

NUMERISK BESTÄMMNING AV PROCESSDYNAMIK

KURT-ERIK ERIKSSON

NUMERISK BESTÄMNING AV PROCESSDYNAMIK

examensarbete i regleringsteknik

Kurt-Erik Eriksson

## DISPOSITION.

1. Inledning.
2. Systemmodell. Formulering av problemet.
3. Lösning av problemet.
  - 3.1. Iterativ bestämning av modeller med växande ordningstal.
  - 3.2. Konditionstest.
  - 3.3. Bestämning av systemkoeff. standardavvikelse.
  - 3.4. Bestämning av systemordn.  $n$  genom signifikanstest av förlustfktn.
4. Programmering.
  - 4.1. Generering av testdata.  
ALGOL-program för datagenerering.
  - 4.2. Slumptalsgenerering.  
Funktionsproceduren 'rand' i maskinkod.  
ALGOL-program för slumptalsgenerering.
  - 4.3. Identifieringsprogrammet.  
Inläsning av data.  
Utskrift av resultat.  
ALGOL-program för systemidentifiering.
5. Numeriska exempel.
  - 5.1. Data har genererats från modellen  $A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \lambda \cdot e(t)$ .
  - 5.2. Data har genererats från modellen  $A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \lambda \cdot C(z^{-1})e(t)$ .
  - 5.3. Praktiskt exempel med medicinsk anknytning.
  - 5.4. Diagram.
6. Referenser.
7. Appendix. Minsta-kvadratmetoden.

## 1. INLEDNING

I detta arbete studeras minsta kvadratmetoden för identifiering av en linjär samplad modell med en insignal och en utsignal. Speciellt har frågan om modellens ordningstal studerats. En numerisk algoritm, som iterativt anpassar modeller med växande ordningstal, har således utvecklats. För att bestämma modellens ordningstal användes statistisk hypotesprövning. Den klassiska F-testen, som utvecklats för regressionsmodeller, är giltig även för det problem som studerats här. Den iterativa beräkningen har intresse ej enbart vid analys av modellens ordningstal utan förfarandet medför även flera numeriska fördelar då man i varje iteration endast behöver invertera en  $2 \times 2$  matris.

I kapitel 2 presenteras systemmodellen och problemet formuleras. Den iterativa lösningsmetoden anges i kapitel 3. I detta kapitel tillämpas även kända statistiska metoder på identifieringsproblemet. Detta resulterar dels i en test av modellens ordningstal och dels en uppskattning av parametrarnas noggrannhet. Kapitel 4 behandlar programmering av identifieringsalgoritmen och generering av testdata. Några numeriska exempel presenteras i kapitel 5. Dessa exempel är dels artificiellt genererade data och dels data från ett medicinskt problem, som studerats i ett examensarbete i elektrisk mätteknik av H.G. Karlsson.

## 2. Systemmodell. Formulering av problemet.

Betrakta ett tidsdiskret dynamiskt system med en ingång och en utgång, vars insignal-utsignalrelation kan beskrivas av ekv.

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \lambda \cdot C(z^{-1})e(t) \quad (2.1)$$

Samplingsintervallet antages vara konstant.

$[u(t)]$  och  $[y(t)]$  betecknar in-resp. utsignaler, medan  $[e(t)]$  är en följd av oberoende störningar  $N(0,1)$ . Då  $e(t) \in N(0,1)$  kan  $\lambda$  tolkas som feltermernas (störningarnas) standardavvikelse.  $z$  betecknar skiftoperatoren.

$$zx(t) = x(t+1) \quad (2.2)$$

$A(z)$ ,  $B(z)$  och  $C(z)$  är polynom.

$$\begin{cases} A(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_n z^n \\ B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n \\ C(z) = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n \end{cases} \quad (2.3)$$

För ytterligare kommentarer hänvisas till ref(1).

I detta arbete skall systemmodellen

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \lambda \cdot e(t) \quad (2.4)$$

behandlas.

Ekv.(2.4) är ett specialfall av (2.1) och beskriver en process utan mätfel (ref(2) s.12).

För att förenkla beräkningarna gör vi den inskränkningen att sätta koeff.  $b_0$  i polynomet  $B(z) = 0$ . Om dessutom begynnelsevillkoren antages vara noll, innehåller systemmodellen (2.4)  $2n+1$  parametrar, nämligen  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  samt  $\lambda$ .

Problemet är nu att, utgående från en given sekvens indata  $u(t)$ ,  $t=1, 2, \dots$  och observerade utdata  $y(t)$ ,  $t=1, 2, \dots$  uppskatta dessa parametrar, samt den lämpligaste ordningen  $n$  för systemet.

Att koeff.  $b_0=0$  innebär att vi i modellen (2.4) inte räknat med möjligheten, att signalen vid en viss tidpunkt kan påverka systemets utsignal vid samma tidpunkt. Vid snabba fysikaliska system måste dock även  $b_0$  bestämmas.

Multiplitera därför ekv.(2.4) med  $zz^{-1}=1$ .

$$A(z^{-1})y(t)=zB(z^{-1}) \cdot z \cdot u(t)+\lambda e(t) \quad (2.5)$$

$$B'(z^{-1})=zB(z^{-1})=b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n+1} \quad (2.6)$$

Ekv. (2.5) och (2.6) visar, att vi genom förskjutning av indata ett steg tillbaka i tiden relativt utdata får en uppskattning även av koeff.  $b_0$  om räkningarna genomförs som vanligt (se kap.3).

$b_0$  erhålles då på  $b_1$ :s plats,  $b_1$  på  $b_2$ :s plats osv.

Någon uppskattning av  $b_n$  erhålles icke, men denna koeff, torde vid snabba system vara liten.

### 3. Lösning av problemet.

I detta kapitel utvecklas den metod för iterativ bestämning av modeller med ökande ordningstal, på vilken identifieringsprogrammet bygger. I varje steg uppskattas med minsta-kvadratmetoden systemkoeff., dessas varians samt förlustfunktionen  $Q$ . Systemordningen bestäms genom signifikanstest av  $Q$ . För att ge en indikation på numeriska svårigheter, som ev. kan uppstå, införes ett konditionstest. Härledning och geometrisk tolkning av minsta-kvadratmetoden kan studeras i appendix.

#### 3.1. Iterativ best. av modeller med växande ordningstal.

För en systemmodell av ordning  $n$  kan ekv.(2.4) uttryckas som

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) + \lambda e(t) \quad (3.1)$$

Utsignalen  $y(t)$  är alltså i varje tidpunkt  $t$  behäftad med det okända felet  $\lambda e(t)$ . En följd av kända indata och observerade utdata ger då ett överbestämt ekvationssystem ( $N > n$ ), som i matrisform får utseendet

$$\begin{bmatrix} y(1) & -u(1) & y(0) & -u(0) & \dots & y(-n+2) & -u(-n+2) \\ y(2) & -u(2) & y(1) & -u(1) & \dots & y(-n+1) & -u(-n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y(N) & -u(N) & y(N-1) & -u(N-1) & \dots & y(N-n+1) & -u(N-n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(2) \\ -y(3) \\ \vdots \\ -y(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N+1) \end{bmatrix} \cdot \lambda \quad (3.2)$$

Inför beteckningarna:

$$X_1 = \begin{bmatrix} y(1) & -u(1) \\ y(2) & -u(2) \\ \vdots & \vdots \\ y(N) & -u(N) \end{bmatrix}; \quad X_2 = \begin{bmatrix} y(0) & -u(0) \\ y(1) & -u(1) \\ \vdots & \vdots \\ y(N-1) & -u(N-1) \end{bmatrix}; \quad \dots \quad X_n = \begin{bmatrix} y(-n+2) & -u(-n+2) \\ y(-n+1) & -u(-n+1) \\ \vdots & \vdots \\ y(N-n+1) & -u(N-n+1) \end{bmatrix};$$

$$K = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} -y(2) \\ -y(3) \\ \vdots \\ -y(N+1) \end{bmatrix}; \quad E = \lambda \cdot \begin{bmatrix} e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N+1) \end{bmatrix};$$

Med  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  erhålles ur ekv. (3.2)

$$X \cdot K = Y + E \quad (3.3)$$

Koefficientvektorn  $K$  uppskattas nu med minsta-kvadratmetoden.

Enligt appendix skall förlustfunktionen  $Q$  minimeras.

$$Q = [X \cdot K - Y]^T [X \cdot K - Y] \quad (3.4)$$

Minimeras  $Q$  m.a.p.  $K$  erhålles

$$Q_{min} = Y^T [Y - X \cdot K] \quad (3.5)$$

för

$$K = [X^T X]^{-1} \cdot X^T Y \quad (3.6)$$

Förlustfunktionen blir alltså minimal för

$$K = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^T X_1 & X_1^T X_2 & \dots & X_1^T X_{n-1} & X_1^T X_n \\ X_2^T X_1 & X_2^T X_2 & \dots & X_2^T X_{n-1} & X_2^T X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{n-1}^T X_1 & X_{n-1}^T X_2 & \dots & X_{n-1}^T X_{n-1} & X_{n-1}^T X_n \\ X_n^T X_1 & X_n^T X_2 & \dots & X_n^T X_{n-1} & X_n^T X_n \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T Y \\ X_2^T Y \\ \vdots \\ X_n^T Y \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \cdot H = M^{-1} \cdot H \quad (3.8)$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad H = \begin{bmatrix} X_1^T Y \\ X_2^T Y \\ \vdots \\ X_n^T Y \end{bmatrix}$$



$2/2$ -matriserna  $X_p^T X_q$   $p=1,2,\dots,n$ ,  $q=1,2,\dots,n$ , som ingår som delmatriser i  $M$  har utseendet

$$X_p^T X_q = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N y(k-p+1) \cdot y(k-q+1) & -\sum_{k=1}^N y(k-p+1) \cdot u(k-q+1) \\ -\sum_{k=1}^N u(k-p+1) \cdot y(k-q+1) & \sum_{k=1}^N u(k-p+1) \cdot u(k-q+1) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Kolonnvektorn  $X_i^T Y$   $i=1,2,\dots,n$ , som ingår som delement i vektorn  $H$ , har två element och utseendet:

$$X_i^T Y = \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^N y(k-i+1) \cdot y(k+1) \\ \sum_{k=1}^N u(k-i+1) \cdot y(k+1) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Den iterativa metodiken innebär att systemets ordningstal  $n$  succesivt höjes, med början för  $n=1$ .

För varje  $n$  beräknas:

1. Delmatriserna  $B, C$  och  $D$  av ordning  $2n-2/2$ ,  $2/2n-2$ , resp.  $2/2$ .

Dessa placeras sedan in i  $M$ -matrisen, som alltså utökas med två rader och två kolonner för varje ökning av  $n$ .

2. Två nya element i vektorn  $H$ . (Enl. 3.10)
3. Inversen av  $M$ .
4. Koefficientvektorn  $K$ , som ökas med två element för varje ordning.
5. Förlustfunktionen  $Q$ .

För att kunna lösa ekv.syst. (3.7) krävs, för ett system av ordning  $n$  invertering av  $2n/2n$ -matrisen  $\bar{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , där alltså  $A$  är föregående ordnings  $M$ -matris (av ordning  $2n-2/2n-2$ ). Eftersom  $\bar{A}^{-1}$  redan är känd är det lämpligt att använda den metod för beräkning av  $\bar{M}^{-1}$ , som framgår nedan.

A, B och C är matriser av ordning  $2n-2/2n-2$ ,  $2n-2/2$ ,  $2/2n-2$  resp.  $2/2$ .

$$\text{Antag att } \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Då gäller } \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

Detta medför:

$$\begin{cases} A Z_1 + B Z_3 = I & (3.11) \\ C Z_1 + D Z_3 = O & (3.12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C Z_2 + D Z_4 = I & (3.13) \\ A Z_2 + B Z_4 = O & (3.14) \end{cases}$$

$$(3.12) \implies Z_3 = -D^{-1} C Z_1$$

$$(3.11) \implies [A - B D^{-1} C] Z_1 = I$$

$$\text{Alltså är } \begin{cases} Z_1 = [A - B D^{-1} C]^{-1} \\ Z_3 = -D^{-1} C [A - B D^{-1} C]^{-1} \end{cases}$$

$$(3.14) \implies Z_2 = -A^{-1} B Z_4$$

$$(3.13) \implies [D - C A^{-1} B] Z_4 = I$$

$$\text{Alltså är } \begin{cases} Z_4 = [D - C A^{-1} B]^{-1} \\ Z_2 = -A^{-1} B [D - C A^{-1} B]^{-1} \end{cases}$$

Identiteten  $[A - B D^{-1} C]^{-1} = A^{-1} + A^{-1} B [D - C A^{-1} B]^{-1} C A^{-1}$  bevisas lätt genom hopmultiplicering av  $[A - B D^{-1} C]$  och  $A^{-1} + A^{-1} B [D - C A^{-1} B]^{-1} C A^{-1}$ , varvid enhetsmatrisen erhålles.

Alltså blir elementen i M-invers:

$$\begin{cases} Z_1 = [A - B D^{-1} C]^{-1} = A^{-1} + A^{-1} B [D - C A^{-1} B]^{-1} C A^{-1} = A^{-1} - Z_2 C A^{-1} & (2n-2/2n-2 \text{ matris}) \\ Z_2 = -A^{-1} B [D - C A^{-1} B]^{-1} = -A^{-1} B Z_4 & (2n-2/2 \text{ matris}) \\ Z_3 = -D^{-1} C [A - B D^{-1} C]^{-1} = -D^{-1} C Z_1 & (2/2n-2 \text{ matris}) \\ Z_4 = [D - C A^{-1} B]^{-1} & (2/2 \text{ matris}) \end{cases}$$

Beräkningen av inversens delmatriser sker i ordningen  $Z_4, Z_2, Z_1, Z_3$ .

Antalet räkneoperationer nödvändiga för inversion enligt denna partitioneringsteknik framgår av tabell 1. och 2.

Tabell 3. visar antalet räkneoperationer som åtgår vid direkt inversion enligt Jordans metod (ref(4) s.79-80)

Vid användning av partitioneringstekniken åtgår:

$$\left. \begin{array}{l} 36 \cdot n^2 - 48 \cdot n + 18 \text{ add.} \\ 32 \cdot n^2 - 40 \cdot n + 12 \text{ mult.} \\ 8 \text{ div.} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Totalantalet räkneop.} = 68 \cdot n^2 - 88 \cdot n + 38$$

Vid användning av direkt inversionsmetod åtgår:

$$\left. \begin{array}{l} (2 \cdot n - 1)^2 \cdot 2 \cdot n \text{ subtr.} \\ (2 \cdot n - 1)(2 \cdot n)^2 \text{ mult.} \\ (2 \cdot n)^2 \text{ div.} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Totalantalet räkneop.} = 16 \cdot n^3 - 8 \cdot n^2 + 2 \cdot n$$

Jämförelse av de två inversionsmetoderna visar att partitioneringstekniken är att föredra åtminstone för  $n \geq 4$ .

En uppfattning om hur dålig den beräknade inversen  $M^{-1}$  är får man genom hopmultiplicering av  $M \cdot M^{-1}$  och  $M^{-1} \cdot M$ .

Resultatet kan jämföras med den teoretiskt förväntade enhetsmatrisen.

Tabell 1.

Beräkning	Antal add.	Antal mult.	Antal div.	$\Sigma$ räkneop.
$CA^{-1}$	$2(2n-2)^2$	$2(2n-2)^2$		$4(2n-2)^2$
$CA^{-1}B$	$4(2n-2)$	$4(2n-2)$		$8(2n-2)$
$D-CA^{-1}B$	4			4
$Z_4 = [D-CA^{-1}B]^{-1}$	1	2	4	7
$A^{-1}B$	$2(2n-2)^2$	$2(2n-2)^2$		$4(2n-2)^2$
$Z_2 = A^{-1}BZ_4$	$4(2n-2)$	$4(2n-2)$		$8(2n-2)$
$Z_2 CA^{-1}$	$2(2n-2)^2$	$2(2n-2)^2$		$4(2n-2)^2$
$Z_1 = A^{-1} - Z_2 CA^{-1}$	$(2n-2)^2$			$(2n-2)^2$
$D^{-1}$	1	2	4	7
$D^{-1}C$	$4(2n-2)$	$4(2n-2)$		$8(2n-2)$
$Z_3 = D^{-1}CZ_1$	$2(2n-2)^2$	$2(2n-2)^2$		$4(2n-2)^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \text{ add.} = 36(n-1)^2 + 24(n-1) + 6 \\ \Sigma \text{ mult.} = 32(n-1)^2 + 24(n-1) + 4 \Rightarrow \Sigma \text{ räkneop.} = 68(n-1)^2 + 48(n-1) + 18 \\ \Sigma \text{ div.} = 8 \end{array} \right.$$

Tabell 2.

Tabell 3.

Svst.- ordn.	Partitioneringsteknik			Direkt inversionsteknik			
	Antal add.	Antal mult+div	Totalant. räkneop.	Antal div	Antal mult.	Antal subtr.	Totalant. räkneop.
2	66	68	134	16	48	36	100
3	198	188	386	36	180	150	366
4	402	372	774	64	448	392	904
5	678	620	1298	100	900	810	1810
6	1026	932	1958	144	1584	1452	3180
7	1446	1308	2754	196	2548	2366	5110
8	1938	1748	3686	256	3840	3600	7696
9	2502	2252	4754	324	5508	5202	11034
10	3138	2820	5958	400	7600	7220	15220

### 3.2. Konditionstest.

För att ge en indikation på de numeriska besvärligheter som kan uppstå vid inversionen införes konditionstalet  $\mu$ , enligt

$$\mu = 2 \cdot n \cdot \max_1 \cdot \max_2 \quad (\text{jfr. avv. från ref(4) s.72})$$

$n$  = Systemets ordning.

$$\max_1 = \max |M(i,i)| \quad i=1,2,\dots,2n$$

$$\max_2 = \max |M(i,i)| \quad i=1,2,\dots,2n$$

Ett stort konditionstal ger i regel numeriska svårigheter med motsvarande matris, som säges vara illa konditionerad. Försök att komma bort från dessa svårigheter har gjorts.

I ref(7) s.203-210 diskuteras den s.k. dämpade minsta-kvadratmetoden, som bl.a. innefattar normering av matris- och vektorelementen ( $\leq 1$ ).

Från ref(7) citeras direkt:

"Although the Damped Least Squares Method looks promising from theoretical considerations, the numerical experiments show that the method is not feasible.".....

"Furthermore, from a theoretical statistical point of view, the method when used in parameter estimation situations, obviously conceals the very nature of the problem: that the <sup>model</sup> was expressed in the matrix  $Y$  (i vårt fall matr.  $X$  i 3.3) is not acceptable.".....

"When the matrix of the normal equations ( $M$ ) is ill-conditioned, the reason is always, that two or more columns of the matrix  $Y (=X)$  are nearly proportional, which means that we are forcing more dimensions into our problem than can be physically accounted for, the column vectors do not span the desired space properly. Even if convergence by the D.L.S.-method may be assured, this is no assertion of the physical reality of the solution,....."

Ett stort värde på konditionstalet  $\mu$  kan alltså innebära att vi räknar med en ur fysikalisk synpunkt orimlig systemmodell, d.v.s. med för hög ordning på systemet.

### 3.3. Beräkning av systemkoeff. standardavvikelse.

Lösningsvektorn  $\hat{K}$  till det överbestämda ekv. syst.

$$Y = X K + \varepsilon$$

erhålls med minsta-kvadratmetoden till

$$\hat{K} = (X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T X)^{-1} X^T (X K + \varepsilon) = K + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon.$$

$$E(\hat{K}) = K, \quad \text{ty } X \text{ är konstant och } E(\varepsilon) = 0.$$

$$V(\hat{K}) = E((\hat{K} - K) \cdot (\hat{K} - K)^T)$$

$$V(\hat{K}) = E([(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon] [(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon]^T)$$

$$V(\hat{K}) = (X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon \varepsilon^T) X (X^T X)^{-1}$$

$$V(\varepsilon) = E(\varepsilon \varepsilon^T) = \sigma^2 I \quad \text{där } \sigma^2 = \text{feltermernas varians och } I = \text{enhetsmatrisen.}$$

$$\therefore V(\hat{K}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} I = \sigma^2 (\hat{K})$$

Enligt tidigare är ju  $(X^T X)^{-1} = M^{-1}$  och alltså erhålles systemkoefficienternas standardavvikelse  $\sigma(\hat{K})$  genom att multiplicera kvadratroten av matrisen  $M^{-1}$ 's diagonalelement med feltermernas standardavvikelse  $\sigma$ .

Uppskattningen  $\hat{\sigma}$  av  $\sigma$  anges i ref(3) med vanliga beteckningar till

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{Q}{N-2 \cdot n}}$$

3.4. Bestämning av systemordn. n genom signifikanstest av förl.fktn.

$Q_n$  = Förlustfunktionens värde då systemets ordning = n.

$Q_{n+1}$  = " " " " " " " " " " = n+1.

$\sigma^2$  = Feltermernas varians.

N = Antalet datapar minus 8 (d.v.s. antalet element i Y-vektorn).

