NUMERISK LÖSNING AV OPTIMALA STYRPROBLEM MED KENNETH-McGILLS METOD

BENGT MATTSSON

Rapport RE - 19 sept. 1967

Detta examensarbete i reglerteknik omfattar tillämpning av Kenneth-McGills metod för lösning av tvåpunkts randvärdesproblem, d.v.s. lösning av ett system av differentialekvationer, där man känner några begynnelsevärden och resten av randvärdena är givna som slutvärden. Denna typ av problem uppstår bland annat vid lösning av optimeringsproblem med Pontryagins maximiprincip. Två huvudtyper av problem har undersökts, nämligen konstanttidsproblem och minimaltidsproblem. Dessutom kan särskiljas fall där derivatorna i differentialekvationerna är kontinuerliga resp. diskontinuerliga funktioner av tiden. Det visade sig vid undersökningen att Kenneth-McGills metod inte är generellt tillämpbar vid lösning av differentialekvationer med diskontinuerliga derivator.

1. Konstant tid problem.

1.1 Definitiom av problemet.

Problemen vi skall undersöka är en typ av målsökningsproblem, där det gäller att finna en styrvariabel $U(t)$, sådan att (vissa av) systemens variabler med givna begynnelsevärden vid tiden $t=t_0$ antar minsta möjliga absolutbelopp vid $t=t_1$, där t_0 och t_1 är på förhand givna.
Betrakta därför det olinjära systemet:

$$\mathring{X} = F(X,U,t);$$

$$|u_i| \leq \alpha_i; \quad U(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots\ldots u_k(t));$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n);$$

$$F = (f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots f_n);$$

$t \in (t_0, t_1)$; t_0 och t_1 givna. (1)

med begynnelsevärdena

$$X(t_0) = (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n);$$

Sök en styrsignal $U(t) = U^*$ sådan att

$$G = \langle X(t_1), X(t_1) \rangle$$

blir minimal.

Anm. Vi utnyttjar här och i fortsättningen den skalära produkten som sambandet $\langle X,Y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

1.2 Optimeringsmetod.

Problemet kan nu lösas med klassisk variationskalkyl, men vi väljer att i stället lösa det med Pontryagins Maximiprincip (1).

Vi skriver nu om vårt minimeringsvillkor enligt

$$G(t_1) = \langle X(t_1), X(t_1) \rangle = 2\int_{t_0}^{t_1} \langle X(t), \mathring{X}(t) \rangle \, dt + G(t_0) = J_1;$$

där $G(t_0) = \langle X(t_0), X(t_0) \rangle$;

Vi noterar att J_1 antar sitt minimum samtidigt som funktionalen

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \langle X(t), \mathring{X}(t) \rangle \, dt;$$

Inför nu den skalära variabeln x_0 enligt

$$\mathring{x}_0 = f_0(X,U,t); \qquad x_0(t_0) = 0;$$

där $f_o(X,U,t)$ är integranden i J, d.v.s.

$$f_o(X,U,t) = \langle X(t),\dot{X}(t)\rangle ;$$

där $\dot{X}(t)$ direkt erhålles ur systemekvationerna som funktion av X,U och t.
Definiera vidare Hamiltonfunktionen

$$H = p_o f_o + p_1 f_1 + p_2 f_2 + \ldots\ldots = p_o f_o + \langle P,F\rangle ; \quad P = (p_1,p_2,\ldots,p_n);$$

där P definieras av

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \qquad i = o,1,2,\ \ldots\ldots,n \qquad (2)$$

Definiera också

$$M(P,X,t) = \sup_{U\in V} H(P,X,U,t)$$

där V är definitionsområdet för U.

Vi får då följande nödvändiga villkor för att U(t) skall vara en optimal styrsignal (d.v.s. minimera J):

> För att den (tillåtna) styrsignalen U(t), $t_o \leq t \leq t_1$, och den korresponderande trajektorien X(t) skall vara en lösning till optimeringsproblemet (1) med fixa begynnelsevärden $X(t_o)$ och variabel slutpunkt $X(t_1)$ (t_o och t_1 givna), är det nödvändigt att det existerar en icketrivial kontinuerlig vektorfunktion $P(t) = (p_o(t),p_1(t),\ldots,p_n(t))$ korresponderande mot funktionerna X(t) och U(t) enligt (2), sådan att (3)
>
> 1^o för alla t, $t_o \leq t \leq t_1$, antar funktionen $H(P(t),X(t),U(t),t)$ av variabeln $U\in V$ sitt maximum i punkten $U = U(t)$:
>
> $$H(P(t),X(t),U(t),t) = M(P(t),X(t),t);$$
>
> 2^o transversalitetsvillkoret $P(t_1) = (-1,0,0,\ldots,0)$ är uppfyllt.

Villkoren ger då en klass av trajektorier $X = X(t)$ i vilken de optimala trajektorierna ingår som element.
Beviset av satsen såväl som formuleringen återfinnes i ref.(1).

1.3 Lösning av systemet.

Vi har nu erhållit följande system av första ordningens olineära differentialekvationer

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= f_0; \\
\dot{x}_1 &= f_1; \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n; \\
\dot{p}_0 &= f_{n+1}; \\
\dot{p}_1 &= f_{n+2}; \qquad\qquad (4)\\
&\vdots \\
\dot{p}_n &= f_{n+n+1}; \\
t &\in (t_0, t_1); \\
X(t_0) &= (0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n); \\
P(t_1) &= (-1, 0, 0, \ldots\ldots, 0); \\
U &= g(X, P, t); \qquad \text{(erhålles ur (3) } 1^{\circ}\text{)}
\end{aligned}
$$

d.v.s. ett system med 2n + 2 differentialekvationer där hälften av randvillkoren är givna i punkten t_0 och de övriga i punkten t_1.

Systemet kan nu lösas med endera av nedanstående tre metoder

1) gradientmetoden

2) succesiv och systematisk variation av de okända begynnelsevärdena tills de övriga randvillkoren alla är uppfyllda

3) succesiv approximation av det olineära systemet med ett system av lineära differentialekvationer.

Examensarbetet är avsett att omfatta lösningar med hjälp av den tredje metoden och därför kommer vi i fortsättningen att i görligaste mån utnyttja denna lösningsmetod, så som den framställts av Kenneth & McGill, ref (2). Nedanstående är delvis hämtat ur deras arbete.

1.3.1 Newton-Raphson-Kantorowich's generaliserade operator.

Vi lämnar för ett ögonblick systemet (4) och betraktar i stället det allmänna systemet

$$\dot{y}_i(t) = g_i(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n, t); \qquad (5)$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n; \qquad t \in (t_0, t_f);$$

där funktionerna g_i är en gång partiellt deriverbara med avseende på alla y_i. Initialvillkoren är specificerade för $t = t_o$ för r variabler vilka, eventuellt efter omnumrering, kan betecknas

$$y_1(t_o) = y_{1,0}$$
$$y_2(t_o) = y_{2,0}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$y_r(t_o) = y_{r,0}$$

De n-r övriga randvillkoren är givna för $t = t_f$ enligt

$$y_{r+1}(t_f) = y_{r+1,f}$$
$$y_{r+2}(t_f) = y_{r+2,f}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$y_n(t_f) = y_{n,f}$$

Systemet blir, skrivet på vektorform

$$Y = G(Y,t); \qquad t \in (t_o,t_f);$$
$$Y(t_o) = Y_o; \qquad Y(t_f) = Y_f;$$
$$Y = (y_1,y_2,\ldots.y_n); \qquad G = (g_1,g_2,\ldots..g_n);$$

Inför nu ett metriskt rum, givet av

$$S = Y(t);\ y_i(t) \text{ är kontinuerlig på } (t_o,t_f),\ i = 1,2,\ldots.,n$$

med normen

$$\|Y^1,Y^2\| = \max\left|y_i^1(t) - y_i^2(t)\right|; \quad Y^1,Y^2 \in S;$$

Vi definierar nu en operator A på S genom $Y^{k+1} = AY^k$, $k = o,1,\ldots;$ Y^o godtycklig i S:

$$Y^{k+1} = J(Y^k,t)\,(Y^{k+1} - Y^k) + G(Y^k,t); \tag{6}$$

$$y_1^k(t_o) = y_{1,o} \qquad y_{r+1}^k(t_f) = y_{r+1,f}$$
$$y_2^k(t_o) = y_{2,o} \qquad y_{r+2}^k(t_f) = y_{r+2,f}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$y_r^k(t_o) = y_{r,o} \qquad y_n^k(t_f) = y_{n,f}$$

$k = 1,2,3,\ldots\ldots..;$

där $J(Y,t)$ är Jacobis matris med partiella derivator av g_i med avseende på y_j, $i = 1,2,\ldots.n$; $j = 1,2,\ldots\ldots,n$;

Under ganska almänna villkor (se bl.a. Kantorowich's teorem) konvergerar talföljden Y^k kvadratiskt mot den sökta lösningen Y^+ till det olineära systemet.

Notera att (6) är ett lineärt system i Y^{k+1}, som alltså konvergerar mot lösningen till det olineära systemet (5). Valet av normen $\|\cdot\|$ medför att vi har likformig konvergens för varje komponent $y_i(t)$ av $Y(t)$.

Numerisk tillämpning.

Vi skall nu närmare precisera tillvägagångssättet vid lösningen av det lineära systemet (6). För att anknyta till systemet (4) antar vi nu att $r = n/2$, d.v.s. hälften av randvillkoren är givna vid $t = t_o$ och den andra hälften vid $t = t_f$.

