

OPTIMAL REGLERING AV PROCESSER  
MED TIDSFÖRDRÖJNING

BENGT PETERSSON

Rapport RE - 3 juni 1966

OPTIMAL REGLERING AV PROCESSER MED TIDSFÖRDRÖJNING

Examensarbete i regleringsteknik

Bengt Pettersson

## OPTIMAL REGLERING AV PROCESSER MED TIDSFÖRDRÖJNING

<u>Kap</u>	<u>Sid</u>
1. Inledning	1
2. Optimalt samplat system	4
3. Kontinuerlig reglering	9
Stabilitetsvillkor för PID-regulator	11
PID-regulator med störning	32
4. Generaliseringar	40
5. Metoder för numeriska beräkningar	45

## 1. INLEDNING

Många industriella processer kan inte beskrivas med ordinära differentialekvationer utan man måste tillgripa andra typer av ekvationer för att systemmodellen skall bli någorlunda realistisk. Ett viktigt specialfall utgöres av system med transportfördröjningar. Dessa kan i många fall beskrivas med differens-differential-ekvationer eller med överföringsfunktioner, som är sammansatta av rationella funktioner i  $s$  och exponentialfunktioner av typen  $\exp(-sT)$ . Förekomsten av tidsfördröjningar utgör ofta en allvarlig begränsning av systemets prestanda, antingen därför att mätinformationen fördröjs eller för att det tar tid innan styrgreppen påverkar processvariablerna.

Avsikten med detta examensarbete är:

- 1) att för ett enkelt exempel undersöka tidsfördröjningens inverkan på systemets prestanda,
- 2) att för samma exempel jämföra en PID-styrlag med en allmänare styrlag

Den sista frågan är av speciellt intresse med tanke på den utveckling som äger rum på datamaskinområdet med lansering av DDC (Direct Digital Control). Vid styrning med analoga komponenter begagnar man sig vanligen av PID-styrlagar. Vill man göra dessa generellare leder detta till mera komplicerad och därmed dyrbarare apparatur. Om man i stället realiserar styrlagen med hjälp av en datamaskin kan man genom att modifiera programmet lätt få andra styralgoritmer än PID-lagar. Det är därför av intresse att undersöka vad som kan vinnas med en mera komplicerad styrlag och om man med rimliga samplingsintervall kan uppnå bättre resultat med ett samplat system än med en kontinuerlig regulator.

För att hålla det analytiska och numeriska arbetet inom gränsen för ett examensarbets omfång studeras endast en enkel process: en integrator med tidsfördröjning driven av vitt brus, dvs ett system med systemekvationen

$$\frac{dy}{dt} = u(t - T) + e(t)$$

där

$$u(t) = \text{styrsignal}$$

$$y(t) = \text{utsignal}$$

$$e(t) = \text{vitt brus med autokorrelationsfunktionen } \sigma^2 \delta(t)$$

$$T = \text{systemets tidsfördröjning}$$

Som kriterium på styrningen har valts att hålla utsignalens varians så liten som möjligt.

Resultaten visar att utsignalens varians bestäms av systemets tidsfördröjning och brusets karaktär.

Den minsta varians  $V$  som kan erhållas med en kontinuerlig P-regulator har numeriskt beräknats till

$$V = 1.53 \sigma^2 T \quad \text{med regulatorn} \quad u(t) = \frac{0.74}{T} y(t)$$

PI-regulatorn ger alltid större varians än motsvarande P-regulator.

Detta är något förvånande men torde bero på att systemet redan innehåller en integration.

Den minsta varians som kan erhållas med en PD-regulator är

$$V = 1.09 \sigma^2 T \quad \text{som erhålles med regulatorn}$$

$$u(t) = \frac{0.80}{T} y(t) + 0.48 \frac{dy(t)}{dt}$$

För samplad styrning har minimalvariansstyrningen härletts analytiskt. Den minsta varians som kan erhållas är

$$V = \sigma^2 T \left(1 + \frac{1}{N}\right) \quad (N = \text{antalet sampl.intervall under tiden } T)$$

med styrsignalen

$$u(t) = - \frac{N}{T} y(t) - \sum_{v=1}^N u\left(t - v \frac{T}{N}\right)$$

För det speciella exemplet finner man således:

om samplingsintervallet är  $\frac{1}{2} T$  eller mindre erhålles bättre resultat med samplad styrning än med en kontinuerlig P- eller PI-regulator.

om samplingsintervallet är  $\frac{1}{12} T$  eller mindre erhålles bättre resultat med samplad styrning än med en kontinuerlig PD-regulator.

Rapporten är disponerad på följande sätt. I kap. 2 härleds det optimala samplade systemet. Kontinuerlig reglering med PID-regulator behandlas i kap. 3. Stabilitetsvillkoren vid PID-reglering har härletts utgående från Pontryagins allmänna resultat. Utsignalens varians för ett antal punkter inom stabilitetsområdet vid P, PI och PD-reglering har beräknats och minimipunkten bestämts. Känsligheten för parametervariationer anges. Kap 4 behandlar kortfattat några generaliseringar av resultaten för det enkla exemplet. Den väsentliga svårigheten i det allmänna fallet är att bestämma stabilitetsvillkoren. I kap 5 slutligen redovisas de numeriska metoder som använts i kap 3.

## 2. OPTIMALT SAMPLAT SYSTEM

Systemekvation

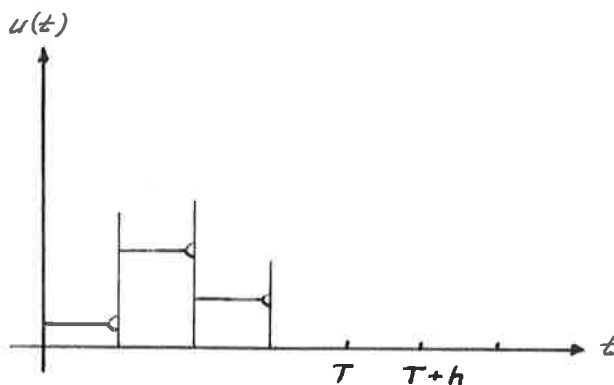
$$\frac{dy}{dt} = u(t - T) + e(t)$$

Välj ett samplingsintervall av längden  $h$  så att tidsfördröjningen  $T$  blir en heltalsmultipel av  $h$

$$h = \frac{T}{N} \quad N = \text{heltal}$$

Låt styrsignalen  $u(t)$  vara konstant under ett samplingsintervall

$$u(t) = \text{konstant för } t_0 \leq t < t + h$$



Integrera systemekvationen under ett samplingsintervall

$$y(t + h) - y(t) = h u(t - T) + \int_t^{t+h} e(s) ds$$

Antag att  $e(t)$  är vitt brus med autokorrelationsfunktionen

$$B(\tau) = E \{ e(t + \tau) e(t) \} = \sigma^2 \delta(\tau)$$

Inför

$$v(t) = \int_t^{t+h} e(s) ds = \int_0^h e(s) ds$$

Variansen för  $v(t)$  är då

$$\begin{aligned} E \{ v^2(t) \} &= E \left\{ \int_0^h e(s) ds \int_0^h e(s') ds' \right\} = \\ &= \int_0^h ds' \int_0^h E \{ e(s) e(s') \} ds = \\ &= \sigma^2 \int_0^h ds' \int_0^h \delta(s - s') ds = \sigma^2 \int_0^h ds' = \sigma^2 h \end{aligned}$$

Systemekvationen kan alltså skrivas

$$y(t) - y(t - h) = h u(t - T - h) + v(t)$$

där  $v(t)$ ,  $t = \dots -h, 0, h, \dots$ , är lika fördelade med variansen  $\sigma^2 h$ . Vidare är  $v(t)$  och  $v(t + n h)$  okorrelerade för  $n \neq 0$  och  $v(t)$  okorrelerad med  $y(t - h)$ ,  $y(t - 2h) \dots$

Inför  $T = Nh$  och skiftoperatorm  $z$

$$z x(t) = x(t + h)$$



Systemekvationen blir då

$$(1 - z^{-1}) y(t) = z^{-(N+1)} h u(t) + v(t)$$

Inför polynomen A, B, C genom

$$A(z^{-1}) y(t) = z^{-k} B(z^{-1}) u(t) + C(z^{-1}) v(t)$$

där

$$A(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n \quad b_0 \neq 0$$

$$C(z) = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n$$

I detta fall är tydligen

$$n = 1 \quad k = N + 1$$

$$A(z) = 1 - z \quad B(z) = h \quad C(z) = 1$$

Den styrslag som ger minsta varians hos utsignalen är

$$u(t) = - \frac{F_{n-1}(z^{-1})}{B(z^{-1}) E_{k-1}(z^{-1})} y(t)$$

där polynomen

$$E_{k-1}(z) = 1 + e_1 z + \dots + e_{k-1} z^{k-1}$$

$$F_{n-1}(z) = f_0 + f_1 z + \dots + f_{n-1} z^{n-1}$$

satisfierar identiteten

$$C(z) \equiv A(z) E_{k-1}(z) + z^k F_{n-1}(z)$$

Med denna styrning är utsignalens varians

$$E\{y^2(t)\} = \lambda^2(1 + e_1^2 + \dots + e_{k-1}^2)$$

om  $E\{v^2(t)\} = \lambda^2$  och  $v(t)$  uppfyller de ovan angivna fordringarna.