Allmänt är N=antalet datapar minus  $n_{max}$ , där  $n_{max}$  är den

högsta tillåtna ordningen (se 4.3).

$$\frac{Q_n}{\sigma^2} \in \chi^2(N - 2n)$$

$$\frac{Q_{n+1}}{\sigma^2} \in \chi^2(N - 2(n+1))$$

Det kan visas att  $\frac{Q_n}{\sigma^2} - \frac{Q_{n+1}}{\sigma^2} \in \chi^2(2)$ .

Definitionsmässigt tillhör då kvoten  $F_n = \frac{(Q_n - Q_{n+1})/2}{Q_{n+1}/(N-2(n+1))}$  en F-fördelning

med 2 och  $N-2(n+1)$  frihetsgrader.

Om  $F_n < F_\alpha[2, N-2(n+1)]$  har på  $100\alpha$ -procentsnivån ingen signifikant sänkning av förlustfunktionen skett vid övergången till systemordningen n+1. På denna nivå identifieras systemet då som ett n:te ordningens system.

Observera att  $F_\alpha[2, N-2(n+1)]$  relativt snabbt konvergerar mot det konstanta värdet  $F_\alpha[2, \infty]$ , varför detta användes vid de tester som utföres i kap. 5.

<u>Ex.</u>	<u>Nivån 5%</u>	$F(2, 200) = 3.04$
		$F(2, 500) = 3.01$
		$F(2, \infty) = 3.00$

## 4. Programmering.

### 4.1. Generering av testdata.

För att kunna kontrollera identifieringsprogrammets riktighet krävs tillgång till data, som genererats från en systemekvation med kända koeff. Därför har ett ALGOL-program, "Funktionsgenerering", konstruerats för att ur systemmodellen

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - a_3 y(t-3) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + b_3 u(t-3) + \lambda \cdot [e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + c_3 e(t-3)]$$

beräkna utdata. Systemkoeff., insignaler och fel betraktas därvid som kända och läses in från 5-kanals hålremsa. Som feltermen  $e(t)$  användes slumptal  $\epsilon N(0,1)$ , frambringade m.hj. av ALGOL-programmet "Slumptalsgenerering". Se 4.2. Stegfunktioner av storleken  $\pm 1$  och med medelvärdet noll har nyttjats <sup>(som)</sup> insignaler. De tre första in- och utdata samt de tre första feltermerna har tilldelats värdet noll för att erhålla startvärden.

Speciellt har utdata för de två systemekv. 1. och 2. nedan genererats

$$1. y(t) = 1.5y(t-1) - 0.7y(t-2) + u(t-1) + 0.5u(t-2) + \lambda \cdot [e(t) - e(t-1) + 0.2e(t-2)]$$

$$2. y(t) = 1.5y(t-1) - 0.7y(t-2) + u(t-1) + 0.5u(t-2) + \lambda e(t)$$

Resultatet framgår av diagram 1 och 2.

I vissa lägen är det lämpligt att direkt i ALGOL-programmet tilldela insignaler och koeff. sina värden, speciellt då insignalen har ett regelbundet förlopp och datamaterialet är stort. Tidsödande stansning undviks härigenom. Ex. 4 kap. 5, där antalet insignaler av värdet  $\pm 1$  resp.  $-1$  växer som en geometrisk serie, är härvid instruktivt. Det bifogade ALGOL-programmet för funktionsgenerering till detta exempel visar också möjligheten till utskrift av data, både på radskrivare och hålremsa.



### Funktionsgenerering.

```
begin comment Funktionsgenerering för system av högst tredje ordning
och högst 100 datapar. På dataremsan måste finnas 9 koeff.
Koeff.a[0]=c[0]=1, b[0]=0 finns ej på remsan. De första 3 paren
av indata och fel tilldelas värdet 0, för att erhålla startvärden.
Utskrift sker av lambda, följt av motsvarande par av in- och
utdata, 100 st;
integer i, k; array a,b,c[1:3], u,y,eps[-2:100], lb[1:5];
for i:=1,2,3 do
begin a[i]:=read; b[i]:=read; c[i]:=read end;
for i:=1,2,3,4,5 do lb[i]:=read;
for i:=-2 step 1 until 100 do u[i]:=read;
for i:=-2 step 1 until 100 do eps[i]:=read;
for i:=-2,-1,0 do y[i]:=0;
for k:=1,2,3,4,5 do
begin stans(1); skrv(1,1,lb[k]);
for i:=1 step 1 until 100 do
begin y[i]:= -a[1]×y[i-1] -a[2]×y[i-2] -a[3]×y[i-3] +
b[1]×u[i-1] +b[2]×u[i-2] +b[3]×u[i-3] +
lb[k]×(eps[i]+c[1]×eps[i-1]+c[2]×eps[i-2]+c[3]×eps[i-3]);
stans(1); skrv(1,0,u[i]);
stans(0); stans(0); skrv(2,3,y[i]);
end;
stans(15)
end
end
end
```

Funktionsgenerering till ex. 4.

```
begin integer i,j,k;  
real s1,s2,s3;  
array u,y,e[-1:400];  
u[0]:=u[-1]:=y[0]:=y[-1]:=0;  
for i:=1 step 1 until 400 do e[i]:=read;  
u[1]:=1;  
for i:=1 step 2 until 7 do  
for k:=2(i-1)+1 step 1 until 2i do u[k]:=-1;  
for i:=2 step 2 until 8 do  
for k:=2(i-1)+1 step 1 until 2i do u[k]:=1;  
for i:=257 step 1 until 400 do u[i]:=-1;  
s1:=exp(-0.04);  
s2:=exp(-2);  
s3:=exp(-2.04);  
for k:=1 step 1 until 400 do  
begin y[k]:=(s1+s2)xy[k-1]-s3xy[k-2]+(1+(s2-50xs1)/49)xu[k-1]+  
          (s3+(s1-50xs2)/49)xu[k-2]+0.1xe[k];  
      stans(1);  
      skrv(3,3,u[k]);  
      stans(1);  
      skrv(3,3,y[k])  
end;  
stans(1);  
stans(15);  
for i:=1 step 1 until 400 do  
begin punch(1);  
      print(8,3,u[i]);  
      print(8,3,y[i]);  
      print(8,3,e[i]);  
end  
end.
```

#### 4.2. Slumptalsgenerering.

Denna metod för slumptalsgenerering (ref(6) s.376-383) har utvecklats av Box och Muller.

Låt  $U_1$  och  $U_2$  vara oberoende rektangelfördelade slumptal  $(0,1)$ .

$$\text{Sätt } \begin{cases} X_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(U_1)} \cdot \cos 2\pi U_2 \\ X_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(U_1)} \cdot \sin 2\pi U_2 \end{cases}$$

Då kommer  $(X_1, X_2)$  att bli ett par oberoende slumptal tillhörande en normalfördelning med medelvärdet noll och standardavvikelsen=1.

Matematiskt har denna metod den fördelen att transformationen från rektangel- till normalfördelade slumptal är exakt. För numerisk generering på datamaskin av normalfördelade slumptal har ALGOL-programmet "Slumptalsgenerering" konstruerats. De rektangelfördelade slumptalen  $U_1$  och  $U_2$  erhålles genom att anropa den maskinkodade funktionsproceduren 'rand', som bygger på den s.k. potensmetoden.

I ref(4) s.256-257 ges följande rekursion för bildande av slumptal enligt denna metod:

$$\begin{cases} x_i = 23 \cdot x_{i-1} \text{ mod } 2^{39} + 1 \\ y_i = 9901 \cdot y_{i-1} \text{ mod } 2^{39} + 1 \\ z = 2^{-39} (x_i + y_i) \text{ mod } 1 \end{cases}$$

$x_i$  och  $y_i$  är heltal samt  $z_i$  pseudorandom.

1. Den första kongruensen innebär:

$$\begin{aligned} x_i - 23 \cdot x_{i-1} &= q \cdot (2^{39} + 1) && q = \text{heltal.} \\ x_i &= 23 \cdot x_{i-1} + q \cdot (2^{39} + 1) \\ 23 \cdot x_{i-1} &= mr + 2^{39} \cdot ar && (\text{Se proceduren rand}) \end{aligned}$$

Vi vill välja  $q$  så att  $x_i$  ryms i AR. Välj  $q = -ar$ .

Då blir  $x_i = mr - ar$ .


2. På samma sätt blir  $y = mr - ar$ .

$x_i$  och  $y_i$  lagras i var sin cell enligt: 

I position 0 står normalt en nolla. I sällsynta fall kan spill uppträda vid ovanstående subtraktioner, men en etta i position 0 försvinner automatiskt efter moment 3 och 4.

3. Hittills har vi räknat med  $x_i$  och  $y_i$  som heltal. Nu övergår vi till maskintal. Den tredje kongruensen innebär då att  $x_i$  och  $y_i$  adderas samt att en ev. etta i pos.0 (spill) tages bort.

Det sista integreras emellertid med moment 4.

4. Efter additionen finns i AR och MR, bortsett från pos.0, en följd av 39 slumpmässiga nollor och ettor: 

Om man skär av ett sådant tal till höger och vänster får man ett nytt slumpantal inom en kapacitet av ett färre antal bitar.

I programmet skär vi enligt mallen: 

Varje tal inom denna kapacitet måste nu divideras med det största talet (alla bitar är ettor: 3FFFF FFF00) för att vi skall få ett spektrum av slumpantal  $0 \leq z \leq 1$ . Observera att det är önskemålet att få med 1 som motiverar divisionen. Neds kärningen av antalet signifikanta siffror är i någon mån godtycklig. Eftersom slumpantalet packas före användning i ALGOL-programmet får vi i stort sett maximal noggrannhet.

Vid översättning av SWIL-ALGOL-programmet skall den maskin-kodade proceduren finnas på ECM, spole 61. Proceduren skall vara kodad i s.k. 800-form.

Den maskinkodade proceduren skall ej deklarerars i SMIL-ALGOL-programmet, ty så snart en ej deklarerad identifierare påträffas under översättningen undersökes om identifieraren svarar mot en procedur i maskinkod. Om så är fallet överföres proceduren till KM och ingår som en del av objektprogrammet. Proceduren anses därvid vara deklarerad i ett utanför programmet liggande block och den kan således anropas från vilken plats som helst i programmet. För ytterligare kommentarer hänvisas till ref(5) s.14-15. Funktionsproceduren 'rand', försedd med kommentarer, bifogas.

# Funktionsproceduren rand.

(Subrutin i 800-form)

r a n d  
29312534

rand

8170080980

Procedurmärke. 0-11 sista adress. 12-19 spoles blocknr.  
20-31 inhopsadress. 32-34 (här=4) ty real procedure.  
35-39 antal formella parametrar.

800

0000000000

Slaskcell

1

123456789A

} Slumptal.

2

BCDEF13579

3

0000000017

Konstant = 23.

4

00000026AD

Konstant = 9901.

5

3FFFFFFFF00

 . Nollor i pos. 1 och 2, samt pos. 32-39. Ettor i övrigt.

6

0000000000

Plats för funktionsvärde.

7

80000000FF

Blockidentifikator.

8

8000000000

Proceduren har ej några formella parametrar.

Inhopp →

9

04CC680A90

0-19 och 32-39 konst. 20-31 = aktuell adress + 1.

H

8084205F80

0-11 = aktuell adress - 2 ; pos. 12-39 konstant.

B

8074206280

0-11 = " - " - 4 ; " - " - "

C

8014280362

801 → MR o AR ; 23 · mr → AR o MR mr<sub>0</sub> = 0 ;

D

8003000022

ar → 800 ; mr → AR 0 → MR ;

E

8005880130

-800 + ar → AR ; ar → 801 ;

F

8024280462

802 → MR o AR ; 9901 · mr → MR o AR.

810

8003000022

ar → 800 ; mr → AR 0 → MR ;

1

8005880230

-800 + ar → AR ; ar → 802 ;

2

801408056C

801 + ar → MR o AR ; Logisk produkt 805 × mr → AR ;

3

8063080558

ar → 806 ; -805 + ar → AR ;

4

816B480652

Hopp till 816<sub>H</sub> om ar=0 ; 806 → AR ;

5

8056800028

ar/805 → AR ; ar packas → MR o AR ;

6

8179002242

Hopp till 817<sub>V</sub> ; 022 → MR o AR ;

7

0638000000

Hopp till 063<sub>V</sub> , utför hela 063 , hopp till KR + 1/2.

## Slumptalsgenerering.

begin comment Program för generering av 1000 slumptal, normalfördelade(0,1),  
utgående från rektangelfördelade slumptal(0,1). De senare erhålles  
genom anrop av den maskinkodade funktionsproceduren rand.  
Utskrift sker på 5-kanals hållremsa;

```
integer i;  
real y1,y2;  
procedure RND(x1,x2); real x1,x2;  
  begin real u1,u2,r;  
    u1:=rand;  
    u2:=rand;  
    r:=sqrt(-2*ln(u1));  
    x1:=r*cos(6.2832*u2);  
    x2:=r*sin(6.2832*u2)  
  end;  
for i:=1 step 1 until 500 do  
begin RND(y1,y2);  
  stans(1);  
  skry(1,3,y1);  
  stans(1);  
  skrv(1,3,y2)  
end  
end
```

### 4.3 Identifieringsprogrammet.

Allmänt. Uppbyggnaden av ALGOL-programmet för identifiering av systemmodellen  $y(t)+a_1y(t-1)+\dots+a_ny(t-n)=b_1u(t-1)+\dots+b_nu(t-n)+\lambda e(t)$  följer teorin i kap.3. De i riklig mängd förekommande kommentarerna hänsyftande på samma kap.,gör att programmet ej torde förorsaka läsaren några svårigheter.

Det har testkörts på Siffermaskinen i Lund (SMIL), varför in-och utmatningsrutiner anpassats för denna maskin.

Programmet är stansat på 8-kanals hållremsa, medan inläsning av data sker med 5-kanals hållremsa.

Utskrift av resultat erhålles på radskrivare.

Alla beräkningar sker i maskinens inre kärnminne(KM), som har en kapacitet av ca. 3300 ord för det översatta programmet(inklusive plats för enkla och indicerade variabler).

Den maximala ordningen n hos systemet har begränsats till n=8.

Plats för inläsning av ca. 250 datapar  $[u(t),y(t)]$  till KM finnes då.

Vill vi bearbeta en större datamängd, är vi tvingade att skära ned den maximala ordningen  $n_{max}$ . Gränserna hos fälten A, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>,

B, F, C, E, K, H, stavk kan då minskas och de därigenom lediggjorda minnescellerna tagas i anspråk för ökning av antalet in-och utdata.

Tabellen nedan visar det ungefärliga antalet datapar som kan bearbetas för olika värden på  $n_{max}$ .

<u><math>n_{max}</math></u>	<u>Antalet datapar</u>
5	450
6	400
7	325
8	250



Inläsning av data. Då programmet är färdigkompilerat (tid=1.5 min.)

inläses från 5-kanals hållremsa:

1. N = antal datapar minus 8. (Är  $n_{max}=7 \Rightarrow N=\text{antal datapar minus } 7$  osv.)
2. 'slut'=det sista n-värde för vilket vi vill att genomlöpnig av programmet skall ske.
3. In- och utdata stansade i ordningen:  
indata 1, utdata 1, indata 2, utdata 2,.....

Talen N och 'slut' stansas lämpligen på en särskild remsa för att underlätta ev. ändringar av dessa variabler.

Alla remsor bör sluta med stopptecken, varvid tillfälle till remsbyte ges.

Sedan programmet genomlöpts önskat antal gånger sker hopp till läget DATA. Inläsning av nya data kan då ske.

Utskrift av resultat. På radskrivare erhålles följande utskrifter

i nämnd ordning:

1.  $\sum_{t=2}^{N+1} y^2(t)$ . (Endast vid 1:a iterationen)
2. Matrisen M av ordning  $2 \cdot n / 2 \cdot n$ .
3. M-invers av ordning  $2 \cdot n / 2 \cdot n$ .
4. Konditionstalet  $\mu$ . Om  $\mu > 10^4$  tryckes dessutom tre stjärnor.
5. M \* M-invers av ordning  $2 \cdot n / 2 \cdot n$ .
6. M-iners \* M av ordning  $2 \cdot n / 2 \cdot n$ .
7. Systemets koeff. enligt schemat:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{array}$$

8. Förlustfunktionen  $Q_n$ .

9. Testkvantiteten  $F_{n-1}$ .
10. Feltermernas standardavvikelse(stav).
11. Systemkoeff. standardavvikelse(stavk).
12. Om vid anrop av 'invers(D2,L4)' matrisen D2:s det.  $\leq 10^{-8}$  tryckes en stjärna. P.s.s. tryckes två stjärnor om D1:s det.  $\leq 10^{-8}$  vid anrop av 'invers(D1,L5)'.

När programmet genomlöpts önskat antal gånger sker frammatning till ny sida.

```

begin comment Numerisk identifiering av systemmodellen  $y(t)+a[1]y(t-1)+\dots+a[n]y(t-n) = b[1]u(t-1)+\dots+b[n]u(t-n)+\lambda x e(t)$  m.hj.av
minsta-kvadratmetoden.
n: Systemets ordning.  $n < 8$ .
N: Antalet datapar  $[u(t), y(t)]$  minus 8.
Q: Förlustfunktionen minimerad m.hj.av minsta-kvadratmetoden.
u: Radvektor med insignalerna som komponenter  $[u(t), t=-6, \dots, N+1]$ .
y: Radvektor med de observerade utsignalerna som komponenter.
 $[y(t), t=-6, \dots, N+1]$ .
K: Radvektor med systemets koefficienter som komponenter.
L1: Lägg till vilket hopp sker vid förnyad iteration;

```

```

real Test, Q0, Q, yy, z, max1, max2, my, stav;
integer N, n, i, j, k, l, slut;
array A, A1, A3[1:16, 1:16], A2[1:14, 1:14], B, F[1:14, 1:2], C, E[1:2, 1:14],
D1, D2[1:2, 1:2], K, H, stavk[1:16], T[1:242], V[1:2], u, y[-6:243];

```

```

comment Vid övergång till högre systemordning beräknas två
nya element i kolonnvektorn H;

```

```

procedure ONE(Y,U,X,r); value r; integer r; array Y,U,X;
begin real t1,t2;
integer k;
t1:=t2:=0;
for k:=1 step 1 until N do
begin t1:=t1-Y[k-r+1]*Y[k+1];
t2:=t2+U[k-r+1]*Y[k+1]
end;
X[1]:=t1;
X[2]:=t2
end;

```

```

comment Beräkning av de 2/2-matriser som ingår som element i M;

```

```

procedure TWO(Y,U,X,p,q); value p,q; integer p,q; array Y,U,X;
begin real s1,s2,s3,s4;
integer k;
s1:=s2:=s3:=s4:=0;
for k:=1 step 1 until N do
begin s1:=s1+Y[k-p+1]*Y[k-q+1];
s2:=s2-Y[k-p+1]*U[k-q+1];
s3:=s3-U[k-p+1]*Y[k-q+1];
s4:=s4+U[k-p+1]*U[k-q+1]
end;
X[1,1]:=s1; X[1,2]:=s2;
X[2,1]:=s3; X[2,2]:=s4
end;

```

```

comment Matrismult. av en m/n och en n/p-matris. Resultatet i P;

```

```

procedure mprod(M,N,P,m,n,p); value m,n,p; integer m,n,p; array M,N,P;
begin real s;
integer i,k,r;
for i:=1 step 1 until m do
for k:=1 step 1 until p do
begin s:=0;
for r:=1 step 1 until n do
s:=s+M[i,r]*N[r,k];
P[i,k]:=s
end
end;
end;

```

```

comment Inversion av en 2/2-matris. Utskrift av * om determinanten <math>10^{-8}</math>;
procedure invers(X, singular); array X; label singular;
  begin real t, det;
    det:=X[1,1]*X[2,2]-X[1,2]*X[2,1];
    if det<<math>10^{-8}</math> then go to singular;
    t:=X[1,1];
    X[1,1]:=X[2,2];
    X[2,2]:=t;
    X[1,1]:=X[1,1]/det;
    X[1,2]:=-X[1,2]/det;
    X[2,1]:=-X[2,1]/det;
    X[2,2]:=X[2,2]/det;
  end;

N:=read;
slut:=read;
DATA: for i:=-6 step 1 until N+1 do
  begin u[i]:=read; y[i]:=read end inläsning av in-och utdata;
  n:=1;
  Q0:=yy:=0;
  for k:=2 step 1 until N+1 do yy:=yy+y[k]*y[k];
  punch(1);
  print(8,2,yy);
L1: l:=2*n-2;
  for i:=1 step 1 until n-1 do
  begin TWO(y,u,D1,i,n);
    for j:=2*i-1,2*i do
      for k:=1,2 do B[j,k]:=D1[j-2*(i-1),k]
    end B-matrisen klar;
    for j:=1 step 1 until l do
      for k:=1,2 do
        begin C[k,j]:=A[j,k+1]:=B[j,k];
          A[k+1,j]:=C[k,j]
        end C-matrisen klar;
      TWO(y,u,D1,n,n); comment D-matrisen klar;
      for j:=1+1,1+2 do
        for k:=1+1,1+2 do A[j,k]:=D1[j-1,k-1]; comment systemmatrisen klar;
      for j:=1 step 1 until 1+2 do
        begin punch(1);
          for k:=1 step 1 until 1+2 do
            begin print(8,2,A[j,k]);
              punch(0)
            end
          end utskrift av systemmatrisen;
          max1:=0;
          for i:= 1 step 1 until 2*n do
            begin z:=abs(A[i,i]);
              if z>max1 then max1:=z
            end;
          mprod(C,A1,E,2,1,1);
          mprod(E,B,D2,2,1,2);
          for j:=1,2 do
            for k:=1,2 do D2[j,k]:=D1[j,k]-D2[j,k];
          invers(D2,D4); comment Z4 klar;
L2: mprod(A1,B,F,1,1,2);
      mprod(F,D2,B,1,2,2); comment -Z2 klar;
      mprod(B,E,A2,1,2,1);
      for j:=1 step 1 until 1 do
        for k:=1 step 1 until 1 do A2[j,k]:=A1[j,k]+A2[j,k]; comment Z1 klar;;