Vid det k+1:sta iterationssteget har vi det lineära systemet

$$\dot{Y}^{k+1} = J(Y^k,t)\ (Y^{k+1} - Y^k) + G(Y^k,t);$$

som är ekvivalent med

$$\dot{Y} = C(t)Y(t) + D(t); \qquad t \in (t_o,t_f);$$

$$Y = (y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n);$$

$$\begin{array}{ll} y_1(t_o) = y_{1,o} & y_{n/2+1}(t_f) = y_{n/2+1,f} \\ y_2(t_o) = y_{2,o} & y_{n/2+2}(t_f) = y_{n/2+2,f} \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ y_{n/2}(t_o) = y_{n/2,o} & y_n(t_f) = y_{n,f} \end{array}$$

Generera genom numerisk integration en följd $Y_{n/2+i}(t)$, $i = 1,2,\ldots\ldots,n/2$; av lösningar till det homogena systemet $\dot{Y} = C(t)Y(t)$ med begynnelsevärdena

$$\begin{array}{l} Y_{n/2+1}(t_o) = (0,0,\ldots.0,y_{n/2+1}=1,0,0,\ldots0) \\ Y_{n/2+2}(t_o) = (0,0,\ldots.0,0,y_{n/2+2}=1,0,\ldots0) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Y_n(t_o) \quad = \quad (0,0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots1) \end{array}$$

Generera en partikulärlösning $Y_p(t)$ till det icke-homogena systemet

$$\dot{Y} = C(t)Y(t) + D(t)$$

med initialvärdena

$Y_p(t_o) = (y_{1,o}, y_{2,o}, \ldots\ldots, y_{n/2,o}, K_1, K_2, \ldots\ldots, K_{n/2});$
där K_i, $i = 1,2,\ldots\ldots,n/2$; är godtyckliga, d.v.s. oftast
$K_1 = K_2 = \ldots\ldots = K_{n/2} = 0.$

Man kan också välja $K_i \neq 0$ på sådant sätt, att största möjliga precision erhålles vid lösningen av de n/2 lineära ekvationerna nedan.

Lösningen Y(t) av det icke-homogena systemet ges nu av

$$Y(t) = c_{n/2+1}Y_{n/2+1}(t) + c_{n/2+2}Y_{n/2+2}(t) + \ldots . + c_nY_n(t) + Y_p(t);$$

där de n/2 konstanterna $c_{n/2+i}$, $i = 1,2,\ldots.,n/2$, bestämmes av randvillkoren vid $t = t_f$ genom lösning av ekvationssystemet med de n/2 lineära ekvationerna.

För att spara lagringsutrymme i datamaskinen, låter vi inte lineärkombinationen ovan ge lösningen till Y(t), utan bestämmer denna genom att ännu en gång integrera det icke-homogena systemet med initialvillkoren

$$Y(t_o) = (y_{1,o}, y_{2,o}, \ldots\ldots, y_{n/2,o}, c_{n/2+1}+K_1, c_{n/2+2}+K_2, \ldots, c_n+K_{n/2});$$

Denna procedur fordrar endast lagring av slutvärdena för vektorn $(Y_{n/2+i})$, $i = 1,2,\ldots\ldots,n/2$; och slutvärdena till Y_p för beräkning av Y(t). Lösningen Y(t) lagras förstås, emedan den behövs för bestämning av C(t) och D(t) till nästa iteration.

1.4 Exempel 1.

Vi försöker nu lösa systemet nedan där

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad X(0) = (1,0); \quad |u| \leq 1$$
$$\dot{x}_2 = u$$

och $x_1(T)^2 + x_2(T)^2$ är minimal. $T = 1.5;$

Genom tillämpning av sats (3) samt formel (2) får vi

$$J = \tfrac{1}{2}\int_0^T \langle x,\dot{x}\rangle \, dt = \tfrac{1}{2}\int_0^T (x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)dt \qquad \text{som ger}$$

$$f_o = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2u;$$

$$H = P_of_o + \langle P,F\rangle = p_o(x_1x_2 + x_2u) + p_1x_2 + p_2u =$$

$$= p_ox_1x_2 + p_1x_2 + u(p_ox_2 + p_2); \quad \text{vilket ger}$$

$$u = \text{sign}(p_ox_2 + p_2)$$

samt enligt formel (2)

$$\dot{x}_o = x_1x_2 + x_2u;$$
$$\dot{x}_1 = x_2; \qquad X(0) = (0,1,0)$$
$$\dot{x}_2 = u; \qquad P(T) = (-1,0,0)$$
$$\dot{p}_o = 0; \qquad u = \text{sign}(p_ox_2 + p_2)$$
$$\dot{p}_1 = -p_ox_2;$$
$$\dot{p}_2 = -p_ox_1 - p_ou - p_1;$$

Randvillkoren medför att p_o = konstant = -1, och vi kan elliminera p_o och x_o ur systemet. Ersätter vi vidare p_1 med x_3 och p_2 med x_4 samt betecknar $x_4 - x_2$ med $\theta(X)$ fås systemet

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad = f_1(X); \quad x_1(0) = 1$$
$$\dot{x}_2 = u \qquad = f_2(X); \quad x_2(0) = 0$$
$$\dot{x}_3 = x_2 \qquad = f_3(X); \quad x_3(T) = 0$$
$$\dot{x}_4 = x_1 - x_3 + u = f_4(X); \quad x_4(T) = 0$$

där $u = \text{sign}(x_4 - x_2) = \text{sign}\theta(X)$

Vi tillämpar nu Kenneth-McGills iterativa metod på systemet. Det uppstår emellertid en komplikation, enär inte längre alla $f_i(X)$ är partiellt deriverbara m. a. p. x_j för alla i och j. Räknar vi formellt med

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{d(\text{sign}\ \theta(X))}{d\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x_j} = 2\,\delta(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x_j}$$

där δ är Diracfunktionen fås Jacobis matris

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta(\theta) & 0 & 2\delta(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2\delta(\theta) & -1 & 2\delta(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \ldots \partial f_1/\partial x_4 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \partial f_4/\ x_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \partial f_4/\partial x_4 \end{bmatrix}$$

med vars hjälp vi bildar $\dot{X}^{k+1} = J(X^k)(X^{k+1} - X^k) + F(X^k)$

För exempelvis komponenten x_2 fås, om θ^k betecknar $\theta(X^k)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^{k+1} &= -2\delta(\theta^k)(x_2^{k+1} - x_2^k) + 2\delta(\theta^k)(x_4^{k+1} - x_4^k) + \operatorname{sign}\theta^k = \\ &= 2\delta(\theta^k)(x_4^{k+1} - x_2^{k+1}) - 2\delta(\theta^k)(x_4^k - x_2^k) + \operatorname{sign}\theta^k = \\ &= 2\delta(\theta^k)\cdot\theta^{k+1} - 2\delta(\theta^k)\cdot\theta^k + \operatorname{sign}\theta^k; \end{aligned}$$

Men $\delta(\theta^k)\cdot\theta^k = 0$, dvs

$$x_2^{k+1} = 2\delta(\theta^k)\cdot\theta^{k+1} + \operatorname{sign}\theta^k;$$

På samma sätt erhålles det kompletta systemet:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= x_2^{k+1} & x_1(0) &= 1 \\ x_2^{k+1} &= 2\delta(\theta^k)\cdot\theta^{k+1} + \operatorname{sign}\theta^k & x_2(0) &= 0 \\ x_3^{k+1} &= x_2^{k+1} & x_3(T) &= 0 \\ x_4^{k+1} &= 2\delta(\theta^k)\cdot\theta^{k+1} + x_1^{k+1} - x_3^{k+1} + \operatorname{sign}\theta^k; & x_4(T) &= 0 \\ \theta^k &= x_4^k - x_2^k \end{aligned}$$

Det är nu möjligt att numeriskt integrera systemet mellan diskontinuitets-punkterna. Om vi dessutom utnyttjar att vid integration över en diskontinuitetspunkt gäller $\int\delta(\theta^k)\cdot\theta^{k+1}dt = \theta^{k+1}(t_k)$, där t_k är det t, för vilket $\theta^k(t) = 0$, kan vi lösa hela systemet numeriskt.

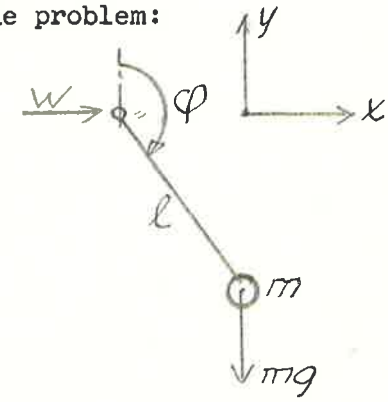
Det visar sig emellertid att lösningen, enligt denna metod, inte konvergerar mot den rätta lösningen X^+ till det olineära systemet för någon startfunktion $X^o(t)$.(se appendix)

Det är möjligt, att det går att få systemet att konvergera genom att i stället för koefficienten 2 framför Diracfunktionen välja någon annan koefficient, men eftersom jag inte lyckats ange någon generell metod för att bestämma denna koefficient, har detta alternativ uteslutits ur arbetet.

Det bör nämnas, att Kenneth-McGill också påpekar att metoden inte alltid är tillämpbar vid diskontinuerliga funktioner av denna typ.

Exempel 2.

Vi väljer nu ett exempel, där vi endast har kontinuerliga, en gång partiellt deriverbara funktioner $f_i(X)$. Betrakta därför följande problem:



En pendel är upphängd enligt vidstående figur på så sätt, att pivot-punkten är rörlig i horisontalplanet. Vilken acceleration w skall man ge pivotpunkten för att funktionalen

$J = a_1\int_0^T w^2 dt + \varphi^2(T)$ skall bli minimal ?

