$\text{d v s } u(\tau) = \frac{L}{2}\left[\frac{\delta(\tau)}{2} - \delta(\tau - \frac{T_o}{2}) + \frac{\delta(\tau - T_o)}{2}\right]$$

$$T_o = \sqrt[4]{\frac{e_o^d}{2\beta_2 L}}$$

<u>Sammanfattning</u>

Som framgår av redogörelsen ger Kulokwskis metod ett mycket allmänt uttryck på den tidsoptimala styrsignalen, där begränsningen på styrsignalen på ett enkelt sätt genom utnyttjandet av normbegreppet kommer in i analysen. I det allmänna fallet med flera tillståndsvariabler som ändras uppstår dock komplicerade numeriska beräkningar, nämligen vid beräkningen av $\max\limits_{\lambda_i} \dfrac{|\lambda\, e_d|}{||k(T-\tau)||_q}$. Av de genomräknade exemplen framgår att i några specialfall t ex

1. Initialtillstånd noll, en tillståndsvariabel ändras och $p=\infty$
2. System representerat av diff. ekv av låg ordning $n=2,3$ med $p=\infty$
3. $p=2$, initialtillstånd noll, en tillståndsvariabel som ändras
4. $p=2$, system representerat av deff. ekv av låg ordning $n=2,3$
5. $p=1$ initialtillstånd noll och en tillståndsvariabel som ändras

problemen kan reduceras till exakt lösbara problem genom användande av Chebyshev polynom av första och andra ordningen samt Legendre-polynom eller genom vanlig partiell derivation. Låt oss betrakta det allmänna problemet

$$\max_{\lambda i} \frac{|\underline{e}_d \underline{\lambda}|}{||k(T-\tau)||_q} \quad \text{och sätt } \underline{e}_d \cdot \underline{\lambda} = 1$$

Detta ger det ekvivalenta problemet $\min\limits_{\lambda_i} ||k(T-\tau)||_q =$

$$\min_{\lambda i} \left[\int_0^T |\Sigma \lambda_i \, h_i(T-\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}} = \min_{\lambda i} \left[\int_0^T (\Sigma \, \lambda_i \, h_i(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}}$$

Genom omskrivning erhålles:

$$\min_{\lambda_i} \left[\int_0^T | \mu_1(\tau) - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \, \mu_i(\tau)|^q \, d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \quad \text{där}$$

$$\mu_1(\tau) = h_1(\tau)/ e_1^d \quad \text{och} \quad \mu_i(\tau) = \frac{e_i^d \, h_1(\tau)}{e_1^d} - h_i(\tau)$$

$$i = 2, \ldots . n$$

Problemet att minimera $||k(T-\tau)||_q$ är således ekvivalent med att approximera en känd funktion $\mu_1(\tau)$ med $\sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i \mu_i(\tau)$ där också μ_i

$i = 2 \ldots . n$ kända funktioner. Då $q=2$ svarar detta mot approximation genom minsta kvadratmetoden, där Legendrepolynom kommer till användning, och då $q=1$ svarar det mot approximation i Chebyshevs mening där Chebyshev-polynom kommer till användning. Dessa approximationsproblem torde kunna lösas på datamaskin. Ett problem uppstår då systemet är givet genom sin viktf k n. Hur många termer skall tagas med i Taylorutvecklingen av viktfunktionen för att acceptabel noggrannhet i styrsignalen skall erhållas?