```

```

L3:  invers(D1,L5);
      mprod(D1,C,E,2,2,1);
      mprod(E,A2,C,2,1,1); comment -Z3 klar;
      for j:=1 step 1 until 1 do
      for k:=1 step 1 until 1 do A1[j,k]:=A2[j,k];
      for j:=1 step 1 until 1 do
      for k:=1+1,1+2 do A1[j,k]:=-B[j,k-1];
      for j:=1+1,1+2 do
      for k:=1 step 1 until 1 do A1[j,k]:=-C[j-1,k];
      for j:=1+1,1+2 do
      for k:=1+1,1+2 do A1[j,k]:=D2[j-1,k-1]; comment Inversen klar;
      for j:=1 step 1 until 1+2 do
      begin punch(1);
          for k:=1 step 1 until 1+2 do
          begin print(3,8,A1[j,k]);
              punch(0)
          end
      end
      end utskrift av inversen;
      max2:=0;
      for i:=1 step 1 until 2×n do
      begin z:=abs(A1[i,i]);
          if z>max2 then max2:=z
      end;
      my:=2×n×max1×max2; comment systemmatriSENS konditionstal;
      punch(1);
      print(8,0,my);
      if my>104 then
      begin punch(1);punch(8);punch(8);punch(8) end
      om my>104 är systemet illa konditionerat,
      varvid numeriska svårigheter kan uppstå.;
      mprod(A,A1,A3,1+2,1+2,1+2); comment beräkning av M×M-invers;
      punch(1);
      for j:=1 step 1 until 1+2 do
      begin punch(1);
          for k:=1 step 1 until 1+2 do
          begin print(3,8,A3[j,k]);
              punch(0)
          end
      end
      end utskrift av M×M-invers;
      mprod(A1,A,A3,1+2,1+2,1+2); comment beräkning av M-invers×M;
      punch(1);
      for j:=1 step 1 until 1+2 do
      begin punch(1);
          for k:=1 step 1 until 1+2 do
          begin print(3,8,A3[j,k]);
              punch(0)
          end
      end
      end utskrift av M-invers×M;
      ONE(y,u,V,n);
      for j:=1,2 do H[1+j]:=V[j];
      punch(1);;

```

```

for j:=1 step 1 until 1+2 do
begin K[j]:=0;
  for k:=1 step 1 until 1+2 do K[j]:=K[j]+A1[j,k]×H[k];
end   beräkning av systemkoeff.;
for j:=1 step 1 until n do
begin punch(1);
  for k:=1,0 do begin print(3,3,K[2×j-k]);
                    punch(0)
                    end
end   utskrift av systemkoeff.;
for i:=1 step 1 until N do
begin T[i]:=0;
  for j:=0 step 1 until n-1 do
    T[i]:=T[i]+y[i-j]×K[1+2×j]-u[i-j]×K[2+2×j]
  end;
for i:=1 step 1 until N do T[i]:=-y[i+1]-T[i];
Q:=0;
for i:=1 step 1 until N do Q:=Q-T[i]×y[i+1];
punch(1); alfaut(26); alfaut(n); alfaut(53);
print(6,3,Q);comment utskrift av förlustfunktionen;
Test:=(N-2×n)×(Q0-Q)/(2×Q);
if n>1 then
begin punch(1);alfaut(15);alfaut(n-1);alfaut(53);
  print(4,3,Test);comment tryckning av testkvantiteten F;
end;
stav:=sqrt(abs(Q/(N-2×n)));
punch(1);
print(2,3,stav);comment utskrift av materialets standardavvikelse;
punch(1);
for i:=1 step 1 until 2×n do
begin stavk[i]:=stav×sqrt(abs(A1[i,i]));
  print(1,3,stavk[i]);comment systemkoefficienternas standardavvikelse;
  punch(0);
end;
if n=slut then
begin punch(15); go to DATA end else
begin n:=n+1; Q0:=Q end;
go to L1;
L4: punch(1); punch(8); go to L2;
L5: punch(1); punch(8); punch(8); go to L3;
end program

```

## 5. Numeriska exempel.

Identifieringsprogrammet har testats på ett material av artificiellt genererade data.

I avsnitt 5.1. ges fyra exempel, där data har genererats från systemmodellen  $A(z^{-1}) \cdot y(t) = B(z^{-1}) \cdot u(t) + \lambda \cdot e(t)$ , d.v.s. från den modell, för vilken programmet är konstruerad.

Avsnitt 5.2. behandlar tre exempel, med data genererade från den allmänna systemmodellen  $A(z^{-1}) \cdot y(t) = B(z^{-1}) \cdot u(t) + \lambda \cdot C(z^{-1}) \cdot e(t)$ .

Slutligen ges i 5.3. ett praktiskt exempel där systemmodellens struktur är okänd.

Signifikanstest av förlustfunktionen, för bestämning av systemordningen, sker enligt 3.4.

5.1. Data har genererats från modellen  $A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \lambda e(t)$ .

Exempel 1.

Genererande fkt:  $y(t) = 0.5y(t-1) + u(t-1) + \lambda e(t)$   $t=1, 2, \dots, 100$ .

Insignaler  $u(t)$ : Stegfunktionerna  $\pm 1$ . M.v.=0.

Feltermer  $e(t)$ : Slumptal  $\epsilon N(0, 1)$ .

Verkliga koeff:  $a_1 = -0.50$   $b_1 = 1.00$

De skattade koeff., feltermernas spridning  $\lambda$ , förlustfunktionen  $Q$  samt konditionstalet  $M$  visas i tabell nedan.

	$a_i \pm \sigma(a_i)$	$b_i \pm \sigma(b_i)$	$Q$	$\lambda$	$M$	
$\lambda=0.0$	n=1	$-0.50 \pm 0.00$	$1.00 \pm 0.00$	0.001	0.003	4
	n=2	$-0.15 \pm 0.39$	$1.00 \pm 0.00$	0.011	0.011	$8.8 \cdot 10^5$
		$-0.18 \pm 0.20$	$0.35 \pm 0.39$			
	n=3	$0.12 \pm 5.54$	$1.00 \pm 0.02$	2.089	0.155	$1.3 \cdot 10^6$
		$0.52 \pm 3.08$	$0.62 \pm 5.53$			
		$-0.04 \pm 0.82$	$1.16 \pm 1.64$			
$\lambda=1.0$	n=1	$-0.50 \pm 0.06$	$0.93 \pm 0.12$	100.740	1.058	7
	n=2	$-0.56 \pm 0.11$	$0.95 \pm 0.12$	100.059	1.066	27
		$0.04 \pm 0.08$	$-0.11 \pm 0.16$			
	n=3	$-0.57 \pm 0.11$	$0.93 \pm 0.13$	98.588	1.071	45
		$0.13 \pm 0.12$	$-0.11 \pm 0.16$			
		$-0.10 \pm 0.09$	$0.06 \pm 0.16$			

Kommentar:

$\lambda=0.0$  : Då systemet identifieras som ett 1:a ordningens system

erhålls som väntat exakta koeff. Vid identifiering som ett system av högre ordning ökar konditionstalet kraftigt, vilket indikerar att systemordn. ur fysikalisk synpunkt är för hög. Kolonnvektorererna blir proportionella i X-matrisen för  $n > 1$ . Koefficienternas stora spridning gör dessutom skattningarna helt insignifikanta.



$\lambda = 1.0$  : Feltermerna  $e(t)$  är här av samma storleksordning som insignalerna. Detta gör att inga numeriska besvärligheter uppstår p.g.av dålig konditionering (små konditionstal) då identifieringen utföres för  $n=2$  och  $n=3$ . Koefficienterna  $a_2, a_3, b_2$ , och  $b_3$  är dock utan signifikans.

$$F_{0.05}(2, \infty) = 3.00$$

$$F_1 = \frac{88}{2} \cdot \frac{100.740 - 100.059}{100.059} = 0.30 < 3.00$$

Signifikanstestet ger alltså ett 1:a ordningens system på 5-% nivån.

Exempel 2.

Genererande fktn:  $y(t)=1.5y(t-1)-0.7y(t-2)+u(t-1)+0.5u(t-2)+\lambda e(t)$

$t=1,2,\dots,100.$

Insignaler  $u(t)$ : Stegfunktionerna  $\pm 1$ .  $Mv.=0.$

Feltermer  $e(t)$ : Slumtaltal  $\in N(0,1).$

Funktionens utseende framgår av diagram 2.

Identifieringen har utförts för  $\lambda=0.0, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$  och  $5.0.$

Resultat av identifieringen framgår av tabeller nedan.

Verkliga koeff:  $\begin{cases} a_1 = -1.50 \\ a_2 = 0.70 \end{cases} \begin{cases} b_1 = 1.00 \\ b_2 = 0.50 \end{cases}$

	$a_i \pm \sigma(a_i)$	$b_i \pm \sigma(b_i)$	Q	$\lambda$	M	
$\lambda=0.0 <$	n=1	$-0.88 \pm 0.03$	$1.23 \pm 0.18$	265.863	1.709	59
	n=2	$-1.50 \pm 0.00$	$1.00 \pm 0.00$	0.000	0.001	203
	n=3	$0.70 \pm 0.00$	$0.50 \pm 0.00$			$1.3 \cdot 10^6$
$\lambda=0.01 <$	n=1	$-0.88 \pm 0.03$	$1.22 \pm 0.18$	263.558	1.711	60
	n=2	$-1.50 \pm 0.00$	$1.00 \pm 0.00$	0.011	0.011	204
	n=3	helt insignifikanta		0.852	0.100	$3.2 \cdot 10^6$
$\lambda=0.1 <$	n=1	$-0.88 \pm 0.03$	$1.19 \pm 0.18$	248.447	1.661	60
	n=2	$-1.50 \pm 0.01$	$0.99 \pm 0.01$	0.987	0.106	205
	n=3	$0.69 \pm 0.01$	$0.49 \pm 0.02$	0.983	0.107	$3.6 \cdot 10^4$
	n=4	$-1.52 \pm 0.11$	$0.99 \pm 0.01$	0.983	0.107	$3.6 \cdot 10^4$
		$0.73 \pm 0.16$	$0.47 \pm 0.11$			
		$-0.02 \pm 0.08$	$-0.02 \pm 0.06$			
				1.303	0.125	$7.1 \cdot 10^4$

	$a_i \pm \sigma(a_i)$	$b_i \pm \sigma(b_i)$	Q	$\lambda$	M	
$\lambda=0.5$	n=1	-0.88 ± 0.03	1.10 ± 0.17	227.848	1.591	63
	n=2	-1.48 ± 0.04	0.96 ± 0.06	24.558	0.528	206
		0.67 ± 0.03	0.48 ± 0.07			
	n=3	-1.54 ± 0.11	0.96 ± 0.06	24.451	0.533	1518
		0.76 ± 0.16	0.42 ± 0.12			
		-0.04 ± 0.08	-0.04 ± 0.09			
$\lambda=1.0$	n=1	-0.88 ± 0.03	1.00 ± 0.20	308.131	1.840	75
	n=2	-1.47 ± 0.06	0.93 ± 0.12	99.863	1.059	212
		0.66 ± 0.06	0.46 ± 0.14			
	n=3	-1.55 ± 0.11	0.93 ± 0.13	98.698	1.065	476
		0.82 ± 0.17	0.37 ± 0.16			
		-0.09 ± 0.09	-0.02 ± 0.15			
$\lambda=5.0$	n=1	-0.86 ± 0.05	0.20 ± 0.83	5131.905	7.551	520
	n=2	-1.48 ± 0.07	0.98 ± 0.61	2462.220	5.290	1174
		0.74 ± 0.08	0.41 ± 0.61			
	n=3	-1.55 ± 0.11	0.97 ± 0.64	2440.245	5.327	2031
		0.87 ± 0.18	0.24 ± 0.66			
		-0.09 ± 0.11	0.13 ± 0.64			

Kommentar:

$\lambda = 0.0$  Exakta koeff. som väntat för n=2. Det stora könditions-  
talet för n=3 tyder på att detta ordningstal är för stort.  
Kolonnevktorerna i X-matrisen blir proportionella för n > 2.

$\lambda = 0.01$  n=3 ger fortfarande ett mycket illa konditionerat system,  
vilket i sin tur orsakar en höjning av förlustfktn. (0.011 → 0.852)  
Ett ordningstest är alltså ej möjlig.

$\lambda = 0.1$  n=3 ger ett något bättre konditionerat system och förlust-  
funktionen sjunker som sig bör (0.987 → 0.983).  
n=4 ger tyvärr åter en ökande förlustfunktion.

$$F_{0.05}(2, \infty) = 3.00$$

$$F_7 = 11000$$

$$F_2 = 0.18 < 3.00 \implies \text{Systemet är ett 2:a ordn.syst på 5\%-nivån.}$$

$$\underline{\lambda = 0.5} \begin{cases} F = 367 \\ F = 0.19 < 3.00 \end{cases} \quad \text{Ett 2:a ordn.syst. på 5\%-nivån.}$$

$$\underline{\lambda = 1.0} \begin{cases} F = 92 \\ F = 0.51 < 3.00 \end{cases} \quad \text{Ett 2:a ordn.syst. på 5\%-nivån.}$$

$$\underline{\lambda = 5.0} \begin{cases} F = 47.7 \\ F = 0.40 < 3.00 \end{cases} \quad \text{Ett 2:a ordn.syst. på 5\%-nivån.}$$

För  $\lambda = 0.5$ ,  $1.0$ , och  $5.0$  blir X-matrisens kolonnvektorer ej längre proportionella då systemet identifieras för  $n > 2$ , detta beroende på de relativt stora feltermerna. Förhållandet återspeglas i välkonditionerade matriser med måttliga konditionstal. Som sig bör sjunker förlustfunktionens värde för varje ökning av systemordningen.

Ökande  $\lambda$ -värden ger som väntat sämre noggrannhet i koefficienterna. Observera särskilt att denna tendens är mest utpräglad för b-koeff. När feltermerna helt dominerar över insignalerna förloras all signifikans. För  $\lambda = 5.0$  blir tex.  $b_2$  signifikant 0.

Exempel 3.

Genererande funktion:  $y(t)=3.6y(t-1)-5.9y(t-2)+5.6y(t-3)-3.2y(t-4)+$   
 $+y(t-5)-0.1y(t-6)+1.5u(t-1)+u(t-2)-2.0u(t-3)+$   
 $+0.5u(t-4)-0.2u(t-5)+0.1u(t-6)+e(t).$

$t=1,2,\dots,200.$

Insigalener  $u(t)$ : Stegfunktionerna  $\pm 1$ .  $Mv.=0$ .

Feltermer  $e(t)$ : Slumptal  $\in N(0,1)$ .

Som framgår av diagram 3. har de genererade värdena korrigerats så att medelvärdet av utsignalen blir=0.

Verkliga koeff:  $a_1=-3.6$   $b_1=1.5$   
 $a_2=5.9$   $b_2=1.0$   
 $a_3=-5.6$   $b_3=-2.0$   
 $a_4=3.2$   $b_4=0.5$   
 $a_5=-1.0$   $b_5=-0.2$   
 $a_6=0.1$   $b_6=0,1$

Skattat som ett 6:e ordningens system erhålles följande koeff.

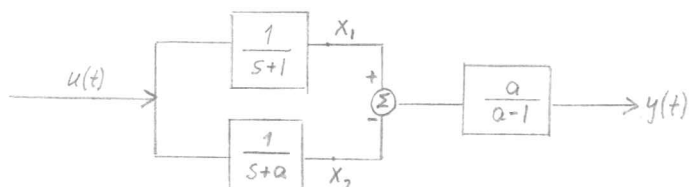
$a_1=-3.495 \pm 0.059$   $b_1= 1.742 \pm 0.095$   
 $a_2= 5.568 \pm 0.206$   $b_2= 0.985 \pm 0.150$   
 $a_3=-5.089 \pm 0.333$   $b_3=-1.804 \pm 0.148$   
 $a_4= 2.719 \pm 0.310$   $b_4= 0.483 \pm 0.175$   
 $a_5=-0.721 \pm 0.168$   $b_5= 0.015 \pm 0.153$   
 $a_6= 0.019 \pm 0.043$   $b_6=-0.309 \pm 0.128$

$n=7$  ger ett synnerligen illa konditionerat system ( $\mu=3 \cdot 10^6$ ) och förlustfunktionen ökar, varför någon signifikantest av denna ej är möjlig.

Exempel 4.

Betrakta följande blockschema: 

Men  $\frac{a}{(s+1)(s+a)} = \frac{a}{a-1} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+a} \right]$ , varför blockschemat göres om enligt:



Härur erhålles sambanden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -ax_2 + u & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{a-1}(x_1 - x_2) & (3) \end{cases}$$

(1) och (2) har lösningarna:

$$\begin{cases} x_1(t+T) = e^{-T} \cdot x_1(t) + (1-e^{-T})u(t) & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t+T) = e^{-aT} \cdot x_2(t) + \frac{1}{a}(1-e^{-aT})u(t) & (5) \end{cases}$$

där T betecknar samplingsintervallet.

(4) och (5) skrives m.hj.av skiftoperatörn z om som:

$$\begin{cases} (z-e^{-T})x_1(t) = (1-e^{-T})u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(z-e^{-aT})x_2(t) = (1-e^{-aT})u(t) \end{cases}$$

Lös ut  $x_1(t)$  och  $x_2(t)$ .

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \cdot u(t) & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = \frac{1-e^{-aT}}{a(z-e^{-aT})} \cdot u(t) & (7) \end{cases}$$

Sätt in (6) och (7) i (3)

$$y(t) = \frac{a}{a-1} \left[ \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} - \frac{1-e^{-aT}}{a(z-e^{-aT})} \right] \cdot u(t) \quad (8)$$

som kan skrivas som

$$\left[ z^2 - z(e^{-T} + e^{-aT}) + e^{-T(1+a)} \right] y(t) = \left[ \left( 1 - \frac{ae^{-T} - e^{-aT}}{a-1} \right) z + \left( e^{-T(1+a)} + \frac{e^{-T} - ae^{-aT}}{a-1} \right) \right] u(t)$$

Multiplieras denna ekv. med  $z$  erhålles systemekvationen

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) \quad \text{där}$$

$$\begin{cases} a_1 = -(e^{-T} + e^{-aT}) \\ a_2 = e^{-T(1+a)} \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 - \frac{a}{a-1} \cdot e^{-T} + \frac{1}{a-1} \cdot e^{-aT} \\ b_2 = e^{-T(1+a)} + \frac{1}{a-1} \cdot e^{-T} - \frac{a}{a-1} \cdot e^{-aT} \end{cases}$$

Väljes  $a=50$  och  $T=0.04$  får koefficienterna de numeriska värdena:

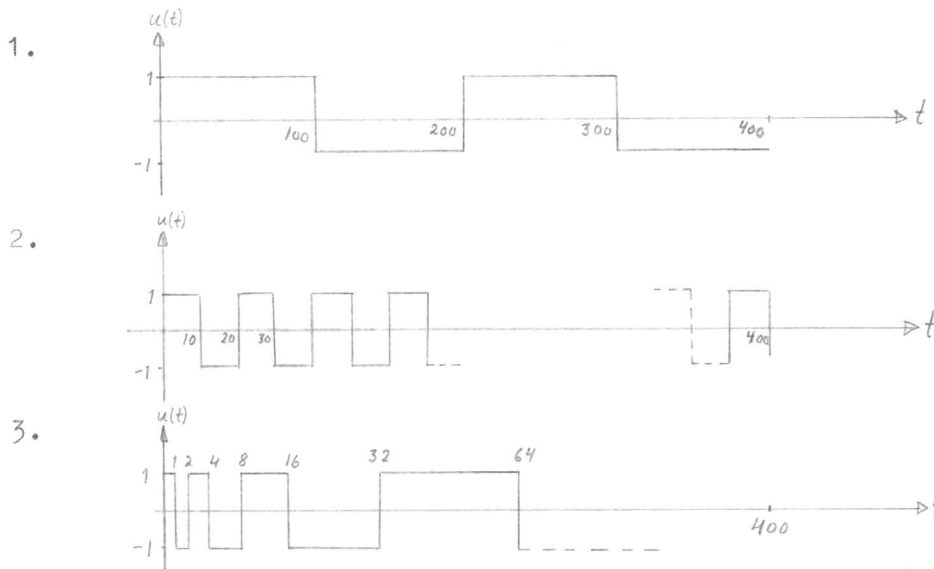
$$\begin{cases} a_1 = -1.096 \\ a_2 = 0.130 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 0.022 \\ b_2 = 0.012 \end{cases}$$

Genererande fktn:  $y(t) - 1.096y(t-1) + 0.130y(t-2) = 0.022u(t-1) + 0.012u(t-2) + e(t)$

$$t=1, 2, \dots, 400.$$

Feltermer  $e(t)$ : Slumptale  $\in N(0, 1)$ .