Problemet är alltså, att inom tiden T föra pendeln från sitt viloläge till läget $\varphi(T)=0$.

Termen $a_1\int_0^T w^2 dt$ har införts för att accelerationen skall bli begränsad.

Beteckna pivotpunktens läge med z. Vi får då

$x = z + l\cdot\sin\varphi \qquad m\ddot{x} = -F\sin\varphi$

$y = l\cdot\cos\varphi \qquad m\ddot{y} = -F\cos\varphi - mg$

Elimineras F ur dessa ekvationer fås pendelns ekvation

$l\cdot\ddot{\varphi} - g\cdot\sin\varphi + \ddot{z}\cdot\cos\varphi = 0; \quad \ddot{z} = w$

Sätt $\quad x_1 = \varphi$

$\quad x_a = \dot{\varphi}$

och vi får

$\dot{x}_1 = x_a$ $\qquad$ sätt vidare $\quad x_2 = l\cdot x_\alpha/g$

$l\dot{x}_\alpha = g\sin x_1 - w\cos x_1$ $\qquad u = w/g$

$g/l = k$

som ger

$\dot{x}_1 = k\cdot x_2$

$\dot{x}_2 = \sin x_1 - u\cdot\cos x_1$

$J_1 = a_1\int_0^{T_1} w^2 dt + \varphi^2(T) = \int_0^T (au^2 + x_1\dot{x}_1)dt - x_1^2(0);$

Minimera $J = \int_0^T (au^2 + x_1\dot{x}_1)dt$

Vi får då på samma sätt som tidigare

$H = p_o f_o + p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_o(au^2 + kx_1x_2) + p_1 kx_2 + p_2(\sin x_1 - u\cdot\cos x_1)$

och systemet

$$\dot{x}_o = au^2 + kx_1x_2$$
$$\dot{x}_1 = kx_2$$
$$\dot{x}_2 = \sin x_1 - u\cdot\cos x_1$$
$$\dot{p}_o = 0$$
$$\dot{p}_1 = -kp_ox_2 - p_2(\cos x_1 + u\cdot\sin x_1)$$
$$\dot{p}_2 = -kp_ox_1 - kp_1$$

$$u = (p_2\cos x_1)/2ap_o$$
$$X(0) = (0,\pi,0)$$
$$P(T) = (-1,0,0)$$

Eliminerar vi x_o och p_o (p_o = konst. = -1) ur systemet, sätter in uttrycket för u samt ersätter p_1 med x_3 och p_2 med x_4 får vi

$$\dot{x}_1 = k\cdot x_2 = f_1(X)$$
$$\dot{x}_2 = \sin x_1 + (x_4\cos^2 x_1)/(2a) = f_2(X)$$
$$\dot{x}_3 = kx_2 - x_4(\cos x_1 - (x_4\sin 2x_1)/(4a)) = f_3(X)$$
$$\dot{x}_4 = k(x_1 - x_3) = f_4(X)$$

Då blir Jacobis matris

$$J = \begin{bmatrix} f_1/\ x_1 & \cdots\cdots & f_1/\ x_4 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f_4/\ x_1 & \cdots\cdots & f_4/\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ \cos x_1 - (x_4\sin 2x_1)/2a & 0 & 0 & \cos^2 x_1/2a \\ x_4\sin x_1 + \dfrac{x_4^2\cos^2 x_1}{2\ a} & k & 0 & -\cos x_1 + \dfrac{x_4\sin 2x_1}{2\ a} \\ k & 0 & -k & 0 \end{bmatrix}$$

Kenneth-McGills system fås då som

$$\dot{x}_1^{k+1} = kx_2^{k+1}$$
$$\dot{x}_2^{k+1} = r_1^k x_1^{k+1} + r_2^k x_4^{k+1} - r_1^k x_1^k + \sin x_1^k$$
$$\dot{x}_3^{k+1} = q_1^k x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + q_2^k x_4^{k+1} - q_1^k x_1^k - q_3$$
$$x_4^{k+1} = (x_1^{k+1} - x_3^{k+1})\cdot k$$

där

$$r_1^k = \cos x_1^k - (x_4^k \sin x_1^k \cos x_1^k)/2a$$
$$r_2^k = \cos^2 x_1^k/2a$$
$$q_3^k = ((x_4^k)^2 \sin x_1^k \cos x_1^k)/a$$
$$q_2^k = 2q_3^k - \cos x_1^k$$
$$q_1^k = ((x_4^k)^2\cos 2x_1^k)/2a + x_4^k \sin x_1^k$$

med

$x_1^k(0) = pi; \quad x_2^k(0) = 0$

$x_3^k(T) = 0; \quad x_4^k(T) = 0$

Systemet löstes med k = 10, T = 2 sek och a = 0.2 på SMIL. Integrationerna utfördes med Runge-Kuttas metod med intervallängden 0.1 sek. Iterationerna avbröts då normen $|X^k(t) - X^{k-1}(t)| < 0.001$, $t \in (0,2)$. Detta uppnåddes efter 14 iterationer och 24 minuters maskintid. I bilaga 1 finns program i algol och resultatutskrift.

2 Minimaltidsproblem

2.1 Definition av problemet.

Problemet är här liksom tidigare en typ av målsökningsproblem, där det gäller att till ett dynamiskt system fimna en styrsignal U(t), sådan att (vissa av) systemets variabler på kortast möjliga tid styres från givna begynnelsevärden vid $t=t_o$ till på förhand givna slutvärden.

Betrakta därför det olineära systemet:

$$\dot{X} = F(X,U,t);$$

$$U(t) = (u_1(t),u_2(t),\ldots\ldots u_k(t)); \qquad |u_i| = a_i$$

$$X = (x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$$

$$F = (f_1,f_2,\ldots\ldots\ldots\ldots f_n)$$

$$X(t_o) = (x_1^o, x_2^o, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n^o)$$

Sök en styrsignal $U(t) = U^+$ sådan att på kortast möjliga tid T systemets variabler antar värdet

$$X(T+t_o) = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots\ldots\ldots \varphi_n);$$

2.2 Optimeringsmetod

Vi utnyttjar även här Pontryagins Maximiprincip. Sats 3 blir tillämpbar med en lätt ändring av ordalydelsen i ingressen och om man ändrar villkor 2^o till:

2^o_a vid sluttiden T gäller relationen

$$M(P(T),X(T)) \geq 0$$

För stringent formulering se ref (1), Teorem 2.

2.3 Numerisk tillämpning.

Exempel 1.

Betrakta samma system som i exempel 1 avsnitt 1 (det som inte konvergerade):

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1 \qquad X(0) = (1,0); \quad |u| \leq 1$$

$$\dot{x}_2 = u = f_2$$

Sök den kortast möjliga tid T för vilken gäller

$$X(T) = (0,0);$$

Vi får Hamiltonfunktionen

$$H = p_1f_1 + p_2f_2 = p_1x_2 + p_2u \quad \text{och } u = \text{sign } p_2$$

Detta ger oss systemet

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad X(0) = (1,0)$$

$$\dot{x}_2 = \text{sign } p_2 \qquad X(T) = (0,0)$$

$$\dot{p}_1 = 0$$

$$\dot{p}_2 = -p_1$$

Vi normerar våra adjungerade variabler genom att tilldela p_1 begynnelsevärdet -1.

Vi kan då eliminera p_1 ur systemet. Betecknar vi p_2 med x_3 får vi

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = 1 \qquad x_1(T) = a$$

$$\dot{x}_2 = \text{sign } x_3 \qquad x_2(0) = 0 \qquad x_2(T) = 0$$

$$\dot{x}_3 = +1$$

Vi får nu Jacobis matris

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\delta(x_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och systemet

$$x_1^{k+1} = x_2^{k+1} \qquad x_1^{k+1}(0) = 1$$

$$x_2^{k+1} = 2\delta(x_3^k)\cdot x_3^{k+1} + \text{sign } x_3^k \; ; \qquad x_2^{k+1}(0) = 0$$

$$x_3^{k+1} = +1$$

Välj en godtycklig tid $t = t_1$. Lös systemet med Kenneth-McGills metod.

Vi får då sannolikt ett värde på $x_1(t_1) = a \neq 0$ (i annat fall är lösningen klar). Bestäm en ny tid t_2 med hjälp av skalära Newton-Raphson's formel.

Lös systemet, och vi får ett mindre värde på a. Fortsätt på detta sätt tills $|a| \leq \varphi$, φ godtyckligt litet.

Systemet löstes på en snabbare maskin än föregående exempel (accesstid 2 μsek) med $\varphi = 0.001$. Lösningen tog då c:a 50 sek. med totalt 14 iterationer. Minimaltiden T blev 2 sekunder. Se f.ö. bilaga 2, där program och resultatutskrift återfinnes.

APPENDIX

Vi skall nu undersöka konvergensen hos systemet

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \operatorname{sign}\theta(X) \\
\dot{x}_3 &= x_2 \\
\dot{x}_4 &= x_1 - x_3 + \operatorname{sign}\theta(X) \\
\theta(X) &= x_4 - x_2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
X(0) &= (1,0,a_1,a_2) \\
X(T) &= (b_1,b_2,0,0)
\end{aligned}
\qquad (1a)
$$

då det löses med Kenneth-McGills metod.