I det aktuella exemplet erhålles identiteten

$$1 \equiv (1 - z)(1 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots + e_N z^N) + z^{N+1} f_0$$

Identifiering av koefficienter ger ekvationssystemet

$$0 = e_1 - 1$$

$$0 = e_2 - e_1$$

$$0 = e_3 - e_2$$

$$\vdots$$

$$0 = e_N - e_{N-1}$$

$$0 = f_0 - e_N$$

Detta system har lösningen

$$f_0 = e_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\therefore E_{k-1}(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^N \quad F_{n-1}(z) = 1$$

Styrnagen blir

$$u(t) = - \frac{1}{h(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N})} y(t)$$

dvs

$$u(t) = - \frac{1}{h} y(t) - u(t - h) - u(t - 2h) - \dots - u(t - Nh)$$

Med denna styrsignal blir utsignalens varians

$$E \{ y^2(t) \} = \sigma^2 h(N + 1) = \sigma^2 T \left( 1 + \frac{1}{N} \right)$$

## 3. KONTINJERLIG REGLERING

Systemekvation

$$\frac{dy}{dt} = u(t - T) + e(t)$$

där  $e(t)$  är vitt brus.Om inga styringrepp vidtages, dvs  $u(t) = 0$  får man

$$y(t) - y(0) = \int_0^t e(s) ds$$

vilket ger

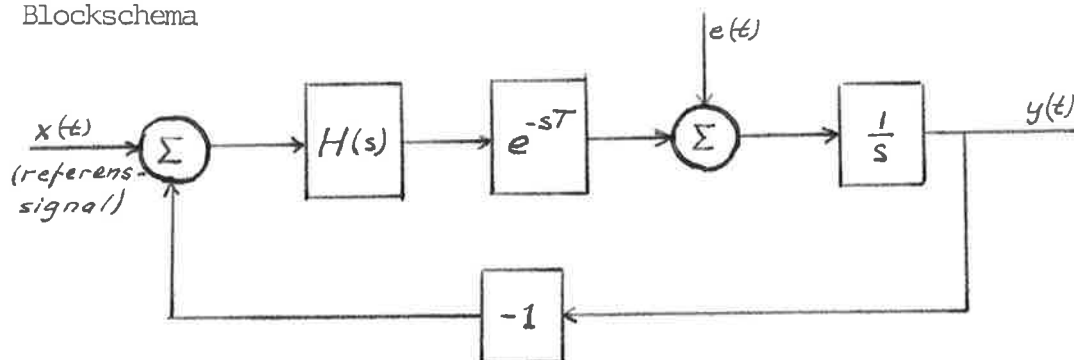
$$E \{ \{y(t) - y(0)\}^2 \} = \sigma^2 t \quad (\text{jfr. sid 5})$$

dvs utan reglering kommer utsignalens varians att växa linjärt med tiden. Någon form av styrning måste alltså appliceras.

Antag att denna sker med hjälp av en PID-regulator med överföringsfunktionen

$$H(s) = k_1 + k_2 \frac{1}{s} + k_3 s$$

Blockschema



Överföringen ges av

$$Y(s) = \frac{H(s) \frac{1}{s} e^{-sT}}{1 + H(s) \frac{1}{s} e^{-sT}} X(s) + \frac{\frac{1}{s}}{1 + H(s) \frac{1}{s} e^{-sT}} E(s)$$

Sätt  $G(s) = H(s) \frac{1}{s} e^{-sT}$  så

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} X(s) + \frac{\frac{1}{s}}{1 + G(s)} E(s)$$

### Stabilitetsvillkor

Systemets stabilitet bestäms av läget hos rötterna till karakteristiska ekvationen

$$1 + G(s) = 0$$

$$\text{där } G(s) = (k_1 + k_2 \frac{1}{s} + k_3 s) \frac{1}{s} e^{-sT}$$

Karakteristiska ekvationen är alltså

$$s^2 e^{sT} + k_1 s + k_2 + k_3 s^2 = 0$$

Multiplitera ekvationen med  $T^2$

$$(sT)^2 e^{sT} + (k_1 T) (sT) + k_2 T^2 + k_3 (sT)^2 = 0$$

Inför

$$z = sT$$

$$a = k_1 T$$

$$b = k_2 T^2$$

$$c = k_3$$

$$\therefore z^2 e^z + az + b + cz^2 = 0 \quad a, b, c \text{ reella}$$

Om samtliga rötter till denna ekvation har negativ realdel är systemet stabilt. För att avgöra detta behövs följande begrepp och sats:( för bevis hänvisas till (2) i litteraturförteckningen)

Låt  $f(z,t)$  vara ett polynom i variablerna  $z$  och  $t$  med eventuellt komplexa koefficienter

$$f(z,t) = \sum_{m,n \geq 0} a_{mn} z^m t^n$$

### Definition 1

Termen  $a_{rs} z^r t^s$  kallas principalterm till polynomet

$$f(z,t) = \sum_{mn} a_{mn} z^m t^n$$

om  $a_{rs} \neq 0$  och om för varje annan term  $a_{mn} z^m t^n$  med  $a_{mn} \neq 0$  något av följande villkor är uppfyllt

- (i)  $r > m, s > n$
- (ii)  $r > m, s = n$
- (iii)  $r = m, s > n$

Obs. alla polynom har inte principalterm. Exempel

$$f(z,t) = z + t$$

Betydelsen av begreppet principalterm framgår av

### Sats 1

Om polynomet  $f(z,t)$  saknar principalterm så har funktionen

$$F(z) = f(z, e^z)$$

ett obegränsat antal nollställen med godtyckligt stor positiv realdel.

För att göra denna sats trolig i ett enkelt specialfall, betrakta

$$f(z, e^z) = z - e^z$$

$f$  saknar tydligen principalterm.

Sätt  $z = x + iy$  och separera  $f(z, e^z) = 0$  i real- och imaginärdel

$$\begin{cases} e^x \cos y = x & (1) \\ e^x \sin y = y & (2) \end{cases}$$

Sök en approximativ lösning till (1) och (2) under antagandet att  $x$  och  $y$  är stora och positiva. Skriv (1) i formen

$$\cos y = x e^{-x}$$

Med ovanstående antagande följer då att  $\cos y$  är litet, varför

$$y = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k = \text{pos heltal}$$

är en approximativ lösning till (1).

Med detta värde på  $y$  har (2) den approximativa lösningen

$$x = \log \left( 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

som kan göras godtyckligt stor.

Det är alltså troligt att

$$e^z - z = 0$$

har lösningen



$$z = \log \left( 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \left( 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) + \varepsilon \quad \varepsilon = \text{litet komplext tal}$$

för stora positiva heltal  $k$ .

För att strängt bevisa satsen i det allmänna fallet användes en liknande teknik.

### Definition 2

Låt  $p(y)$  och  $q(y)$  vara två reellvärda funktioner av en reell variabel. Nollställena till dessa två funktioner säges vara alternnerande om följande villkor är uppfyllda

- (i)  $p$  och  $q$  saknar multipla nollställen
- (ii)  $p$  och  $q$  är aldrig noll samtidigt
- (iii) mellan två godtyckliga nollställen till den ena funktionen finns åtminstone ett nollställe till den andra.

### Sats 2

Betrakta funktionen

$$F(z) = f(z, e^z)$$

där  $f(z, t)$  är ett polynom med principalterm. Separera funktionen  $F(iy)$  i real- och imaginärdel

$$F(iy) = P(y) + i Q(y)$$

Om alla nollställen till  $F(z)$  ligger i vänstra halvplanet så är nollställena till  $P(y)$  och  $Q(y)$  reella, alternerande och

$$(*) \quad Q'(y) P(y) - P'(y) Q(y) > 0 \text{ för alla } y$$

Dessutom, för att alla nollställen till  $F(z)$  skall ligga i vänstra halvplanet är det tillräckligt att något av följande villkor är uppfyllt

(i) alla nollställen till  $P(y)$  och  $Q(y)$  är reella och alternerande och (\*) gäller för minst ett värde på  $y$

(ii) alla nollställen till  $P(y)$  är reella och för varje sådant  $y = y_0$  är (\*) uppfyllt dvs

$$P'(y_0) Q(y_0) < 0$$

(iii) alla nollställen till  $Q(y)$  är reella och för varje sådant  $y = y_0$  är (\*) uppfyllt dvs

$$Q'(y_0) P(y_0) > 0$$

Med hjälp av sats 2 kan stabilitetsvillkoren för det aktuella systemet bestämmas.

P-reglering

Antag  $H(s) = k_1$  dvs  $G(s) = k_1 \frac{1}{s} e^{-sT}$

Med beteckningar enligt sid 11 är systemets karakteristiska ekvation

$$ze^z + a = 0$$

Stabilitetsvillkoret framgår av följande

Sats

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att samtliga nollställen till

$$F(z) = z e^z + a \quad a \text{ reellt}$$

har negativ realdel är att

$$0 < a < \frac{\pi}{2}$$

Bevis1) Nödvändigheten

Antag alltså  $F(z)$ :s nollställen ligger i VH.

Sätt  $F(iy) = P(y) + i Q(y)$

$$P(y) = a - y \sin y$$

$$Q(y) = y \cos y$$

$$Q'(y) = \cos y - y \sin y$$

Enligt sats 2 gäller för varje nollställe till  $Q(y)$

$$Q'(y) P(y) > 0$$

Speciellt för  $y = 0$  erhålles

$$a > 0$$

Antag nu att  $a \geq \frac{\pi}{2}$

I intervallet  $[0, \frac{\pi}{2}]$  har  $Q(y)$  nollställena  $-a$ ,  $0$  och  $\frac{\pi}{2}$ .

