OPTIMAL KVANTISERING AV STYRVARIABLER I ETT REGLERSYSTEM

ROLAND PERSSON

Rapport RE - 17 sept. 1967

Optimal Kvantisering på Ingången i Reglersystem.

Examensarbete utfört vid institutionen för Regleringsteknik, LTH, av Roland Persson, E4a, LTH. 1967.

Handledare: Professor K.J. Åström, som jag är skyldig ett varmt tack för: a) Själva uppslaget. b) Uppläggningen. c) Litteraturhänvisningar. d) Nya idéer under arbetets gång. e) Genomläsningen och det eventuella godkännandet, m.m.

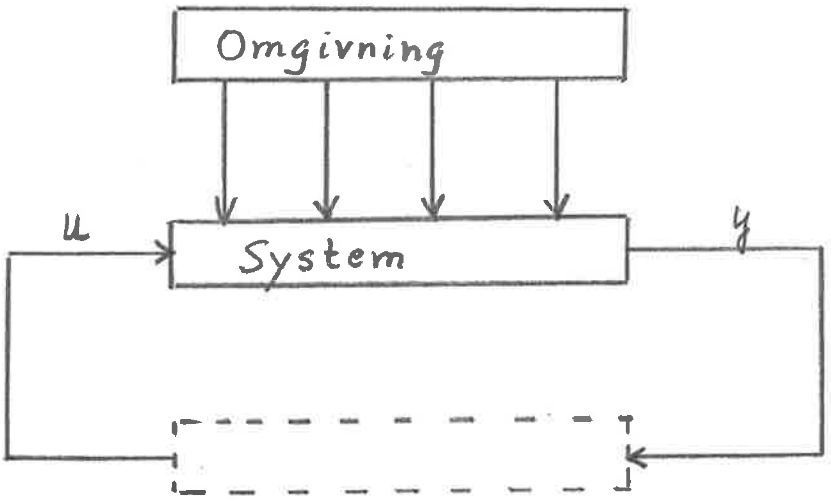
Lund i september 1967

Roland Persson

Innehållsförteckning.

Kap. I. Inledning.

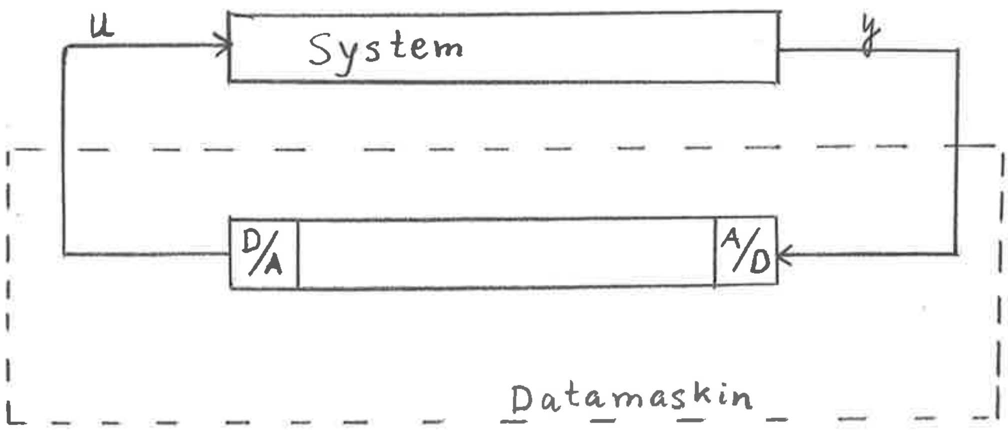
Vid analys av reglersystem, utgör störningarna en mycket väsentlig del. Betrakta nedanstående modell:



Om på samma sätt som i K.J. Åström: "Regleringsteknik; Stokastiska system" förutsättes att omgivningens inverkan på systemet karakteriseras med ett antal störningar som kan beskrivas som realisationer av stokastiska processer, kan en optimal styrlag, för att minimera utsignalens varians, härledas. Denna så kallade minimalvariansstrategi ges av: (För detaljer, se ovan omnämnda kompendium, där även beteckningarna återfinns)

$$u(t) = - \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})\,E(z^{-1})}\, y(t)$$

Styrlagen realiseras på följande sätt:



Systemet styres alltså med hjälp av en datamaskin med analog-digital-omvandlare, A/D i figuren ovan, och digital-analog-omvandlare, D/A i figuren. Datamaskinen har en viss ordlängd, som ger dess noggrannhet. När processdatamaskiner började användas var denna ordlängd ganska stor, 10 bitar och mer, dvs en noggrannhet av promillestorlek. $(1 : 2^{10})$ Tendensen är nu att ordlängden minskar.

Införes någon form av kvantisering i reglersystemet minskar alltså noggrannheten. Rent intuitivt borde systemets syfte vara svårare att uppnå. Om ett uttryck på denna försämring kunde erhållas, skulle man ha en bra utgångspunkt för att bedöma hur pass noggrann man behöver vara vid DDC, Direct Digital Control, dvs datamaskinens ordlängd skulle vara lättare att anpassa till de ställda kraven.

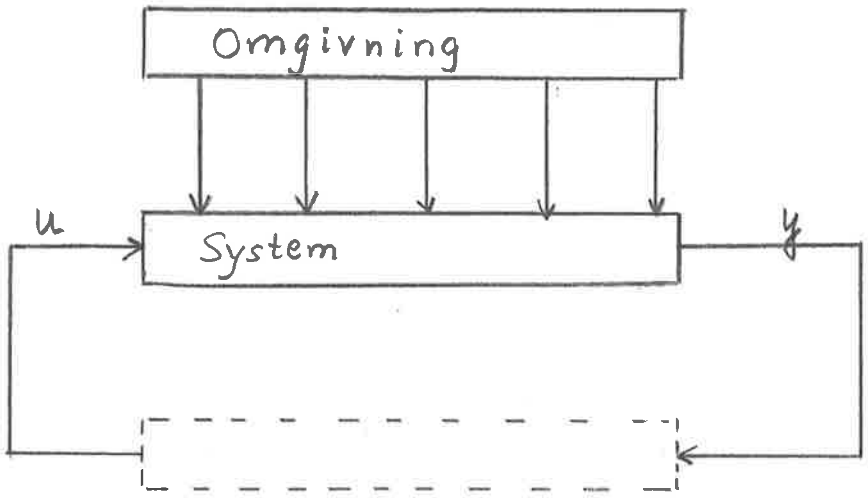
I det följande behandlas kvantisering till två nivåer på ingången i ett enkelt exempel, innan det allmänna fallet betraktas. I Kap. V. återfinns något om kvantisering till två nivåer på utgången.

Anmärkning. Ekvationerna har numrerats i löpande följd, varje kapitel för sig.

Kap. II. Enkelt exempel.

II. 1. Beteckningar.

Betrakta följande modell:



Omgivningens inverkan antas karakteriseras av ett antal störningar som kan beskrivas som realisationer av stokastiska processer. Störningen vid en viss tidpunkt t betecknas $e(t)$.

$\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ är en svit oberoende normalfördelade stokastiska variabler. Det antas att störningarnas medelvärde är noll och deras standardavvikelse ett. Detta sammanfattas i beteckningen:

$$e(t) \in N(0,1) \quad ; \quad t = 0, 1, \ldots\ldots \infty$$

Observera oberoendet, vilket är av fundamental betydelse i fortsättningen!

I det enkla exempel som skall behandlas i detta kapitel, antas systemet beskrivas av ekvationen:

$$y(t) + a\,y(t-1) = b\,u(t-1) + \lambda\,e(t) + \lambda c\,e(t-1) \tag{1}$$

där:

$e(t)$, $e(t-1)$ är störningar enligt ovan;
y är utsignalen;
u är insignalen;
a, b, c, λ är konstanter;
t betecknar tidpunkten t
och $t-1$ betecknar tidpunkten $t-1$ i någon lämplig tidsenhet.

Vidare kommer operatorn z^{-1} att användas. Denna definieras av följande ekvation:

$$z^{-1}x(t) = x(t-1)$$

där x kan ersättas av u, y eller e.

Medelvärdesoperatorn betecknas E.

II. 2. Kvantisering vid tidpunkten t-1.

Systemekvationen (1) kan skrivas på följande sätt:

$$(2) \quad (1 + az^{-1})\, y(t) = b u(t-1) + \lambda (1 + cz^{-1})\, e(t)$$

Denna form på ekvationen kan lätt omvandlas till följande två former:

$$(3) \quad y(t) = \lambda e(t) + \frac{1}{1 + az^{-1}} \left[bu(t-1) + \lambda (c-a)\, e(t-1) \right]$$

$$(4) \quad y(t) = \lambda e(t) + \frac{1}{1 + cz^{-1}} \left[bu(t-1) + (c-a)\, y(t-1) \right]$$

Ur ekvation (4) erhålles:

$$(5) \quad E\, y^2(t) = \lambda^2 + E \left\{ \frac{1}{1 + cz^{-1}} \left[bu(t-1) + (c-a)\, y(t-1) \right] \right\}^2$$

ty, $e(t)$ är oberoende av $u(t-1), u(t-2), \ldots$ $y(t-1), y(t-2), \ldots$ och $E\, e(t) = 0$

vidare:

$$E\, e^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$$

eftersom $e(t) \in N(0, 1)$ är frekvensfunktionen för störningarna:

$$f_e(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ur ekvation (5) erhålles:

$$E\, y^2(t) \geq \lambda^2$$

där likhetstecknet gäller då

$$(6) \quad u(t) = -\frac{c-a}{b}\, y(t)$$

Detta är den i inledningen omnämnda minimalvariansstrategin

$$u(t) = - \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})\, E(z^{-1})}\, y(t)$$

ty i detta enkla fall är, med beteckningar enligt Åström :

$$A(z^{-1}) = 1 + a z^{-1}$$
$$B(z^{-1}) = b$$
$$C(z^{-1}) = 1 + c z^{-1}$$
$$k = 1$$

Identiteten

$$C(z^{-1}) \equiv A(z^{-1})\, E(z^{-1}) + z^{-k} F(z^{-1})$$

medför

$$E(z^{-1}) = 1$$
$$F(z^{-1}) = c - a$$

(För detaljer hänvisas till det i inledningen omnämnda kompendiet av Åström.)

Antag nu att följande gäller :

$$\begin{cases} u(j) = - \dfrac{c-a}{b}\, y(j) \quad ; \quad j = 0, 1, \ldots\ t-2 & (7) \\ u(t-1) = d \operatorname{sign}[y(t-1)] & (8) \end{cases}$$

Detta innebär att "vanlig" minimalvariansstrategi användes upp till en viss tidpunkt då kvantisering sker. Det gäller nu att söka utsignalens varians tidpunkten närmast efter den tidpunkt då kvantiseringen gjordes, dvs $E y^2(t)$. Konstanten d förfogas fritt, och kan väljas för att minimera $Ey^2(t)$.

Kvantiseringen sker till två nivåer ty:

$$(9) \qquad \mathrm{sign}[x] = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

skulle fallet $x=0$, dvs $y(t-1)=0$, inträffa räknas detta i fortsättningen som om kvantisering ändå skedde till $+d$ eller $-d$.

Ekvation (4) och villkoret på föregående sida $\left(u(j) = -\frac{c-a}{b} y(j)\ ;\ j=0,1,\dots,t-2\right)$ ger:

$$\begin{cases} y(t) = \lambda e(t) + b\,u(t-1) + (c-a)\,y(t-1) & (10) \\ y(t-1) = \lambda e(t-1) & (11) \end{cases}$$

Detta förutsätter att $|c| < 1$ så att $\frac{1}{1+cz^{-1}} = 1 - cz^{-1} + c^2 z^{-2} - c^3 z^{-3} + \dots$ är konvergent. På samma grund förutsättes $|a| < 1$.

Med hjälp av ekvationerna (8) och (11) kan ekvation (10) skrivas:

$$(12) \quad y(t) = \lambda e(t) + b\,d\,\mathrm{sign}[\lambda e(t-1)] + \lambda(c-a)e(t-1)$$

Kvadrera och tag medelvärdet!

$$(13) \quad Ey^2(t) = \lambda^2 + b^2 d^2 + \lambda^2 (c-a)^2 + 2bd(c-a)\,E|\lambda e(t-1)|$$

Motivering:

(14) $E\,e^2(t) = E\,e^2(t-1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

(15) $E\,\mathrm{sign}^2[\lambda e(t-1)] = 1$ (Se text efter (9))

(16) $E\,e(t)\,e(t-1) = 0$ (oberoendet!)