Antag att det finns ett T sådant att $X(T) = (0,0,0,0)$, d.v.s. att vi på tiden T kan föra alla tillståndsvariablerna till 0.

Ur ekvation 4 och 2 i systemet (1a) ovan fås

$$\dot{x}_4 - \dot{x}_2 = \frac{d}{dt}(x_4 - x_2) = \frac{d\theta}{dt} = x_1 - x_3 = z;$$

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_3 = \frac{d}{dt}(x_1 - x_3) = \frac{dz}{dt} = 0; \qquad \text{och alltså}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= z \qquad \text{med} & \theta(0) &= x_4(0) - x_2(0) = x_4(0) \\
& & z(0) &= x_1(0) - x_3(0) = 1 - x_3(0) \\
\frac{dz}{dt} &= 0 & \theta(T) &= x_4(T) - x_2(T) = 0 - 0 = 0 \qquad (1b) \\
& & z(T) &= x_1(T) - x_3(T) = 0 - 0 = 0
\end{aligned}
$$

Lösningen till systemet (1b) blir då

$z(t) = \text{konst.} = 0$

$\theta(t) = \text{konst.} = 0$

vilket i sin tur ger

$z(0) = 1 - x_3(0) = 0$ som medför $x_3(0) = 1$

$\theta(0) = x_4(0)$ som medför $x_4(0) = 0$

Eftersom $\theta(t) = 0, \ \forall\, t \in (0,T)$ innebär detta att sign $\theta(t)$ blir obestämd, d.v.s. problemet urartar för detta T. Av 2.3 exempel 1 framgår att T = 2 sek. Detta innebär också att problemet urartar för alla $t > 2$ sek, ty om man kan föra tillståndsvariablerna till 0 på 2 sek kan man det också för alla $t > 2$ sek. För att lösa problemet måste vi således välja en tid $T < 2$ sek. Vi väljer godtyckligt T = 1,5 sek. Av system (1b) framgår vidare att $z(t)$ är konstant, vilket innebär att $\theta(t)$ är strängt monoton, d.v.s. $\theta(t)$ har högst ett nollställe i intervallet $(0,T)$. Antag att detta inträffar vid tiden $t = t_s$.

Vi betraktar nu Kenneth-McGills system

$$\dot{x}_1^{k+1} = x_2^{k+1}$$
$$\dot{x}_2^{k+1} = 2\delta(\theta^k)\cdot\theta^{k+1} + \text{sign}\,\theta^k$$
$$\dot{x}_3^{k+1} = x_2^{k+1} \qquad\qquad (2)$$
$$\dot{x}_4^{k+1} = 2\delta(\theta^k)\cdot\theta^{k+1} + x_1^{k+1} - x_3^{k+1} + \text{sign}\,\theta^k$$
$$T = 1{,}5; \quad x_1(0) = 1; \quad x_3(T) = 0;$$
$$x_2(0) = 0; \quad x_4(T) = 0;$$

Bilda analytiskt homogena lösningar till systemet med $X(0) = (0,0,0,1)$ och $X(0) = (0,0,1,0)$ samt partikulärlösning med $X(0) = (1,0,0,0)$. Anpassning till randvillkoren vid $t = T$ ger ekvationerna

$$C_1\begin{bmatrix}2(t-t_s)\\2\\2(t-t_s)\\3\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}-2t_s(t-t_s)\\-2t_s\\-2t_s(t-t_s)+1\\-t-2t_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1+t^2/2-t_s\\t\\t^2/2-t_s\\2t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\\ \\0\\0\end{bmatrix}$$

som ger, om t ersättes med T

$$3C_1 - C_2(T+2t_s) + T = 0$$
$$C_1 2(T-t_s) + C_2(1-2t_s(T-t_s)) + T^2/2 - t_s = 0$$

Sätt $T = 1{,}5$ och lös systemet. Då får vi

$$C_1 = (4t_s^2 - 8{,}25t_s + 4{,}6875)/(-2t_s^2 + 6t_s - 7{,}5)$$
$$C_2 = (3t_s - 5{,}625)/(-2t_s^2 + 6t_s - 7{,}5) \qquad\qquad (3)$$

Vi får också ur systemet (1b)

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t z(t)dt = x_4(0) + \int_0^t (1-x_3(0))dt = x_4(0) + (1-x_3(0))\cdot t;$$

Sambandet $\theta(t_s) = 0$ ger oss då

$$t_s = x_4(0)/(x_3(0)-1) = C_1(t_s)/(C_2(t_s)-1)$$

Löser vi denna ekvation blir

$$t_s = 0{,}816$$

Antag nu att vi vid lösningen av systemet (2) har ett fel φ^k i t_s^k vid den k:te iterationen. Vid den k+1:sta iterationen fås då

$$t_s^{k+1} - t_s = \varphi^{k+1} = C_1(t_s+\varphi^k)/(C_2(t_s+\varphi^k)-1) - t_s;$$

Med C_1 och C_2 enligt (3) samt insatt $t_s = 0{,}816$ erhålles då

$$\varphi^{k+1} \cong 2{,}55\,\varphi^k$$

där approximationen består i att vi försummat kvadratiska termer i φ^k.

Alltså konvergerar ej lösningen till systemet (2) med den valda lösningsmetoden för någon startfunktion $X_f(t)$.

V.S.V.

FIXED TIME PROBLEM

EXEMPEL 2.

Program i algol och resultatutskrift.

```
  begin comment  program för lösning av two point boundary value
problem.Kenneth-McGills metod;
integer i,k; real l,a,norm; Boolean c,d; real array R[1:4,1:21],
B[1:4,1:3],A[1:4];

 procedure Int(A,R,c,d,l,a,norm);
comment Proceduren integrerar fram homogena lösn. och part,lösn.;
real l,a,norm; Boolean c,d; real array A,R;

begin integer j,n,k; real p1,p2,q1,q2,q3,r1,r2,r3,f;
real array I,M,K,N[1:4];
switch S:=L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,Fin;

n:=0;norm:=0;
L1:n:=n+1; if n>20 then go to S[8];
   for j:=1 step 1 until 4 do begin M[j]:=A[j];N[j]:=0;K[j]:=R[j,n]end;
k:=4;
L2:r1:=sin(K[1]);r2:=sqrt(1-r1↑2); r3:=K[4]/(2×a);
   p1:=r2-(K[4]×r1×r2)/a; p2:=(r2↑2)/(2×a);
   q3:=r1×r2×r3; q2:=2×q3-r2; q1:=K[4]×(r3×(1-2×r1↑2)+r1);


L3:I[1]:=M[2]×10×l; I[4]:=(M[1]-M[3])×10×l;
   if c then begin I[2]:=(p1×(M[1]-K[1])+p2×M[4]+r1)×l;
                   I[3]:=(q1×(M[1]-K[1])+M[2]×10+q2×M[4]-q3×K[4])×l end
         else begin  I[2]:=(p1×M[1]+p2×M[4])×l;
                     I[3]:=(q1×M[1]+M[2]×10+q2×M[4])×l;end;
   go to S[k];
L4:for j:=1 step 1 until  4 do begin
   M[j]:=A[j]+I[j]×0.5; N[j]:=N[j]+I[j]; K[j]:=(R[j,n]+R[j,n+1])/2end;
  k:=5; go to S[2];
L5:for j:=1 step 1 until 4 do begin
   M[j]:=A[j]+I[j]×0.5; N[j]:=N[j]+2×I[j] end;
   k:=6; go to S[3];
L6: for j:=1 step 1 until 4 do begin
   M[j]:=A[j]+I[j]; N[j]:=N[j]+2×I[j]; K[j]:=R[j,n+1] end;
   k:=7; go to S[2];
L7:if d then begin
   for j:=1 step 1 until 4 do begin
  f:=abs(R[j,n]-A[j]);
   if norm<f then norm:=f;
   R[j,n]:=A[j]; end;
   end;
   for j:=1 step 1 until 4 do begin
   N[j]:=N[j]+I[j]; A[j]:=A[j]+N[j]/6 end;
   go to S[1];

Fin:if d then begin for j:=1 step 1 until 4 do R[j,n]:=A[j];end;
   end;;
```

```
procedure Beg(B,A);
comment Proceduren beräknar begynnelsevärden för slutintegration;
real array A,B;

begin real d1,d2,det;
    det:=B[3,1]×B[4,2]-B[3,2]×B[4,1];
    d1:=(B[3,2]×B[4,3]-B[3,3]×B[4,2])/det;
    d2:=(B[3,3]×B[4,1]-B[3,1]×B[4,3])/det;
    A[1]:=3.14159265;  A[2]:=0;
    A[3]:=d1;    A[4]:=d2;
end;
    l:=read; a:=read;
    R[1,1]:=3; R[2,1]:=0; R[3,1]:=1; R[4,1]:=-1;
    for k:=2 step 1 until 21 do begin
    R[1,k]:=R[1,k-1]-0.15;  R[2,k]:=R[2,k-1]-0.05;
    R[3,k]:=R[3,k-1]-0.05;  R[4,k]:=R[4,k-1]+0.05;
    end; norm:=1; go to Utskr;

Iterera: A[1]:=A[2]:=0; A[3]:=1;  A[4]:=0;
    c:=false; d:=false;   Int(A,R,c,d,l,a,norm);
    for i:=1 step 1 until 4 do B[i,1]:=A[i];
    A[1]:=A[2]:=A[3]:=0;  A[4]:=1;
    Int(A,R,c,d,l,a,norm);
    for i:=1 step 1 until 4 do B[i,2]:=A[i];
    A[1]:=3.14159265; A[2]:=A[3]:=A[4]:=0;
    c:=true; Int(A,R,c,d,l,a,norm);
    for i:=1 step 1 until 4 do
    B[i,3]:=A[i];
    Beg(B,A);
    d:=true; Int(A,R,c,d,l,a,norm);
Utskr: for i:=1 step 1 until 4 do
    begin  punch(1); punch(1);
    for k:=1 step 2 until  21 do print(4,3,R[i,k]); end;
    punch(1); print(norm); punch(1); punch(1);
    if norm>0.001 then go to Iterera else begin
    for i:=1 step 2 until 21 do
    print(-(R[4,i]×cos(R[1,i]))/(2×a));
    end;
end
```