Eftersom enligt sats 2  $P$  och  $Q$  är alternerande har  $P$  i detta intervall ett nollställe  $y_0$  för vilket gäller

$$0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$$

Då är  $y_0 \sin y_0 < \frac{\pi}{2}$  vilket ger

$$P(y_0) = a - y_0 \sin y_0 \geq \frac{\pi}{2} - y_0 \sin y_0 > 0$$

Av denna motsägelse följer att

$$a < \frac{\pi}{2}$$

## 2) Tillräckligheten

Antag att  $0 < a < \frac{\pi}{2}$

$$P(y) = a - y \sin y$$

$$Q(y) = y \cos y$$

$$Q'(y) = \cos y - y \sin y$$

Alla rötter  $\eta$  till  $Q(y) = 0$  är reella:

$$\eta = 0$$

$$\eta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\eta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Om för varje sådant  $\eta$

$$Q'(\eta) P(\eta) > 0$$

har enligt sats 2 alla rötter till  $F(z) = 0$  negativ realdel.

Eftersom  $P(y)$  och  $Q'(y)$  är jämna funktioner av  $y$  räcker det att betrakta  $y \geq 0$ .

$\eta = 0$  är nollställe till  $Q$  och

$$P(0) Q'(0) = a > 0$$

För rötter  $\eta > 0$  är  $Q'(\eta) = -\eta \sin \eta$

$$\eta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{ger}$$

$$\sin \eta = 1 \quad \text{och}$$

$$P(\eta) = a - \eta < \frac{\pi}{2} - \eta = -2k\pi \leq 0$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} P(\eta) < 0 \\ Q'(\eta) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P(\eta) Q'(\eta) > 0$$

$$\eta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{ger}$$

$\sin \eta = -1$  och därmed

$$\left. \begin{array}{l} P(\eta) > 0 \\ Q'(\eta) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P(\eta) Q'(\eta) > 0$$

Enligt sats 2 är därmed även tillräckligheten bevisad.

Stabilitetsvillkoret vid P-reglering är alltså

$$0 < k_1 T < \frac{\pi}{2}$$

Det öppna systemets överföringsfunktion

$$G(j\omega) = -j \frac{k_1}{\omega} e^{-j\omega T}$$

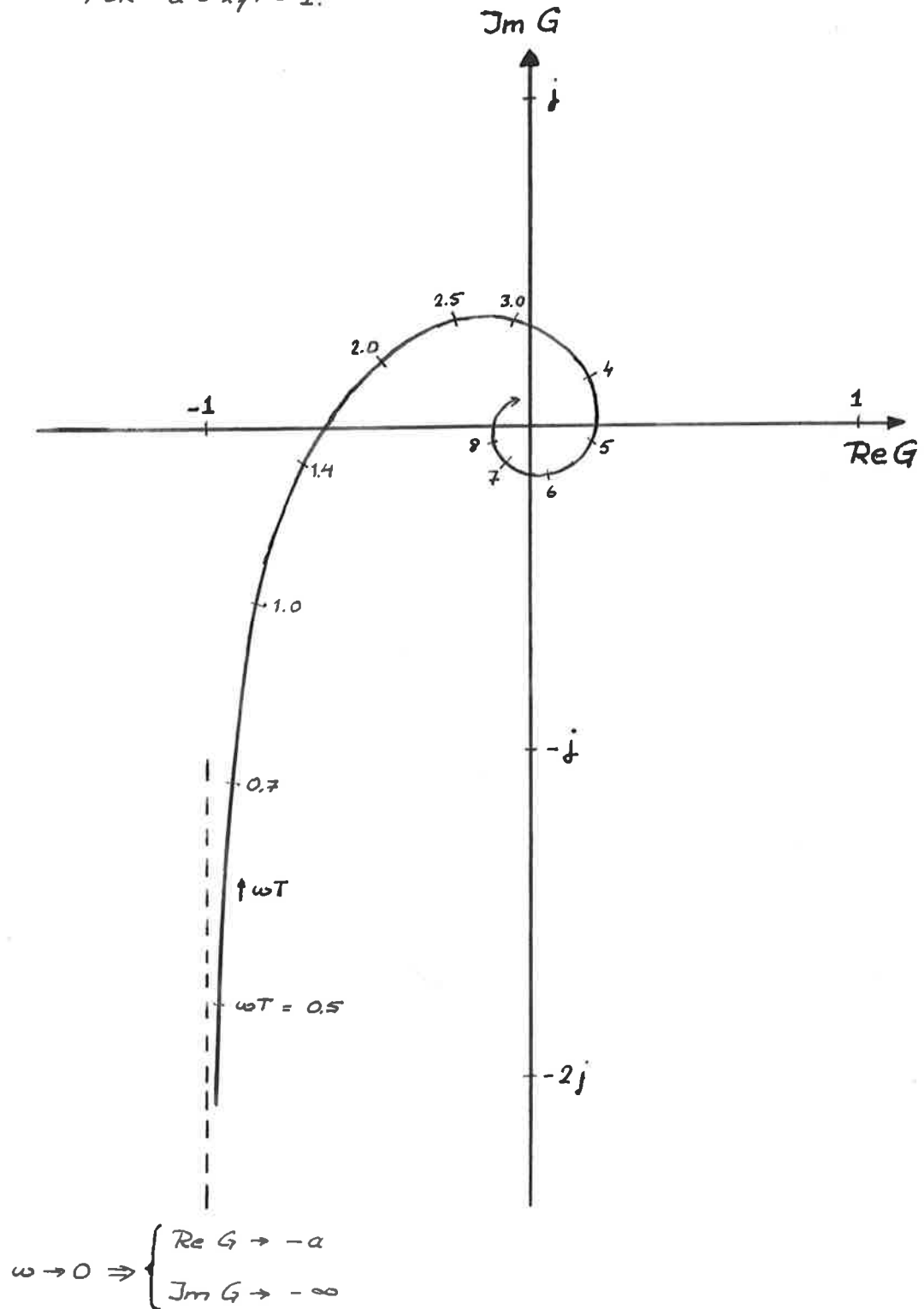
för  $k_1 T = 1$  framgår av Figur 1.

# FIGUR 1

P-REGLERING.

ÖPPNA SYSTEMETS ÖVERFÖRINGSFUNKTION

FÖR  $a = k_1 T = 1$ .



PI-reglering

$$H(s) = k_1 + k_2 \frac{1}{s}$$

$$G(s) = (k_1 + k_2 \frac{1}{s}) \frac{1}{s} e^{-sT}$$

Med beteckningar enligt sid 11 är systemets karakteristiska ekvation

$$z^2 e^z + az + b = 0$$

Stabiliteten ges av följande

Sats

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att samtliga nollställen till

$$F(z) = z^2 e^z + az + b \quad a, b \text{ reella}$$

har negativ realdel är att

$$(i) \quad 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad 0 < b < y_a^2 \cos y_a$$

där  $y_a$  är den rot till ekvationen

$$\sin y = \frac{a}{y}$$

som ligger i intervallet  $(0, \frac{\pi}{2})$

( Villkoret (i) garanterar att en sådan rot finnes )



Bevis Se (3) sid 451-452

Stabilitetsområdet vid PI-reglering framgår av figur 2.

Det öppna systemets överföringsfunktion

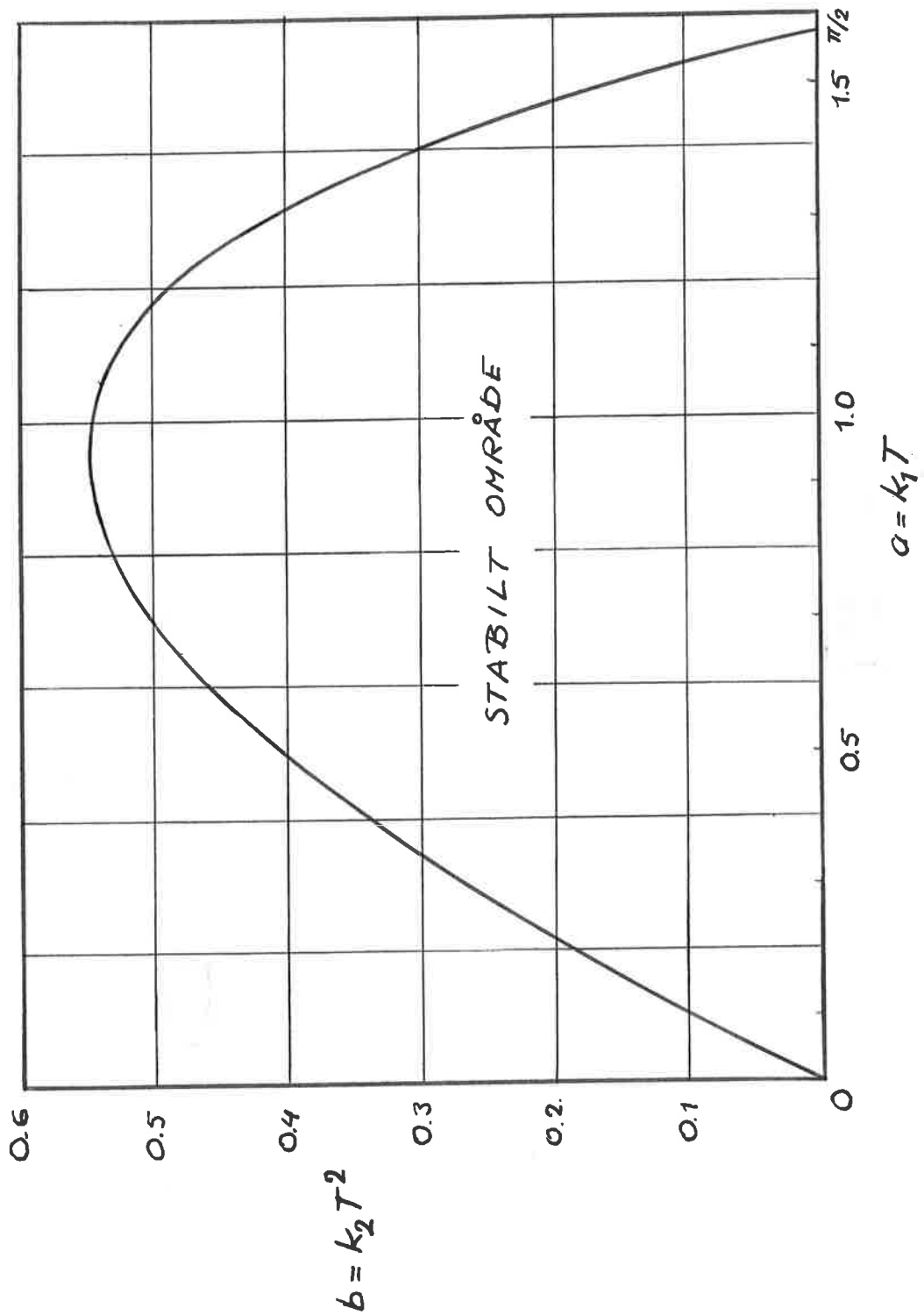
$$G(j\omega) = \left( -\frac{k_2}{\omega^2} - j\frac{k_1}{\omega} \right) e^{-j\omega T}$$

$$\text{för } a = k_1 T = 1 \quad b = k_2 T^2 = 0.25$$

framgår av figur 3.