(17) $E\,e(t)\,\mathrm{sign}[\lambda e(t-1)] = 0$ (oberoendet!)

Det återstår alltså att bestämma $E\,|\lambda e(t-1)|$.

$$E\,|\lambda e(t-1)| = |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = |\lambda| \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Ekvation (13) blir alltså:

(18) $Ey^2(t) = \lambda^2 + b^2 d^2 + \lambda^2 (c-a)^2 + 2bd(c-a)|\lambda| \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Derivering med avseende på d och $\frac{dEy^2(t)}{dd} = 0$ ger ekvationen:

$$2b^2 d + 2b(c-a)|\lambda| \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0$$

dvs

$$d = -\frac{c-a}{b} |\lambda| \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

ger minimum för $Ey^2(t)$, ty andraderivatan $\frac{d^2 Ey^2(t)}{dd^2}$ är positiv $(2b^2)$.

Med insatt d-värde erhålles:

$$(19) \quad Ey^2(t)_{min} = \lambda^2 + \lambda^2 (c-a)^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

Detta skall jämföras med $Ey^2(t) = \lambda^2$ vid vanlig minimalvariansstrategi. Dvs här erhålles en ökning med $(c-a)^2 (1 - \frac{2}{\pi}) \cdot 100$ %.

På grund av att det gäller $\mathrm{sign}[xy] = \mathrm{sign}[x]\,\mathrm{sign}[y]$ kan II.2 <u>sammanfattas</u>:

Styrlagen:

$$\begin{cases} u(j) = -\dfrac{c-a}{b}\, y(j) \;; \quad j = 0, 1, \ldots\; t-2 \\[2ex] u(t-1) = -\dfrac{c-a}{b}\, \lambda \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \mathrm{sign}[e(t-1)] \end{cases}$$

ger:

$$Ey^2(t) = \lambda^2 + \lambda^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(c-a)^2$$

II. 3. Bevis för att den i II.2. använda kvantiseringen är optimal.

I II.2. användes kvantiseringen

$$u(t-1) = d \operatorname{sign}[e(t-1)]$$

Allmänt kan kvantisering till två nivåer ske på följande sätt:

$$u(t-1) = d \operatorname{sign}[f(e(t-1), e(t-2), \ldots u(t-2), \ldots)]$$

Ekvation (10) blir då :

$$(20) \quad y(t) = \lambda e(t) + bd \operatorname{sign}[f(e(t-1), \ldots u(t-2), \ldots)] + (c-a)\lambda e(t-1)$$

Kvadrera och tag medelvärdet !

$$(21) \quad E y^2(t) = \lambda^2 + b^2 d^2 + (c-a)^2 \lambda^2 + 2(c-a) b d \lambda \, E\, e(t-1) \operatorname{sign}[f]$$

Derivera !

$$\frac{d\, E y^2(t)}{d d} = 2 b^2 d + 2(c-a) b \lambda \, E\, e(t-1) \operatorname{sign}[f]$$

$$\frac{d\, E y^2(t)}{d d} = 0 \qquad \text{medför :}$$

$$d = - \frac{c-a}{b} \lambda \, E\, e(t-1) \operatorname{sign}[f]$$

Insättes detta d-värde erhålles:

$$E y^2(t)_{min} = \lambda^2 + \lambda^2 (c-a)^2 - \lambda^2 (c-a)^2 \{E\, e(t-1) \operatorname{sign}[f]\}^2$$

Att detta är ett minimum inses av att $\frac{d^2 Ey^2(t)}{d\, d^2} = 2b^2$ är positiv.

För optimal kvantisering skall alltså f väljas så att $E\, e(t-1)\, \mathrm{sign}[f]$ får så stort belopp som möjligt, ty:

λ^2 är positiv

$(c-a)^2$ är positiv

$\{E\, e(t-1)\, \mathrm{sign}[f]\}^2$ är positiv.

Nu är:

$$(22) \qquad E\, e(t-1)\, \mathrm{sign}[f] \leq E\, |e(t-1)|$$

Likhetstecknet inträffar då:

$$f(e(t-1), e(t-2), \ldots u(t-2), \ldots) = e(t-1)$$

Detta bevisar alltså att kvantiseringen $u(t-1) = d\, \mathrm{sign}[e(t-1)]$ är optimal.

II. 4. Kvantiserad ingång vid varje tidpunkt.

Betrakta systemekvationen på formen (3). Om denna utvecklas (tillåtet, ty det förutsättes att $|a|<1$) erhålles:

$$(23)\quad y(t) = \lambda e(t) + \\ + bu(t-1) + \lambda(c-a)\, e(t-1) - \\ - abu(t-2) - a\lambda(c-a)\, e(t-2) + \\ + a^2bu(t-3) + a^2\lambda(c-a)\, e(t-3) - \\ - a^3bu(t-3) - a^3\lambda(c-a)\, e(t-4) + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Det inses omedelbart att åtminstone erhålles de enklaste räkningningarna om kvantiseringen göres på följande sätt:

$$(24)\quad u(t) = d\, \mathrm{sign}[e(t)] \quad ; t = 0, 1, \ldots\ldots$$

Med insatta värden för styrvariabeln erhålles ur ekvation (23):

$$(25)\quad y(t) = \lambda e(t) + \\ + bd\, \mathrm{sign}[e(t-1)] + \lambda(c-a)\, e(t-1) - \\ - abd\, \mathrm{sign}[e(t-2)] - a\lambda(c-a)\, e(t-2) + \\ + a^2bd\, \mathrm{sign}[e(t-3)] + a^2\lambda(c-a)\, e(t-3) - \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

På grund av, att $e(t)$, $e(t-1)$, ... alla är oberoende stokastiska variabler med medelvärde lika med noll, erhålles vid kvadrering och medelvärdesbildning :

$$(26)\quad Ey^2(t) = \lambda^2 + b^2d^2(1+a^2+a^4+a^6+\ldots\ldots)+$$
$$+\ \lambda^2(c-a)^2(1+a^2+a^4+a^6+\ldots\ldots)+$$
$$+\ 2bd\lambda(c-a)\{E\,e(t)\,\mathrm{sign}[e(t)]\}(1+a^2+a^4+\ldots)$$

Motivering :

På grund av förutsättningarna för $\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ kommer inga andra termer än de ovan medtagna att ge bidrag.

Vidare :

$$(27)\quad E\,e^2(t) = E\,e^2(t-1) = \ldots\ldots = E\,e^2(0) = 1$$

$$(28)\quad E\,\mathrm{sign}^2[e(t)] = E\,\mathrm{sign}^2[e(t-1)] = \ldots\ldots = E\,\mathrm{sign}^2[e(0)] = 1$$

$$(29)\quad E\,e(t)\,\mathrm{sign}[e(t)] = E\,e(t-1)\,\mathrm{sign}[e(t-1)] = \ldots\ldots = E\,e(0)\,\mathrm{sign}[e(0)]$$

Enligt II.2. : $E\,e(t)\,\mathrm{sign}[e(t)] = E|e(t)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Om serien $1+a^2+a^4+\ldots$ summeras kan alltså ekvation (26) skrivas :

$$(30)\quad E\,y^2(t) = \lambda^2 + \frac{b^2d^2 + \lambda^2(c-a)^2 + 2bd\lambda(c-a)\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1-a^2}$$

Bestäm minimum för $Ey^2(t)$ genom derivation !

$$\frac{d\,Ey^2(t)}{d\,d} = \frac{2b^2d + 2b\lambda(c-a)\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1-a^2}$$

$$\frac{d\,Ey^2(t)}{d\,d} = 0 \qquad \text{ger:}$$

(31) $$d = -\frac{c-a}{b}\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Detta d-värde motsvarar minimum, ty andraderivatan $\frac{d^2Ey^2(t)}{d\,d^2} = \frac{2b^2}{1-a^2}$ är positiv. Observera att d-värdet är identiskt med det som erhölls i II.2!

Insatt i uttrycket för $Ey^2(t)$ erhålles:

(32) $$Ey^2(t)_{min} = \lambda^2 + \frac{\lambda^2(c-a)^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}{1-a^2}$$

Jämföres detta med vad som erhölls i II.2. har alltså variansen ökat ytterligare med en faktor $\frac{1}{1-a^2}$.

<u>Sammanfattning</u>:

Styrlagen:

$$u(t) = -\frac{c-a}{b}\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sign}[e(t)]; \quad t=0,1,\ldots$$

ger:

$$Ey^2(t) = \lambda^2 + \frac{\lambda^2(c-a)^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}{1-a^2}$$

II.5. Bevis för att den i II.4. använda styrlagen är optimal.

I II.4. användes styrlagen:

$$(33) \qquad u(t) = d \operatorname{sign}[e(t)] \quad , t = 0, 1, \ldots$$

Vid kvantisering till två nivåer kan allmänt följande styrlag användas:

$$(34) \qquad u(t) = d \operatorname{sign}[f]$$

där:

$$(35) \qquad f = f(e(t), e(t-1), \ldots u(t-1), u(t-2), \ldots)$$

detta kan skrivas:

$$(36) \qquad f = f(e(t), e(t-1), \ldots e(0))$$

ty:

$$u(0) = f(e(0))$$
$$u(1) = f(e(1), e(0), f(e(0)))$$
$$\vdots$$

osv.

Inför beteckningen:

$$(37) \qquad f(t) = f(e(t), e(t-1), \ldots e(0))$$
$$(38) \qquad f(t-1) = f(e(t-1), e(t-2), \ldots e(0))$$

$f(t-2)$, $f(t-3)$, ... $f(0)$ definieras analogt.

Betrakta systemekvationen på formen (3):

$$(3) \quad y(t) = \lambda e(t) + \frac{b u(t-1) + \lambda(c-a) e(t-1)}{1 + a z^{-1}}$$

Vid kvadrering och medelvärdesbildning erhålles på grund av att $e(t)$ är oberoende av $u(t-1), u(t-2), \ldots e(t-1), \ldots$:

$$(39) \quad E y^2(t) = \lambda^2 + E\left\{ \frac{b u(t-1) + \lambda(c-a) e(t-1)}{1 + a z^{-1}} \right\}^2$$

För att erhålla en optimal styrlag skall alltså:

$$(40) \quad E\left\{ \frac{b u(t-1) + \lambda(c-a) e(t-1)}{1 + a z^{-1}} \right\}^2 = E\, x^2$$

minimeras.

Utveckla x och sätt in styrlagen:

$$\begin{aligned}(41) \quad x = {} & b d \,\mathrm{sign}[f(t-1)] + \lambda(c-a) e(t-1) - \\ & - a b d \,\mathrm{sign}[f(t-2)] - a\lambda(c-a) e(t-2) + \\ & + a^2 b d \,\mathrm{sign}[f(t-3)] + a^2\lambda(c-a) e(t-3) - \\ & - a^3 b d \,\mathrm{sign}[f(t-4)] - a^3\lambda(c-a) e(t-4) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Kvadrera och tag medelvärdet!
På grund av förutsättningarna om $\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ och $\{f(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ (se (37) och (38)) erhålles då: ((14) och (15) användes också)

$$
\begin{aligned}
(42) \quad E x^2 = \; & b^2 d^2 (1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots\dots) + \\
& + \lambda^2 (c-a)^2 (1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots\dots) + \\
& + 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-1) \operatorname{sign}[f(t-1)] + \\
& + a^2 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-2) \operatorname{sign}[f(t-2)] + \\
& + a^4 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-3) \operatorname{sign}[f(t-3)] + \dots\dots - \\
& - a\, 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-2) \operatorname{sign}[f(t-1)] - \\
& - a^3 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-3) \operatorname{sign}[f(t-2)] - \\
& - a^5 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-4) \operatorname{sign}[f(t-3)] - \dots\dots + \\
& + a^2 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-3) \operatorname{sign}[f(t-1)] + \\
& + a^4 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-4) \operatorname{sign}[f(t-2)] + \\
& + a^6 2bd\lambda(c-a) E\, e(t-5) \operatorname{sign}[f(t-3)] + \dots\dots - \\
& - a 2 b^2 d^2 E \operatorname{sign}[f(t-1)] \operatorname{sign}[f(t-2)] - \\
& - a^3 2 b^2 d^2 E \operatorname{sign}[f(t-2)] \operatorname{sign}[f(t-3)] - \\
& - a^5 2 b^2 d^2 E \operatorname{sign}[f(t-3)] \operatorname{sign}[f(t-4)] - \dots\dots + \\
& + a^2 2 b^2 d^2 E \operatorname{sign}[f(t-1)] \operatorname{sign}[f(t-3)] + \\
& + a^4 2 b^2 d^2 E \operatorname{sign}[f(t-2)] \operatorname{sign}[f(t-4)] + \\
& + a^6 2 b^2 d^2 E \operatorname{sign}[f(t-3)] \operatorname{sign}[f(t-5)] + \dots\dots
\end{aligned}
$$