Konstant tid - problem 2

TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.000	2.700	2.400	2.100	1.800	1.500	1.200	0.900	0.600	0.300	-0.000
X2	0.000	-0.100	-0.200	-0.300	-0.400	-0.500	-0.600	-0.700	-0.800	-0.900	-1.000
X3	1.000	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.000
X4	-1.000	-0.900	-0.800	-0.700	-0.600	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	-0.000
NORM	1.000										
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.808	2.239	1.624	1.002	0.528	0.321	0.194	0.091	0.021	-0.020
X2	0.000	-0.260	-0.299	-0.314	-0.296	-0.154	-0.073	-0.057	-0.045	-0.026	-0.018
X3	2.633	2.603	2.091	1.443	0.848	0.557	0.430	0.274	0.134	0.045	-0.000
X4	-1.235	-0.565	-0.241	0.086	0.444	0.589	0.422	0.226	0.105	0.042	-0.000
NORM	1.764										
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.786	2.075	1.448	1.166	1.038	0.791	0.519	0.301	0.141	0.011
X2	0.000	-0.308	-0.367	-0.233	-0.067	-0.091	-0.141	-0.125	-0.093	-0.070	-0.061
X3	2.853	2.662	2.064	1.479	1.171	0.956	0.722	0.479	0.279	0.127	0.000
X4	-0.919	-0.516	-0.389	-0.424	-0.473	-0.388	-0.226	-0.118	-0.059	-0.024	0.000
NORM	1.018										
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.698	1.841	1.126	0.726	0.485	0.305	0.172	0.087	0.035	-0.001
X2	0.000	-0.381	-0.428	-0.269	-0.147	-0.102	-0.079	-0.054	-0.033	-0.020	-0.017
X3	2.735	2.486	1.729	1.063	0.703	0.486	0.311	0.175	0.088	0.036	0.000
X4	-1.159	-0.554	-0.246	-0.071	0.011	0.030	0.019	0.010	0.005	0.002	0.000
NORM	0.553										

TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.631	1.697	1.008	0.611	0.374	0.227	0.135	0.075	0.034	0.002
X2	0.000	-0.435	-0.436	-0.258	-0.151	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.677	2.414	1.609	0.944	0.572	0.350	0.214	0.127	0.071	0.031	-0.000
X4	-1.342	-0.672	-0.393	-0.242	-0.140	-0.079	-0.043	-0.023	-0.011	-0.005	0.000
NORM	0.183										

TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.591	1.646	0.993	0.609	0.372	0.224	0.131	0.072	0.032	0.002
X2	0.000	-0.460	-0.420	-0.246	-0.148	-0.093	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.014
X3	2.618	2.355	1.544	0.920	0.569	0.351	0.212	0.125	0.068	0.030	-0.000
X4	-1.471	-0.723	-0.419	-0.239	-0.128	-0.068	-0.036	-0.019	-0.009	-0.004	-0.000
NORM	0.130										

TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.571	1.623	0.984	0.607	0.374	0.226	0.132	0.073	0.033	0.002
X2	0.000	-0.472	-0.412	-0.240	-0.146	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.585	2.326	1.514	0.907	0.565	0.351	0.214	0.126	0.069	0.030	-0.000
X4	-1.544	-0.756	-0.443	-0.251	-0.134	-0.071	-0.038	-0.020	-0.010	-0.004	0.000
NORM	0.073										

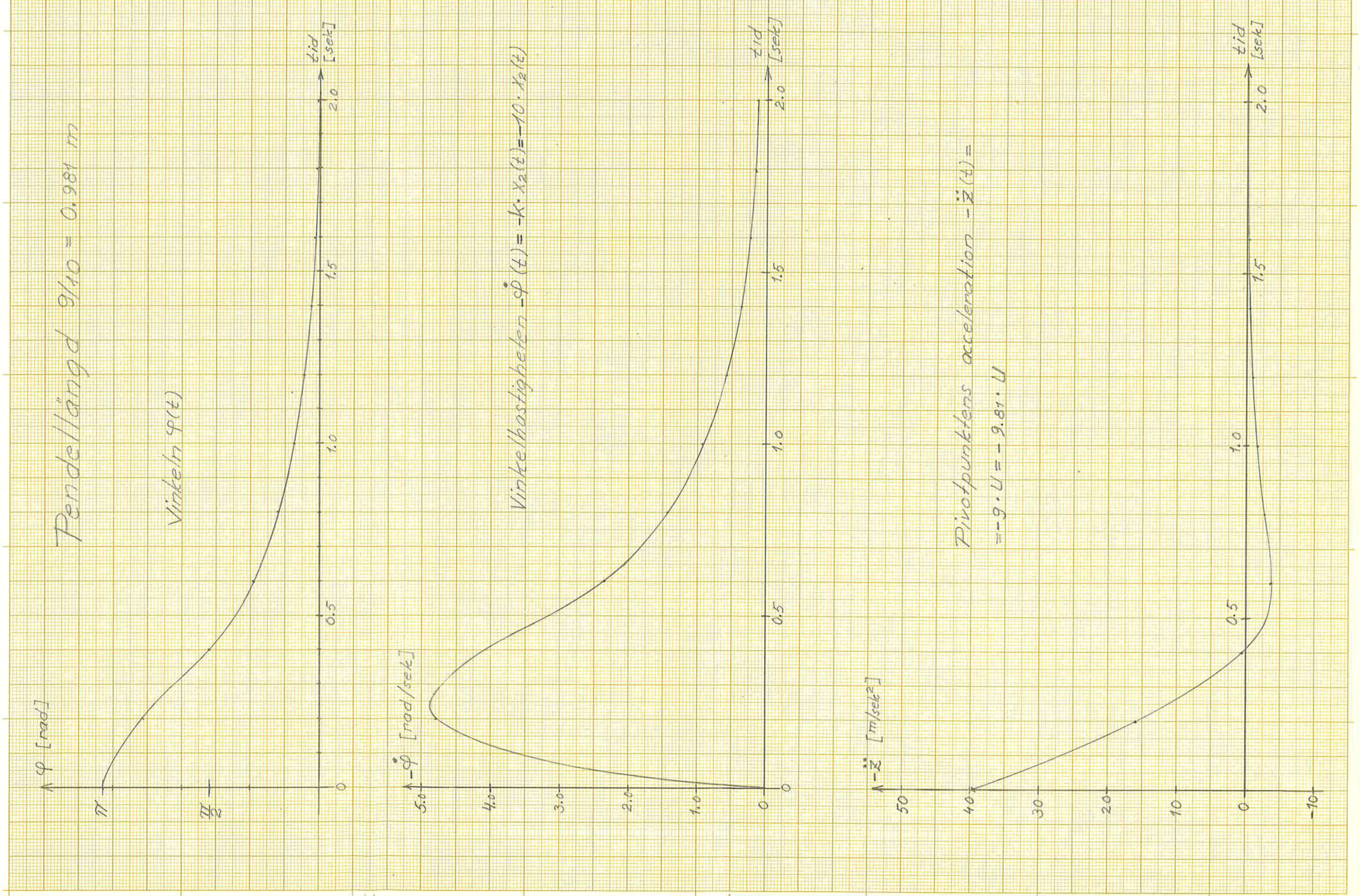
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.560	1.612	0.980	0.607	0.374	0.227	0.133	0.073	0.033	0.002
X2	0.000	-0.478	-0.408	-0.238	-0.145	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.567	2.312	1.499	0.901	0.564	0.351	0.214	0.127	0.070	0.031	-0.000
X4	-1.583	-0.772	-0.455	-0.257	-0.137	-0.073	-0.039	-0.020	-0.010	-0.004	-0.000
NORM	0.038										

TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.555	1.607	0.978	0.607	0.375	0.227	0.134	0.074	0.033	0.002
X2	0.000	-0.481	-0.406	-0.237	-0.144	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.558	2.305	1.492	0.898	0.563	0.352	0.215	0.127	0.070	0.031	-0.000
X4	-1.602	-0.781	-0.462	-0.260	-0.139	-0.074	-0.039	-0.020	-0.010	-0.004	0.000
NORM	0.020										
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.552	1.604	0.977	0.607	0.375	0.228	0.134	0.074	0.033	0.002
X2	0.000	-0.482	-0.405	-0.236	-0.144	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.553	2.302	1.489	0.897	0.563	0.352	0.215	0.127	0.070	0.031	-0.000
X4	-1.612	-0.786	-0.465	-0.262	-0.140	-0.074	-0.039	-0.021	-0.010	-0.004	-0.000
NORM	0.010										
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.551	1.603	0.977	0.607	0.375	0.228	0.134	0.074	0.033	0.002
X2	0.000	-0.483	-0.405	-0.236	-0.144	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.551	2.300	1.487	0.896	0.563	0.352	0.215	0.127	0.070	0.031	-0.000
X4	-1.617	-0.788	-0.466	-0.262	-0.140	-0.075	-0.039	-0.021	-0.010	-0.004	-0.000
NORM	0.005										
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.550	1.603	0.977	0.607	0.376	0.228	0.134	0.074	0.033	0.002
X2	0.000	-0.483	-0.404	-0.235	-0.144	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.550	2.299	1.486	0.896	0.563	0.352	0.215	0.127	0.070	0.031	-0.000
X4	-1.619	-0.789	-0.467	-0.263	-0.140	-0.075	-0.040	-0.021	-0.010	-0.004	0.000