FIGUR 2.

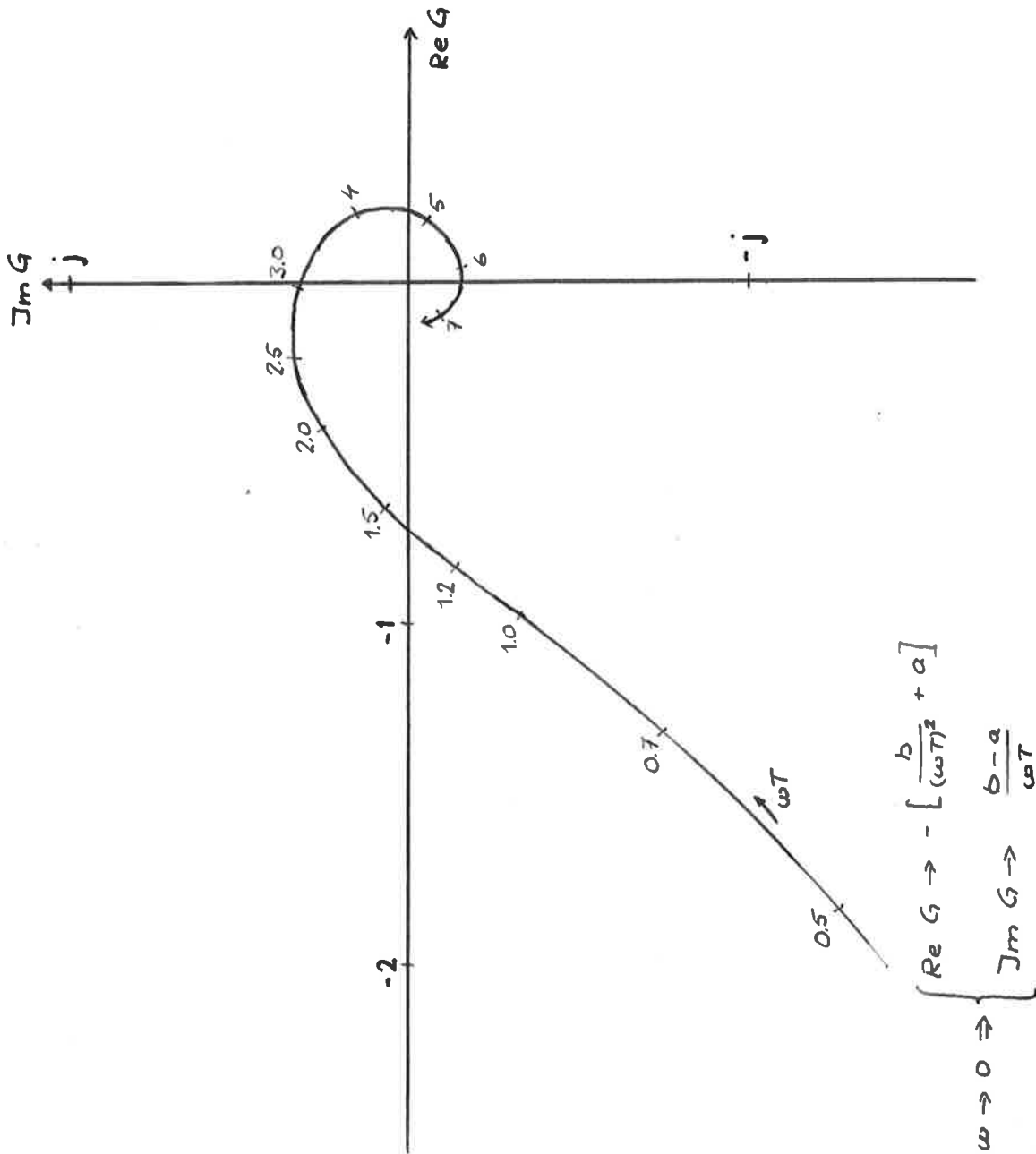
STABILITETSOMRÅDE VID PI-REGLERING.



FIGUR 3.

PI - REGLERING.

ÖPPNA SYSTEMETS ÖVERFÖRINGSFUNKTION  
FÖR  $a = 1$ ,  $b = 0.25$ .



PD-reglering

$$H(s) = (k_1 + k_3s)$$

$$G(s) = (k_1 + k_3s) \frac{1}{s} e^{-sT}$$

Med beteckningar enligt sid 11 är systemets karakteristiska ekvation

$$ze^z + a + cz = 0$$

Stabiliteten ges av

Sats

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att samtliga nollställen till

$$F(z) = z e^z + a + cz \quad a, c \text{ reella}$$

har negativ realdel är att

$$(i) \quad -1 < c < 1$$

$$(ii) \quad 0 < a < y_c \sin y_c$$

där  $y_c$  är den rot till ekvationen

$$\cos y = -c$$

som ligger i intervallet  $(0, \pi)$ .

Bevis

1) Nödvändigheten

Antag alltså att  $F(z)$ :s nollställen ligger i vänstra halvplanet.

Sätt  $F(iy) = P(y) + i Q(y)$

$$P(y) = a - y \sin y \quad Q(y) = y(c + \cos y)$$

$$Q'(y) = c + \cos y - y \sin y$$

Enligt sats 2 gäller för varje nollställe till  $Q(y)$  att

$$Q'(y) P(y) > 0$$

Speciellt för  $y = 0$  erhålles

$$P(0) Q'(0) = a(1 + c) > 0$$

Enligt samma sats är alla nollställen till  $Q(y)$  reella, varför

$$-1 \leq c \leq 1 \quad \text{dvs} \quad 0 \leq 1 + c \leq 2$$

Alltså måste gälla för stabilitet

$$\begin{cases} a > 0 \\ -1 < c \leq 1 \end{cases}$$

Men  $c = 1$  ger för  $y = \pi + 2k\pi$

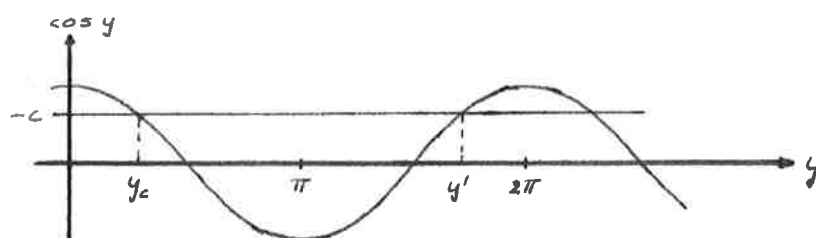
$$Q(y) = Q'(y) = 0$$

vilket motsäger villkoret (x) i sats 2.

Sålunda

$$\begin{cases} a > 0 \\ -1 < c < 1 \end{cases}$$

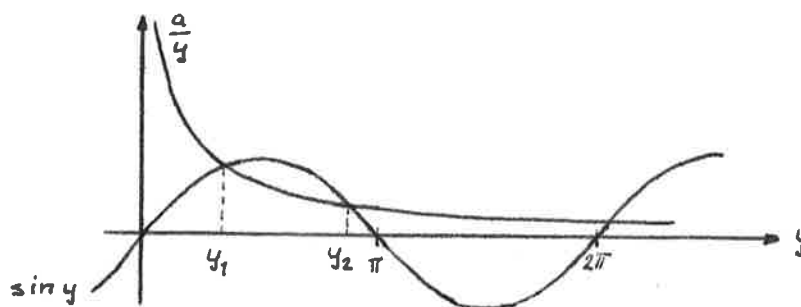
Låt  $y_c$  vara roten till  $\cos y = -c$  i  $(0, \pi)$



I intervallet  $[0, 2\pi]$  har  $Q(y) = 0$  tre skilda rötter:  $0$ ,  $y_c$  och  $y'$ . En av dessa,  $y'$ , ligger i  $(\pi, 2\pi)$ . Eftersom  $P$  och  $Q$  alternerande har  $P(y) = 0$  exakt två rötter i intervallet  $[0, y_1]$ .

Men i  $[\pi, 2\pi]$  är  $P(y) > 0$  ty  $a > 0$  och  $\sin y < 0$ .  $y = 0$  är ej nollställe till  $P(y)$  om  $a > 0$ .  $P(y)$  har alltså precis två nollställena,  $y_1$  och  $y_2$ , i  $(0, \pi)$ .  $y_1 \neq y_2$  ty i annat fall är  $P(y_1) = P'(y_1) = 0$  vilket motsäger (x). Mellan  $y_1$  och  $y_2$  är

$$\frac{a}{y} < \sin y \quad \text{dvs} \quad a < y \sin y$$



Men  $P$  och  $Q$  är alternerande varav följer att  $Q$  har ett nollställe mellan  $y_1$  och  $y_2$ . Detta nollställe måste vara  $y_c$  varför

$$a < y_c \sin y_c \quad \text{gäller.}$$

## 2) Tillräckligheten

Antag att  $-1 < c < 1$

$$0 < a < y_c \sin y_c$$

där  $y_c \in (0, \pi)$  är rot till  $\cos y = -c$

$$P(y) = a - y \sin y$$

$$Q(y) = y (c + \cos y)$$

$$Q'(y) = c + \cos y - y \sin y$$

Alla rötter  $\eta$  till  $Q(y) = 0$  är tydligen reella.