Det antas nu att t är så stort att följande gäller:

$$(43) \quad E\, e(t-1) \operatorname{sign}[f(t-1)] = E\, e(t-2) \operatorname{sign}[f(t-2)] = \dots\dots$$

$$(44) \quad E\, e(t-1) \operatorname{sign}[f(t-2)] = E\, e(t-2) \operatorname{sign}[f(t-3)] = \dots\dots$$

(45) $E\, e(t-1)\, \mathrm{sign}[f(t-3)] = E\, e(t-2)\, \mathrm{sign}[f(t-4)] = \ldots\ldots$

(46) $E\, \mathrm{sign}[f(t-1)]\, \mathrm{sign}[f(t-2)] = E\, \mathrm{sign}[f(t-2)]\, \mathrm{sign}[f(t-3)] = \ldots\ldots$

Antagandet innebär att medelvärdena ej beror på de faktiska tidpunkterna utan endast på tidsdifferenserna i de ingående termerna. Detta antagande är rimligt med hänsyn till att t är så stort att beroendet mellan termer med stor tidsdifferens är försumbart. Ekvation (42) kan då summeras enligt följande:

$$(47) \quad E x^2 = \frac{b^2 d^2}{1-a^2} \Big\{ 1 - 2a\, E\, \mathrm{sign}[f(t-1)]\, \mathrm{sign}[f(t-2)] + 2a^2\, E\, \mathrm{sign}[f(t-1)]\, \mathrm{sign}[f(t-3)] - \ldots\ldots \Big\} + \frac{2bd\lambda(c-a)}{1-a^2} \Big\{ E\, e(t-1)\, \mathrm{sign}[f(t-1)] - a\, E\, e(t-2)\, \mathrm{sign}[f(t-1)] + a^2 E\, e(t-3)\, \mathrm{sign}[f(t-1)] - \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} + \frac{\lambda^2 (c-a)^2}{1-a^2}$$

Sätt :

(48) $p = 1 - 2a\, E\, \mathrm{sign}[f(t-1)]\, \mathrm{sign}[f(t-2)] + 2a^2 E\, \mathrm{sign}[f(t-1)]\, \mathrm{sign}[f(t-3)] - \ldots\ldots$

(49) $q = E\, e(t-1)\, \mathrm{sign}[f(t-1)] - a\, E\, e(t-2)\, \mathrm{sign}[f(t-1)] + \ldots\ldots$

Observera! På grund av summationen står här exempelvis termen $E\,e(t-1)\,\mathrm{sign}[f(t-1)]$ för alla termer av typ $E\,e(t-2)\,\mathrm{sign}[f(t-2)]$, $E\,e(t-3)\,\mathrm{sign}[f(t-3)]$, osv. Analogt för de övriga termerna.

Med beteckningarna (48) och (49) kan (47) skrivas:

$$(50) \quad (1-a^2)\,Ex^2 = b^2d^2p + 2bd\lambda(c-a)q + \lambda^2(c-a)^2$$

$$(1-a^2)\frac{dEx^2}{dd} = 2b^2dp + 2b\lambda(c-a)q$$

$$\frac{dEx^2}{dd} = 0 \qquad \text{ger:}$$

$$(51) \qquad d = -\frac{c-a}{b}\lambda\cdot\frac{q}{p}$$

Detta värde insättes i (50):

$$(52) \quad (1-a^2)\,Ex^2 = \lambda^2(c-a)^2 - (c-a)^2\lambda^2\frac{q^2}{p}$$

Här inses att för minimum för Ex^2 fordras $|q|$ så stort som möjligt, samtidigt som p positiv men så liten som möjligt.

Betrakta ekvationerna (48) och (49), där p och q definierades. Antag nu att följande gäller:

(53) $f(t) = f(e(t), e(t-1))$
(54) $f(t-1) = f(e(t-1), e(t-2))$

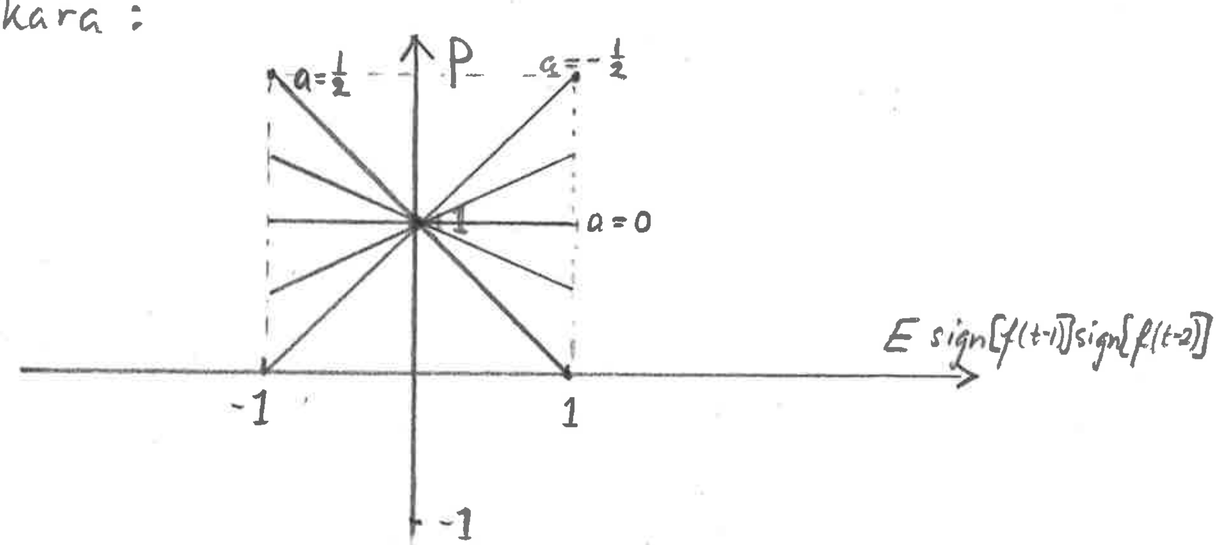
osv.

(48) och (49) reduceras då till:

$$p = 1 - 2a\, E\, \mathrm{sign}[f(t-1)]\, \mathrm{sign}[f(t-2)] \tag{55}$$

$$q = E\, e(t-1)\, \mathrm{sign}[f(t-1)] - a E\, e(t-2)\, \mathrm{sign}[f(t-1)] \tag{56}$$

Betrakta först p. (55):
För olika a-värden fås följande kurvskara:



Härav inses, att för att p skall vara positiv men ändå så liten som möjligt och detta skall gälla för alla tänkbara a-värden, så måste:

$$E\, \mathrm{sign}[f(t-1)]\, \mathrm{sign}[f(t-2)] = 0 \tag{57}$$

Detta inträffar då:

(58) $f(t-1) = f(e(t-1))$
(59) $f(t-2) = f(e(t-2))$

Betrakta nu q under villkoren (58) och (59):

(60) $$q = E\,e(t-1)\,\mathrm{sign}[f(e(t-1))] - a\cdot 0$$

q skulle maximeras till sitt belopp, och:

(61) $$|q| \leq E|e(t-1)| = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}$$ (Se II.2.)

Likhetstecknet i (61) inträffar då $f(e(t-1)) = f(t-1) = e(t-1)$. Nu stod denna term $E\,e(t-1)\,\mathrm{sign}[f(t-1)]$ som representant för alla termer av typ:

$E\,e(t-2)\,\mathrm{sign}[f(t-2)]$,
$E\,e(t-3)\,\mathrm{sign}[f(t-3)]$,
- - - - - osv.

Det skall alltså gälla:

$$f(t-1) = e(t-1)$$
$$f(t-2) = e(t-2)$$
$$f(t-3) = e(t-3)$$
$$\vdots$$
osv.

Detta bevisar att styrlagen:
$u(t) = d\,\mathrm{sign}[e(t)]$

är optimal under villkoren (53) och (54) och de analoga förutsättningarna för övriga f.

Genom induktion inses omedelbart att den optimala styrlagen (34) erhålles då:

$$f(t) = e(t)$$
$$f(t-1) = e(t-1)$$
$$\vdots$$

osv.

även då f bestäms av (37), (38).

II. 6. Bestämning av kvantiseringsnivåerna med hjälp av sats av R. E. Larson*.

Detta avsnitt utgöres av ett annat bevis för optimaliteten i II. 4. samtidigt som kvantiseringsnivåerna erhålles. Grunden är en sats, som bevisats i uppsatsen omnämnd i asterisken. Denna återges här nedan kortfattat, (för närmare detaljer hänvisas till uppsatsen)

Sats: Lösningen på det kombinerade optimala reglerings-, uppskattnings- och kvantiserings-problemet är som följer: Generera först den optimala linjära uppskattningen ("the Kalman-Bucy filtering solution"), beräkna sedan den optimala linjära stokastiska regleringen som om uppskattningen vore exakt och slutligen erhålles de optimala kvantiseringsparametrarna genom att använda proceduren i sektion II.

"Proceduren i sektion II" avser sektion II i uppsatsen och sammanfattas i korthet sålunda:

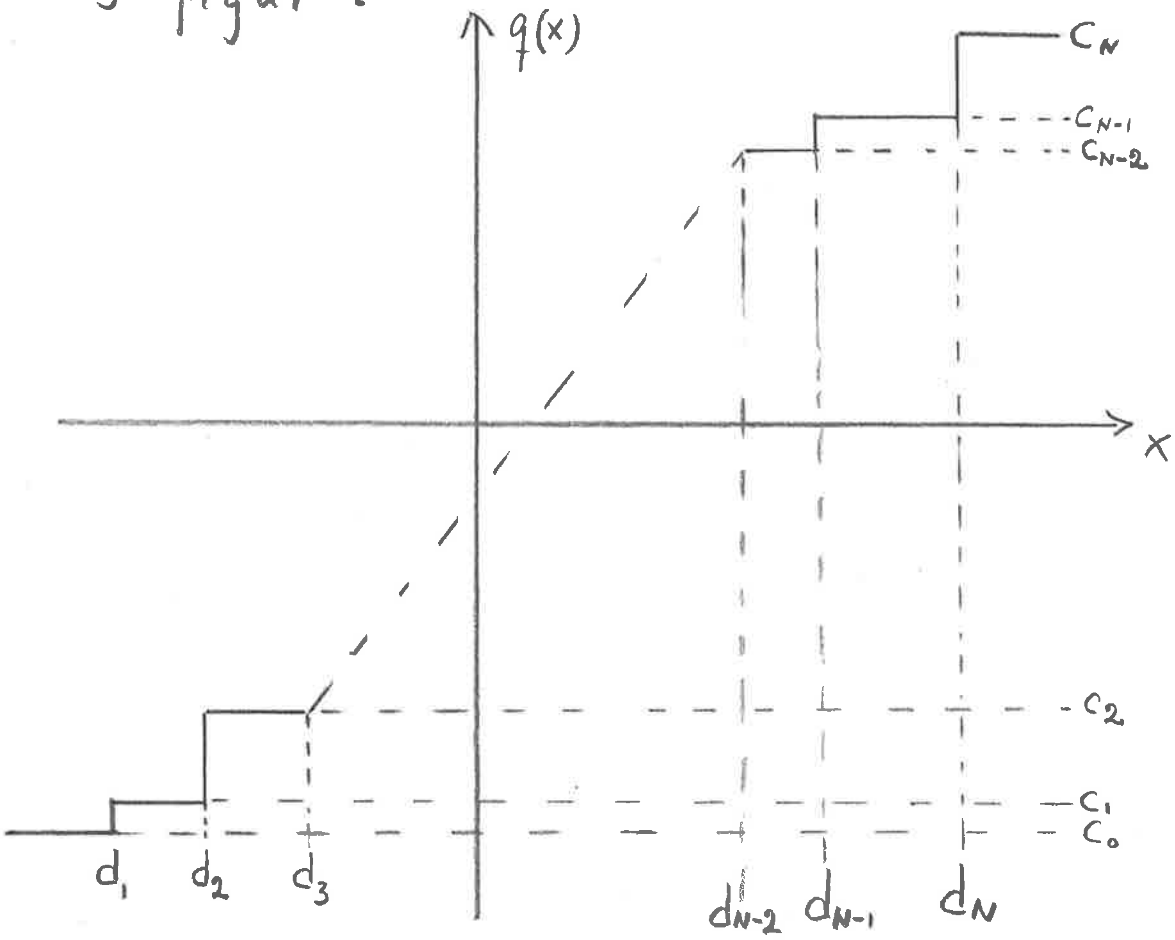
Problemet är här att kvantisera i "the Static Open-Loop Case".

vänd!