4.6

NORM	0.002										
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.550	1.602	0.977	0.607	0.376	0.228	0.134	0.074	0.033	0.002
X2	0.000	-0.483	-0.404	-0.235	-0.144	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.549	2.299	1.486	0.895	0.563	0.352	0.215	0.127	0.070	0.031	-0.000
X4	-1.620	-0.789	-0.468	-0.263	-0.141	-0.075	-0.040	-0.021	-0.010	-0.004	-0.000
NORM	0.001										
TID	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
X1	3.142	2.550	1.602	0.977	0.607	0.376	0.228	0.134	0.074	0.033	0.002
X2	0.000	-0.484	-0.404	-0.235	-0.144	-0.092	-0.058	-0.037	-0.024	-0.017	-0.015
X3	2.549	2.298	1.485	0.895	0.563	0.352	0.215	0.127	0.070	0.031	-0.000
X4	-1.621	-0.790	-0.468	-0.263	-0.141	-0.075	-0.040	-0.021	-0.010	-0.004	-0.000
NORM	0.001										
U	-4.053	-1.638	-0.037	0.368	0.289	0.174	0.096	0.051	0.026	0.011	0.000

Konstant tid-problem 4.8
Exempel 2.2 (pendeln).
Grafisk framställn. av lösningen.



MINIMUM TIME PROBLEM

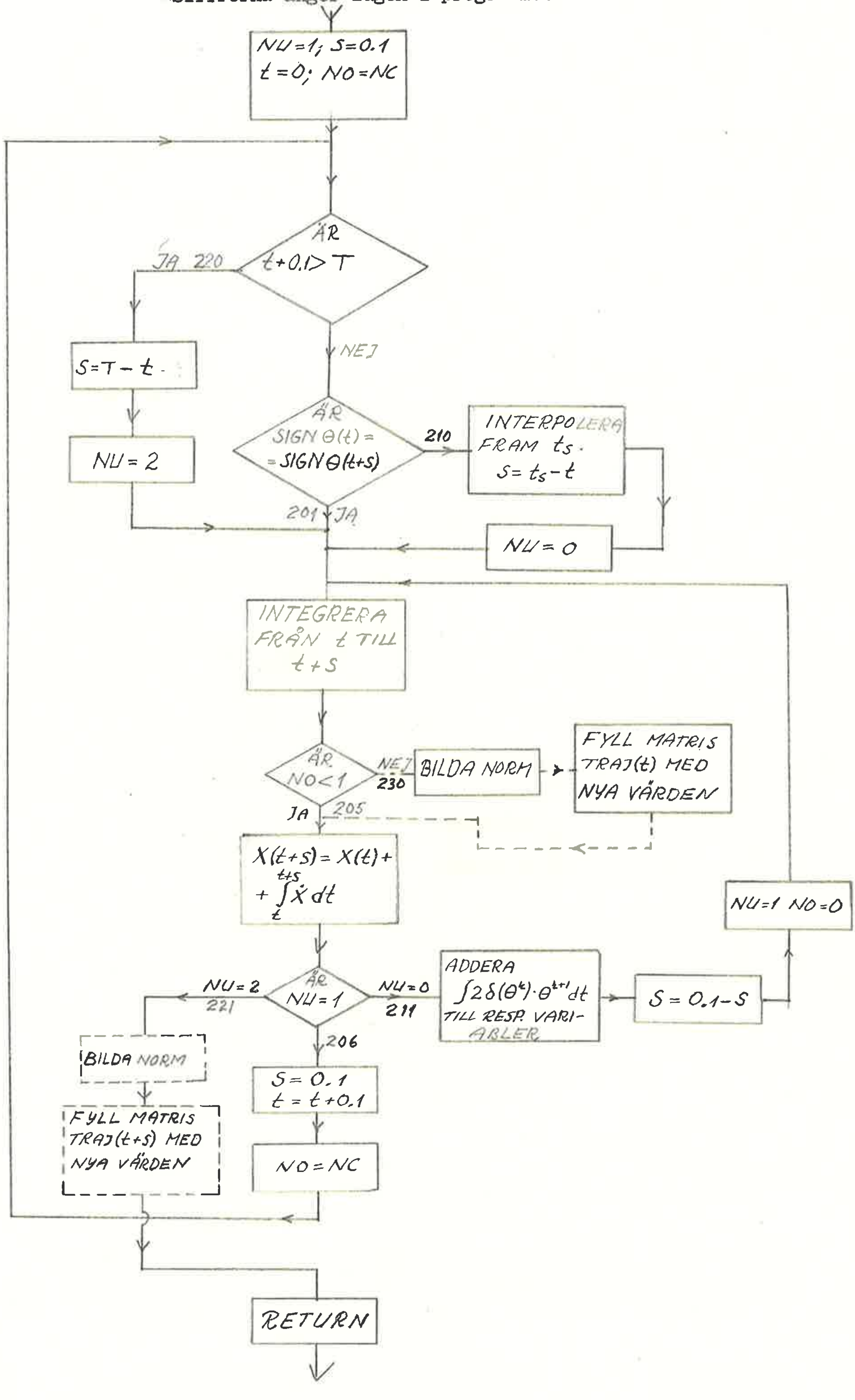
EXEMPEL 1

Flödesdiagram, program i fortran, resultatutskrift

Flödesdiagram för subroutinerna HOM och PART

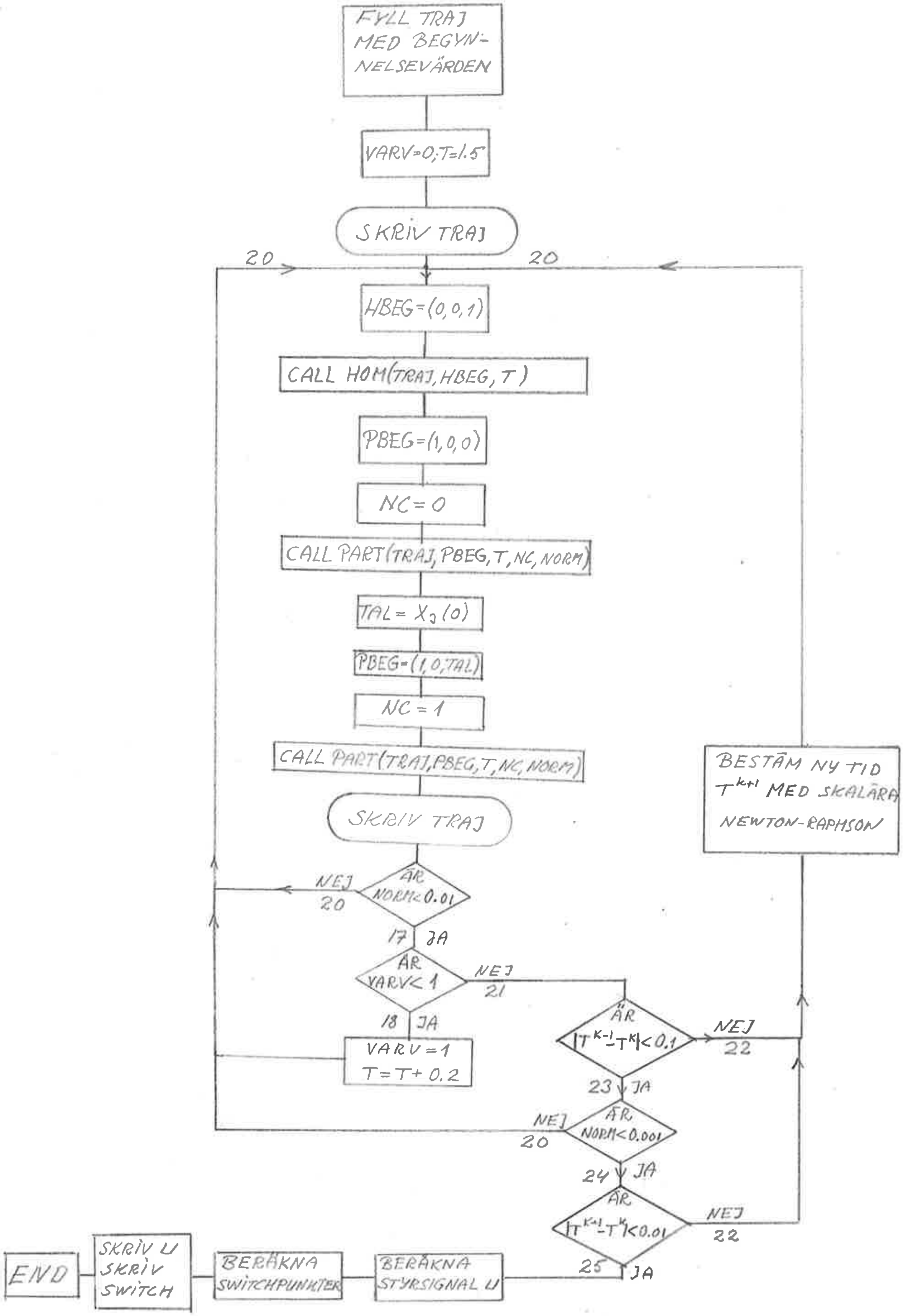
De streckade delarna ingår endast i PART.