Insignaler  $u(t)$ : Stegfunktioner enligt pkt. 1, 2 och 3 nedan.



Utseendet av funktionen för de olika insignalerna ovan framgår av diagram 7, 8 och 9.

Resultatet av identifieringen visas i nedanstående tabeller.

Vid test av ordningstalet bör observeras att  $n_{max}=4$  i detta exempel.

(för att få plats med hela datamaterialet i KM). Alltså är  $N=400-4=396$ .

Insignal 1.

	$a_i \pm \sigma(a_i)$	$b_i \pm \sigma(b_i)$	$Q$	$\lambda$	
$\lambda=0.05$	n=1	$-0.957 \pm 0.006$	$0.042 \pm 0.004$	1.087	0.053
	n=2	$-1.095 \pm 0.050$	$0.019 \pm 0.015$	1.060	0.052
		$0.136 \pm 0.048$	$0.020 \pm 0.016$		
n=3			1.056	0.052	
$\lambda=0.1$	n=1	$-0.953 \pm 0.010$	$0.046 \pm 0.008$	4.331	0.105
	n=2	$-1.094 \pm 0.050$	$0.016 \pm 0.030$	4.228	0.104
		$0.142 \pm 0.049$	$0.029 \pm 0.031$		
n=3			4.209	0.104	

$$\lambda = 0.05 \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 5.12 \\ F_2 = 0.78 < 3.00 \implies \text{Syst. är av 2:a ordn. på 5\%-nivån.} \end{array} \right.$$

$$\lambda = 0.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 4.77 \\ F_2 = 0.88 < 3.00 \implies \text{Syst. är av 2:a ordn. på 5\%-nivån.} \end{array} \right.$$

Vid försök till förbättring av de dåliga b-koeff. ovan (i fallet  $\lambda=0.1$  är tex. för n=2 b-koefficienterna signifikant noll) användes mindre  $\lambda$ -värden vid identifieringen. Härvid uppstod betydande numeriska svårigheter.

Nedanstående tabell över konditionstalen för olika  $\lambda$ -värden ger en viss uppfattning om ökningen av dessa svårigheter med minskande  $\lambda$ -värden.

$\lambda$	$\mathcal{M}(n=1)$	$\mathcal{M}(n=2)$	$\mathcal{M}(n=3)$
0.001	9	437000	—
0.01	9	34000	120000
0.03	9	4000	13600
0.05	9	1470	4900
0.1	7	370	1230



Insignal 2.

	$a_i \pm \sigma(a_i)$	$b_i \pm \sigma(b_i)$	$Q$	$\lambda$	$M$	
$\lambda=0.01$	n=1	$-0.999 \pm 0.006$	$0.036 \pm 0.001$	0.078	0.014	133
	n=2	$-1.090 \pm 0.037$	$0.021 \pm 0.001$	0.042	0.010	20900
		$0.131 \pm 0.038$	$0.013 \pm 0.002$			
n=3			0.042	0.010	99000	
$\lambda=0.03$	n=1	$-0.980 \pm 0.011$	$0.036 \pm 0.002$	0.438	0.033	80
	n=2	$-1.089 \pm 0.047$	$0.019 \pm 0.003$	0.379	0.031	3670
		$0.140 \pm 0.047$	$0.016 \pm 0.003$			
n=3			0.379	0.031	13000	
$\lambda=0.1$	n=1	$-0.960 \pm 0.014$	$0.038 \pm 0.005$	4.413	0.106	15
	n=2	$-1.091 \pm 0.050$	$0.015 \pm 0.009$	4.220	0.104	362
		$0.144 \pm 0.050$	$0.023 \pm 0.009$			
n=3			4.213	0.104	1200	

$\lambda=0.01$   $\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 169 \\ F_2 = 0.16 < 3.00 \implies \text{Syst. är av 2:a ordn. på 5\%-nivån.} \end{array} \right.$

$\lambda=0.03$   $\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 30.5 \\ F_2 = 0.14 < 3.00 \implies \text{Syst. är av 2:a ordn. på 5\%-nivån.} \end{array} \right.$

$\lambda=0.1$   $\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 8.97 \\ F_2 = 0.32 < 3.00 \implies \text{Syst. är av 2:a ordn. på 5\%-nivån.} \end{array} \right.$

Insignal 3.

	$a_i \pm \sigma(a_i)$	$b_i \pm \sigma(b_i)$	$Q$	$\lambda$	
$\lambda=0.1$	n=1	$-0.963 \pm 0.008$	$0.045 \pm 0.007$	4.317	0.105
	n=2	$-1.091 \pm 0.050$	$0.031 \pm 0.020$	4.231	0.104
		$0.129 \pm 0.049$	$0.013 \pm 0.021$		
n=3			4.225	0.104	

$$\lambda = 0.1 \begin{cases} F_1 = 3.98 \\ F_2 = 0.28 < 3.00 \implies \text{Syst. är av 2:a ordn. på 5\%-nivån.} \end{cases}$$

För mindre  $\lambda$  -värden uppstod numeriska besvärligheter (Q ökar med n) p.g. av dålig konditionering. Se tabell över konditionstalen nedan!

$\lambda$	$M(n=1)$	$M(n=2)$	$M(n=3)$
0.001	8	189000	—
0.01	8	31600	115000
0.03	7	4000	13600
0.05	6	1480	4900
0.1	5	370	1240

Kommentar:

Systemet genererat m.hj. av insignal 2 uppför sig betydligt bättre än de två övriga, vad beträffar noggrannheten i koefficienterna.

Med  $\lambda = 0.1$  blir tex. spridningen i b-koefficienterna 2 à 3 ggr. större med insignal 1, och 3.

Diagram 7, 8 och 9 visar dessutom att svinget i de utsignaler som genererats från de senare insignalerna är större än utsignalen som genererats från insignal 2.

5.2. Data har genererats från modellen  $A(z^{-1})y(t)=B(z^{-1})u(t) + \lambda C(z^{-1})e(t)$ .

Exempel 5.

Genererande fktn:  $y(t)=1.5y(t-1)-0.7y(t-2)+u(t-1)+0.5u(t-2)+$   
 $+e(t)-e(t-1)+0.2e(t-2)$   
 $t=1,2,\dots,100.$

Insignaler  $u(t)$ : Stegfunktionerna  $\pm 1$ .  $Mv.=0$ .

Feltermer  $e(t)$ : Slumptal  $\in N(0,1)$ .

Funktionens utseende framgår av diagram 1.

Algoritmen i detta arbete skattar ej C-polynomets koeff. I ref(8) ges dock en identifieringsalgoritm där detta sker. Dess 1:a beräkningssteg är en minsta-kvadratskattning och bör alltså ge samma resultat som detta arbetes identifieringsalgoritm.

För att få jämförbart resultat har dataserien ovan använts, men de 10 första dataparen har getts värdet noll. Orsaken härtill är, att hela antalet datapar ej användes vid beräkningarna, förrän systemet identifieras som den maximalt tillåtna ordningen (se kap.3). Eftersom skattningarna göres på helt olika sätt, är det överensstämmande resultatet nedan en god indikation på programmets riktighet.

Verkliga koeff.     $a = -1.50$      $b = 1.00$      $c = -1.00$   
                   $a = +0.70$      $b = 0.50$      $c = 0.20$

<u>Skattade koeff.</u>	<u>enl. detta arbete</u>	<u>enligt ref(8)</u>
<u>n=1</u>	$a_1 = -0.88$ $b_1 = 1.00$ $Q_1 = 348.755$	$a_1 = -0.877$ $b_1 = 1.004$ $Q_1 = 348.755$
<u>n=2</u>	$a_1 = -1.25$ $b_1 = 0.74$ $a_2 = 0.46$ $b_2 = 0.85$ $Q_2 = 160.368$	$a_1 = -1.246$ $b_1 = 0.739$ $a_2 = 0.459$ $b_2 = 0.854$ $Q_2 = 160.368$
<u>n=3</u>	$a_1 = -0.94$ $b_1 = 0.85$ $a_2 = -0.06$ $b_2 = 1.01$ $a_3 = 0.30$ $b_3 = 0.41$ $Q_3 = 131.401$	$a_1 = -0.939$ $b_1 = 0.849$ $a_2 = -0.059$ $b_2 = 1.008$ $a_3 = 0.302$ $b_3 = 0.407$ $Q_3 = 131.401$

Användes istället hela datamaterialet ovan erhålles:

	$a_i \pm \sigma(a_i)$	$b_i \pm \sigma(b_i)$	$Q$	$\lambda$	$n$
n=1	$-0.87 \pm 0.04$	$1.05 \pm 0.21$	359.002	1.997	59
n=2	$-1.25 \pm 0.07$	$0.83 \pm 0.16$	164.667	1.368	173
	$0.47 \pm 0.07$	$0.80 \pm 0.17$			
n=3	$-0.94 \pm 0.10$	$0.92 \pm 0.15$	134.262	1.249	330
	$-0.05 \pm 0.14$	$0.98 \pm 0.17$			
	$0.29 \pm 0.08$	$0.42 \pm 0.18$			
n=4	$-0.76 \pm 0.10$	$0.88 \pm 0.13$	109.536	1.142	561
	$0.03 \pm 0.13$	$1.25 \pm 0.17$			
	$-0.12 \pm 0.13$	$0.73 \pm 0.19$			
	$0.29 \pm 0.08$	$0.45 \pm 0.17$			
n=5			105.771	1.136	959

$$F_1 = 52$$

$$F_2 = 9.75$$

$$F_3 = 9.47$$

$$F_4 = 1.46 < 3.00 \implies \text{Ett syst.av 4:e ordn. på 5\%-nivån.}$$

Detta visar att en ytterligare analys utöver skattningen med m-k.metoden är nödvändig för bestämning av systemekvationen och dess verkliga ordningstal(=2).

Se kommentar till ex.7.

Exempel 6.

Genererande funktioner:

$$y(t) = +0.5y(t-1) + u(t-1) + e(t) + ce(t-1) \quad t=1,2,\dots,100.$$

$$y(t) = +0.9y(t-1) + u(t-1) + e(t) + ce(t-1) \quad t=1,2,\dots,100.$$

Insignaler  $u(t)$ : Stegfunktionerna  $\pm 1$ .  $Mv.=0$ .

Feltermer  $e(t)$ : Slumptal  $\in N(0,1)$ .

Funktionernas utseende för  $c=0.0$  och  $c=0.99$  visas i diagram 4. och 5.

Identifiering av ovanstående 1:a ordningssystem har gjorts för

några olika  $c$ -värden. Resultat i tabeller nedan.

Verkliga koeff.  $a = -0.5$   $b = 1.0$

c	$a \pm \sigma(a)$	$b \pm \sigma(b)$	$\lambda$	$Q_1$	$Q_2$	$F_1$
0.0	$-0.50 \pm 0.06$	$0.94 \pm 0.12$	1.053	100.958	100.312	0.28
0.2	$-0.55 \pm 0.06$	$0.91 \pm 0.12$	1.083	106.831	101.191	2.45
0.5	$-0.60 \pm 0.06$	$0.89 \pm 0.13$	1.191	129.171	108.510	8.40
0.7	$-0.62 \pm 0.06$	$0.87 \pm 0.14$	1.299	153.498	120.731	12.0
0.8	$-0.63 \pm 0.06$	$0.87 \pm 0.15$	1.362	168.718	130.049	13.1
0.9	$-0.63 \pm 0.06$	$0.86 \pm 0.16$	1.429	185.883	141.483	13.8
0.99	$-0.64 \pm 0.06$	$0.86 \pm 0.16$	1.494	203.079	153.750	14.1

Verkliga koeff.  $a = -0.9$   $b = 1.0$

c	$a \pm \sigma(a)$	$b \pm \sigma(b)$	$\lambda$	$Q_1$	$Q_2$	$F_1$
0.0	$-0.90 \pm 0.02$	$0.93 \pm 0.11$	1.053	100.898	100.258	0.28
0.2	$-0.91 \pm 0.02$	$0.93 \pm 0.12$	1.087	107.430	101.443	2.60
0.5	$-0.91 \pm 0.02$	$0.94 \pm 0.13$	1.206	132.407	110.262	8.90
0.7	$-0.92 \pm 0.02$	$0.94 \pm 0.14$	1.323	159.163	124.504	12.3
0.8	$-0.92 \pm 0.02$	$0.94 \pm 0.15$	1.390	175.723	135.087	13.2
0.9	$-0.92 \pm 0.02$	$0.94 \pm 0.16$	1.460	194.019	147.482	13.9
0.99	$-0.92 \pm 0.02$	$0.95 \pm 0.16$	1.528	212.357	160.866	14.1

Kommentar: Testresultaten ovan visar att systemen med  $c=0.0$  och  $c=0.2$  kan identifieras som 1:a ordningssystem på 5%-nivån.

Speciellt för  $a$ -värdet  $-0.5$  får vi skattningar med stor avvikelse från det riktiga värdet, beroende på att ingen hänsyn till  $c$ -koeff. tages. Om vi som insignaler och feltermen använder normalfördelade slumptal kan koeff.förväntningsvärden teoretiskt beräknas och jämföras med de uppskattade värdena. Se exempel 7.

Exempel 7.

Genererande funktion:  $y(t+1)+ay(t)=bu(t)+ce(t)+e(t+1)$  (1)

Insignaler  $u(t)$ : Slumptal  $\in N(0, \sigma_u)$ .

Feltermer  $e(t)$ : Slumptal  $\in N(0, \sigma_e)$ .

Beräkning av förväntningsvärdena för koeff. a och b.då systemet (1) identifieras med minsta-kvadratmetoden.

Multiplitera (1) med  $y(t)$  resp.  $u(t)$  och antag  $c=0$ .

$$y(t+1) \cdot y(t) + ay^2(t) = bu(t) \cdot y(t) + e(t+1) \cdot y(t) \quad (2)$$

$$y(t+1) \cdot u(t) + au(t) \cdot y(t) = bu^2(t) + e(t+1) \cdot u(t) \quad (3)$$

Tag matematiska förväntningsvärdet av ekvationernas båda led.

Med  $E[e(t+1)y(t)] = E[e(t+1)u(t)] = 0$  erhålles då

$$a \cdot E[y^2(t)] - b \cdot E[u(t)y(t)] = -E[y(t+1)y(t)] \quad (4)$$

$$-a \cdot E[u(t)y(t)] + b \cdot E[u^2(t)] = E[y(t+1)u(t)] \quad (5)$$

Skriv (1) i formen

$$y(t) = \frac{1+cz^{-1}}{1+az^{-1}}e(t) + \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}u(t) \quad (6)$$

Tillämpas nu vanlig transformteori erhålles:

$$\begin{aligned} E[y^2(t)] &= \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1+cz^{-1}}{1+az^{-1}} \cdot \frac{1+cz}{1+az} \cdot \frac{dz}{z} + \sigma_u^2 \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} \cdot \frac{bz}{1+az} \cdot \frac{dz}{z} = \\ &= \sigma_e^2 \cdot \frac{1+c^2-2ac}{1-a^2} + \sigma_u^2 \frac{b^2}{1-a^2} \end{aligned}$$

$$E[u(t)y(t)] = \sigma_u^2 \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} \cdot \frac{dz}{z} = \sigma_u^2 \left( \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \right) = 0.$$

$$E[u^2(t)] = \sigma_u^2$$

$$\begin{aligned} E[y(t+1)y(t)] &= \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1+cz^{-1}}{1+az^{-1}} \cdot \frac{1+cz}{1+az} \cdot z \cdot \frac{1}{z} dz + \sigma_u^2 \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} \cdot \frac{bz}{1+az} \cdot z \cdot \frac{1}{z} dz = \\ &= \sigma_e^2 \frac{(c-a)(1-ac)}{1-a^2} - \sigma_u^2 \frac{ab^2}{1-a^2} \end{aligned}$$

$$E[y(t+1)u(t)] = \sigma_u^2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} \cdot z \cdot \frac{dz}{z} = b \cdot \sigma_u^2$$

Insättes dessa värden i (4) och (5) erhålles förväntningsvärdena  $\hat{a}$  av a och  $\hat{b}$  av b:

$$\hat{a} = \frac{E[y(t+1)y(t)]}{E[y^2(t)]} = \frac{-\sigma_e^2(c-a)(1-ac) + ab \cdot \sigma_u^2}{\sigma_e^2(1+c^2 - 2ac) + b^2 \cdot \sigma_u^2} \quad (7)$$

$$\hat{b} = \frac{E[y(t+1)u(t)]}{E[u^2(t)]} = \frac{b \cdot \sigma_u^2}{\sigma_u^2} = b \quad (8)$$

En stationär process, dvs. en process vars statistiska egenskaper förblir konstanta i tiden följer oftast den s.k. ergodsatsen:

"Medelvärdet över samplefunktionerna är lika med ensemblemedelvärdet."

Så är tex.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)y(t+1) = E[y(t)y(t+1)]$

Med ett någorlunda stort datamaterial genererat från ekv.(1)

bör alltså skattningarna av koeff. a och b sammanfalla med de värden som beräknats i (7) och (8).

#### Numerisk bestämning av koeff. a och b.

1. Genererande funktion:  $y(t+1) = 0.5y(t) + u(t) + ce(t) + e(t+1)$

Insignaler  $u(t)$ : Slumptal  $N(0, \sigma_u)$ .

Feltermer  $e(t)$ : Slumptal  $N(0, \sigma_e)$ .

2. Genererande funktion:  $y(t+1) = 0.9y(t) + u(t) + ce(t) + e(t+1)$

Insignaler  $u(t)$ : Slumptal  $N(0, \sigma_u)$ .

Feltermer  $e(t)$ : Slumptal  $N(0, \sigma_e)$ .

Resultatet av identifieringen för några olika c-värden framgår av tabeller nedan. Teoretiska förväntningsvärdet av a betecknas  $\hat{a}$ .

1.

$\sigma_a = 1, \sigma_e = 1, t = 1, 2, \dots, 100.$

c	$\hat{a}$	$a \pm \sigma(a)$	$b \pm \sigma(b)$	$\lambda$	$Q_1$	$Q_2$	$F_1$
0.0	-0.500	-0.518 $\pm$ 0.065	1.177 $\pm$ 0.122	1.048	98.843	96.165	1.23
0.2	-0.567	-0.585 $\pm$ 0.063	1.193 $\pm$ 0.124	1.071	103.156	96.007	3.27
0.5	-0.637	-0.653 $\pm$ 0.061	1.222 $\pm$ 0.135	1.162	121.589	99.311	9.88
0.7	-0.665	-0.680 $\pm$ 0.062	1.240 $\pm$ 0.147	1.261	143.101	108.188	14.2
0.8	-0.674	-0.689 $\pm$ 0.062	1.250 $\pm$ 0.154	1.320	156.867	115.660	15.7
0.9	-0.682	-0.696 $\pm$ 0.063	1.258 $\pm$ 0.161	1.385	172.706	125.446	16.6
0.99	-0.687	-0.700 $\pm$ 0.063	1.266 $\pm$ 0.169	1.448	188.758	136.200	17.0

$\sigma_a = 1, \sigma_e = 5, t = 1, 2, \dots, 100.$

c	$\hat{a}$	$a \pm \sigma(a)$	$b \pm \sigma(b)$	$\lambda$	$Q_1$	$Q_2$	$F_1$
0.0	-0.500	-0.506 $\pm$ 0.091	0.185 $\pm$ 0.444	4.445	1778.49	1751.29	0.68
0.2	-0.617	-0.629 $\pm$ 0.082	0.135 $\pm$ 0.445	4.452	1783.75	1740.99	1.08
0.5	-0.708	-0.722 $\pm$ 0.074	0.072 $\pm$ 0.471	4.702	1989.94	1742.79	6.24
0.7	-0.736	-0.746 $\pm$ 0.071	0.046 $\pm$ 0.508	5.065	2308.87	1866.96	10.4
0.8	-0.742	-0.751 $\pm$ 0.070	0.038 $\pm$ 0.532	5.300	2538.39	1995.48	11.8
0.9	-0.746	-0.752 $\pm$ 0.070	0.033 $\pm$ 0.559	5.566	2788.70	2175.30	12.4
0.99	-0.747	-0.752 $\pm$ 0.070	0.030 $\pm$ 0.585	5.829	3058.15	2382.84	12.5

$\sigma_a = 1, \sigma_e = 1, t = 1, 2, \dots, 500.$

c	$\hat{a}$	$a \pm \sigma(a)$	$b \pm \sigma(b)$	$\lambda$	$Q_1$	$Q_2$	$F_1$
0.0	-0.500	-0.515 $\pm$ 0.027	1.023 $\pm$ 0.045	1.023	516.852	516.342	0.24
0.2	-0.567	-0.577 $\pm$ 0.026	1.019 $\pm$ 0.046	1.037	531.370	517.745	6.48
0.5	-0.637	-0.642 $\pm$ 0.025	1.014 $\pm$ 0.050	1.116	614.704	540.944	33.8
0.7	-0.665	-0.668 $\pm$ 0.025	1.011 $\pm$ 0.054	1.205	717.389	593.306	51.0
0.8	-0.674	-0.677 $\pm$ 0.025	1.010 $\pm$ 0.056	1.260	783.967	636.042	56.8
0.9	-0.682	-0.684 $\pm$ 0.026	1.009 $\pm$ 0.059	1.320	861.068	691.334	60.0
0.99	-0.687	-0.689 $\pm$ 0.026	1.008 $\pm$ 0.061	1.379	939.539	752.279	60.8



2.