Om för varje sådant  $\eta$

$$Q'(\eta) P(\eta) > 0$$

så har enligt sats 2 alla rötter till  $F(z) = 0$  negativ realdel.

$P(y)$  och  $Q'(y)$  är jämna funktioner av  $y$ . Det räcker alltså att betrakta  $y \geq 0$ .

$\eta = 0$  är en rot och

$$Q'(0) P(0) = a(1 + c) > 0$$

För rötter  $\eta > 0$  är

$$Q'(\eta) = -\eta \sin \eta$$

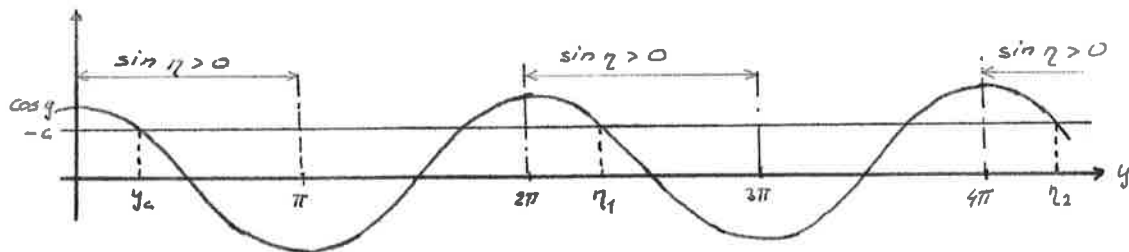
Betrakta först rötter  $\eta$  för vilka  $\sin \eta < 0$ . Då är tydligen

$$\left. \begin{array}{l} Q'(\eta) > 0 \\ P(\eta) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Q'(\eta) P(\eta) > 0$$

Betrakta nu rötter  $\eta$  för vilka  $\sin \eta > 0$ . Då är tydligen  $Q'(\eta) < 0$  och

$$\sin \eta_i = \sin y_c \quad \eta_i \geq y_c \quad i = 1, 2, \dots$$

vilket illustreras av nedanstående figur



Men  $a < y_c \sin y_c \Rightarrow$

$$P(\eta) = a - \eta \sin \eta < y_c \sin y_c - \eta \sin \eta = (y_c - \eta) \sin \eta \leq 0$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} P(\eta) < 0 \\ Q'(\eta) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P(\eta) Q'(\eta) > 0$$

Därmed är även tillräckligheten bevisad.

Stabilitetsområdet vid PD-reglering framgår av figur 4. Det öppna systemets överföringsfunktion

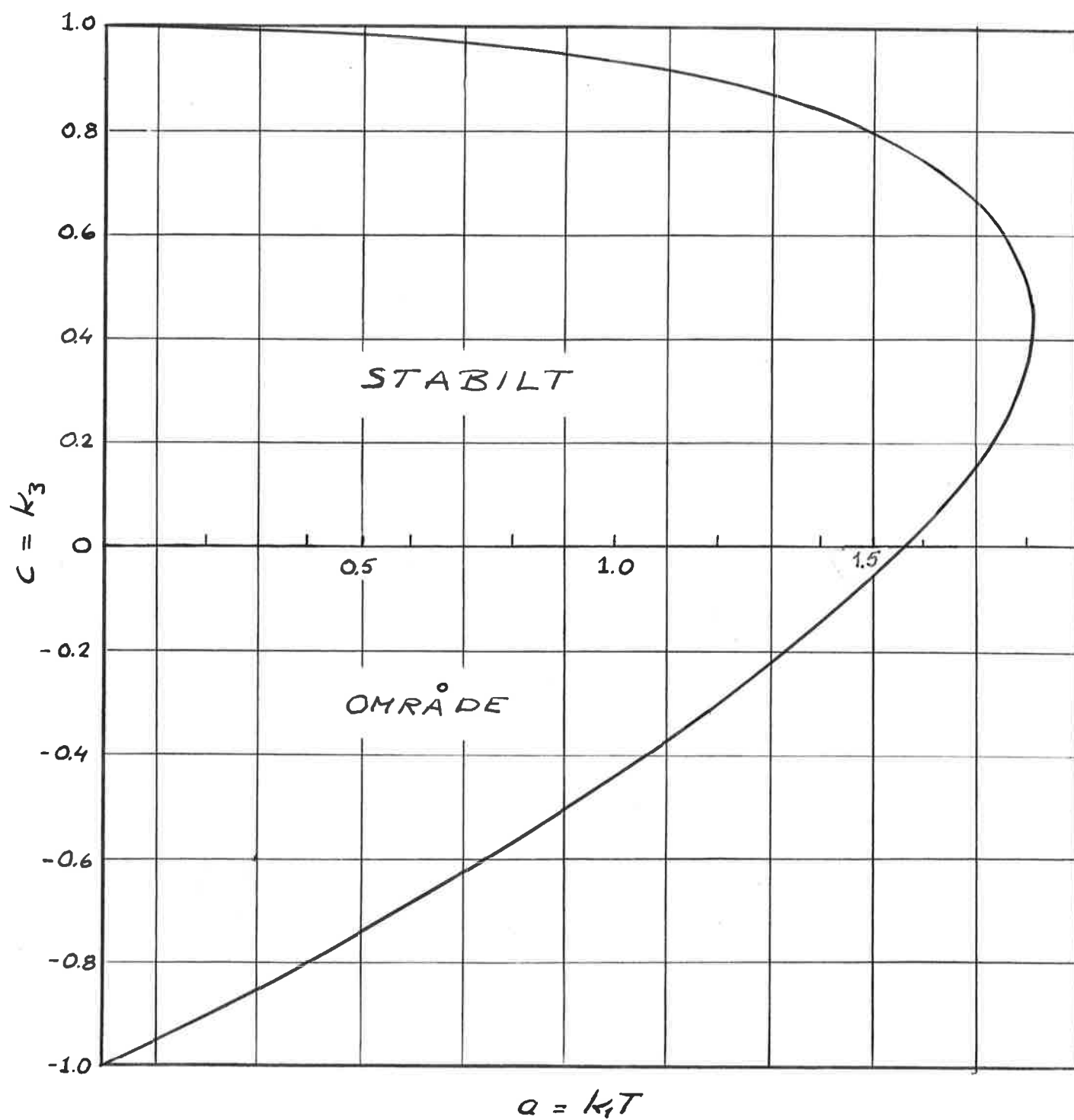
$$G(j\omega) = \left( k_3 - j \frac{k_1}{\omega} \right) e^{-j\omega T}$$

för  $a = k_1 T = 1.2$   $c = k_3 = 0.3$  framgår av figur 5.



FIGUR 4.

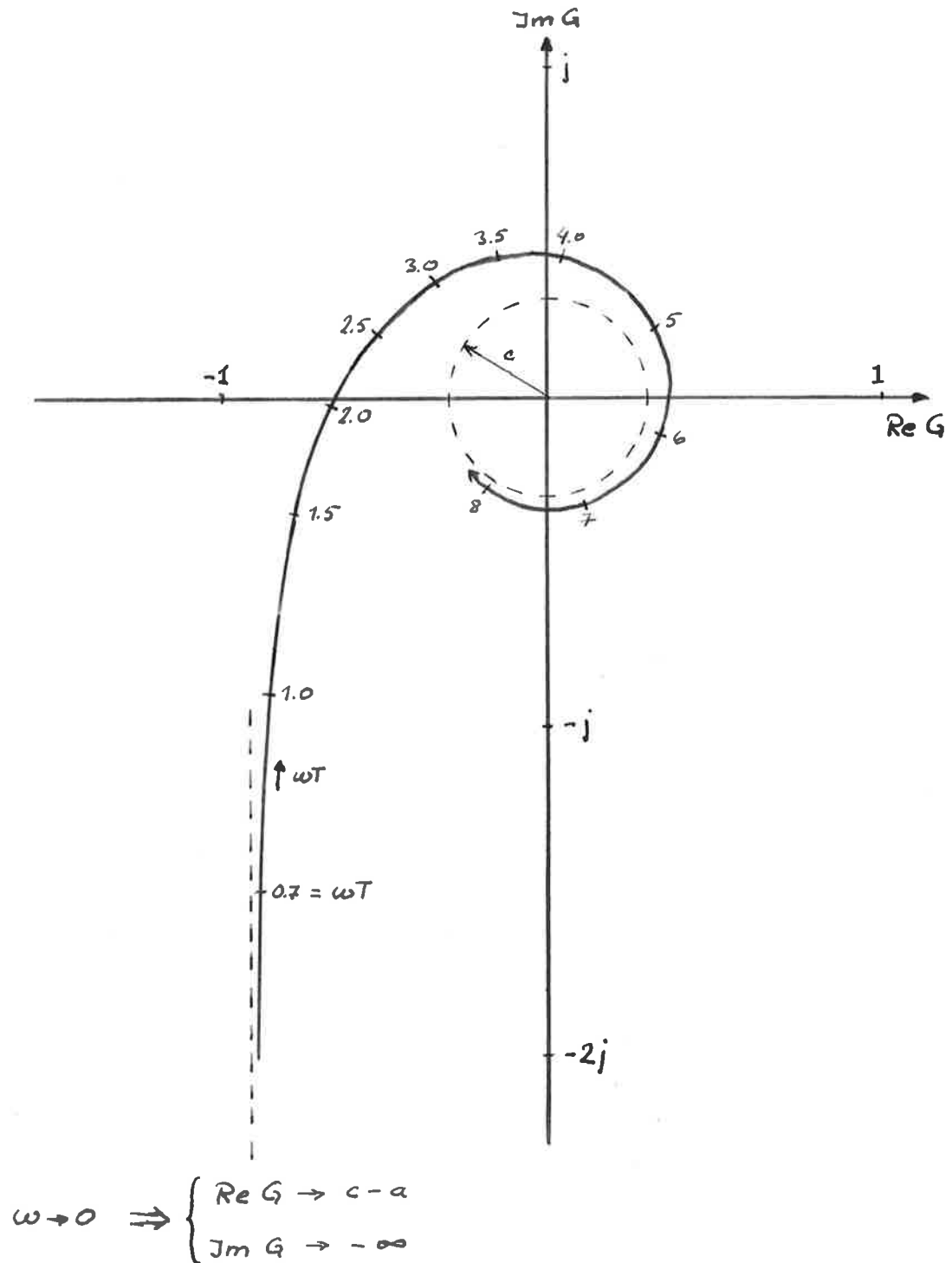
STABILITETSONRÅDE VID PD-REGLERING.