* Robert E. Larson: "Optimum Quantization in Dynamic Systems." Information and Control Group, Stanford Research Institute, Menlo Park, Cal.

Den skalära kvantiseringsingången, x, antar analoga värden. Frekvensfunktionen $p(x)$ för x antas känd. Den skalära kvantiseringsutgången $q(x)$ antar ett ändligt antal värden, $N+1$.

J figur:



Det mest allmänna fallet ges av väntevärdet av någon funktion $g(x, q(x))$, som kan skrivas:

$$(62) \quad J = E\{g(x, q(x))\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{d_1} g(x, c_0)\, p(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{d_i}^{d_{i+1}} g(x, c_i)\, p(x)\,dx + \int_{d_N}^{\infty} g(x, c_N)\, p(x)\,dx$$

Om d_0 definieras som $-\infty$ och

d_{N+1} som ∞ erhålles:

$$(63) \quad J = \sum_{i=0}^{N} \int_{d_i}^{d_{i+1}} g(x, c_i)\, p(x)\, dx$$

Oftast är man intresserad av felet, $x - c_i$, och i detta fall felets varians, vilket betyder att $g(x, c_i) = (x - c_i)^2$.

Genom att derivera J med avseende på d_i respektive c_i erhålles ekvationer ur vilka d_i och c_i kan bestämmas så att felets varians minimeras.

Man erhåller: (Se Larson!)

$$(64) \quad d_i = \frac{1}{2}(c_{i-1} + c_i)$$

$$(65) \quad \int_{d_i}^{d_{i+1}} g'(x - c_i)\, p(x)\, dx = 0$$

där g' är derivatan av g med avseende på dess argument.

Tillämpas Larsons sats på det här aktuella fallet (ekvation (3)) erhålles:

Optimala linjära stokastiska regleringen:

$$(66) \quad u(t) = -\frac{c-a}{b} \lambda\, e(t)$$

Räkna som om detta vore exakt!

Vid kvantisering till två nivåer erhålles:

$$u(t) = d \operatorname{sign}\left[-\lambda \frac{c-a}{b} e(t)\right] \tag{67}$$

$$\begin{cases} d_1 = -\infty \\ d_2 = 0 \\ d_3 = \infty \end{cases} \tag{68}$$

ty $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\left(e(t) \in N(0,1)\right)$

är symmetrisk.

Ekvation (65) ger:

$$\int_0^\infty \left(-\lambda \frac{c-a}{b} x - d \operatorname{sign}\left[-\lambda \frac{c-a}{b}\right]\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

Om d löses erhålles:

$$d = -\frac{\lambda \frac{c-a}{b}}{\operatorname{sign}\left[-\lambda \frac{c-a}{b}\right]} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{69}$$

dvs. styrlagen:

$$u(t) = -\frac{c-a}{b} \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign}\left[e(t)\right] \tag{70}$$

är optimal enligt Larson, och detta är samma styrlag som erhölls i II.4. Däremot ger Larsons sats ingen uppskattning av utsignalens varians då denna styrlag användes.

II. 7. Ett sifferexempel.

För att få en uppfattning om storleksordningar på kvantiseringsnivå och ökning i utsignalens varians tas följande sifferexempel ur K.J. Åström: "Reglerings-teknik, Stokastiska System, Exempelsamling." (Uppgift 5.6.)

$$\begin{cases} a = -0.7 \\ b = 0.6 \\ c = -0.9 \\ \lambda^2 = 0.5 \end{cases}$$

Ekvation (31) och (32):

$$\begin{cases} u(t) = 0.19 \operatorname{sign}[e(t)] \quad ; \; t = 0, 1, \ldots \\ Ey^2(t) = 0.5 + 0.014 \end{cases}$$

Dvs ökning i Ey^2 : 2.8 %

II. 8. Realisering av styrlagen i II. 4.

J det föregående har visats att styrlagen:

(71) $$u(t) = -\frac{c-a}{b}\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sign}[e(t)]$$

är optimal vid kvantisering till två nivåer i det enkla fall som ges av ekvation (1). Det gäller nu att realisera denna styrlag. Som jämförelse betraktas ekvation (1) med styrlagen:

$$u(t) = -\frac{c-a}{b}\,y(t)$$

som ger minimal varians för utsignalen. Jnsignalen i detta fall realiseras enkelt genom att utsignalen förstärks med faktorn $-\frac{c-a}{b}$.

Ekvation (71) kan skrivas om på följande sätt:

(72) $$u(t) = -\frac{c-a}{b}|\lambda|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sign}[\lambda e(t)]$$

Det gäller alltså att erhålla tecknet på $\lambda e(t)$.

Betrakta ekvation (1):

(1) $$y(t) + a y(t-1) = b u(t-1) + \lambda e(t) + \lambda c\, e(t-1)$$

Om $\lambda e(t)$ löses ut:

(73) $$\lambda e(t) = \frac{1+az^{-1}}{1+cz^{-1}}\,y(t) - \frac{bz^{-1}}{1+cz^{-1}}\,u(t)$$

Som kan skrivas:

$$\lambda e(t) = y(t) + \frac{(a-c)z^{-1}}{1+cz^{-1}}\, y(t) - \frac{bz^{-1}}{1+cz^{-1}}\, u(t) \tag{74}$$

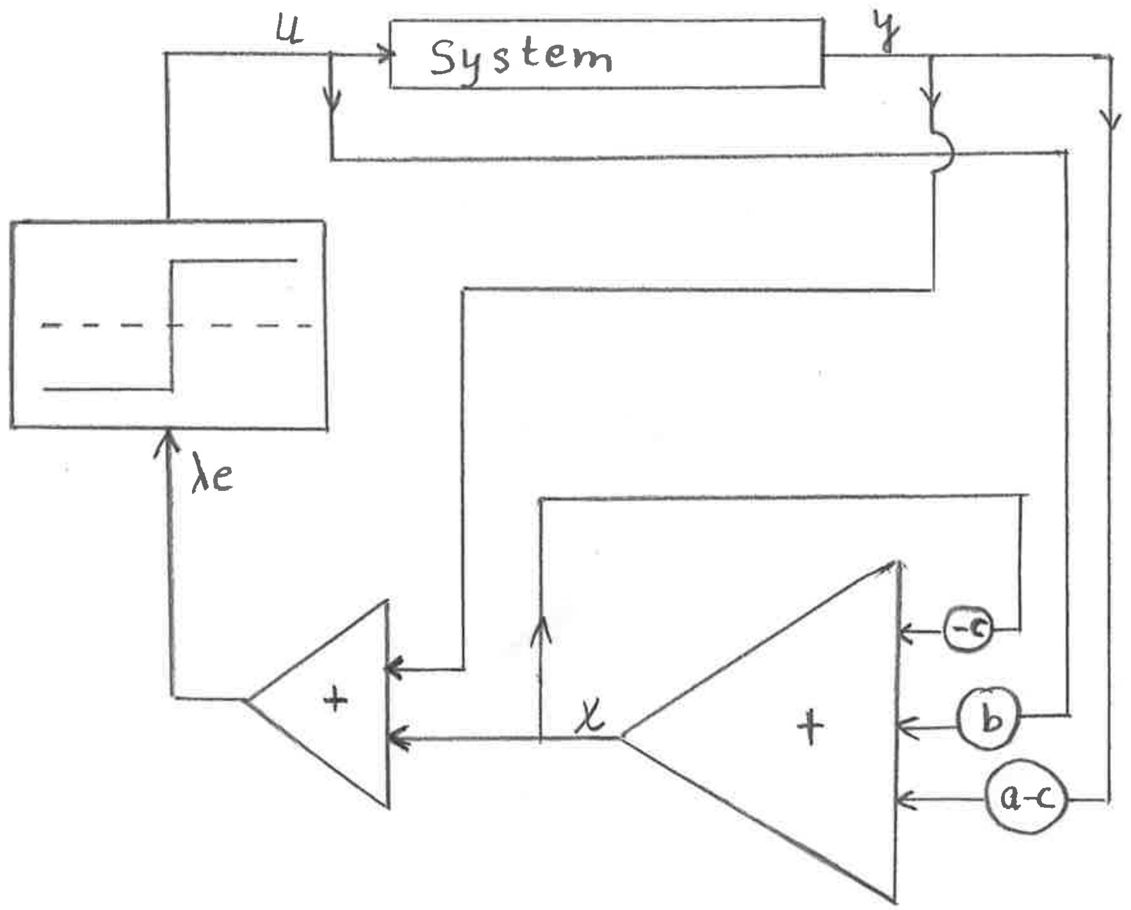
Inför $x(t)$ definierad av:

$$x(t) = \frac{(a-c)z^{-1}}{1+cz^{-1}}\, y(t) - \frac{bz^{-1}}{1+cz^{-1}}\, u(t) \tag{75}$$

dvs:

$$\begin{cases} x(t) = -c\,x(t-1) + (a-c)\,y(t-1) - b\,u(t-1) & (76) \\ \lambda e(t) = x(t) + y(t) & (77) \end{cases}$$

I figur:



Kap. III. Allmänna problemet.

III. 1. Beteckningar.

Med det "allmänna problemet" menas här en situation då systemekvationen lyder:

$$(1) \qquad A(z^{-1})\, y(t) = B(z^{-1})\, u(t-k) + \lambda\, C(z^{-1})\, e(t)$$

där:

λ, u, y oche har samma betydelse som i Kap. II. För $\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ gäller samma förutsättningar, dvs:

$$(2) \qquad f_e(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{och:}$$

$\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ är alla oberoende.
Vidare är z^{-1} operatorn definierad i Kap. II., samt:

$$(3) \qquad A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}$$

$$(4) \qquad B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}$$

$$(5) \qquad C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_n z^{-n}$$

Införes identiteten:

$$(6) \qquad C(z^{-1}) \equiv E(z^{-1})\, A(z^{-1}) + z^{-k} F(z^{-1})$$

där $E(z^{-1})$ och $F(z^{-1})$ är polynom av lägsta gradtal för att uppfylla likheten, kan systemekvationen (1) skrivas på följande två former:

$$(7) \qquad y(t) = \lambda E(z^{-1})\, e(t) + \frac{B(z^{-1})\, u(t-k) + \lambda F(z^{-1})\, e(t-k)}{A(z^{-1})}$$

$$(8) \qquad y(t) = \lambda E(z^{-1})\, e(t) + \frac{B(z^{-1}) E(z^{-1})\, u(t-k) + F(z^{-1})\, y(t-k)}{C(z^{-1})}$$

Ur ekvation (8) erhålles direkt:

$$(9) \qquad E y^2 \geq \lambda^2 (1 + e_1^2 + \ldots + e_{k-1}^2)$$

Likhetstecknet inträffar då:

$$(10) \qquad u(t) = -\frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})\, E(z^{-1})}\, y(t) \; ; \; t = 0, 1, \ldots\ldots$$

(Jämför kap. I. !)

III. 2. Härledning av den optimala kvantiseringsnivån med hjälp av Larsons sats.

Betrakta ekvation (7):

$$(7) \qquad y(t) = \lambda E(z^{-1})\, e(t) + \frac{1}{A(z^{-1})}\left[B(z^{-1})\, u(t-k) + \lambda F(z^{-1})\, e(t-k)\right]$$

Härav inses att den optimala stokastiska regleringen är:

$$(11) \qquad u(t) = -\lambda \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})}\, e(t)$$

Räkna som om detta vore exakt. (Enligt Larson). Kvantisering till två nivåer skall alltså ske på följande sätt:

$$(12) \qquad u(t) = q \operatorname{sign}\left[-\lambda \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})}\, e(t)\right]$$

ty: Frekvensfunktionen för $\frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} e(t)$

är symmetrisk, och med beteckningar från II. 6. är:

$$(13) \qquad \begin{cases} d_0 = -\infty \\ d_1 = 0 \\ d_2 = \infty \end{cases}$$

Vidare inses att:

(14) $\quad c_1 = -c_0 = |q|$

$g(x-c_i) = (x-c_i)^2$ användes, vilket medför att ekvation (65) i II. 6. här får följande utseende:

(15) $$\int_0^\infty \left(-\lambda \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} e(t) - q \operatorname{sign}\left[-\lambda \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} e(t)\right]\right) p(e)\, de = 0$$

Det första delproblemet är här att finna fördelningen för $\frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} e(t)$.