$\sigma_u = 1, \sigma_e = 1, t = 1, 2, \dots, 100.$

c	$\hat{a}$	$a \pm \sigma(a)$	$b \pm \sigma(b)$	$\lambda$	$Q_1$	$Q_2$	$F_1$
0.0	-0.900	-0.886 $\pm$ 0.040	1.170 $\pm$ 0.122	1.048	98.780	96.796	0.90
0.2	-0.917	-0.907 $\pm$ 0.038	1.185 $\pm$ 0.126	1.081	105.259	97.308	3.60
0.5	-0.930	-0.924 $\pm$ 0.036	1.206 $\pm$ 0.140	1.199	129.456	103.659	10.9
0.7	-0.936	-0.929 $\pm$ 0.036	1.217 $\pm$ 0.154	1.315	155.581	115.579	15.2
0.8	-0.936	-0.930 $\pm$ 0.036	1.223 $\pm$ 0.161	1.381	171.692	124.623	16.6
0.9	-0.938	-0.931 $\pm$ 0.036	1.228 $\pm$ 0.170	1.453	189.880	135.948	17.5
0.99	-0.938	-0.932 $\pm$ 0.037	1.232 $\pm$ 0.177	1.520	207.976	148.087	17.8

$\sigma_u = 1, \sigma_e = 5, t = 1, 2, \dots, 100.$

c	$\hat{a}$	$a \pm \sigma(a)$	$b \pm \sigma(b)$	$\lambda$	$Q_1$	$Q_2$	$F_1$
0.0	-0.900	-0.867 $\pm$ 0.052	0.208 $\pm$ 0.442	4.436	1770.87	1739.29	0.80
0.2	-0.925	-0.901 $\pm$ 0.045	0.216 $\pm$ 0.450	4.512	1832.21	1725.81	2.72
0.5	-0.943	-0.922 $\pm$ 0.040	0.240 $\pm$ 0.491	4.926	2183.88	1749.14	10.9
0.7	-0.948	-0.926 $\pm$ 0.039	0.261 $\pm$ 0.536	5.377	2602.39	1905.21	16.1
0.8	-0.949	-0.927 $\pm$ 0.038	0.273 $\pm$ 0.563	5.645	2687.83	2047.55	17.6
0.9	-0.950	-0.927 $\pm$ 0.038	0.285 $\pm$ 0.592	5.936	3170.83	2237.45	18.4
0.99	-0.950	-0.927 $\pm$ 0.038	0.297 $\pm$ 0.619	6.214	3475.76	2450.07	18.5

Kommentar:

Då  $\sigma_u=1$  och  $\sigma_e=5$  är de skattade b-koeff. helt insignifikanta.

Orsaken härtill är feltermernas dominans över insignalerna.

När  $\sigma_u=\sigma_e=1$ , dvs. när storleksordningen av fel och insignaler är densamma, erhålles följdriktigt en bättre skattning.

Jämförelse av de teoretiskt beräknade a-värdena med de skattade visar god överensstämmelse. Som väntat framgår detta bäst då det större samplet om 500 datapar användes. Noggrannheten i koefficienterna är här stor (liten spridning).

Om systemets struktur ej varit känd vid behandlingen av data-materialet hade vi då ev. dragit slutsatsen att de erhållna koeff. var de riktiga (och noggranna).

Vi finner dock att de skattade a-värdena ligger på ett avstånd av 6-7 standardavvikelser från det riktiga värdet -0.5 och slutsatsen är alltså felaktig.

Ett sätt att bemästra denna svårighet skall antydast:

1. Sök genom signifikanstest systemets ordning (som ev. är för hög).
2. Sätt upp motsvarande systemekv.  $A(z^{-1})y(t)=B(z^{-1})u(t)+\lambda e(t)$ .
3. Sök en gemensam faktor hos A- och B-polynomen. Finns en sådan erhålles  $A'(z^{-1})A''(z^{-1})y(t)=B'(z^{-1})A''(z^{-1})u(t)+\lambda e(t)$ , där  $A''(z^{-1})$  kan divideras bort och vi får alltså  $A'(z^{-1})y(t)=B'(z^{-1})u(t)+\lambda e(t)/A''(z^{-1})$ .

Utvecklas den sista termen, erhålles systemets riktiga struktur.

En närmare analys ligger utanför detta examensarbets ram.

### 5.3. Praktiskt exempel med medicinsk anknytning.

#### Exempel 8.

Insignaler  $u(t)$ : Blodtrycket.

Utsignaler  $y(t)$ : Benvolymens variation med blodtrycket.

Volympulsen som funktion av blodtrycket visas i diagram 6.

Data har erhållits från ett ex.arbete i Elektrisk mätteknik av H.-G. Karlsson.

Med ett material om 258 datapar erhöles följande skattningar:

$$\begin{aligned} \underline{n=1} \quad a_1 &= -0.84 \pm 0.01 & b_1 &= 0.16 \pm 0.01 \\ Q &= 5581 \\ \lambda &= 4.744 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{n=2} \quad a_1 &= -1.75 \pm 0.03 & b_1 &= 0.12 \pm 0.03 \\ a_2 &= 0.79 \pm 0.03 & b_2 &= -0.09 \pm 0.03 \\ Q &= 962 \\ \lambda &= 1.978 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{n=3} \quad a_1 &= -1.45 \pm 0.06 & b_1 &= -0.06 \pm 0.04 \\ a_2 &= 0.23 \pm 0.10 & b_2 &= 0.33 \pm 0.07 \\ a_3 &= 0.26 \pm 0.05 & b_3 &= -0.25 \pm 0.04 \\ Q &= 754 \\ \lambda &= 1.758 \end{aligned}$$

Identifiering med högre  $n$ -värden ger illa konditionerade system, vilket gör att förlustfunktionen ökar. Signifikanstest är alltså icke möjlig. Dessutom är ju här systemmodellen okänd, varför en sådan test ej skulle ge något entydigt svar, när vi ville bestämma den verkliga systemekvationen.

Se dock kommentar till föregående exempel.

## 6. Referenser.

1. Åström, K.-J., Bohlin, T. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records.
2. Åström, K.-J., Bohlin, T. Wensmark, S. Automatic construction of linear stochastic dynamic models for stationary industrial processes with random disturbances using operating records.
3. Linnik. Method of least squares.
4. Fröberg, C-E. Lärobok i numerisk analys.
5. Ekman, T Större PM ang. SMIL-ALGOL.
6. Journal of ACM(59).
7. Nordisk tidskrift för informationsbehandling.  
Band 5 - Häfte nr 3 - 1965.
8. Andersson, E. Processidentifiering med datamaskin.  
(Examensarbete i regleringsteknik)

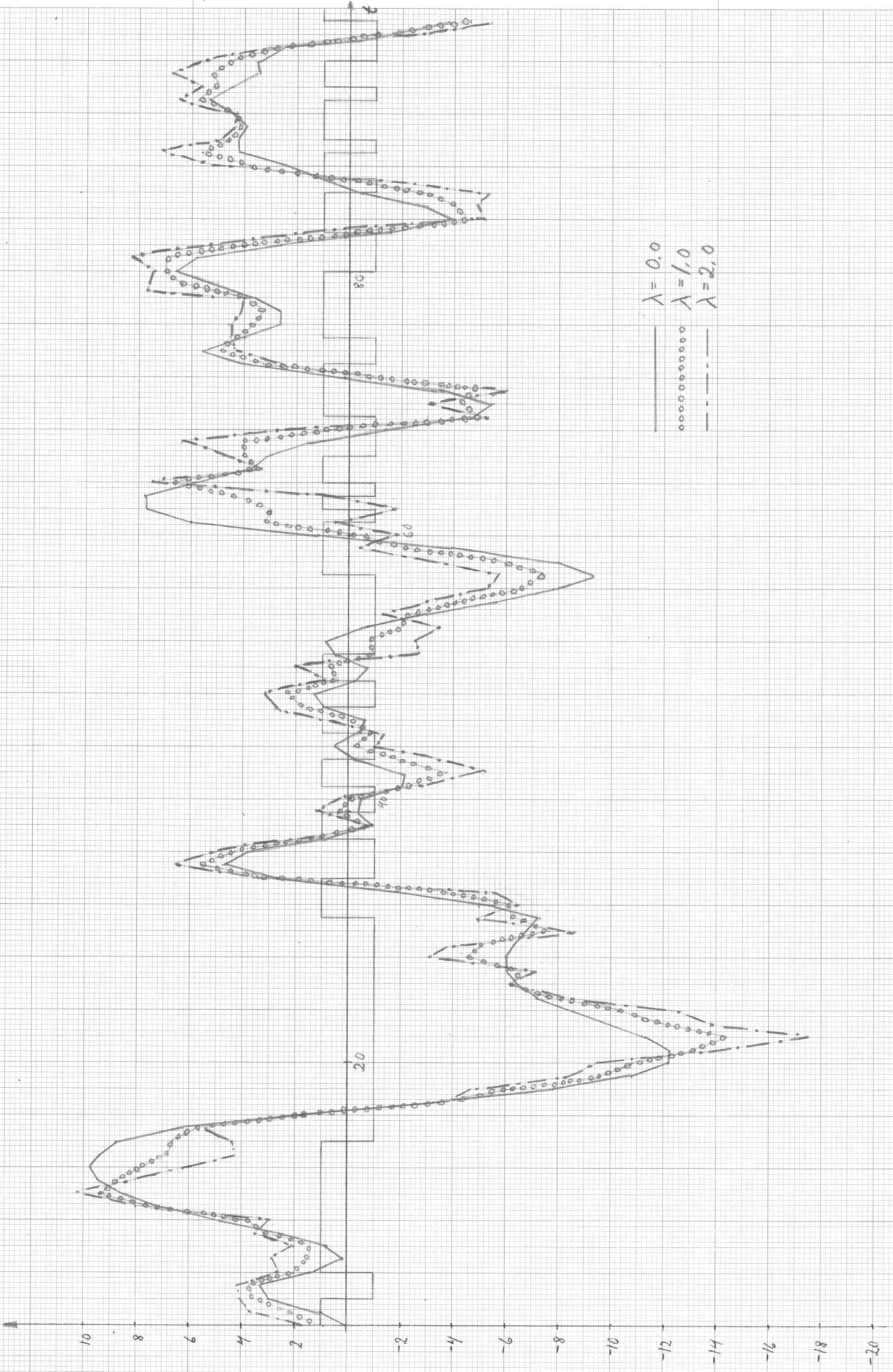
Exempel 5.

Diagram 1.

K-E. Eriksson.

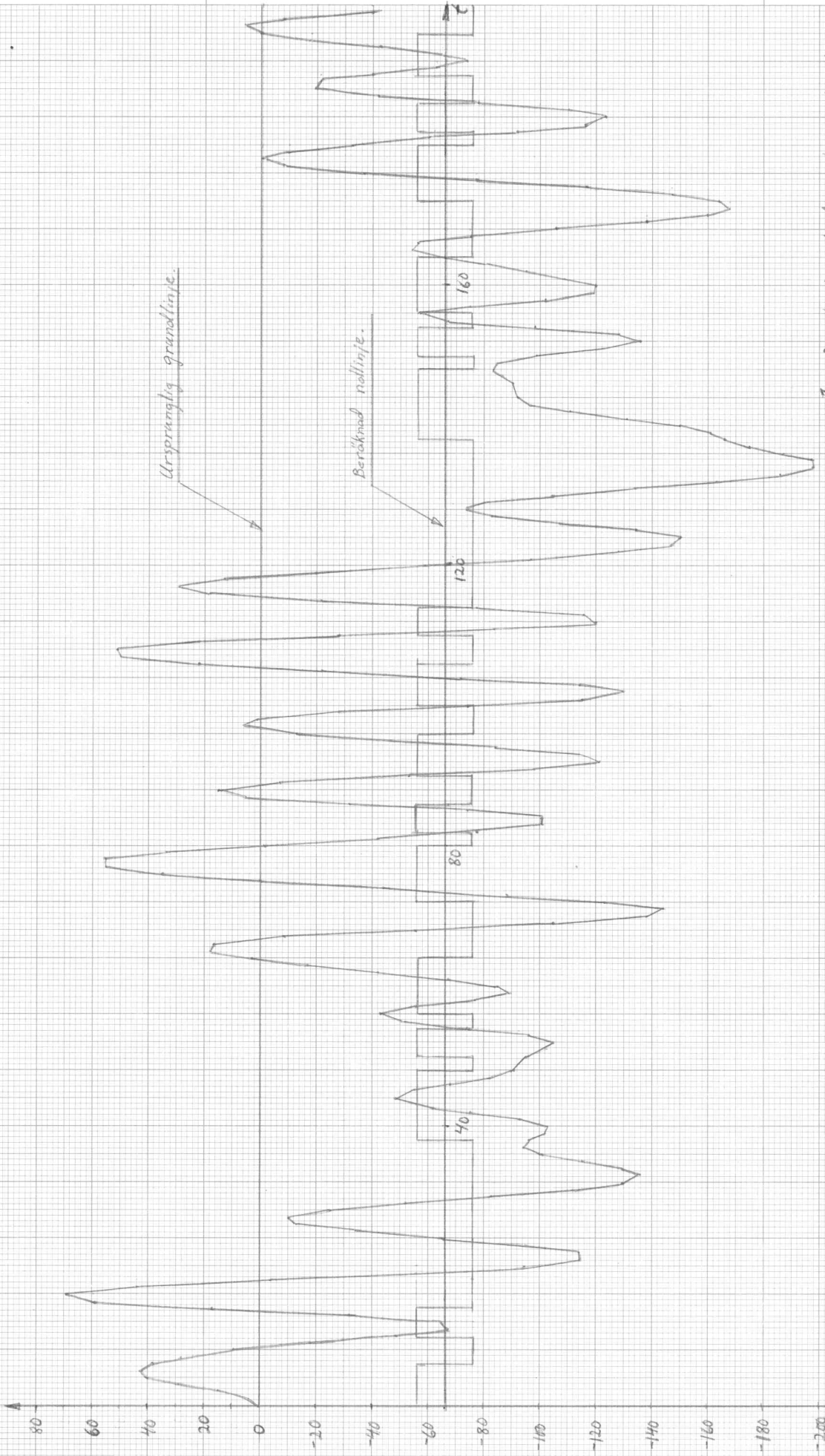
### Funktionsgenerering

$$y(t) = 1,5y(t-1) + 0,7y(t-2) + u(t-1) + 0,5u(t-2) + \lambda[e(t) - e(t-1) + 0,2e(t-2)]$$



Funktionsgenerering.  
6:e ordningens system. Ex. 3.

Diagram 3.  
K-E Eriksson.



Insignalen ritad i skala 10:1.

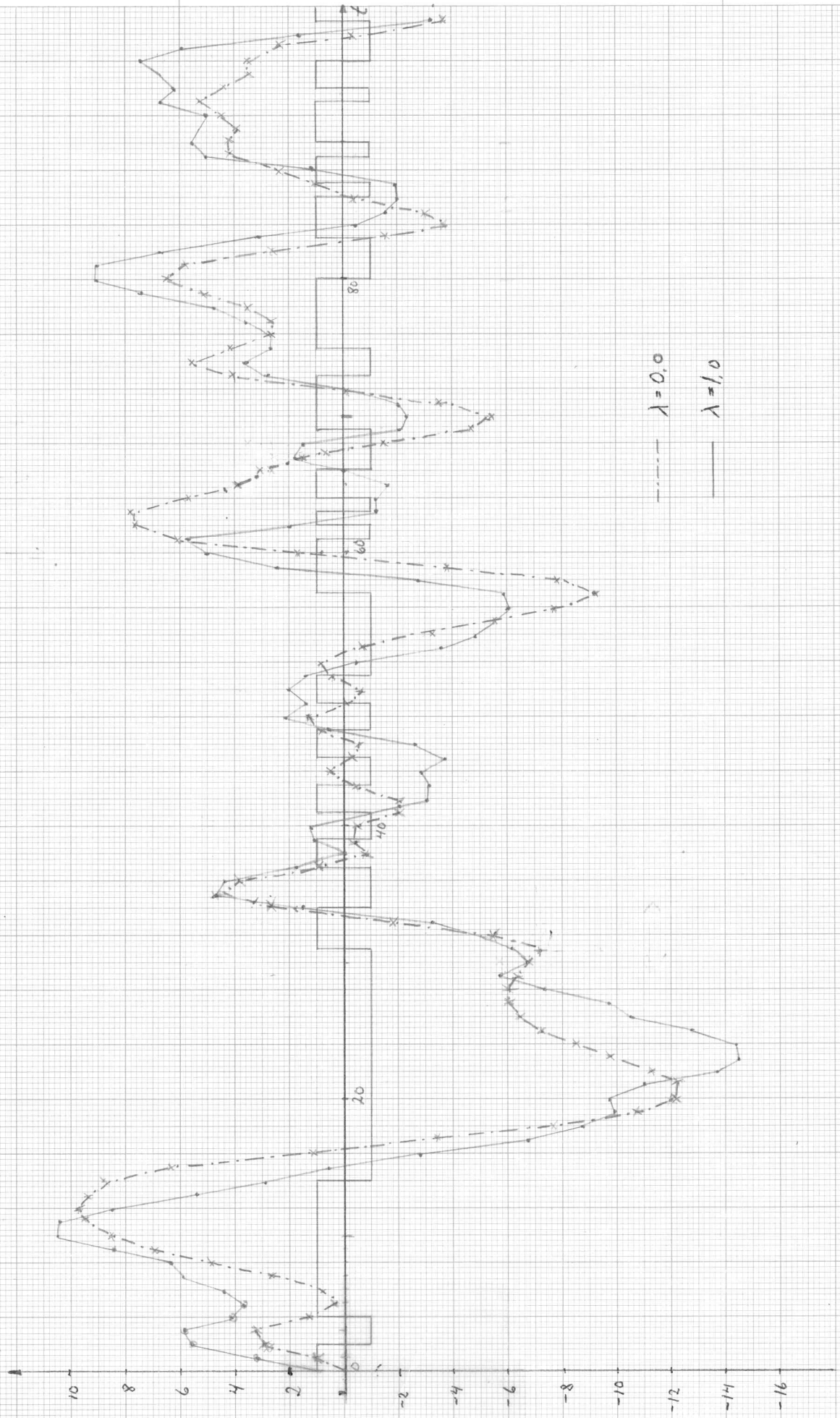
Funktionsgenerering

$$y(t) = 1,5y(t-1) - 0,7y(t-2) + u(t-1) + 0,5u(t-2) + Ae(t)$$

Exempd 2.

Diagram 2.