FIGUR 5.

PD - REGLERING.

ÖPPNA SYSTEMETS ÖVERFÖRINGSFUNKTION

FÖR  $a = 1.2$ ,  $c = 0.3$ .

PID-reglering med störning

Antag att insignalen  $x(t) \equiv 0$ . Överföringen brus- utsignal blir då

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + H(s) \frac{1}{s} e^{-sT}} E(s)$$

$$H(s) = k_1 + \frac{k_2}{s} + k_3 s$$

$$Y(s) = K(s) E(s) \quad \text{där} \quad K(s) = \frac{1}{s + (k_1 + k_2 \frac{1}{s} + k_3 s) e^{-sT}}$$

Sök utsignalens varians då  $e(t)$  är vitt brus med autokorrelationsfunktionen

$$B_e(\tau) = E \{ e(t + \tau) e(t) \} = \sigma^2 \delta(\tau)$$

Fourier-utveckla  $B_e$

$$B_e(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_e(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$\phi_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B_e(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}$$

Spektraltätheten för utsignalen  $y(t)$  ges av

$$\phi_y(\omega) = K(j\omega) K(-j\omega) \phi_e(\omega)$$

$$B_y(\tau) = E \{ y(t + \tau) y(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 \phi_e(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

erhålles utsignalens varians  $V_y$

$$V_y = E \{ y^2(t) \} = B_y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 \phi_e(\omega) d\omega$$

Med  $K$  och  $\phi_e$  enligt ovan finner man

$$V_y = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - 2k_1 \omega \sin \omega T + k_1^2 + 2k_3 \omega^2 \cos \omega T - 2k_2 \cos \omega T + k_3 \omega^2 + k_2^3 - 2k_2 k_3 \frac{1}{\omega^2}}$$

Sätt  $\omega T = x$  samt som tidigare

$$a = k_1 T$$

$$b = k_2 T^2$$

$$c = k_3$$

och utnyttja att integranden är en jämn funktion av  $\omega$

$$V_y(a,b,c) = \sigma^2 T \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ax \sin x + a^2 - 2bc \cos x + \frac{b^2}{x^2} + 2cx^2 \cos x + c^2 x^2 - 2bc \frac{1}{x^2}}$$

P-reglering

$$V_y(a) = \sigma^2 T \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ax \sin x + a^2}$$

Stabilitetsområdet är  $0 < a < \frac{\pi}{2}$

Utsignalens varians som funktion av  $a$  framgår av figur 6.

Utsignalens minsta varians har beräknats till

$$\min_a V_y(a) = (1.532 \pm 0.001) \sigma^2 T$$

$$\text{för } a = k_1 T = 0.739 \pm 0.001$$

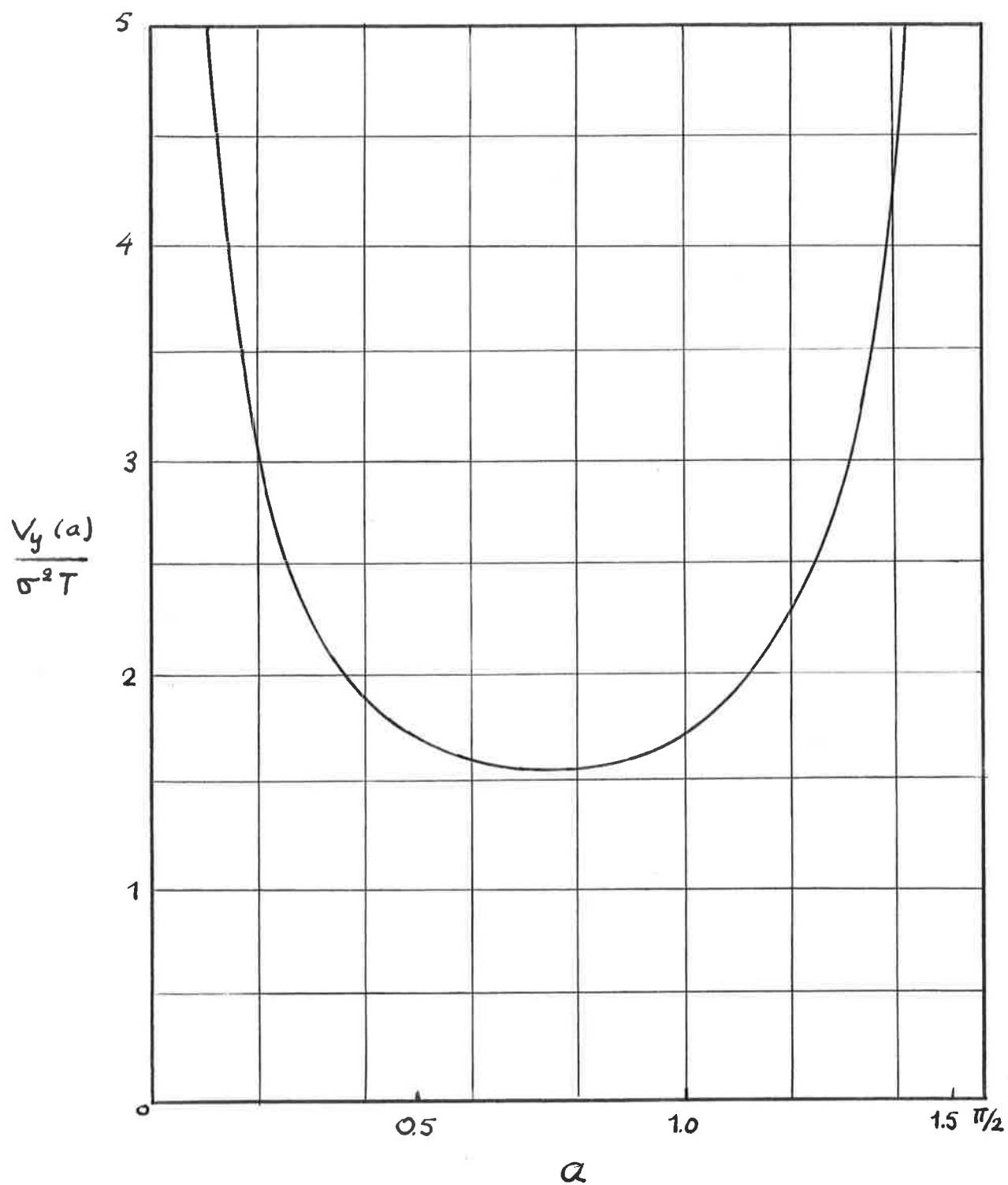
Den bästa styrlagen vid proportionell reglering är således

$$u(t) = \frac{0.74}{T} y(t)$$

Systemet är relativt okänsligt för parametervariationer: en ändring av  $k_1$  med  $\pm 30\%$  räknat från minimivärdet ger en ökning av utsignalens varians med maximalt 10%.

FIGUR 6.

P-REGLERING.

UTSIGNALENS VARIANS SOM FUNKTION AV  $\alpha$ .

PI-reglering

$$V_y(a,b) = \sigma^2 T \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ax \sin x + a^2 - 2b \cos x + \frac{b^2}{x^2}}$$

$V_y/\sigma^2 T$  för några olika punkter inom stabilitetsområdet framgår av figur 7.