Referenser

Matematisk bakgrund till Kulikowskis metod:
Kolmogorov and Forin: Functional analysis
Kulikowskis metod:
"On optimum control with Constrain"; R. Kulikowski
Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences Volume VII no 4
"Concerning the Synthesis of the optimum, Non-linear control systems" Volume VII no 6
"Synthesis of a class of optimum Control Systems" Volume VII no 11
"on the Synthesis of Adaptive systems" Volume VII no 12
"Synthesis of optimum Control Systems with Aveabounded Control Signal" Volume VIII no 4
"An Application of Functional Analysis to the Optimal Control problem" by G M Krane, P E Sarachik "On the theory of Optimum Regulation", Automation and Remote Control, vol 18, pp 1005-1016 Nov 1957 by N N Krusovski. M Krein " The L-problem in Abstract, Linear Normed Spaces" Chapt IV of book "On some Questions of the Theory of Moments" by N Akheiser and M Krein 1938.
Geronimus metod.
"On some extremal properties of polynomials" by J Geronimus. Annals of Math. Vol 37, No 2 1936
Maxima equalization process: N Pinsker, B P Wovodvorskii, Usp Mat Nauk. 6, 1951 samt L Veidinger sid 99. Numerische Mathematik 1960.

Disposition.

1. Presentation av problemställningen. Representation av lineära, tidsinvarianta system.
2. Matematisk bakgrund till Kulikowskis version av teorin för optimal styrning.
   Funktionaler
   Hölders olikhet
3. Den optimala styrsignalen då endast utsignalen är av intresse.
4. Den optimala styrsignalen då flera tillståndsvariabler är av intresse.
5. Styrsignalens utseende då utsignalen och dess derivator är av intresse.
6. Sammanfattning av Kulikowskis metod samt svårigheter med metoder
7. Bestämning av styrsignalen då inskränkningen på styrsignalen varierar.

a) $p = \infty$. Initialtillstånd noll, och en tillståndsvariabel ändras.

Chebyshevpolynom. Exempel

b) p=2. Initialtillstånd noll och en tillståndsvariabel ändras.
Legendre polynom. Exempel

c) p = ∞. Allmänna fallet. Geronimus metod. Exempel

d) p= 2. Allmänna fallet. Exempel.

e) p = ∞. Polynom av oändlig grad som integrand i uttrycket som skall maximeras. Ett exemepel

f) p = 1. Endast utsignalen av intresse. Utsignalen plus dess derivator av intresse. Maximum equalization process. Exempel

8) Sammanfattning och kritik

9) Referenser.

1) d v s system, som beskrives av lineära, differentialekvationer med konstanta koefficienter

2) För linjära tidsinvarianta system gäller att systemets viktfunktion $k(t,\tau) = k(t-\tau)$.

3) I de allra flesta fall leder bestämningen av den optimala styrsignalen till maximeringsproblem som ej kan lösas analytiskt. I vissa fall är detta dock möjligt och dessa fall genomgås i redogörelsen. Dessa är bl a

1) Begynnelsetillstånd noll och en tillståndsvariabel ändras samt q=1

2) System representerat av diffekv. av låg ordning n=2 med q=1

3) Begynnelsetillstånd noll en tillståndsvariabel ändras, q = 2

4) Begynnelsetillstånd noll, en tillståndsvariabel ändras och q = 00

4) Likartade matematiska problem uppstår vid momentproblemet: Givet en oändlig följd av reella tal s_k. En icke-avtagande funktion T(u) sökes som uppfyller $s_k \int_{-\omega}^{\infty} u^k d\tau(u)$ k = 0,1...

Se "Some Questions in the theory of moments" av Akhiezer och Krein, under rubriken The L-moment problem and som of its applications. Där finns bl a följande problem beskrivet: Givet $s_o; \ldots s_n$ och $-1<\theta<1$. Betrakta $P(u) = a_o + a_1 u + \ldots + a_n u^n$ samt $a_o s_o + \ldots + a_n s_n = 1$.

Finn min $I(P) = \int_{-1}^{+1} \left\{ |P(u)| + \theta P(u) \right\} dn$. Se under rubriken: The L-Problem in an abstract linear normed space. Givet n lineärt ober. element $x_1 \ldots x_n$. Sök $\frac{1}{\lambda} = \inf || \eta_1 x_1 + \ldots + \eta_h x_n ||$ under bevillkoret $c_1 \eta_1 + \ldots c_n \eta_h = 1$ där c_i givna