K-E. Eriksson



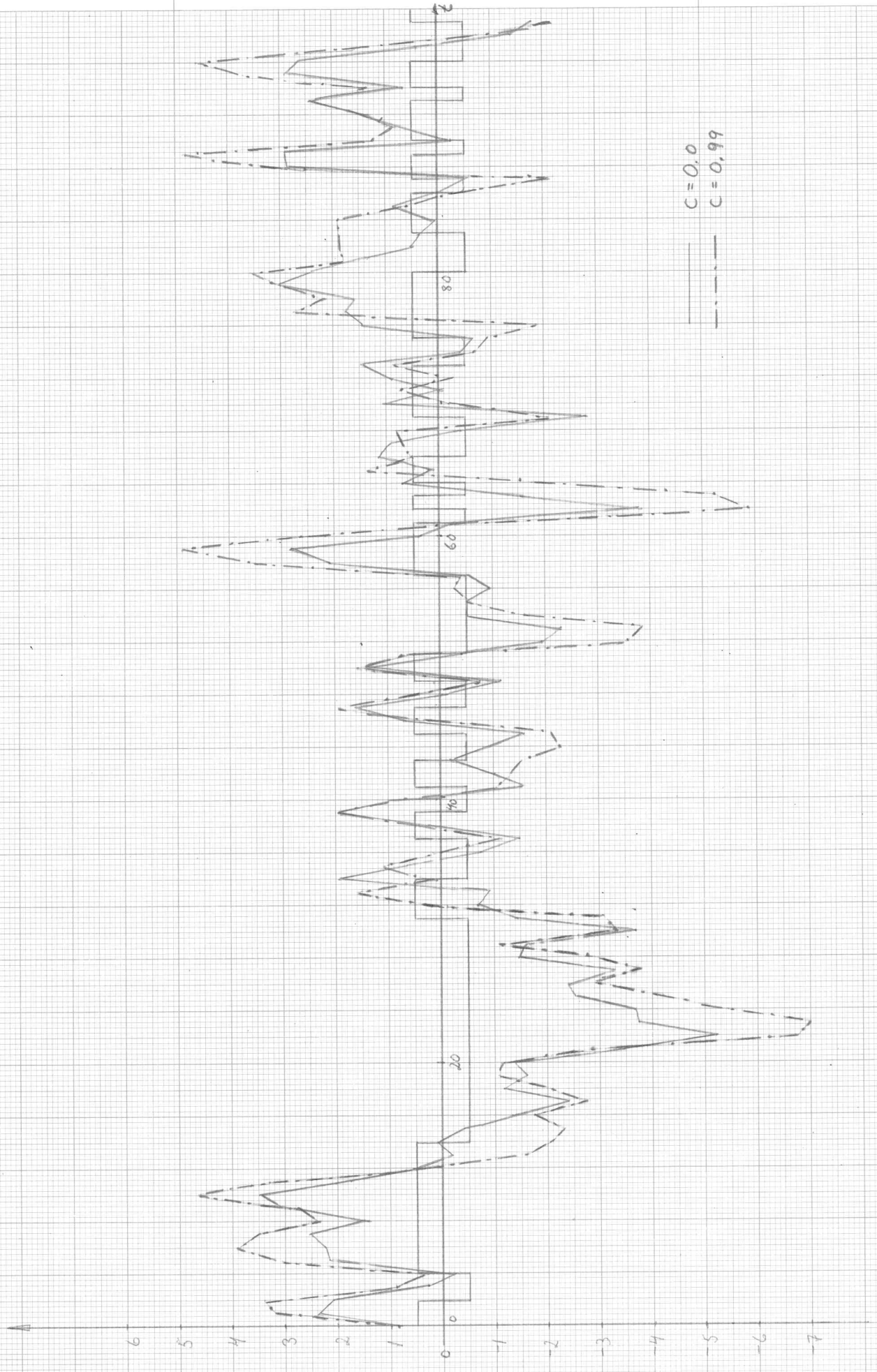
Exempel 6.

Diagram 4.

K-E. Eriksson

Funktionsgenerering

$$y(t) = -0,5 \cdot y(t-1) + u(t-1) + e(t) + c \cdot c(t-1)$$



—  $c = 0,0$   
- - -  $c = 0,99$

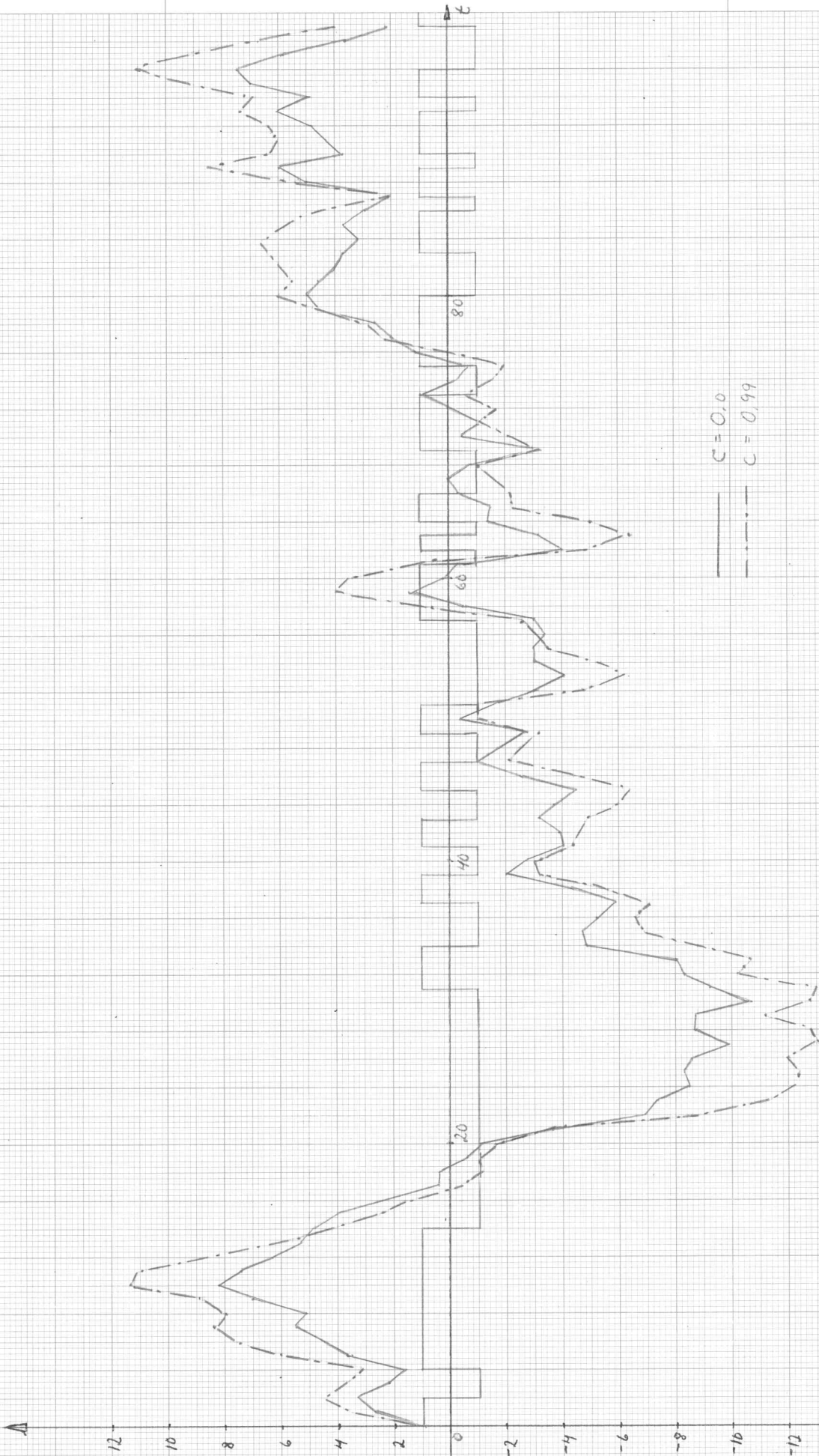


Exempel 6.

Diagram 5.

K.-L. Eriksson

Funktionsgenerering.  
 $y(t) = -0,9 \cdot y(t-1) + u(t-1) + e(t) + c \cdot e(t-1)$

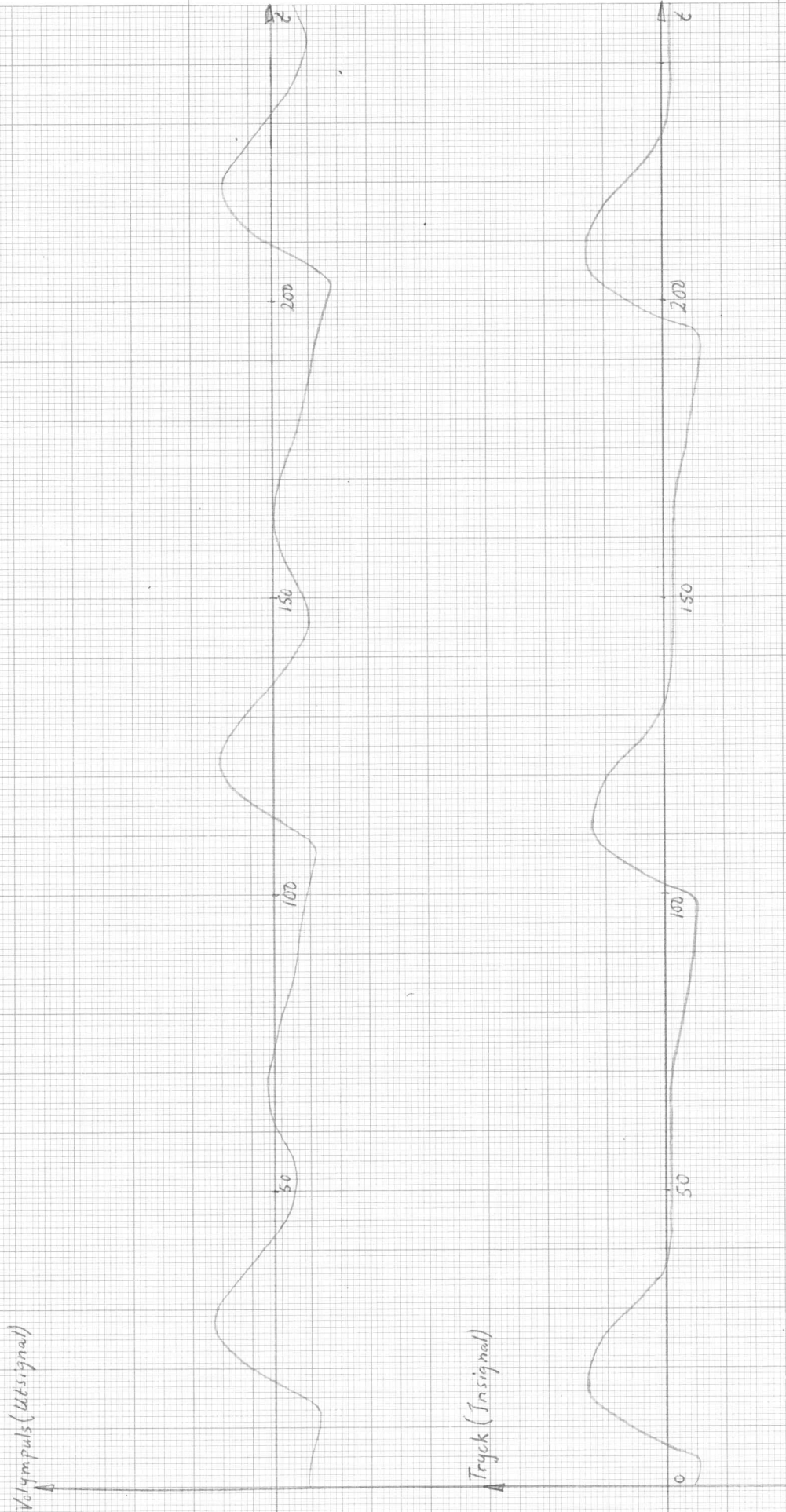


—  $c = 0,0$   
- - -  $c = 0,99$

Exempel 8.

Diagram 6.

K.-L. Eriksson

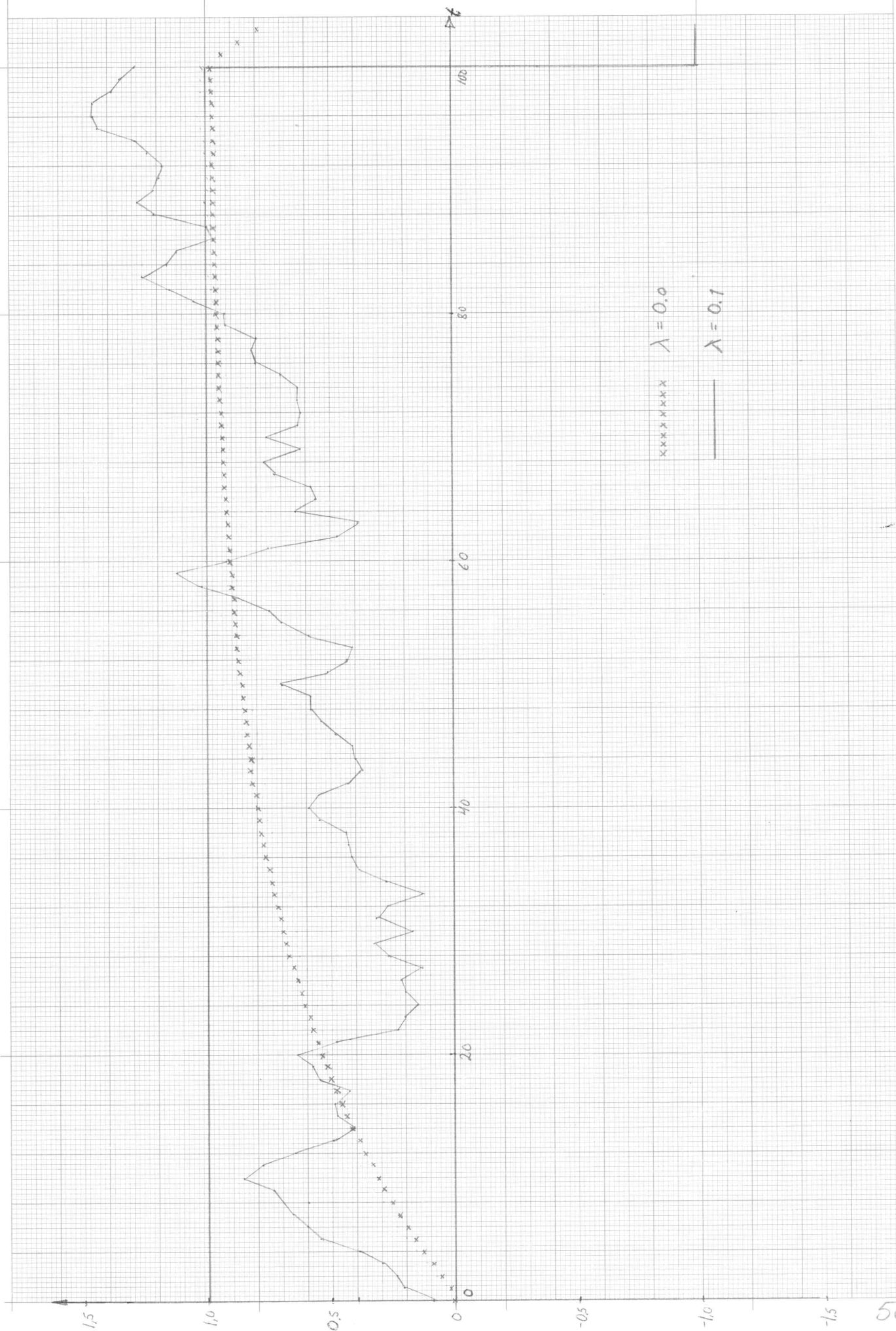


Insignal 1 enl. ex. 4

EX. 4.

Diagram 7a.

K.-E. Eriksson



xxxxxxx  $\lambda = 0.0$   
—  $\lambda = 0.1$

Diagram 7b.