(16) $$\frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{f_0 + f_1 z^{-1} + \ldots\ldots + f_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots\ldots + b_n z^{-n}}$$

Antag att $\frac{1}{B(z^{-1})}$ kan skrivas:

(17) $$\frac{1}{B(z^{-1})} = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \ldots\ldots$$

Så att $\beta_\nu \to 0$ då $\nu \to \infty$, dvs $\frac{1}{B(z^{-1})}$ är konvergent.

Med detta krav kan $G(z^{-1}) = \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})}$ skrivas:

(18) $$G(z^{-1}) = \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} = f_0\beta_0 + (f_0\beta_1 + f_1\beta_0) z^{-1} + \ldots\ldots$$

eller:

(19) $$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \ldots\ldots$$

$G(z^{-1})$ är konvergent, ty enligt ovan är $\frac{1}{B(z^{-1})}$ konvergent och $F(z^{-1})$ är av ändlig ordning.

(20) $$G(z^{-1})e(t) = g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + \dots\dots\dots$$

Eftersom $e(t) \in N(0,1)$, alla t, och $\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ alla är oberoende gäller:

(21) $$G(z^{-1})e(t) \in N(0, \sqrt{g_0^2 + g_1^2 + \dots\dots})$$

Ekvation (15) får då utseendet:

(22) $$\int_0^\infty (-\lambda z - q \operatorname{sign}[-\lambda])\, e^{-\frac{z^2}{2\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^2}}\, dz = 0$$

Om denna ekvation löses:

(23) $$q = |\lambda| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^2}$$

Enligt Larson är alltså den optimala styrlagen: (ekvation (12))

(24) $$u(t) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^2} \operatorname{sign}[G(z^{-1})e(t)]$$

där $G(z^{-1}) = \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})}$

Kontrolleras detta med specialfallet i kap. II. fås:

$$G(z^{-1}) = \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{c-a}{b}$$

Vilket enligt ekvation (24) ger:

$$(25) \quad u(t) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{c-a}{b} \right| \operatorname{sign}\left[\frac{c-a}{b} e(t) \right]$$

som är ekvivalent med:

$$(26) \quad u(t) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c-a}{b} \operatorname{sign}[e(t)]$$

vilket stämmer med kap. II. (ekvation (24),(31))

I det allmänna fallet återstår dock att bestämma Ey^2 när styrlag (24) användes.

III. 3. Härledning av Ey^2 i ett specialfall

Betrakta på nytt ekvation (7):

$$(7) \qquad y(t) = \lambda E(z^{-1})\, e(t) + \frac{1}{A(z^{-1})}\left[B(z^{-1})\, u(t-k) + \lambda F(z^{-1}) e(t-k) \right]$$

Enligt III.2. är optimala kvantiseringen till två nivåer: (Larson)

$$(27) \qquad u(t) = q \operatorname{sign}\left[-\lambda \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} e(t) \right]$$

Att detta är optimalt borde kunna bevisas analogt med II. 5., vilket dock inte görs här, utan Larsons sats får ligga till grund för optimaliteten.

Rent intuitivt förefaller det omedelbart vara den bästa kvantiseringen.

Härled nu optimalt q-värde genom att minimera Ey^2, då styrlagen (27) användes. Detta q-värde skall alltså bli identiskt med det i ekvation (23).

Behandla först ett specialfall, nämligen då:

$$(28) \qquad \begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \\ B(z^{-1}) = b_0 \\ C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \\ k = 1 \end{cases}$$

Ur identiteten (6) kan då lösas:

(29) $\begin{cases} E(z^{-1}) = 1 \\ F(z^{-1}) = c_1 - a_1 + (c_2 - a_2) z^{-1} = f_0 + f_1 z^{-1} \end{cases}$

Vilket i sin tur, med beteckning enligt (18) i III.2., medför:

(30) $$G(z^{-1}) = \frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{f_0}{b_0} + \frac{f_1}{b_0} z^{-1} = g_0 + g_1 z^{-1}$$

Systemekvationen (7) kan då med dessa specialiseringar skrivas:

(31) $$y(t) = \lambda e(t) + \frac{b_0}{A(z^{-1})} \left[q \operatorname{sign}[-\lambda G(z^{-1}) e(t-1)] + \lambda G(z^{-1}) e(t-1) \right]$$

Antag analogt med (17) att:

(32) $$\frac{1}{A(z^{-1})} = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \ldots\ldots$$

är konvergent, dvs $\alpha_\nu \to 0$ då $\nu \to \infty$.
Inför:

(33) $$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = b_0 + (b_0\alpha_1 + b_1) z^{-1} + \ldots$$

(34) $$H(z^{-1}) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots\ldots$$

är då också konvergent ty $B(z^{-1})$ är av ändlig ordning.

Ekvation (31) kan då skrivas:

(35) $$y(t) = \lambda e(t) + H(z^{-1})\left[q\,\mathrm{sign}[-\lambda G(z^{-1})e(t-1)] + \lambda G(z^{-1})e(t-1)\right]$$

Kvadrera och tag medelvärdet !

(36) $$Ey^2 = \lambda^2 + E\left\{H(z^{-1})\left[q\,\mathrm{sign}[-\lambda G(z^{-1})e(t-1)] + \lambda G(z^{-1})e(t-1)\right]\right\}^2$$

ty: $e(t)$ är oberoende av $e(t-1), e(t-2), \ldots$
och $Ee(t) = 0$

Vid minimering av Ey^2 skall alltså:

(37) $$E\left\{H(z^{-1})\left[q\,\mathrm{sign}[-\lambda G(z^{-1})e(t-1)] + \lambda G(z^{-1})e(t-1)\right]\right\}^2 = Ex^2$$

minimeras.

Med villkoren enligt (30) och (34) :

(38) $$\begin{aligned} x = {} & h_0 q\,\mathrm{sign}[-\lambda(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2))] + h_0\lambda(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2)) + \\ & + h_1 q\,\mathrm{sign}[-\lambda(g_0 e(t-2) + g_1 e(t-3))] + h_1\lambda(g_0 e(t-2) + g_1 e(t-3)) + \\ & + h_2 q\,\mathrm{sign}[-\lambda(g_0 e(t-3) + g_1 e(t-4))] + h_2\lambda(g_0 e(t-3) + g_1 e(t-4)) + \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Vid kvadrering och medelvärdesbildning erhålles, på grund av vad som gäller för $\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$:
(Det förutsättes att t är så stort att motsvarande till vad som gällde i II. 5. ((43), (44), (45), (46)) gäller här.)

$$(39)\quad Ex^2 = q^2\left(h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + \dots\right) +$$

$$+ \lambda^2\left(g_0^2 + g_1^2\right)\left(h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + \dots\right) +$$

$$+ 2q\lambda\, \phi_1\left(h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + \dots\right) +$$

$$+ 2q\lambda\, \phi_2\left(h_0 h_1 + h_1 h_2 + h_2 h_3 + \dots\right) +$$

$$+ 2q^2\, \phi_3\left(h_0 h_1 + h_1 h_2 + h_2 h_3 + \dots\right) +$$

$$+ 2q\lambda\, \phi_4\left(h_0 h_1 + h_1 h_2 + h_2 h_3 + \dots\right) +$$

$$+ 2\lambda^2 g_0 g_1\left(h_0 h_1 + h_1 h_2 + h_2 h_3 + \dots\right)$$

där:

$$(40)\quad \begin{cases} \phi_1 = E\left[g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right] \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right)\right] \\ \phi_2 = E\left[g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2)\right] \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right)\right] \\ \phi_3 = E \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right)\right] \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2)\right)\right] \\ \phi_4 = E\left[g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right] \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2)\right)\right] \end{cases}$$

För utvärderingen av dessa medelvärden hänvisas till appendix. ϕ_3 ger enligt sannolikhetsteorin upphov till integralen: $\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}[g_0 x + g_1 y] \operatorname{sign}[g_0 y + g_1 z]\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} dx\,dy\,dz$, vilken dock visar sig svårlöst (för mig). Den bestämmes enligt nedan.

$$(41)\quad \begin{cases} \phi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{g_0^2+g_1^2}\ \mathrm{sign}[-\lambda] \\ \phi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2+g_1^2}}\ \mathrm{sign}[-\lambda] \\ \phi_4 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2+g_1^2}}\ \mathrm{sign}[-\lambda] \end{cases}$$

Ekvation (39) kan då skrivas:

$$(42)\quad E x^2 = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu^2\right)\left(q^2 + \lambda^2(g_0^2+g_1^2) - 2q|\lambda|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{g_0^2+g_1^2}\right) +$$

$$+\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu h_{\nu+1}\right)\left(2\lambda^2 g_0 g_1 - 4q|\lambda|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2+g_1^2}} + 2q^2\phi_3\right)$$

Derivera!

$$(43)\quad \frac{dEx^2}{dq} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu^2\right)\left(2q - 2|\lambda|\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{g_0^2+g_1^2}\right) +$$

$$+\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu h_{\nu+1}\right)\left(-4|\lambda|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2+g_1^2}} + 4q\phi_3\right)$$

Om $\frac{dEx^2}{dq} = 0$ erhålles första termen $=0$ för:

$$(44)\quad q = |\lambda|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{g_0^2+g_1^2}$$

Men detta är det optimala q-värdet. Se ekvation (23)!

Alltså måste även andra termen i ekvation (43) vara $=0$ för detta q-värde, vilket ger följande ekvation för ϕ_3:

$$(45) \qquad 4q\phi_3 - 4|\lambda|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2+g_1^2}} = 0$$

eller med insatt q-värde:

$$(46) \qquad \phi_3 = \frac{g_0 g_1}{g_0^2 + g_1^2}$$

<u>Parentes</u>

Anm. Med tanke på det enkla svaret för ϕ_3, förefaller integralen för ϕ_3 inte olöslig. Om denna löstes skulle III. 3. vara en annan härledning av optimala kvantiseringsnivån, som gjorts i III. 2. (Utan stöd av Larsons sats.)

<u>Slut parentes.</u>

Om värdena för $\{\phi_\nu\}_{\nu=1}^{4}$ och det optimala q-värdet insättes erhålles ur ekvation (42):

$$(47) \qquad EX^2_{min} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu^2\right)\left(\lambda^2(g_0^2+g_1^2) - \lambda^2\frac{2}{\pi}(g_0^2+g_1^2)\right) +$$
$$+\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu h_{\nu+1}\right)\left(2\lambda^2 g_0 g_1 - 2\lambda^2\frac{2}{\pi} g_0 g_1\right)$$

Vilket enligt appendix omformas till:

$$(48) \quad E x^2_{min} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(g_1 h_i + g_0 h_{i-1} \right)^2$$

Enligt ekvation (36) :

$$(49) \quad E y^2_{min} = \lambda^2 + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(g_1 h_i + g_0 h_{i-1} \right)^2$$

Förutsättningen att $E(z^{-1}) = 1$ är ej väsentlig, utan allmänt kan följande <u>sammanfattning</u> göras : (Om $G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1}$)

För styrlagen :

$$(50) \quad u(t) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{g_0^2 + g_1^2} \, \mathrm{sign}\left[G(z^{-1}) e(t) \right]$$

erhålles :

$$(51) \quad E y^2_{min} = \lambda^2 \left(1 + e_1^2 + \ldots + e_{k-1}^2 \right) + \lambda^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(g_1 h_i + g_0 h_{i-1} \right)^2$$

III.4. Härledning av Ey^2 i ytterligare ett specialfall.