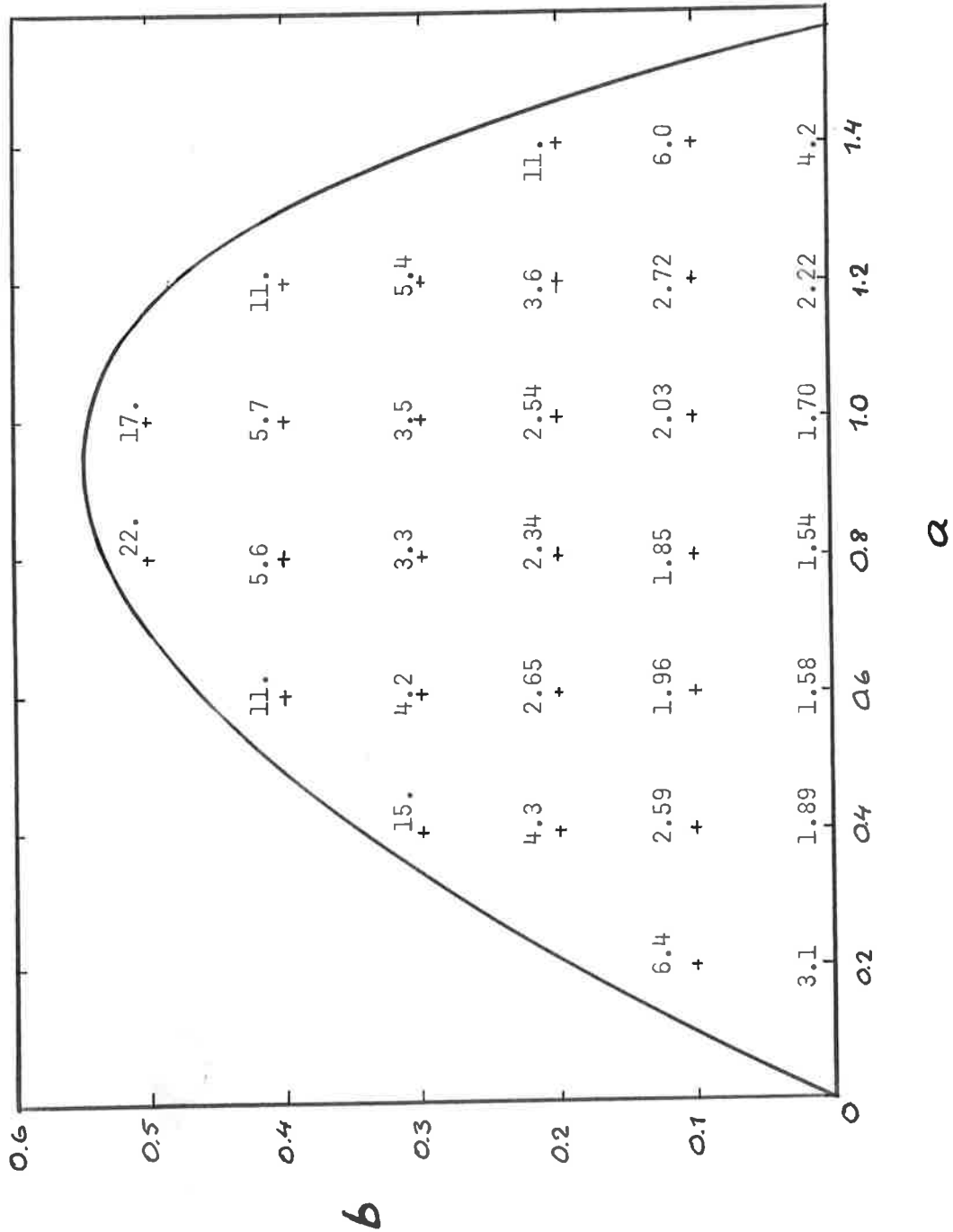
Man finner att för fixt  $a$  har  $V_y(a,b)$  min då  $b = 0$ .  
 PI-regulatorn ger alltså större varians hos utsignalen än P-regulatorn.

FIGUR 7.

PI-REGLERING.

UTSIGNALENS VARIANS

$$\frac{V_y(a, b)}{\sigma^2 T}$$





PD-reglering

$$V_y(a,c) = \sigma^2 T \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + c^2 + 2c \cos x)x^2 - 2ax \sin x + a^2}$$

$\frac{V_y(a,c)}{\sigma^2 T}$  för några olika punkter inom stabilitetsområdet framgår av figur 8.

Utsignalens minsta varians har beräknats till

$$\min_{a,c} V_y(a,c) = (1.089 \pm 0.002) \sigma^2 T$$

$$\text{för } a = k_1 T = 0.80 \pm 0.02$$

$$c = k_3 = 0.48 \pm 0.02$$

Den bästa styrlagen vid PD-reglering är alltså

$$u(t) = \frac{0.80}{T} y(t) + 0.48 \frac{d y(t)}{d t}$$

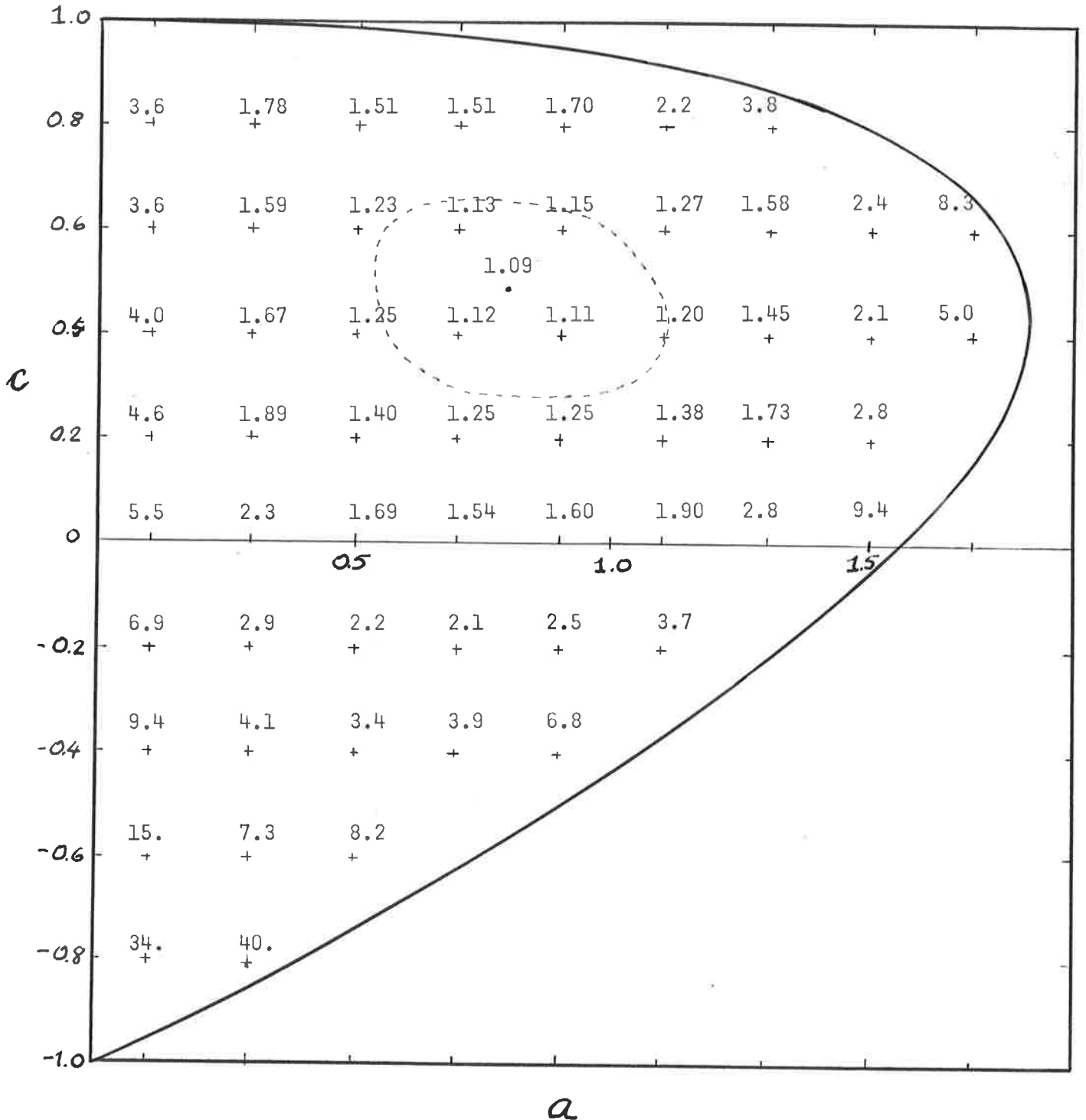
Systemet är relativt okänsligt för parametervariationer: då  $a$  och  $c$  ligger innanför den i figur 8 streckade konturen blir utsignalens varians maximalt 10% högre än minimivärdet.

FIGUR 8.

PD-REGLERING.

UTSIGNALENS VARIANS

$$\frac{V_y(a, c)}{\sigma^2 T}$$



## 4. GENERALISERINGAR

Det enkla exemplet skall nu generaliseras något. Antag att systemet i stället beskrivs av ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y(t) + u(t - T) + v(t)$$

där

$u(t)$  = styrsignal

$y(t)$  = utsignal

$v(t)$  = störning

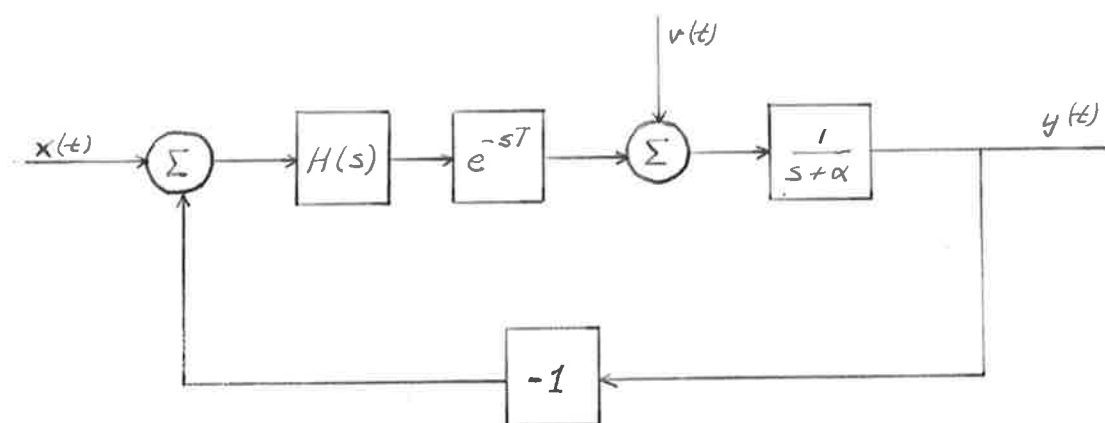
$\alpha$  = konstant

$T$  = systemets tidsfördröjning

Antag som förut att systemet styrs med en kontinuerlig PID-regulator med överföringsfunktionen

$$H(s) = k_1 + k_2 \cdot \frac{1}{s} + k_3 s$$

Blockschema



Överföringen ges sålunda av

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+\alpha} H(s) e^{-sT}}{1 + \frac{1}{s+\alpha} H(s) e^{-sT}} X(s) + \frac{\frac{1}{s+\alpha}}{1 + \frac{1}{s+\alpha} H(s) e^{-sT}} V(s)$$