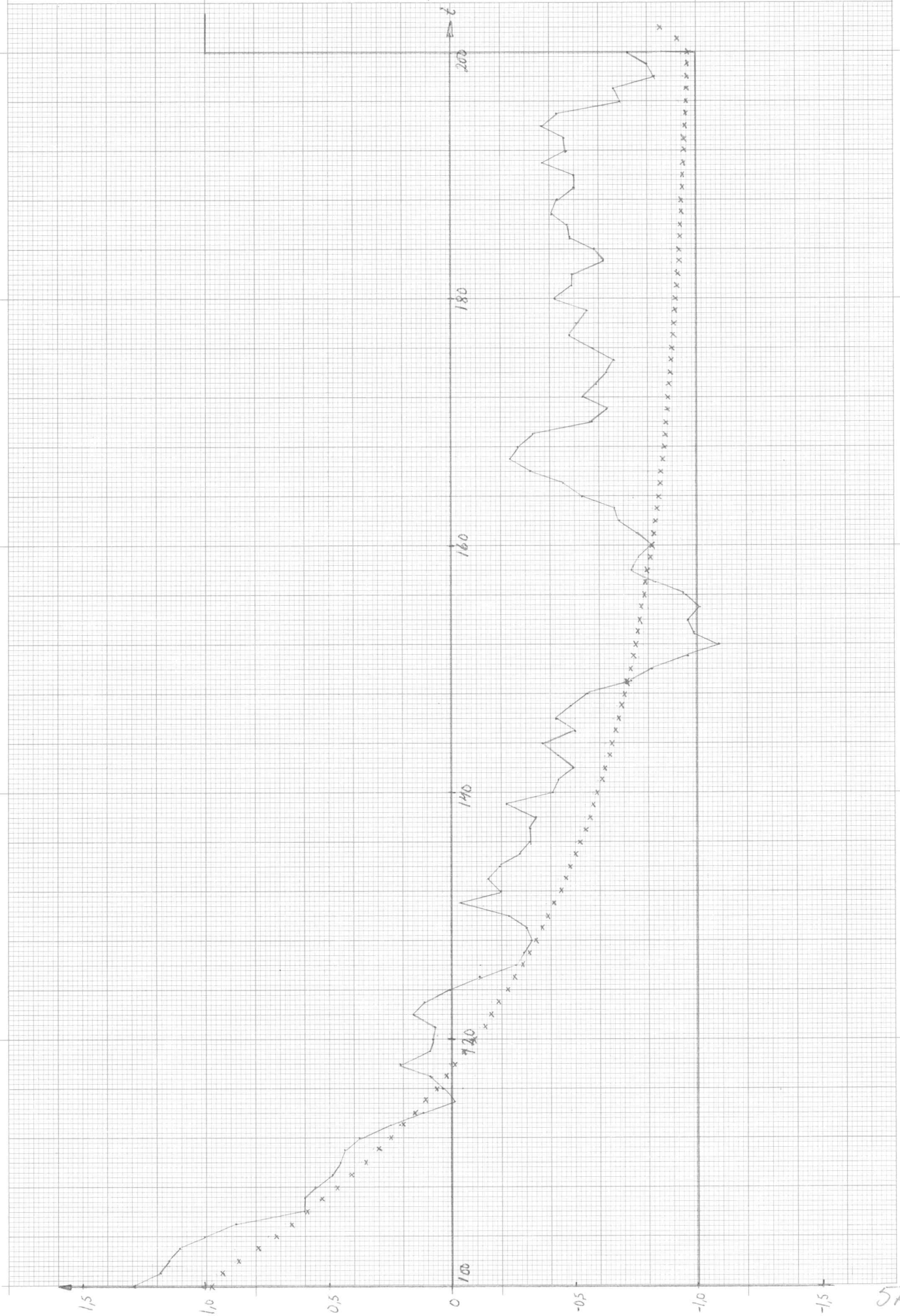


Diagram 7c

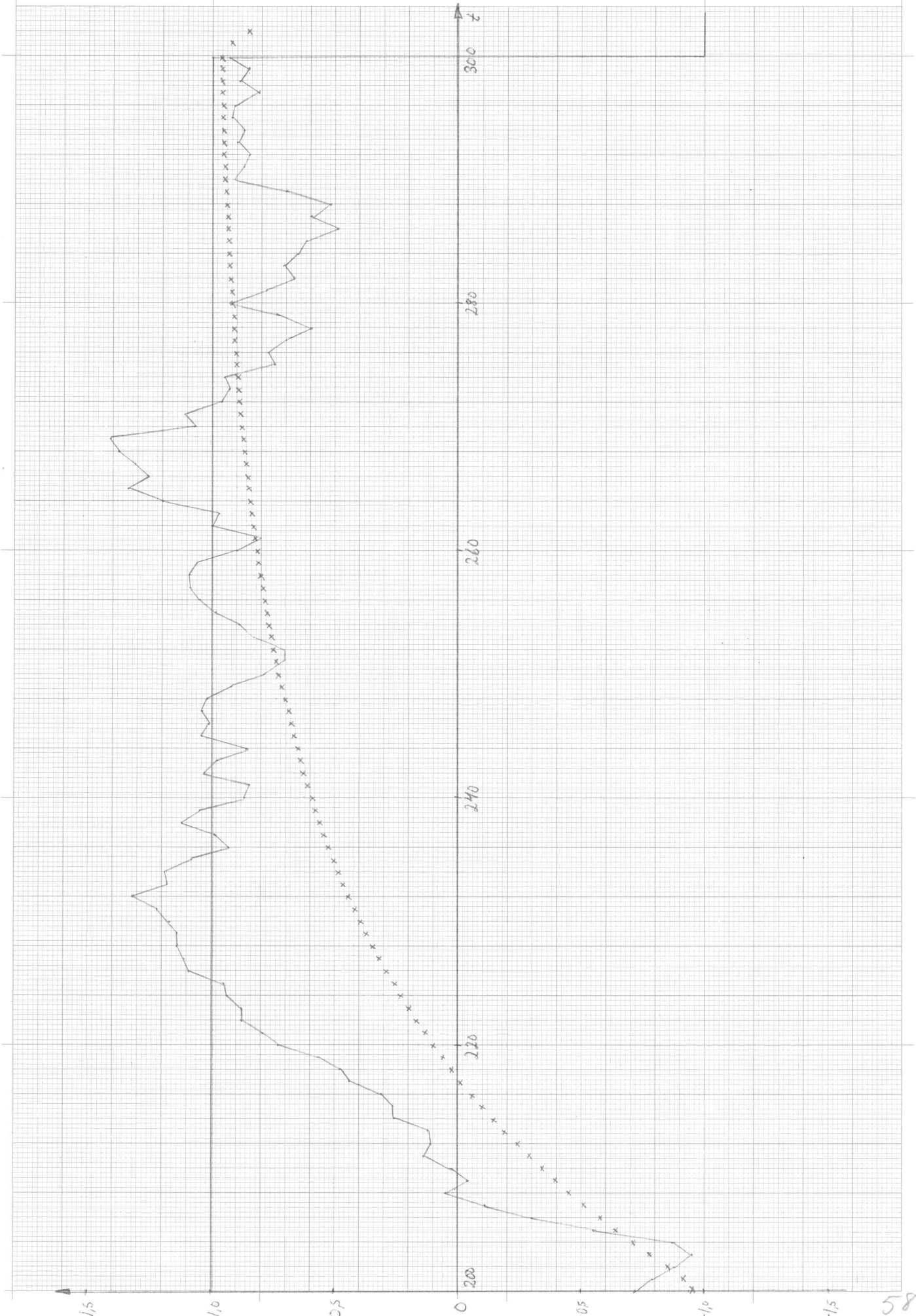
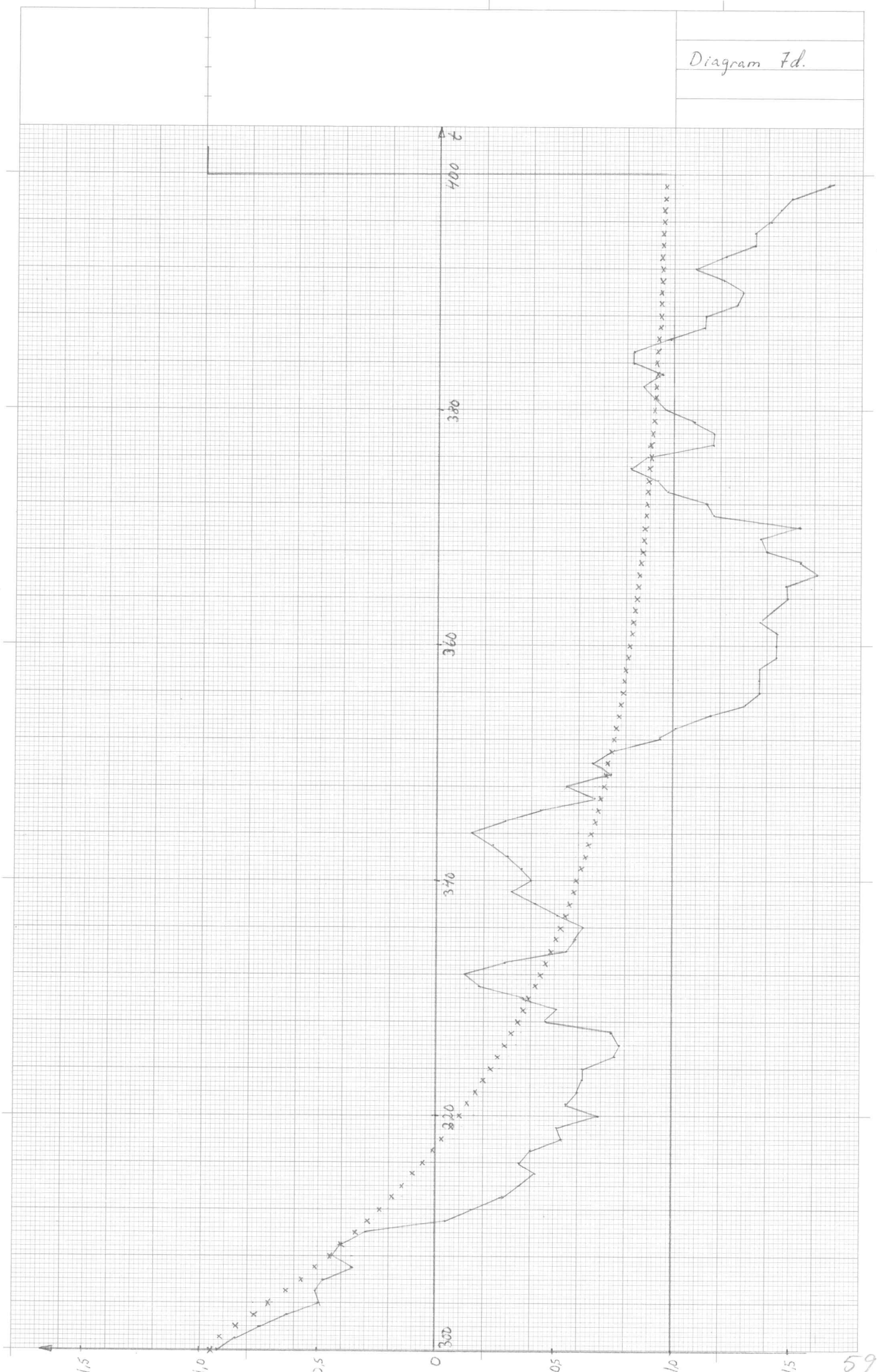


Diagram 7d.

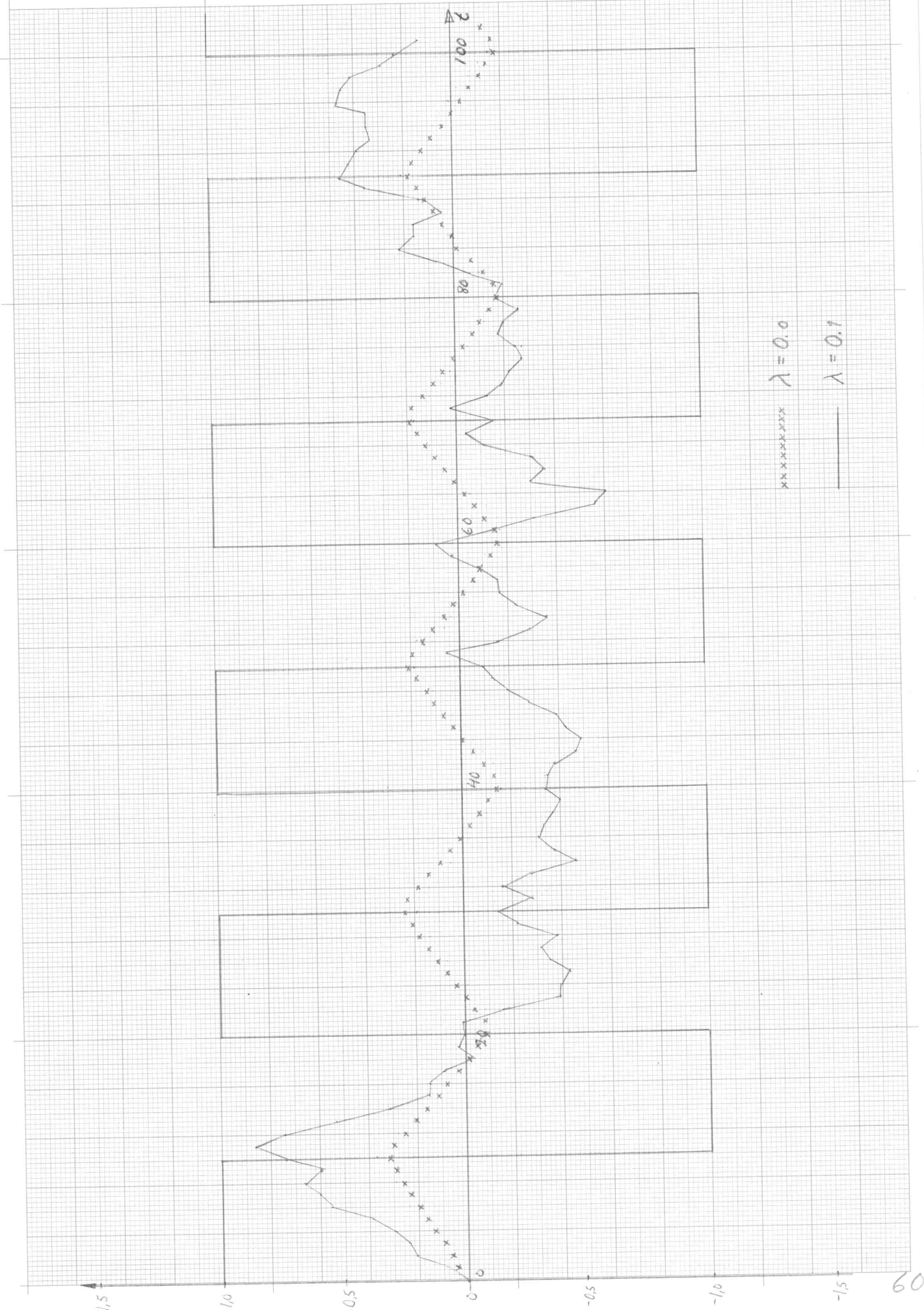


Insignal 2 ent. ex. 4.

Ex. 4

Diagram 8a.

K-E. Eriksson.



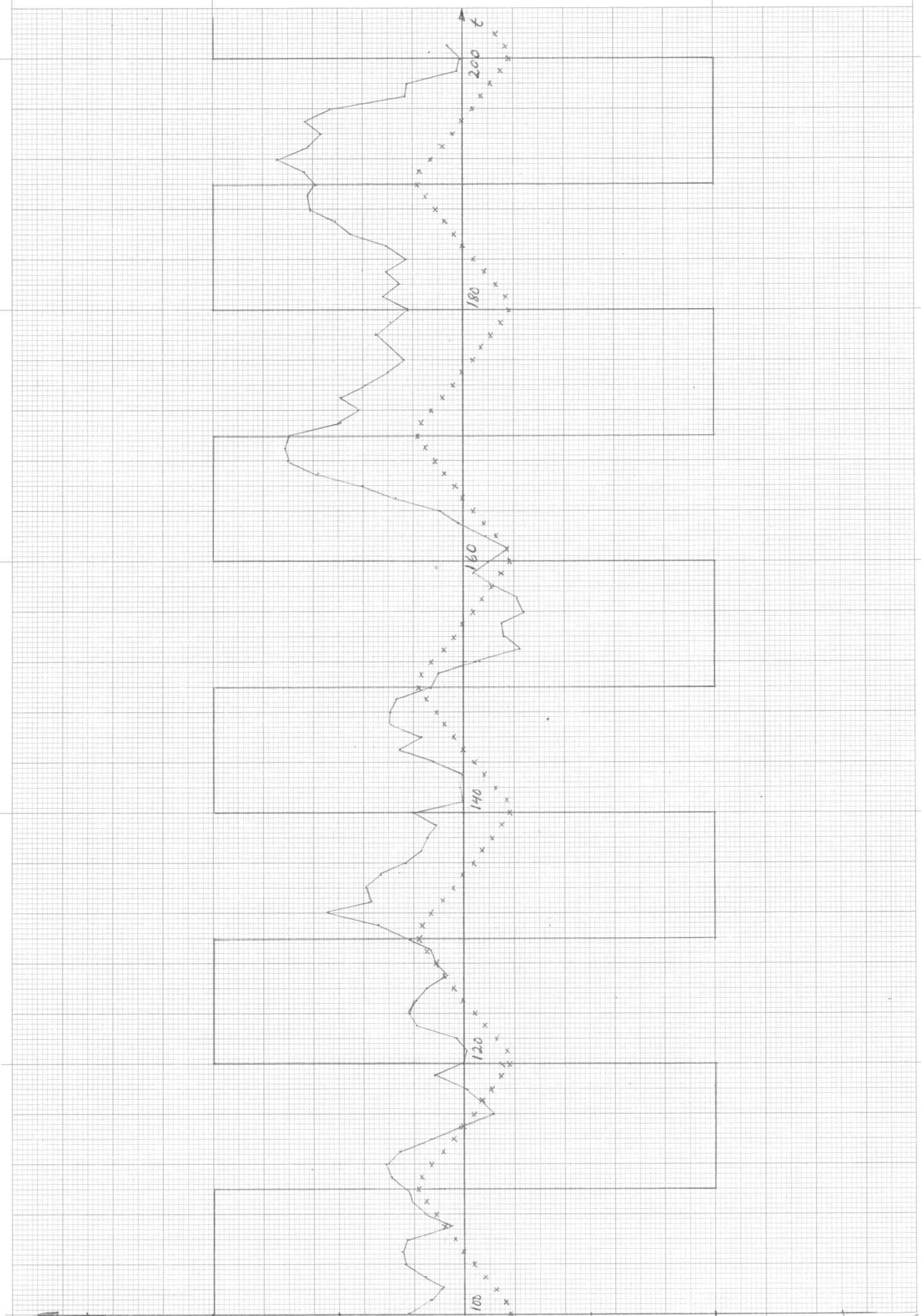




Diagram 8c.

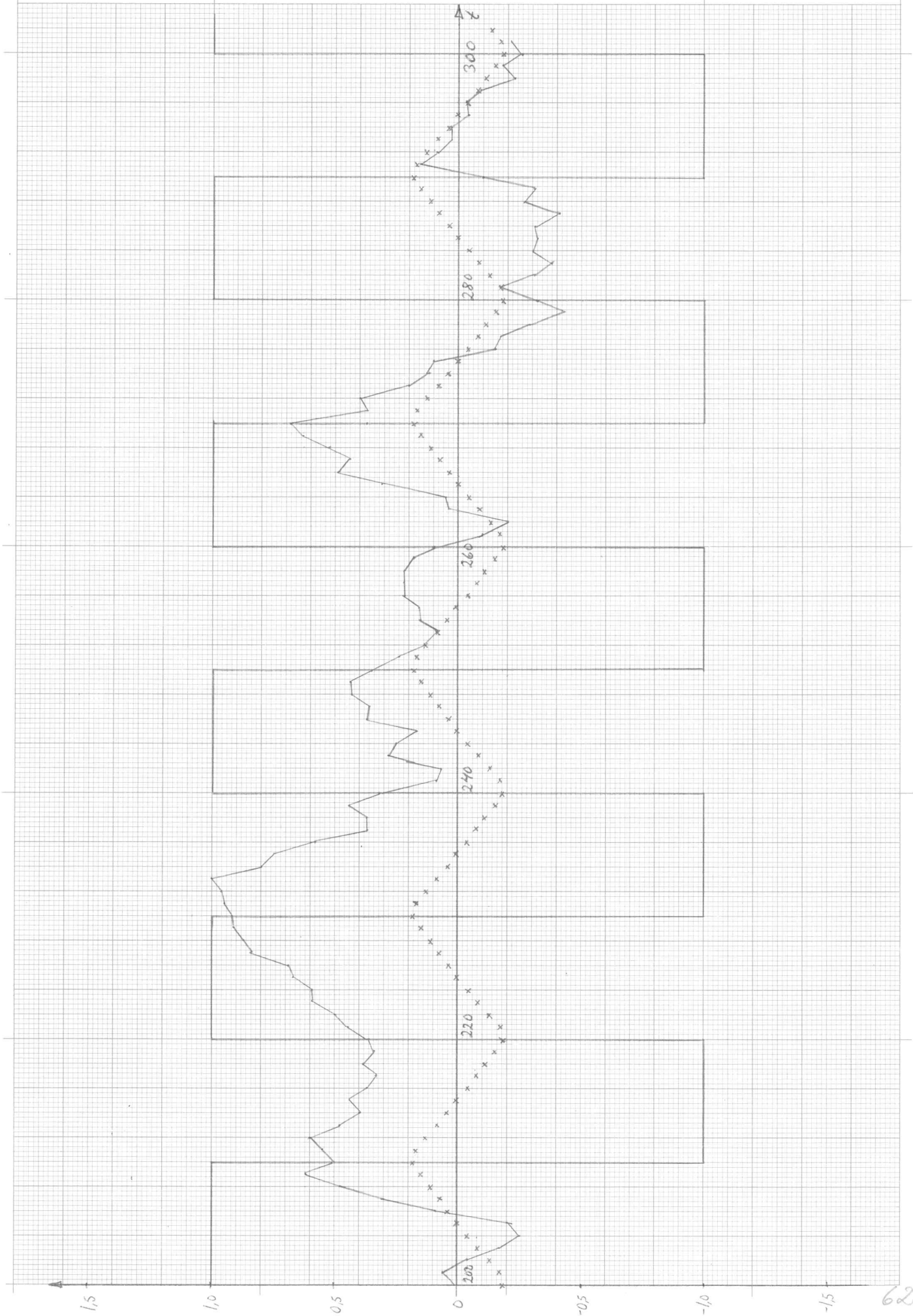
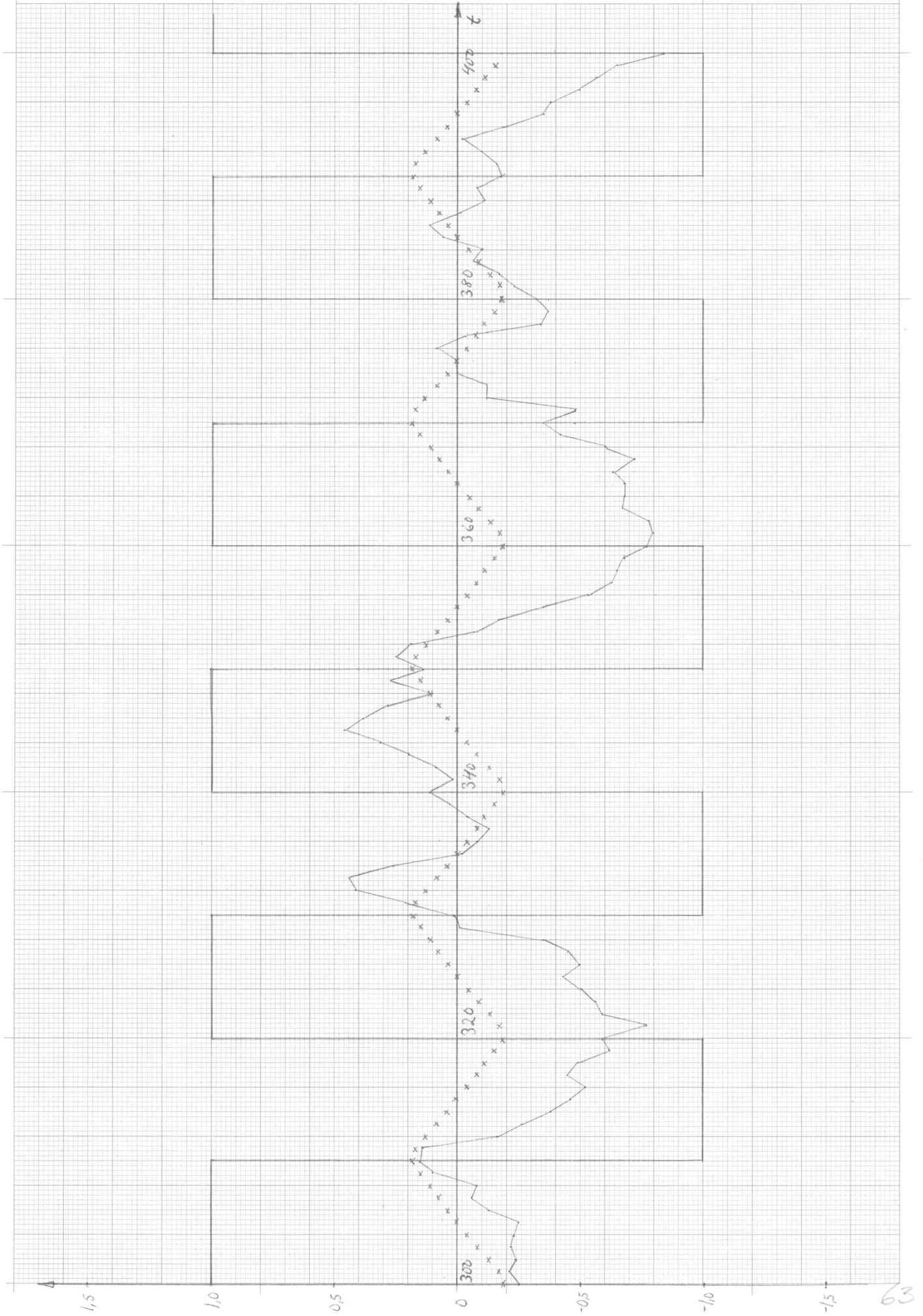


Diagram 8d.



Insignal 3 enl. ex. 4.

Ex. 4.

Diagram 9a.

K-E. Eriksson.