Siffrorna anger lägen i programmet.



Flödesdiagram för huvudprogrammet.

Siffrorna anger lägen i programmet.



```
      DIMENSION TRAJ%4,30¤,HBEG%3¤,PBEG%3¤
      DO 3 JÄ1,9,1
      TRAJ%1,J¤Ä0.
      TRAJ%2,J¤Ä0.
    3 TRAJ%3,J¤Ä-1.0
      DO 4 JÄ10,30,1
      TRAJ%1,J¤Ä0.
      TRAJ%2,J¤Ä0.
    4 TRAJ%3,J¤Ä1.0
      DO 5 IÄ1,30,1
    5 TRAJ%4,I¤Ä0.1*I-0.1
      WRITE%3,12¤
      WRITE%3,10¤%TRAJ%4,I¤,IÄ1,20¤
      DO 6 JÄ1,3,1
    6 WRITE%3,11¤J,%TRAJ%J,I¤,IÄ1,20¤
   10 FORMAT%5X,3HTID,22F5.2¤
   11 FORMAT%/6X,1HX,I1,22F5.2¤
   12 FORMAT%//18HABEGYNNELSEVAERDEN//¤
      WRITE%3,13¤
   13 FORMAT%///18HAITERERADE VAERDEN///¤
      NVARVÄ0
      TIDÄ1.5
   20 HBEG%1¤Ä0.
      HBEG%2¤Ä0.
      HBEG%3¤Ä1.0
      CALL HOM%TRAJ,HBEG,TID¤
      PBEG%1¤Ä1.0
      PBEG%2¤Ä0.
      PBEG%3¤Ä0.
      NCÄ0
      CALL PART%TRAJ,PBEG,TID,NC,NR,PNORM¤
      TALÄ-PBEG%2¤/HBEG%2¤
      NCÄ1
      PBEG%1¤Ä1.0
      PBEG%2¤Ä0.
      PBEG%3¤ÄTAL
      CALL PART%TRAJ,PBEG,TID,NC,NR,PNORM¤
      WRITE%3,10¤%TRAJ%4,I¤,IÄ1,NR,1¤
      DO 30 JÄ1,3,1
```

5.3

5.4


```
   30 WRITE%3,11¤J,%TRAJ%J,I¤,IÄ1,NR,1¤
      WRITE%3,111¤PNORM
  111 FORMAT%/5HPNORM,F8.4///¤
      IF%PNORM-0.01¤17,17,16
   16 GO TO 20
   17 IF%NVARV-1¤18,21,21
   18 NVARVÄ1
      A1ÄTRAJ%1,NR¤
      TID1ÄTID
      TIDÄTID&0.2
   29 NOÄNR&1
      DO 19 JÄ1,3,1
      DO 19 IÄNO,30,1
   19 TRAJ%J,I¤ÄTRAJ%J,NR¤
      GO TO 20
   21 IF%ABS%TID-TID1¤-0.1¤23,23,22
   22 TID2ÄTID
      TIDÄTID-TRAJ%1,NR¤*%TID1-TID¤/%A1-TRAJ%1,NR¤¤
      TID1ÄTID2
      A1ÄTRAJ%1,NR¤
      GO TO 29
   23 IF%PNORM-0.001¤24,24,20
   24 IF%ABS%TID-TID1¤-0.01¤25,25,22
   25 DO 26 JÄ1,NR,1
   26 TRAJ%2,J¤ÄSIGN%1.,TRAJ%3,J¤¤
      WRITE%3,100¤%TRAJ%2,I¤,IÄ1,NR¤
  100 FORMAT%//7X,1HU,22F5.2¤
      NOÄNR-1
      DO 28 JÄ1,NO,1
      ITAL1Ä1000.*TRAJ%3,J¤
      ITAL2Ä1000.*TRAJ%3,J&1¤
      IF%ISIGN%1,ITAL1¤-ISIGN%1,ITAL2¤¤27,28,27
   27 QÄJ*0.1-0.1&0.1*TRAJ%3,J¤/%TRAJ%3,J¤-TRAJ%3,J&1¤¤
      WRITE%3,110¤Q
  110 FORMAT%/5X,16HSWITCH VID TIDEN,F5.2¤
   28 CONTINUE
      END
```

5.4

DISK OPERATING SYSTEM/360 FORTRAN   360N-FO-451 21

```
      SUBROUTINE HOM%A,B,TID¤
      DIMENSION A%4,30¤,B%3¤,DEL%4,3¤,E%3¤
      NUÄ1
      SÄ0.1
      LOKÄ1
      TIME1Ä0.1
      LOK1ÄLOK&1
   90 IF%TIME1-TID¤100,120,120
  100 ITAL1Ä1000.*A%3,LOK1¤
      ITAL2Ä1000.*A%3,LOK¤
      IF%ISIGN%1,ITAL1¤-ISIGN%1,ITAL2¤¤110,101,110
  101 DO 102 IÄ1,3,1
  102 E%I¤ÄB%I¤
      DO 103 JÄ1,3,1
      DEL%J,1¤ÄE%2¤*S
      DEL%J,2¤Ä0.
      DEL%J,3¤Ä0.
      DO 103 IÄ1,3,1
  103 E%I¤ÄB%I¤&DEL%J,I¤/2.
      DO 104 IÄ1,3,1
  104 E%I¤ÄE%I¤&DEL%3,I¤/2.
      DEL%4,1¤ÄE%2¤*S
      DEL%4,2¤Ä0.
      DEL%4,3¤Ä0.
      DO 105 IÄ1,3,1
  105 B%I¤ÄB%I¤&%DEL%1,I¤&%DEL%2,I¤&DEL%3,I¤¤*2.&DEL%4,I¤¤/6.
      IF%NU-1¤111,106,121
  106 LOKÄLOK&1
      TIME1ÄTIME1&0.1
      LOK1ÄLOK&1
      SÄ0.1
      GO TO 90
  110 SÄ0.1*A%3,LOK¤/%A%3,LOK¤-A%3,LOK1¤¤
      NUÄ0
      GO TO 101
  111 B%2¤ÄB%2¤&2.*B%3¤
      SÄ0.1-S
      NUÄ1
      GO TO 101
```

28/07/67   HOM

```
  120 NUÄ2
      SÄTID-TIME1&0.1
      GO TO 101
  121 RETURN
      END
```

5.6


```
      SUBROUTINE PART%A,B,TID,NC,LOK1,PNORM¤
      DIMENSION A%4,30¤,B%3¤,DEL%4,3¤,E%3¤
      PNORMÄ0.
      SÄ0.1
      NUÄ1
      LCKÄ1
      NOÄNC
      TIME1Ä0.1
      LCK1ÄLOK&1
  190 IF%TIME1-TID¤200,220,220
  200 TALÄSIGN%1.,A%3,LOK¤¤
      ITAL1Ä1000.*A%3,LOK1¤
      ITAL2Ä1000.*A%3,LOK¤
      IF%ISIGN%1,ITAL1¤-ISIGN%1,ITAL2¤¤210,201,210
  201 DO 202 IÄ1,3,1
  202 E%I¤ÄB%I¤
      DO 203 JÄ1,3,1
      DEL%J,1¤ÄE%2¤*S
      DEL%J,2¤ÄTAL*S
      DEL%J,3¤ÄS
      DO 203 IÄ1,3,1
  203 E%I¤ÄB%I¤&DEL%J,I¤/2.
      DO 204 IÄ1,3,1
  204 E%I¤ÄE%I¤&DEL%3,I¤/2.
      DEL%4,1¤ÄE%2¤*S
      DEL%4,2¤ÄTAL*S
      DEL%4,3¤ÄS
      IF%NO-1¤205,230,230
  230 DO 232 IÄ1,3,1
      SIFÄABS%B%I¤-A%I,LOK¤¤
      IF%PNORM-SIF¤231,232,232
  231 PNORMÄSIF
  232 A%I,LOK¤ÄB%I¤
      A%4,LOK¤Ä0.1*FLOAT%LOK¤-0.1
  205 DO 212 IÄ1,3,1
  212 B%I¤ÄB%I¤&%DEL%1,I¤&%DEL%2,I¤&DEL%3,I¤¤*2.&DEL%4,I¤¤/6.
      IF%NU-1¤211,206,221
  206 LCKÄLCK&1
      TIME1ÄTIME1&0.1
```

28/07/67   PART

```
      LOK1ÄLOK&1
      NOÄNC
      SÄ0.1
      GO TO 190
  210 SÄ0.1*A%3,LOK¤/%A%3,LOK¤-A%3,LOK1¤¤
      NUÄ0
      GO TO 201
  211 B%2¤ÄB%2¤&2.0*B%3¤
      SÄ0.1-S
      NUÄ1
      NOÄ0
      TALÄ-TAL
      GO TO 201
  220 NUÄ2
      SÄTID-TIME1&0.1
      GO TO 201
  221 IF%NC-1¤225,224,224
  224 DO 223 IÄ1,3,1
      SIFÄABS%B%I¤-A%I,LOK1¤¤
      IF%PNORM-SIF¤222,223,223
  222 PNORMÄSIF
  223 A%I,LOK1¤ÄB%I¤
      A%4,LOK1¤Ä0.1*FLOAT%LOK¤&S-0.1
  225 RETURN
      END
```