Betrakta systemekvation (7):

$$(7) \quad y(t) = \lambda E(z^{-1}) e(t) + \frac{1}{A(z^{-1})} \left[B(z^{-1}) u(t-k) + \lambda F(z^{-1}) e(t-k) \right]$$

Med beteckningar enligt föregående:

$$(52) \quad y(t) = \lambda E(z^{-1}) e(t) + H(z^{-1}) \left[u(t-k) + \lambda G(z^{-1}) e(t-k) \right]$$

Enligt Larson är optimal kvantisering:

$$(53) \quad u(t) = q \, \mathrm{sign}\left[-\lambda G(z^{-1}) e(t) \right]$$

Antag analogt med III.3. att $G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}$. (Kan erhållas genom att $F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}$ och $B(z^{-1}) = b_0$)

På grund av förutsättningarna om $\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty}$ blir:

$$(54) \quad Ey^2 = \lambda^2 (1 + e_1^2 + \ldots + e_{k-1}^2) +$$

$$+ E\left\{ H(z^{-1}) \left[q \, \mathrm{sign}[-\lambda G(z^{-1}) e(t-k)] + \lambda G(z^{-1}) e(t-k) \right] \right\}^2$$

Det gäller att minimera:

$$(55) \quad E\left\{ H(z^{-1}) \left[q \, \mathrm{sign}[-\lambda G(z^{-1}) e(t-k)] + \lambda G(z^{-1}) e(t-k) \right] \right\}^2 = Ex^2$$

På samma sätt som i III. 3. erhålles:

$$(56)\quad x = h_0 q \,\mathrm{sign}[-\lambda(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2))] +$$
$$+ h_0 \lambda (g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)) +$$
$$+ h_1 q \,\mathrm{sign}[-\lambda(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2) + g_2 e(t-3))] +$$
$$+ h_1 \lambda (g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2) + g_2 e(t-3)) +$$
$$+ h_2 q \,\mathrm{sign}[-\lambda(g_0 e(t-2) + g_1 e(t-3) + g_2 e(t-4))] +$$
$$+ h_2 \lambda (g_0 e(t-2) + g_1 e(t-3) + g_2 e(t-4)) +$$
$$+ h_3 q \,\mathrm{sign}[-\lambda(g_0 e(t-3) + g_1 e(t-4) + g_2 e(t-5))] +$$
$$+ h_3 \lambda (g_0 e(t-3) + g_1 e(t-4) + g_2 e(t-5)) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Kvadrera och tag medelvärdet:

$$(57)\quad E x^2 = (h_0^2 + h_1^2 + \ldots)(q^2 + \lambda^2(g_0^2 + g_1^2 + g_2^2) + 2q\lambda\phi_1) +$$
$$+ (h_0 h_1 + h_1 h_2 + \ldots)(2q\lambda\phi_2 + 2q\lambda\phi_3 + 2q^2\phi_4 + 2\lambda^2(g_0 g_1 + g_1 g_2)) +$$
$$+ (h_0 h_2 + h_1 h_3 + \ldots)(2q\lambda\phi_5 + 2q\lambda\phi_6 + 2q^2\phi_7 + 2\lambda^2 g_0 g_2)$$

där:

$$
(58)\quad \begin{cases}
\phi_1 = E\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\right) \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\right)\right] \\
\phi_2 = E\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\right) \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2) + g_2 e(t-3)\right)\right] \\
\phi_3 = E\left(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2) + g_2 e(t-2)\right) \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\right)\right] \\
\phi_4 = E \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\right)\right] \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2) + g_2 e(t-3)\right)\right] \\
\phi_5 = E\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\right) \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t-2) + g_1 e(t-3) + g_2 e(t-4)\right)\right] \\
\phi_6 = E\left(g_0 e(t-2) + g_1 e(t-3) + g_2 e(t-4)\right) \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\right)\right] \\
\phi_7 = E \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\right)\right] \operatorname{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t-2) + g_1 e(t-3) + g_2 e(t-4)\right)\right]
\end{cases}
$$

För utvärderingen av dessa medelvärden hänvisas till appendix. Där erhålles:

$$
(59)\quad \begin{cases}
\phi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2} \operatorname{sign}[-\lambda] \\
\phi_2 = \phi_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \dfrac{(g_0 g_1 + g_1 g_2)}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2}} \operatorname{sign}[-\lambda] \\
\phi_5 = \phi_6 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \dfrac{g_0 g_2}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2}} \operatorname{sign}[-\lambda]
\end{cases}
$$

På samma sätt som i III.3. erhålles ϕ_4 och ϕ_7 genom att derivera ekvation (57). Insättning i ekvation (57) ger:

$$(60)\quad Ex^2 = (h_0^2+h_1^2+\dots)\left(q^2+\lambda^2(g_0^2+g_1^2+g_2^2)-2q|\lambda|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}\right)+$$

$$+(h_0h_1+h_1h_2+\dots)\left(2\lambda^2(g_0g_1+g_1g_2)-4q|\lambda|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{(g_0g_1+g_1g_2)}{\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}}+2q^2\phi_4\right)+$$

$$+(h_0h_2+h_1h_3+\dots)\left(2\lambda^2g_0g_2-4q|\lambda|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{g_0g_2}{\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}}+2q^2\phi_7\right)$$

Derivera och sätt $\frac{dEx^2}{dq}=0$!

$$(61)\quad (h_0^2+h_1^2+\dots)\left(2q-2|\lambda|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}\right)+$$

$$+(h_0h_1+h_1h_2+\dots)\left(4q\phi_4-4|\lambda|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cdot\frac{(g_0g_1+g_1g_2)}{\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}}\right)+$$

$$+(h_0h_2+h_1h_3+\dots)\left(4q\phi_7-4|\lambda|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cdot\frac{g_0g_2}{\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}}\right)=0$$

Första termen $=0$ för:

$$(62)\quad q=|\lambda|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}$$

men detta är det optimala q-värdet (Se ekvation (23)!). De bägge andra termerna i (61) måste alltså också försvinna för detta q-värde, vilket ger en möjlighet att bestämma ϕ_4 och ϕ_7. Då erhålles:

$$(63)\quad \begin{cases} \phi_4 = \dfrac{g_0g_1+g_1g_2}{g_0^2+g_1^2+g_2^2} \\[2ex] \phi_7 = \dfrac{g_0g_2}{g_0^2+g_1^2+g_2^2} \end{cases}$$

Om det optimala q-värdet och de nu bestämda $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{7}$ -värdena insättes i ekvation (57) erhålles enligt appendix:4.:

(64) $$E x^2_{min} = \lambda^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(g_2 h_i + g_1 h_{i-1} + g_0 h_{i-2}\right)^2$$

Följande sammanfattning kan alltså göras (Om $G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}$) :

För styrlagen :

(65) $$u(t) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2}\ \operatorname{sign}\left[G(z^{-1})\, e(t)\right]$$

erhålles :

(66) $$E y^2_{min} = \lambda^2\left(1 + e_1^2 + \dots + e_{k-1}^2\right) + \lambda^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(g_2 h_i + g_1 h_{i-1} + g_0 h_{i-2}\right)^2$$

III. 5. Härledning av Ey^2 i det allmänna fallet.

Vid kvantisering till två nivåer på ingången, i det allmänna fallet som beskrivs av ekvation (7), har den optimala styrlagen härletts i III. 2. För två specialfall har sedan Ey^2 härletts för denna styrlag (III. 3 respektive III. 4) Resultaten har sammanfattats i ekvationerna (51) och (66). Det inses lätt hur dessa ekvationer skall generaliseras. Generaliseringen borde föregås av ett induktionsbevis, som dock utelämnas här. Generellt erhålles alltså:

För styrlagen:

$$u(t) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^2} \; \mathrm{sign}[G(z^{-1})e(t)] \tag{67}$$

erhålles:

$$Ey^2_{min} = \lambda^2(1 + e_1^2 + \dots + e_{k-1}^2) + \tag{68}$$
$$+ \lambda^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sum_{i=0}^{\infty} (g_m h_i + g_{m-1} h_{i-1} + \dots + g_0 h_{i-m})^2$$

där m är ett tal sådant att g_{m+1} kan försummas.

Detta index m måste införas på grund av att $g_\infty h_0$ är obestämt. Samtidigt är det dock litet otillfredsställande, på grund av att uttrycket för Ey^2_{min} blir "avhugget".

Summauttrycket på formen:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (g_m h_i + g_{m-1} h_{i-1} + --- g_0 h_{i-m})^2$$

är bekväm då $G(z^{-1})$ är av låg ordning (som i III.3. och III.4.). För att få en generalisering då $G(z^{-1})$ är av oändlig ordning så försök skriva om ekvationerna (51) och (66)!

Ur appendix. 2. erhålles:

$$(69) \quad \sum_{i=0}^{\infty} (g_1 h_i + g_0 h_{i-1})^2 =$$

$$= \{ h_0^2 (g_0^2 + g_1^2) + h_1^2 (g_0^2 + g_1^2) + h_2^2 (g_0^2 + g_1^2) +$$

$$+ h_3^2 (g_0^2 + g_1^2) + ------ +$$

$$+ 2 h_0 h_1 g_0 g_1 + 2 h_1 h_2 g_0 g_1 + 2 h_2 h_3 g_0 g_1 +$$

$$+ 2 h_3 h_4 g_0 g_1 + ------- \} =$$

$$= \{ h_0^2 \sum_{i=0}^{1} g_i^2 + h_1^2 \sum_{i=0}^{1} g_i^2 + h_2^2 \sum_{i=0}^{1} g_i^2 + ----$$

$$---- + 2 h_0 h_1 \sum_{i=0}^{0} g_i g_{i+1} + 2 h_1 h_2 \sum_{i=0}^{0} g_i g_{i+1} +$$

$$+ 2 h_2 h_3 \sum_{i=0}^{0} g_i g_{i+1} + ----- \} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 \sum_{i=0}^{1} g_i^2 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} h_j h_{j+1} \sum_{i=0}^{0} g_i g_{i+1}$$

Analogt för appendix. 3. :

$$(70) \quad \sum_{i=0}^{\infty}(g_2 h_i + g_1 h_{i-1} + g_0 h_{i-2})^2 =$$

$$= \{ h_0^2(g_0^2 + g_1^2 + g_2^2) + h_1^2(g_0^2 + g_1^2 + g_2^2) +$$

$$+ h_2^2(g_0^2 + g_1^2 + g_2^2) + \text{- - - - - - - - -} +$$

$$+ 2h_0 h_1(g_0 g_1 + g_1 g_2) + 2h_1 h_2(g_0 g_1 + g_1 g_2) +$$

$$+ 2h_2 h_3(g_0 g_1 + g_1 g_2) + \text{- - - - - - - - -} +$$

$$+ 2h_0 h_2(g_0 g_2) + 2h_1 h_3(g_0 g_2) +$$

$$+ 2h_2 h_4(g_0 g_2) + \text{- - - - - - - - -} \} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 \sum_{i=0}^{2} g_i^2 +$$

$$+ 2\sum_{j=0}^{\infty} h_j h_{j+1} \sum_{i=0}^{1} g_i g_{i+1} +$$

$$+ 2\sum_{j=0}^{\infty} h_j h_{j+2} \sum_{i=0}^{0} g_i g_{i+2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 \sum_{i=0}^{2} g_i^2 + 2\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{\infty} h_j h_{j+k} \sum_{i=0}^{1} g_i g_{i+k}$$

där g_3 definieras $=0$.

Generaliseringen är nu lätt att göra. Summauttrycket i Ey^2 blir i det allmänna fallet:

$$(71)\quad \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h_j h_{j+k} \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} h_j h_j g_i g_i + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} h_j h_{j+k} g_i g_{i+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\mathrm{sign}[k]} h_j h_{j+k} g_i g_{i+k}$$

där alltså:

$$(72)\quad 2^{\mathrm{sign}[k]} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k > 0 \end{cases}$$

<u>Sammanfattning</u>:

För styrlagen:

$$(73)\quad u(t) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2}\ \mathrm{sign}\left[G(z^{-1})\, e(t)\right]$$

erhålles:

$$(74)\quad Ey^2_{min} = \lambda^2 \sum_{\nu=0}^{k-1} e_\nu^2 + \lambda^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\mathrm{sign}[k]} h_j h_{j+k} g_i g_{i+k}$$

Resultatet kontrolleras med specialfallet i kap. II. Där var:

$$(75)\quad \begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + az^{-1} \\ B(z^{-1}) = b \\ C(z^{-1}) = 1 + cz^{-1} \\ E(z^{-1}) = 1 \\ F(z^{-1}) = c-a \\ k=1 \end{cases}$$

Vilket ger:

$$(76)\quad \begin{cases} G(z^{-1}) = \dfrac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \dfrac{c-a}{b} \\[2ex] H(z^{-1}) = \dfrac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \dfrac{b}{1+az^{-1}} = b\left(1 - az^{-1} + a^2z^{-2} - \ldots\right) \end{cases}$$

$\therefore$ Styrlag: (enligt ekvation (73))

$$(77)\quad u(t) = -\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\frac{c-a}{b}\right| \operatorname{sign}\left[\frac{c-a}{b}e(t)\right] = -\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{c-a}{b}\operatorname{sign}[e(t)]$$

vilket stämmer med kap. II.