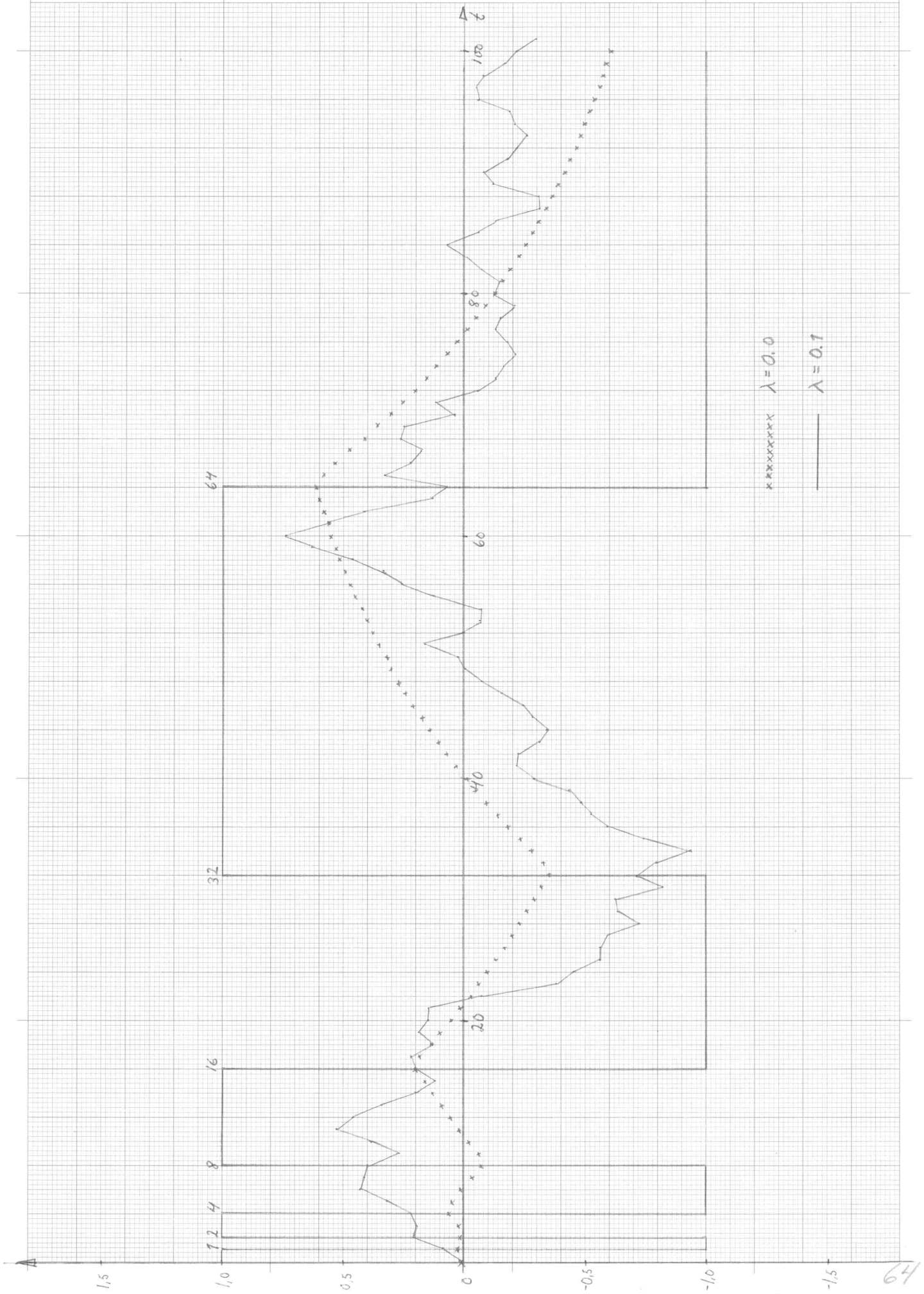
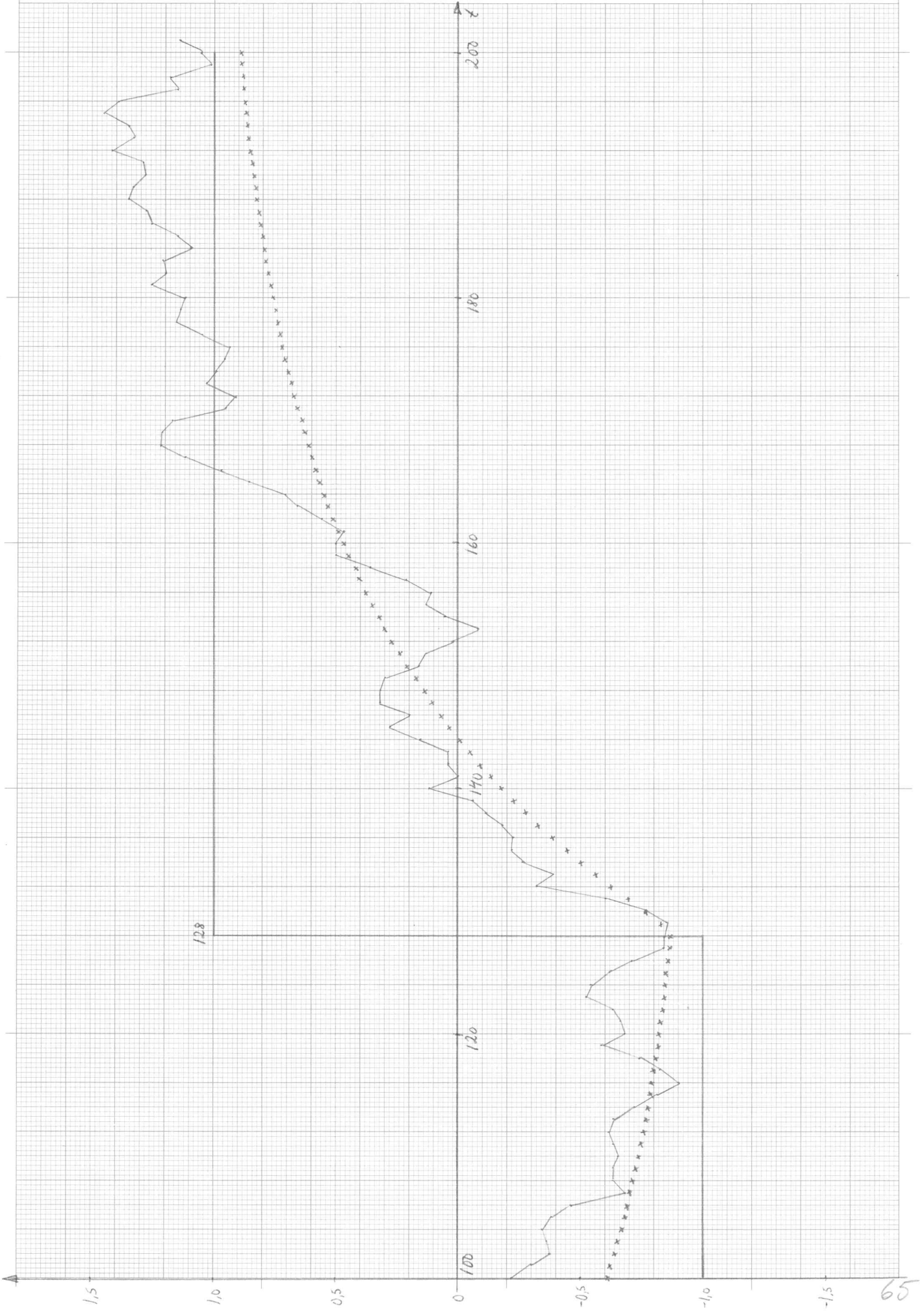


Diagram 96.



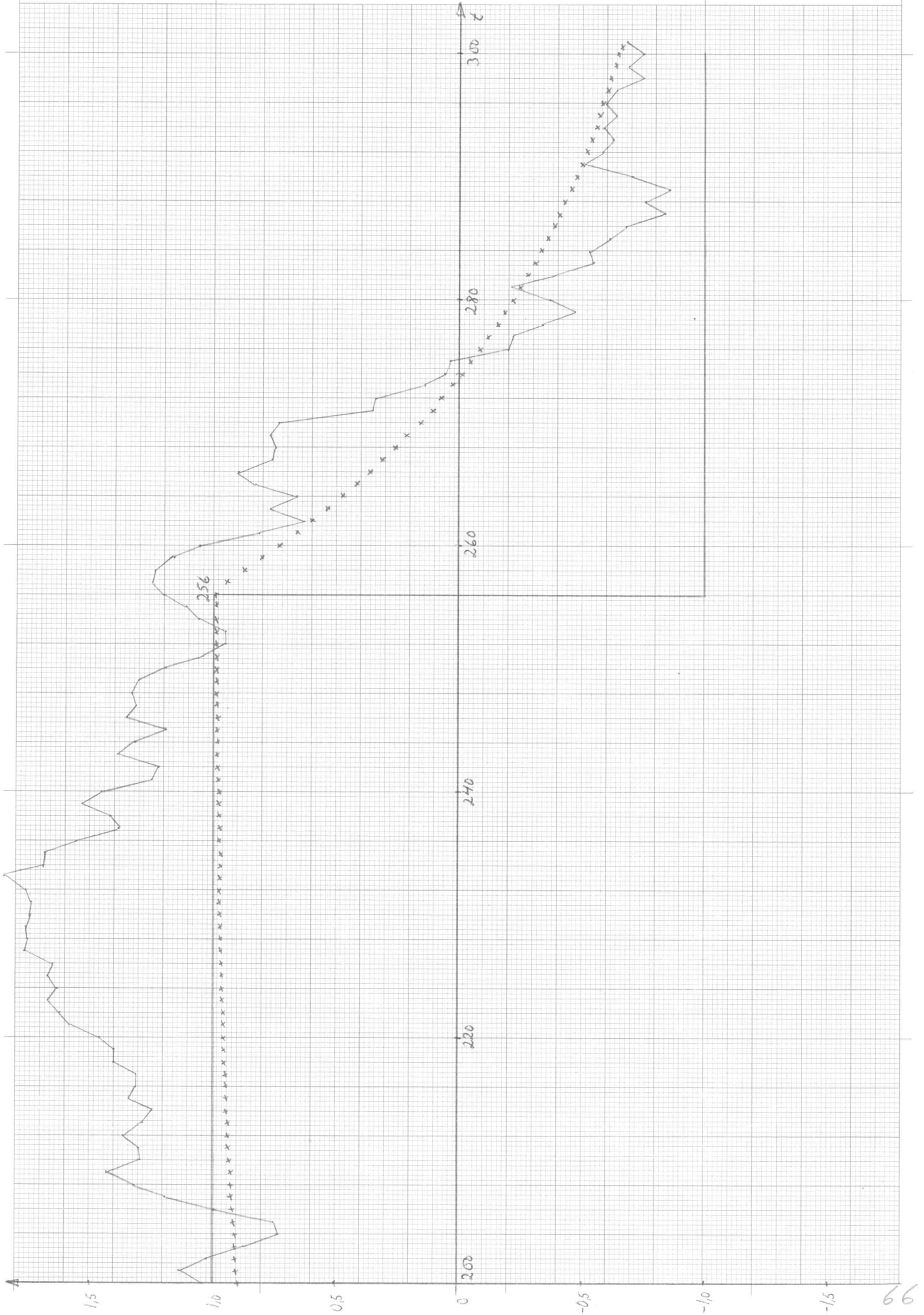
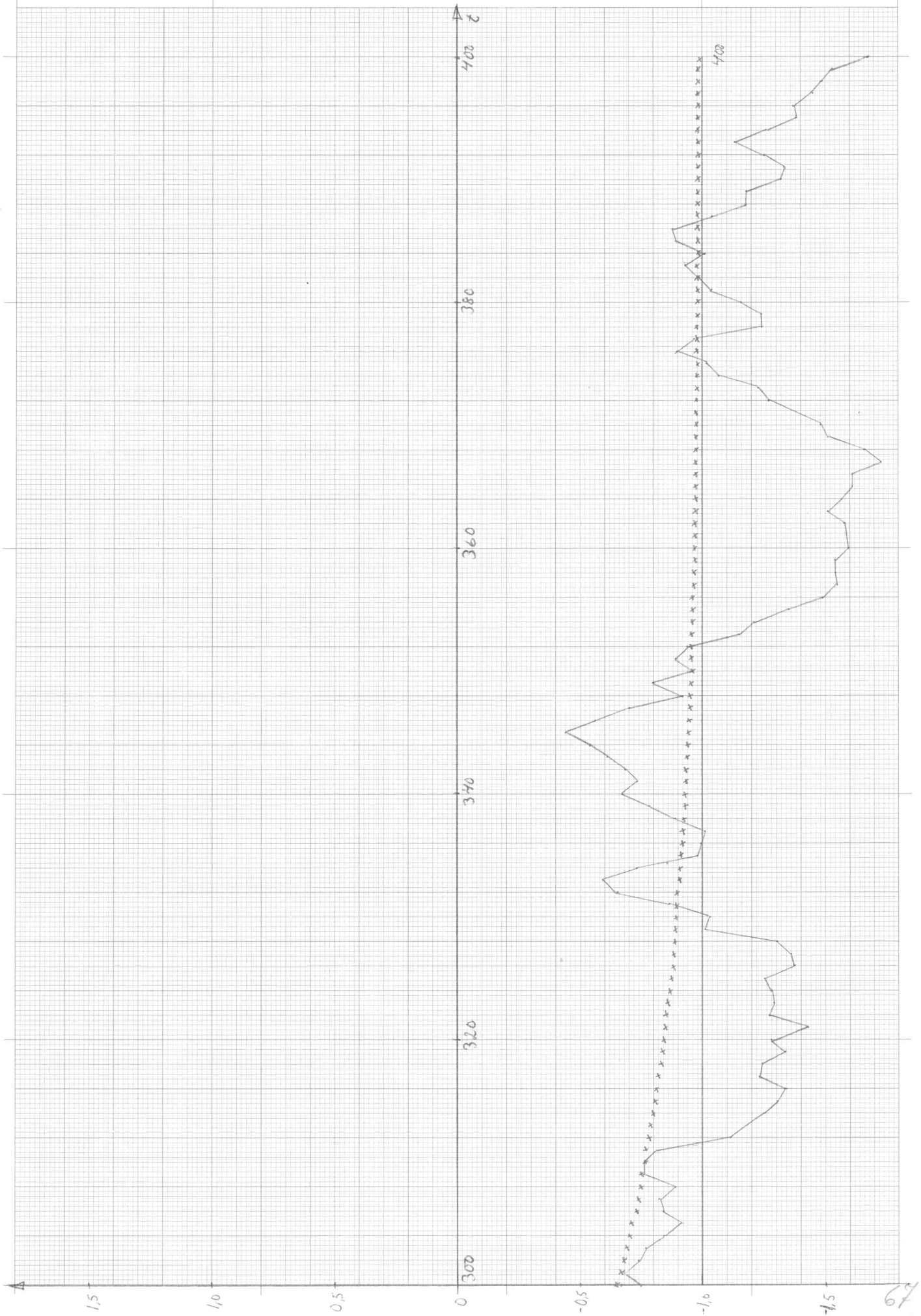


Diagram 9d.



## 7. Appendix. (Minsta kvadratmetoden)

Innehållet i detta appendix är hämtat ur ref(3).

Det problem som formuleras i A. bevisas i moment B. vara lösbart med minsta-kvadratmetoden. Geometrisk tolkning, samt matrishärledning av m-k.metoden utföres i C.resp. D.

A. Bestämning av koeff.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  i ett överbestämt system

$$y_r = \sum_{j=1}^n a_j x_{rj} \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad N > n \quad (7.1)$$

Vi känner kvantiteterna  $x_{rj}$ , medan  $y_1, y_2, \dots, y_N$  uppmätts med felen  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ . Vi observerar alltså kvantiteterna  $l_r = y_r + \Delta_r \quad (r=1, 2, \dots, N)$ . Felen  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$  antages vara oberoende utan systematiskt fel och  $\epsilon N(0, 1)$ . På basis av observationerna  $l_1, l_2, \dots, l_N$  vill vi uppskatta parametrarna  $a_1, a_2, \dots, a_n$  och  $\sigma$ .

B. Minsta kvadratmetoden.

$$l_r = y_r + \Delta_r = \sum_{j=1}^n a_j x_{rj} + \Delta_r \quad (7.2)$$

$$\Delta_r \in N(0, \sigma)$$

$$E(\Delta_r) = 0 \implies E(l_r) = \sum_{j=1}^n a_j x_{rj}$$

Normalfördelningens frekvensfunktion är

$$f_r(l_r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(l_r - \sum_{j=1}^n a_j x_{rj}\right)^2\right] \quad r=1, 2, \dots, N$$

Likelihoodfunktionen blir

$$L(l_1, \dots, l_N) = (2\pi)^{-N/2} (\sigma^2)^{-N/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{r=1}^N \left(l_r - \sum_{j=1}^n a_j x_{rj}\right)^2\right]$$

$$\ln(L) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{r=1}^N \left(l_r - \sum_{j=1}^n a_j x_{rj}\right)^2$$

$\ln(L)$  skall maximeras. Lätt inses att, för varje  $\sigma^2$ , fås maximum hos likelihoodfunktionen genom att välja  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\text{oberoende av } \sigma^2 \text{ och så att } \sum_{r=1}^N \left(l_r - \sum_{j=1}^n a_j x_{rj}\right)^2 = \min, \quad (7.3)$$

dvs. om  $a_1, \dots, a_n$  väljes genom att använda m-k.metoden.

C. Geometrisk tolkning av M-K. metoden.

$$\text{Inför } \begin{cases} l = (l_1, \dots, l_N) \\ y = (y_1, \dots, y_N) \\ \Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_N) \\ x_j = (x_{1j}, \dots, x_{Nj}) \end{cases}$$

$\tilde{l} = \sum_j \tilde{a}_j x_j$  där  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  betecknar de koef. som erhålles enligt (7.3).

$\bar{\varepsilon} = (l_1 - \tilde{l}_1, l_2 - \tilde{l}_2, \dots, l_N - \tilde{l}_N) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  är differensvektorn.

Om  $a_1, \dots, a_n$  kan anta godtyckliga värden definierar  $m = \sum_{j=1}^n a_j x_j$

det linjära rum som har  $x_1, x_2, \dots, x_n$  som basvektorer.

(7.3) betyder att  $\sum_{i=1}^N (l_i - \tilde{l}_i)^2 = \min$ . dvs.  $Q = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$  skall vara minimal.

I den flerdimensionella geometrin är  $Q$  kvadraten på avståndet från spetsen av den fixa vektorn  $l$  till spetsen av den variable

vektorn  $\tilde{l}$ , som ligger i det linjära rum, som definieras av vektorerna  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Detta avstånd är minimalt då och

endast då vektorn  $\bar{\varepsilon} = (l - \tilde{l}) \perp x_i \quad i=1, 2, \dots, n$ .

Det betyder att  $\bar{\varepsilon} \cdot \bar{x}_i = \sum_{r=1}^n \varepsilon_r x_{ri} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (7.4)$

D. Matrishärledning.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{bmatrix} \quad \tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_2 \\ \vdots \\ \tilde{l}_N \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{bmatrix}$$

Kalla matrisen med kvantiteterna  $x_{rj}$ ,  $r=1, 2, \dots, N$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  för  $X$ .

Då erhålles  $Y = X \cdot A$

Men  $L = Y + \Delta$

$$\therefore X \cdot A - L = -\Delta \quad (7.5)$$

Vi vill nu finna ett  $\tilde{A}$  så att om  $\tilde{V} = X \tilde{A} - L$  så skall

$$Q = (X\tilde{A} - L)^T (X\tilde{A} - L) = \tilde{V}^T \tilde{V} = \bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon} = \sum_r \varepsilon_r^2 \quad (7.6)$$

vara minimal.



Det nödvändiga villkoret för min. har formen

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{a}_i} [\bar{\mathcal{E}} \cdot \bar{\mathcal{E}}] = 2 \left[ \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \tilde{a}_i} \cdot \bar{\mathcal{E}} \right] = 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (7.7)$$

$$\text{Men } \mathcal{E}_r = x_{r1} \cdot \tilde{a}_1 + x_{r2} \cdot \tilde{a}_2 + \dots + x_{rn} \cdot \tilde{a}_n - l_r$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \tilde{a}_i} = x_{ri}$$

$$\text{Om } X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nn} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_N \end{bmatrix}$$

så är (7.7) ekvivalent med  $X^T \tilde{V} = 0$  ty

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \tilde{a}_i} \cdot \bar{\mathcal{E}} = \sum_{r=1}^N x_{ri} \cdot \mathcal{E}_r \quad i=1,2,\dots,n$$

Alltså är  $X^T \tilde{V} = 0$  då  $\sum_{r=1}^N \mathcal{E}_r^2$  är minimal.

$\tilde{V} = X\tilde{A} - L$  multipliceras med  $X^T$  och  $X^T \tilde{V} = 0$  insättes. Detta ger

$$X^T X \tilde{A} - X^T L = 0 \quad (7.8)$$

$$\tilde{A} = (X^T X)^{-1} X^T L \quad (7.9)$$

(7.6) ger då

$$\begin{aligned} Q &= (X\tilde{A} - L)^T (X\tilde{A} - L) = \tilde{A}^T X^T X \tilde{A} - \tilde{A}^T X^T L - L^T X \tilde{A} + L^T L = \\ &= \tilde{A}^T X^T X \tilde{A} - \tilde{A}^T X^T X \tilde{A} - \tilde{A}^T X^T X \tilde{A} + L^T L = \\ &= L^T L - \tilde{A}^T X^T X \tilde{A} = L^T L - L^T X \tilde{A} \end{aligned}$$

$$\underline{Q = L^T (L - X\tilde{A})} \quad (7.10)$$