5.6

Minimaltidsproblemet

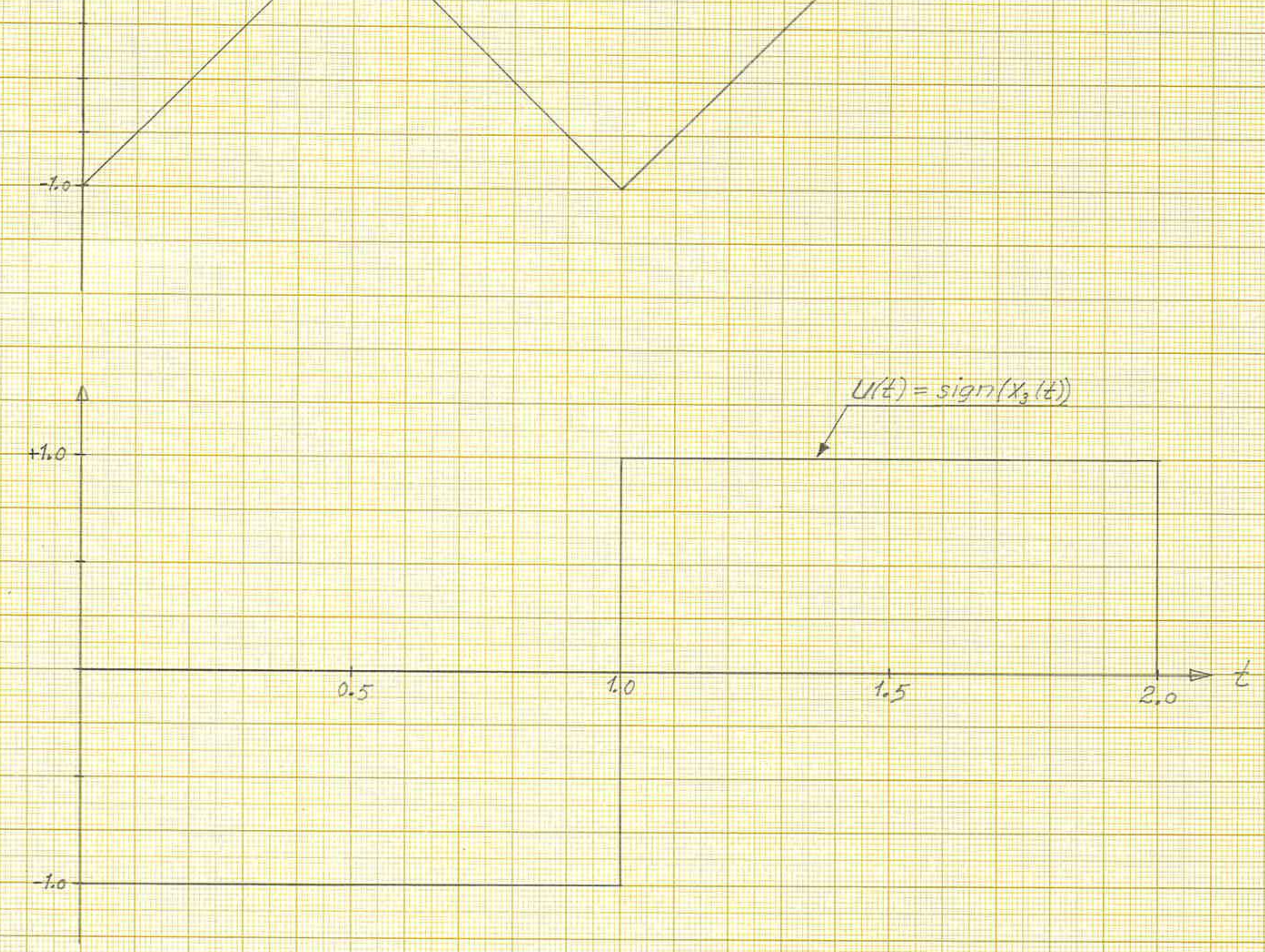
```
// EXEC

BEGYNNELSEVAERDEN

  TID 0.0   0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.80 1.90
   X1 0.0   0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0
   X2 0.0   0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0
   X3-1.00-1.00-1.00-1.00-1.00-1.00-1.00-1.00-1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00

ITERERADE VAERDEN

  TID 0.0   0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.50
   X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.61 0.55 0.51 0.47 0.45 0.43 0.43 0.43
   X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.80-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10 0.00 0.00
   X3-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.75
NORM  1.0500

  TID 0.0   0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.50
   X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.62 0.56 0.52 0.48 0.46 0.44 0.44 0.44
   X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10 0.00 0.00
   X3-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.75
NORM  0.1000
```

```
    TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.50
     X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.62 0.56 0.52 0.48 0.46 0.44 0.44 0.44
     X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10-0.00 0.00
     X3-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.75
NORM  0.0000

    TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.70
     X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.67 0.59 0.51 0.45 0.39 0.35 0.31 0.29 0.27 0.27 0.27
     X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.90-0.80-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10 0.00 0.00
     X3-0.85-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.85
NORM  0.2000

    TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.70
     X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.60 0.52 0.46 0.40 0.36 0.32 0.30 0.28 0.28 0.28
     X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.80-0.80-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10 0.00 0.00
     X3-0.85-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.85
NORM  0.1000
```

5.9

```
TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.70
 X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.32 0.76 0.68 0.60 0.52 0.46 0.40 0.36 0.32 0.30 0.28 0.28 0.28
 X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.80-0.80-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10-0.00 0.00
 X3-0.85-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.85
NORM  0.0000

TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.80 1.90 2.00 2.05
 X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.58 0.47 0.37 0.28 0.20 0.13 0.07 0.02-0.02-0.05-0.07-0.08-0.08
 X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.80-1.15-1.05-0.95-0.85-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.00
 X3-1.02-0.92-0.82-0.72-0.62-0.52-0.42-0.32-0.22-0.12-0.02 0.08 0.18 0.28 0.38 0.48 0.58 0.68 0.78 0.88 0.98 1.02
NORM  0.3550

TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.80 1.90 2.00 2.05
 X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.60 0.50 0.40 0.31 0.23 0.16 0.10 0.05 0.01-0.02-0.04-0.05-0.05
 X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.80-0.90-1.00-0.95-0.85-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.00
 X3-1.02-0.92-0.82-0.72-0.62-0.52-0.42-0.32-0.22-0.12-0.02 0.08 0.18 0.28 0.38 0.48 0.58 0.68 0.78 0.88 0.98 1.02
NORM  0.2469
```

```
TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.80 1.90 2.00 2.0
 X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.60 0.50 0.40 0.31 0.23 0.16 0.10 0.05 0.01-0.02-0.04-0.05-0.0
 X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.80-0.90-1.00-0.95-0.85-0.75-0.65-0.55-0.45-0.35-0.25-0.15-0.05 0.00
 X3-1.02-0.92-0.82-0.72-0.62-0.52-0.42-0.32-0.22-0.12-0.02 0.08 0.18 0.28 0.38 0.48 0.58 0.68 0.78 0.88 0.98 1.02
NORM  0.0000

TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.80 1.90 2.00
 X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.60 0.50 0.40 0.32 0.25 0.18 0.13 0.08 0.05 0.02 0.01 0.00
 X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.80-0.90-1.00-0.90-0.80-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10 0.00
 X3-1.00-0.90-0.80-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10 0.00 0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00
NORM  0.0506

TID 0.0  0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.80 1.90 2.00
 X1 1.00 1.00 0.98 0.96 0.92 0.88 0.82 0.76 0.68 0.60 0.50 0.41 0.32 0.25 0.18 0.13 0.08 0.05 0.02 0.01 0.00
 X2 0.0 -0.10-0.20-0.30-0.40-0.50-0.60-0.70-0.80-0.90-1.00-0.90-0.80-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10 0.00
 X3-1.00-0.90-0.80-0.70-0.60-0.50-0.40-0.30-0.20-0.10 0.00 0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00
NORM  0.0038
```



Exempel 2.1 Minimaltids-problem. Grafisk framställning av lösningen.

Förslag till litteratur för Bengt Mattsson

{1} Bryson, A.E. "Optimal Programming and Control" IBM Symposium

{2} Kalman, R.E. "Toward a Theory of Difficulty of Computation in Optimal Control". IBM Symposium

Dessa två artiklar ger allmänna synpunkter på numerisk lösning av variationsproblem. Kalmans artikel innehåller också en klassificering av de olika metoderna.

{3} Pontryagin, et al "Optimal Control Processes".

Utmärkt bok om Maximum principen av dess upphovsman. Bevisen stundtals ganska tunglästa.

{4} Halkin, H. "Optimal Control for Systems Described by Difference Equations" in Leondes ed. "Advances in Control Systems". Vol. 1.

Utmärkt elementär och rigorös framställning av maximumprincipen i specialfall med tonvikt på geometriskt betraktelsesätt.

{5} Bellman, R.E. "Adaptive Control Processes - A Guided Tour"

Lättläst framställning av dynamisk programmering.

{6} Bellman, R.E. , Dreyfus, S. "Applied Dynamic Programming"

Tonvikt på numeriska lösningar av dynamiska programmeringsproblem.

{7} Balakrishnan, A.V., Neustadt, L.W. "Computing Methods in Optimization Problems". Academic Press

Sammanställning av numeriska metoder. Ej särskilt homogen.

{8} Kenneth, P., McGill, R. "Solution of Variational Problems by means of a Genralized Newton-Raphson Operator". Report RE-176 J Grumman Aircraft May 1964

Behandlar spec. Newton Raphsons metod. Dvs det problem som examensarbetet omfattar. Ytterligare referenser finns i denna rapport, bl.a. Qvasilinearization av Bellman och Kalaba.