Utsignalens varians: (enligt ekvation (74))

$$Ey^2_{min} = \lambda^2 + \lambda^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{(c-a)^2}{1-a^2}$$

Vilket också stämmer med kap. II.

För att få en uppfattning om storleksordningen för ökningen i utsignalens varians borde ett numeriskt exempel genomräknas. På grund av ekvation (74):s relativt enkla form torde ett program för detta vara lätt att åstadkomma.

För det <u>påhittade</u> systemet där:

$$A(z^{-1}) = 1 - 0.6 z^{-1} + 0.2 z^{-2}$$
$$B(z^{-1}) = 5 + 3 z^{-1}$$
$$C(z^{-1}) = 1 - 0.8 z^{-1} + 0.2 z^{-2}$$

har <u>kladdräkningar</u> givet att ökningen i Ey^2 är ungefär 1 %.

Kap. IV. Exempel med drift.

1 Beteckningar.

Betrakta systemekvationen:

(1) $$\nabla y(t) + a\nabla y(t-1) = b\nabla u(t-1) + \lambda e(t) + \lambda c e(t-1)$$

dvs:

(2) $$(1+az^{-1})\nabla y(t) = b\nabla u(t-1) + \lambda(1+cz^{-1})e(t)$$

där:

(3) $$\nabla = 1 - z^{-1}$$

dvs:

(4) $$\begin{cases} \nabla y(t) = y(t) - y(t-1) \\ \nabla u(t-1) = u(t-1) - u(t-2) \end{cases}$$

och i övrigt enligt beteckningar enligt ovan.

Att detta kallas "exempel med drift" beror på att om $y(t)$ löses ut erhålles:

(5) $$y(t) = \frac{b}{1+az^{-1}}u(t-1) + \frac{1+cz^{-1}}{(1+az^{-1})(1-z^{-1})}\lambda e(t)$$

dvs det har tillkommit en faktor $1-z^{-1}$ i nämnaren för "störningstermen". $\frac{1}{1-z^{-1}} = 1+z^{-1}+z^{-2}\ldots$, alltså kan systemet "driva iväg".

IV. 2. Lösning enligt kap III.

Med beteckningar enligt kap III.:

$$(6)\quad \begin{cases} A(z^{-1}) = (1+az^{-1})(1-z^{-1}) = 1 + (a-1)z^{-1} - az^{-2} \\ B(z^{-1}) = b - bz^{-1} \\ C(z^{-1}) = 1 + cz^{-1} \end{cases}$$

vilket ger:

$$(7)\quad \begin{cases} E(z^{-1}) = 1 \\ F(z^{-1}) = 1 + c - a + az^{-1} \end{cases}$$

och:

$$G(z^{-1}) = \frac{1+c-a}{b} + \frac{1+c}{b} z^{-1} + \frac{1+c}{b} z^{-2} + \ldots\ldots$$

Enligt ekvation (73) kap. III erhålles:

$$(8)\quad u(t) = -\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\left(\frac{1+c-a}{b}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{b}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{b}\right)^2 + \ldots\ldots} \ \operatorname{sign}\left[G(z^{-1})e(t)\right]$$

dvs $G(z^{-1})$ är ej konvergent och styrlagen kan ej bestämmas. Resultatet är helt naturligt med tanke på att systemekvationen beskriver ett samband mellan in- och ut-signalens differenser från tidpunkt till tidpunkt. Med beaktande av störningarna kan därför själva insignalen anta mycket stora värden, vilket återspeglas i ekvation (8).

IV. 3. Kvantisering av $\nabla u(t)$

Skriv om systemekvationen: (enligt (5))

$$(5)\qquad y(t) = \frac{b}{1+az^{-1}}u(t-1) + \frac{1+cz^{-1}}{(1+az^{-1})(1-z^{-1})}\lambda e(t)$$

$$(9)\qquad y(t) = \lambda e(t) + \frac{b}{1+az^{-1}}u(t-1) + \lambda \cdot \frac{(1+c-a)z^{-1} + az^{-2}}{(1+az^{-1})(1-z^{-1})}e(t)$$

$$(10)\qquad y(t) = \lambda e(t) + \frac{b}{(1+az^{-1})(1-z^{-1})}\left[\nabla u(t-1) + \frac{\lambda}{b}(1+c-a+az^{-1})e(t-1)\right]$$

Om $\nabla u(t-1)$ byts ut mot $u(t-1)$ i III. 3. är detta samma situation som där. När $H(z^{-1})$ bestämts kan därför resultatet skrivas upp direkt (ekvationerna (50) och (51) i kap. III.)

$$(11)\qquad H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = b\Big(1 + (1-a)z^{-1} + (1-a+a^2)z^{-2} + $$
$$+ (1-a+a^2-a^3)z^{-3} + \text{.....}\Big)$$

vilket medför:

$$(12)\qquad \nabla u(t) = -\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\left(\frac{1+c-a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}\,\mathrm{sign}\left[\frac{1+c-a+az^{-1}}{b}e(t)\right]$$

$$(13)\qquad Ey^2 = \lambda^2 + \lambda^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\Big\{a^2 + [1+c-a^2]^2 + $$
$$+ [(1+c)(1-a) + a^3]^2 + [(1+c)(1-a+a^2) - a^4]^2 + $$
$$+ [(1+c)(1-a+a^2-a^3) + a^5]^2 + \text{.......}\Big\}$$

Detta innebär att Ey^2 antar oändligt värde efter tillräckligt lång tid. Resultatet kunde förutses redan av ekvation (11), eftersom $H(z^{-1})$ ej är konvergent utan:

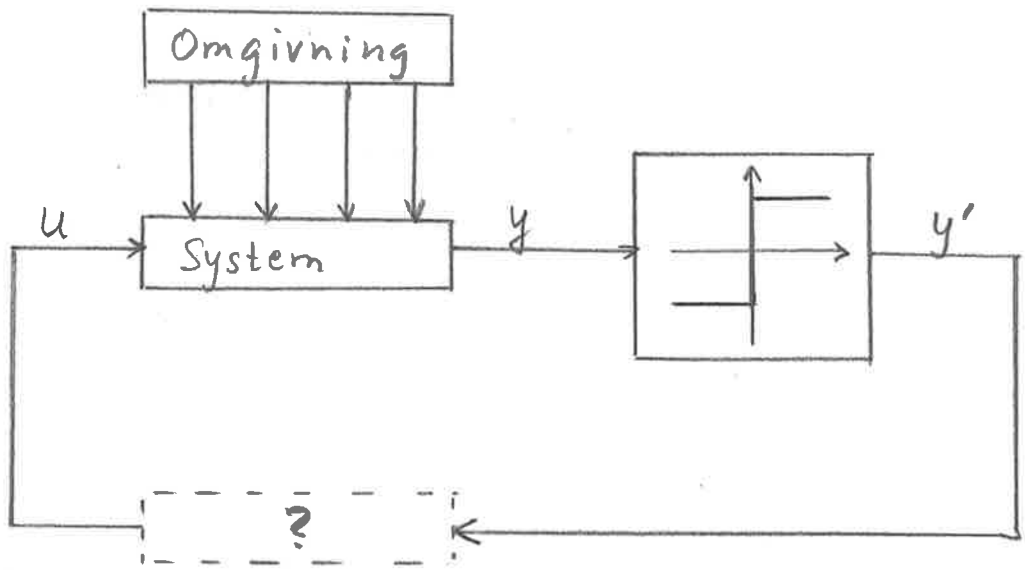
$$(14) \qquad h_\nu \to \frac{b}{1+a} \neq 0 \quad \text{då} \quad \nu \to \infty$$

Kap. V. Något om kvantisering på utgången.

1. Problemställning.

Det gäller här, att ur, i princip tecknen för utsignalen, beräkna en optimal styrlag och utsignalens varians.

I figur:



där:

$$(1)\quad \begin{cases} y'(t) = \mathrm{sign}[y(t)] \\ u(t) = q\cdot f(y'(t), y'(t-1), \ldots\ldots y'(0)) \end{cases}$$

Detta problem bör alltså intuitivt vara mycket svårare, eftersom stor del av informationen förloras vid kvantiseringen av y.

Som i Kap. II. användes systemekvationen:

$$(2)\quad y(t) + a\,y(t-1) = b\,u(t-1) + \lambda e(t) + \lambda c\, e(t-1)$$

V. 2. Kvantisering vid tidpunkten t-1.

Antag att vanlig minimum-variansstrategi användes upp till och med tidpunkten t-2. Enligt ekvation (1) och ekvation (10) i II. 2. erhålles då:

(3) $$y(t) = \lambda e(t) + bq \operatorname{sign}[y(t-1)] + (c-a)y(t-1)$$

men:

(4) $$y(t-1) = \lambda e(t-1)$$

vilket ger:

(5) $$y(t) = \lambda e(t) + bq \operatorname{sign}[\lambda e(t-1)] + \lambda(c-a)e(t-1)$$

som är samma situation som i II.2. (ekvation (12)).

Detta var också att vänta med tanke på ekvation (4).

V.3. Kvantisering vid tidpunkten t-2.

Antag nu att kvantiseringen sker en tidsenhet tidigare, dvs:

$$(6) \quad y(t) = \lambda e(t) + bu(t-1) + \lambda(c-a)e(t-1) - abu(t-2) - a\lambda(c-a)e(t-2)$$

Styrlagarna väljes allmänt:

$$(7) \quad \begin{cases} u(t-2) = q\, y'(t-2) \\ u(t-1) = r\, y'(t-2) + s\, y'(t-1) \end{cases}$$

Att beroendet inte antas sträcka sig längre tillbaka i tiden, beror på att systemet styrts ut så bra som det är möjligt upp till och med tidpunkten t-3. (Minimum-variansstrategi)
Alltså: (ekvation (6))

$$(8) \quad y(t) = \lambda e(t) + br\,\mathrm{sign}[y(t-2)] + bs\,\mathrm{sign}[y(t-1)] + \lambda(c-a)e(t-1) - abq\,\mathrm{sign}[y(t-2)] - a\lambda(c-a)e(t-2)$$

Ur systemekvationen erhålles:

$$(9) \quad \begin{cases} y(t-1) = \lambda e(t-1) + bq\,\mathrm{sign}[y(t-2)] + \lambda(c-a)e(t-2) \\ y(t-2) = \lambda e(t-2) \end{cases}$$

Vid kvadrering och medelvärdesbildning av ekvation (8) erhålles bland andra termer i Ey^2:

(10) $$2bs\lambda(c-a)\, E\, e(t-1)\operatorname{sign}\{y(t-1)\}$$

Beräkna $E\, e(t-1)\operatorname{sign}[y(t-1)]$!

(11) $$E e(t-1)\operatorname{sign}[y(t-1)] =$$

$$= E e(t-1)\operatorname{sign}\{\lambda e(t-1) + bq\operatorname{sign}[\lambda e(t-2)] + \lambda(c-a)e(t-2)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} x\operatorname{sign}[\lambda x + bq\operatorname{sign}[\lambda y] + \lambda(c-a)y]\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\int_{-\infty}^{-\frac{\lambda(c-a)y+bq\operatorname{sign}[\lambda y]}{\lambda}} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_{-\frac{\lambda(c-a)y+bq\operatorname{sign}[\lambda y]}{\lambda}}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right\} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot e^{-\frac{\lambda^2(c-a)^2y^2}{2\lambda^2}}\cdot e^{-\frac{b^2q^2}{2\lambda^2}}\cdot e^{-\frac{2bq(c-a)|\lambda y|}{2\lambda^2}}\,dy =$$

$$= e^{-\frac{b^2q^2}{2\lambda^2}}\cdot \text{något}$$

ty $\{e(t)\}_{t=0}^{t=\infty} \in N(0,1)$ och λ antas positiv. (Använt vid lösningen av olikheten $\lambda x + bq\operatorname{sign}[\lambda y] + \lambda(c-a)y > 0$)

Förmodandet att detta problem är svårare bekräftas här av att konstanten q som skall bestämmas ingår kvadrerad i en exponent.

Appendix.