### Stabilitetsvillkor

Karakteristiska ekvationen är

$$s^2 \cdot e^{sT} + \alpha s e^{sT} + k_1 s + k_2 + k_3 s^2 = 0$$

Inför

$$q = \alpha T$$

och som tidigare

$$z = sT$$

$$a = k_1 T$$

$$b = k_2 T^2$$

$$c = k_3$$

Karakteristiska ekvationen blir då

$$z^2 e^z + q z e^z + a z + b + c z^2 = 0$$

För P-reglering erhålles ekvationen

$$z e^z + q e^z + a = 0$$

Stabiliteten ges av

Sats

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att samtliga rötter till ekvationen

$$ze^z + qe^z + a = 0 \quad a, q \text{ reella}$$

har negativ realdel är att

$$q > -1$$

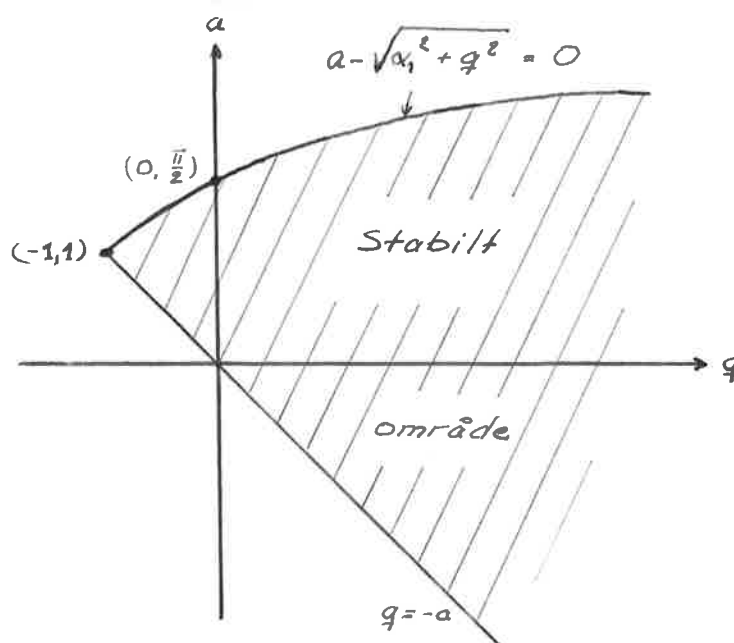
$$a < \sqrt{\alpha_1^2 + q^2}$$

$$q > -a$$

där  $\alpha_1$  är roten till  $\alpha = -q \cdot \tan \alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi$   
(Om  $q = 0$ , tag  $\alpha_1 = \pi/2$ )

Bevis: se (3) sid 444.

Stabilitetsområdet framgår av nedanstående figur



PID-reglering med störning

Antag att referenssignalen  $x(t) \equiv 0$ . Överföringen brus-utsignal ges då av

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s+\alpha}}{1 + \frac{1}{s+\alpha} H(s) \cdot e^{-sT}} V(s)$$

där

$$H(s) = k_1 + k_2 \frac{1}{s} + k_3 s$$

Sålunda

$$Y(s) = K(s) V(s)$$

där

$$K(s) = \frac{1}{s + \alpha + (k_1 + \frac{k_2}{s} + k_3 s) \cdot e^{-sT}}$$

Utsignalens varians ges av

$$V_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 \phi_v(\omega) d\omega$$

där  $\phi_v(\omega)$  är störningens spektraltäthetsfunktion.

Med  $x = \omega T$  och övriga beteckningar enligt sid 41 erhålles på samma sätt som i kap 3 utsignalens varians;

P-reglering

$$V_y(a) = \text{konst.} \int_0^{\infty} \frac{\phi_v(x) dx}{x^2 - 2ax \sin x + a^2 + q^2 + 2aq \cos x}$$

PI-reglering

$$V_y(a,b) = \text{konst.} \int_0^{\infty} \frac{\phi_v(x) dx}{x^2 - 2ax \cdot \sin x + a^2 - 2bc \cos x + \frac{b^2}{x^2} + q^2 + 2aq \cos x - \frac{2bq}{x} \sin x}$$

PD-reglering

$$V_y(a,c) = \text{konst.} \int_0^{\infty} \frac{\phi_v(x) dx}{(1+c^2+2c \cdot \cos x)x^2 - 2ax \sin x + a^2 + q^2 + 2cq x \sin x}$$

Man kan här inte utan ingående undersökning sluta sig till huruvida t.ex. PI-reglering är bättre eller sämre än P-reglering.

## 5. METODER FÖR NUMERISKA BERÄKNINGAR

Nedanstående ALGOL-program utgör exempel på numerisk beräkning av utsignalens varians  $V_y$ .

Programmet beräknar utsignalens varians vid PI-reglering för  $a = 0.6(0.2)1.0$ ,  $b = 0.1(0.1)0.3$ . Simpsons formel (se nedan) används för beräkning av

$$\int_0^{100} g(t) dt$$

där  $g(t)$  är deklarerad real procedure:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{t^2}{t^4 - 2at^3 \sin t + a^2 t^2 - 2bt^2 \cos t + b^2} \quad (\text{jfr sid 36})$$

Resttermen

$$\int_{100}^{\infty} g(t) dt$$

uppskattas med  $0.01/\pi$ .

Integrationen sker genom anrop av en procedur, procedure Simp. Sträckan B-A delas i  $2N$  delintervall av längden  $h$ , dvs  $2Nh = B-A$ . Därefter beräknas

$$\int_A^B f(x) dx$$

med Simpsons formel

$$\int_A^B f(x) dx \approx I_1 = \frac{h}{3} \left[ f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N} \right]$$

där

$$f_i = f(A + ih)$$



begin

real a, b, V1, V2, V3, V4, V, pi;

procedure Simp(A,B,N,f,eps,l,L); value A,B,N;

integer N; real A,B,eps,l; label L; real procedure f;

begin integer i; real h; S1,S2,S3,I1,I2;

h:= (B-A)/4/N; I1:=I2:= f(B) - f(A); S1:=S2:=S3:=0;

for i:=2 step 4 until 4\*N - 2 do

S1:= S1 + f(A+ixh);

for i:=0 step 4 until 4\*N-4 do

S2:= S2 + f(A+ixh);

for i:= 1 step 2 until 4\*N-1 do

S3:= S3 + f(A+ixh);

I1:= (I1+4\*S1+2\*S2)\*h/1.5;

I2:= (I2+4\*S3+2\*S1+2\*S2)\*h/3;

if abs(I1-I2)>eps then go to L;

I:= (16\*I2 - I1)/15

end;

real procedure g(t); real t;

g:= t<sup>2</sup>/pi/(t<sup>4</sup>-2\*at<sup>3</sup>\*sin(t)+a<sup>2</sup>\*t<sup>2</sup>-2\*bt<sup>2</sup>\*cos(t)+b<sup>2</sup>);

pi:= 3.1415926536;

for a:= 0.6 step 0.2 until 1.001 do

for b:= 0.1 step 0.1 until 0.301 do

begin

Simp(0,5,50,g,0.001,V1,USCH);

print(1,2,a); print(5,2,b); print(5,6,V1);

Simp(5,10,25,g,0.001,V2,USCH); print(V2);

Simp(10,30,20,g,0.001,V3,USCH); print(V3);

Simp(30,100,35,g,0.001,V4,USCH); print(V4);

V:= V1+V2+V3+V4+0.01/pi; print(V); punch(1);

end;

go to END;

USCH: print(5,0,10000);

END:

end

Integralen beräknas även med halva intervallängden, varvid värdet  $I_2$  erhålles. Om  $|I_1 - I_2| > \text{eps}$  sker uthopp ur programmet till läget L. Eftersom feltermen är proportionell mot fjärde potensen av intervallängden tas som slutligt värde på integralen ett värde  $I$ , bestämt av

$$16(I_2 - I) = I_1 - I$$

För att beräkna

$$\min_a V_y(a) \quad (\text{P-reglering})$$

har en parabel anpassats med minsta kvadratmetoden till ett antal punkter kring den troliga minimipunkten.

För beräkning av

$$\min_{a,c} V_y(a,c) \quad (\text{PD-reglering})$$

har en funktion av typen

$$\sum_{j,k=1}^2 a_{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^2 b_j x_j + c$$

utnyttjats.

## LITTERATUR

Kap 2

- (1) Åström, K.J., Notes on the Regulation Problem, Internal Report CT 211, August 30, 1965 (IBM)

Kap 3 och 4

- (2) Pontryagin, L.S., On the Zeros of Some Elementary Transcendental Functions, American Mathematical Society Translations, Series 2, Vol. 1, 1965, pp. 95-110
- (3) Bellman, R.E., Cooke, K., Differential-Difference Equations. Academic Press 1963 (Kap 13)
- (4) Yaglom, A.M., An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions, Prentice Hall 1962 (kap 1-3)

Kap 5

- (5) Fröberg, C.E., Lärobok i numerisk analys. Svenska Bokförlaget/Bonniers 1962
- (6) Ekman, T., Fröberg, C.E., ALGOL, Studentlitteratur, Lund 1964