1. Utvärdering av medelvärden i III. 3.

Med beteckningar från kap. III. :

$$\phi_1 = E\left[g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right] \text{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right)\right]$$

På samma sätt som i kap. III. ekvation (21) :

$$\phi_1 = E\,|z|\,\text{sign}[-\lambda] \quad ; \text{där} \quad z \in N\left(0, \sqrt{g_0^2+g_1^2}\right)$$

$$E|z| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z|}{\sqrt{2\pi(g_0^2+g_1^2)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2(g_0^2+g_1^2)}}\, dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi(g_0^2+g_1^2)}} \cdot \int_0^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2(g_0^2+g_1^2)}}\, dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi(g_0^2+g_1^2)}} \cdot (g_0^2+g_1^2)$$

$$\therefore \phi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{g_0^2+g_1^2} \cdot \text{sign}[-\lambda]$$

$$\phi_2 = E\left[g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2)\right] \text{sign}\left[-\lambda\left(g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right)\right] =$$

$$= E\; g_0 e(t-1)\, \text{sign}\left[g_0 e(t) + g_1 e(t-1)\right] \text{sign}[-\lambda]$$

Enligt sannolikhetsteorin :

$$\frac{\phi_2}{\operatorname{sign}[-\lambda]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_0 x \operatorname{sign}[g_0 y + g_1 x] \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\int_{-\infty}^{-\frac{g_0 y}{g_1}} g_0 x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-\frac{g_0 y}{g_1}}^{\infty} g_0 x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2 g_0 \int_{-\frac{g_0 y}{g_1}}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_0 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}\left(1+\frac{g_0^2}{g_1^2}\right)} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot g_0 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{g_0^2}{g_1^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2+g_1^2}}$$

$$\therefore \phi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2+g_1^2}} \operatorname{sign}[-\lambda]$$

På samma sätt :

$$\frac{\phi_4}{\operatorname{sign}[-\lambda]} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1 x \operatorname{sign}[g_0 x + g_1 y] \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

Om detta jämföres med uträkningarna för ϕ_2 erhålles : ($g_0 \to g_1$; $g_1 \to g_0$)

$$\phi_4 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; \frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}} \; \mathrm{sign}[-\lambda]$$

OBS !

Vid lösningen av integralen ovan användes olikheten :

$$g_0 y + g_1 x > 0$$

dvs: $\quad g_1 x > -g_0 y$

eller: $\quad x > -\frac{g_0}{g_1} y$

Detta är sant endast om $g_1 > 0$. I annat fall skiftas olikheten och vi får ett minustecken i svaret. Men i gengäld måste i det fallet ($g_1 < 0$), g_1 ha absoluttecken ($\sqrt{g_1^2} = |g_1|$), vilket återger den ovan angivna formen på ϕ_2 och ϕ_4.

2. Omformning av ekvation (47) i III. 3.

Ekvation (47):

$$(47) \qquad E\,x^2_{min} = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu^2 \left(\lambda^2 (g_0^2 + g_1^2) - \lambda^2 \frac{2}{\pi} (g_0^2 + g_1^2) \right) +$$

$$+ \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu h_{\nu+1} \right) \left(2\lambda^2 g_0 g_1 - 2\lambda^2 \frac{2}{\pi} g_0 g_1 \right) =$$

$$= (h_0^2 + h_1^2 + \dots)\, \lambda^2 (g_0^2 + g_1^2) \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) +$$

$$+ (h_0 h_1 + h_1 h_2 + \dots)\, \lambda^2\, 2 g_0 g_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) =$$

$$= \lambda^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \Big(h_0^2 (g_0^2 + g_1^2) + h_1^2 (g_0^2 + g_1^2) +$$

$$+ h_2^2 (g_0^2 + g_1^2) + \dots \qquad +$$

$$+ h_0 h_1\, 2 g_0 g_1 + h_1 h_2\, 2 g_0 g_1 + \dots \Big) =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \lambda^2 \Big((g_1 h_0)^2 + (g_1 h_1 + g_0 h_0)^2 +$$

$$+ (g_1 h_2 + g_0 h_1)^2 + (g_1 h_3 + g_0 h_2)^2 + \dots \Big) =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} (g_1 h_i + g_0 h_{i-1})^2$$

där $h_{-1} = 0$.

3. Utvärdering av medelvärden i III. 4.

Analogt med appendix 1. erhålles:

$$\varphi_1 = E|z|\,\mathrm{sign}[-\lambda] \quad ; \text{ där } \quad z \in N\left(0, \sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}\right)$$

$$E|z| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z|}{\sqrt{2\pi(g_0^2+g_1^2+g_2^2)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2(g_0^2+g_1^2+g_2^2)}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(g_0^2+g_1^2+g_2^2)}} \cdot 2 \cdot (g_0^2+g_1^2+g_2^2)$$

$$\therefore \ \varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}\ \mathrm{sign}[-\lambda]$$

$$\varphi_2 = E\big(g_0 e(t) + g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\big)\,\mathrm{sign}\big[-\lambda\big(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2) + g_2 e(t-3)\big)\big] =$$

$$= E\big(g_1 e(t-1) + g_2 e(t-2)\big)\,\mathrm{sign}\big[-\lambda\big(g_0 e(t-1) + g_1 e(t-2) + g_2 e(t-3)\big)\big] =$$

$$= \frac{\mathrm{sign}[-\lambda]}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} (g_1 x + g_2 y)\,\mathrm{sign}[g_0 x + g_1 y + g_2 z]\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{\mathrm{sign}[-\lambda]}{(2\pi)^{3/2}} \Big\{ \iiint_{\mathbb{R}^3} g_1 x\,\mathrm{sign}[g_0 x + g_1 y + g_2 z]\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \iiint_{\mathbb{R}^3} g_2 y\,\mathrm{sign}[g_0 x + g_1 y + g_2 z]\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}\,dx\,dy\,dz \Big\} =$$

$$= \frac{\mathrm{sign}[-\lambda]}{(2\pi)^{3/2}} \{ I_1 + I_2 \}$$

$I_2 = I_1$ om: $g_2 \xrightarrow{I_2} g_1^{I_1}$, $g_1^{I_2} \to g_0^{I_2}$, $g_0^{I_2} \to g_2^{I_1}$

$$I_1 = g_1 \iiint_{\mathbb{R}^3} x \,\mathrm{sign}[g_0 x + g_1 y + g_2 z]\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} dx\,dy\,dz =$$

$$= g_1 \iint_{\mathbb{R}^2} \left\{ -\int_{-\infty}^{-\frac{g_1 y + g_2 z}{g_0}} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-\frac{g_1 y + g_2 z}{g_0}}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\} e^{-\frac{y^2+z^2}{2}} dy\,dz =$$

$$= g_1 \iint_{\mathbb{R}^2} 2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g_0^2}(g_1 y + g_2 z)^2} e^{-\frac{y^2+z^2}{2}} dy\,dz$$

Exponentialfunktion i integranden:

$$e^{-\frac{1}{2} z^2 \left(1 + \frac{g_2^2}{g_0^2}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{2} y^2 \left(1 + \frac{g_1^2}{g_0^2}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{2 g_1 g_2 y z}{g_0^2}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} z^2 \alpha} \cdot e^{-\frac{1}{2} y^2 \beta} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 2 \gamma z y}$$

$$\therefore I_1 = 2 g_1 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha}{2}\left(z + \frac{\gamma}{\alpha} y\right)^2} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}\left(\beta - \frac{\gamma^2}{\alpha}\right)} dz\,dy$$

Sätt:

$$\begin{cases} v = z + \frac{\gamma}{\alpha} y \\ w = y \end{cases}$$

$$\left| \frac{d(v,w)}{d(y,z)} \right| = 1$$

$$\therefore I_1 = 2g_1 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\alpha}{2}v^2} \cdot e^{-\frac{w^2}{2}\left(\beta - \frac{\gamma^2}{\alpha}\right)} dv\, dw =$$

$$= 2g_1 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2} \, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{\gamma^2}{\alpha}}} =$$

$$= 2g_1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}$$

Med α, β och γ insatta:

$$I_1 = 2g_1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{g_2^2}{g_0^2}\right)\left(1 + \frac{g_1^2}{g_0^2}\right) - \frac{g_1^2 g_2^2}{g_0^4}}} =$$

$$= 2g_1 \cdot 2\pi \cdot \frac{g_0}{\sqrt{(g_0^2 + g_2^2)\left(1 + \frac{g_1^2}{g_0^2}\right) - \frac{g_1^2 g_2^2}{g_0^2}}} =$$

$$= 2g_1 \cdot 2\pi \cdot \frac{g_0}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2}}$$

OBS! Här kan samma anmärkning göras, som gjorts i appendix 1. angående g_0:s tecken.

$$\therefore I_2 = 2g_2 \cdot 2\pi \cdot \frac{g_1}{\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}}$$

$$\therefore \phi_2 = \frac{\text{sign}[-\lambda]}{2\pi\sqrt{2\pi}} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{(g_0g_1+g_1g_2)}{\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}}$$

$$\phi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(g_0g_1+g_1g_2)}{\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}} \text{sign}[-\lambda]$$

$$\phi_3 = E(g_0e(t-1)+g_1e(t-2)+g_2e(t-3))\,\text{sign}[-\lambda(g_0e(t)+g_1e(t-1)+g_2e(t-2))]$$

$$= E(g_0e(t-1)+g_1e(t-2))\,\text{sign}[-\lambda(g_0e(t)+g_1e(t-1)+g_2e(t-2))]$$

Vilket leder till samma typ av integral som för ϕ_2 men här med andra koefficienter, svaret kan därför skrivas upp direkt:

$$\phi_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(g_0g_1+g_1g_2)}{\sqrt{g_0^2+g_1^2+g_2^2}} \text{sign}[-\lambda]$$

$$\phi_5 = E(g_0e(t)+g_1e(t-1)+g_2e(t-2))\,\text{sign}[-\lambda(g_0e(t-2)+g_1e(t-3)+g_2e(t-4))]$$

$$= E\, g_2e(t-2)\,\text{sign}[-\lambda(g_0e(t-2)+g_1e(t-3)+g_2e(t-4))]$$

Vilket leder till samma typ av integral som I_1 i uträkningen av ϕ_2, alltså:

$$\phi_5 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g_0 g_2}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2}} \operatorname{sign}[-\lambda]$$

På samma sätt ϕ_6 :

$$\phi_6 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{g_0 g_2}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2 + g_2^2}} \operatorname{sign}[-\lambda]$$

4. Omformning av ekvation (57) i III. 4.

Ekvation (57): (g- och ϕ-värden insatta)

$$Ex^2_{min} = (h_0^2 + h_1^2 + \dots)\left(\lambda^2(g_0^2+g_1^2+g_2^2) - \lambda^2 \tfrac{2}{\pi}(g_0^2+g_1^2+g_2^2)\right) +$$

$$+ (h_0 h_1 + h_1 h_2 + \dots)\left(2\lambda^2(g_0 g_1 + g_1 g_2) - 2\lambda^2 \tfrac{2}{\pi}(g_0 g_1 + g_1 g_2)\right) +$$

$$+ (h_0 h_2 + h_1 h_3 + \dots)\left(2\lambda^2 g_0 g_2 - 2\lambda^2 \tfrac{2}{\pi} g_0 g_2\right) =$$

$$= \lambda^2\left(1 - \tfrac{2}{\pi}\right)\Big\{ h_0^2(g_0^2+g_1^2+g_2^2) + h_1^2(g_0^2+g_1^2+g_2^2) +$$

$$+ h_2^2(g_0^2+g_1^2+g_2^2) + \dots\dots +$$

$$+ 2h_0 h_1 (g_0 g_1 + g_1 g_2) + 2h_1 h_2 (g_0 g_1 + g_1 g_2) +$$

$$+ 2h_2 h_3 (g_0 g_1 + g_1 g_2) + \dots\dots\dots +$$

$$+ 2h_0 h_2 g_0 g_2 + 2h_1 h_3 g_0 g_2 + 2h_2 h_4 g_0 g_2 + \dots \Big\} =$$

$$= \lambda^2\left(1 - \tfrac{2}{\pi}\right)\Big\{ (g_2 h_0)^2 + (g_2 h_1 + g_1 h_0)^2 +$$

$$+ (g_2 h_2 + g_1 h_1 + g_0 h_0)^2 + (g_2 h_3 + g_1 h_2 + g_0 h_1)^2 +$$

$$+ (g_2 h_4 + g_1 h_3 + g_0 h_2)^2 + \dots\dots \Big\} =$$

$$= \lambda^2\left(1 - \tfrac{2}{\pi}\right) \sum_{i=0}^{\infty} (g_2 h_i + g_1 h_{i-1} + g_0 h_{i-2})^2$$

där $h_{-1} = h_{-2} = 0$

Litteraturförteckning.

1. K.J. Åström: Reglerteknik.
   Stokastiska system.
   Föreläsningar vid LTH VT 1967.

2. Robert E. Larson: Optimum Quantization in Dynamic Systems.

3. G. Blom: Föreläsningar i sannolikhetsteori vid LTH H.T. 1964. (VBV, LTH)