DIMENSIONERING AV ETT SAMPLAT SYSTEM MED TIDSFÖRDRÖJNING

BÖRJE HÄGGMAN

Rapport RE - 1 juni 1965

DIMENSIONERING AV ETT SAMPLAT SYSTEM MED TIDSFÖRDRÖJNING.

Examensarbete i Regleringsteknik
utfört vid Tekniska Högskolan i
Lund av Börje Häggman F4, vt 1965.

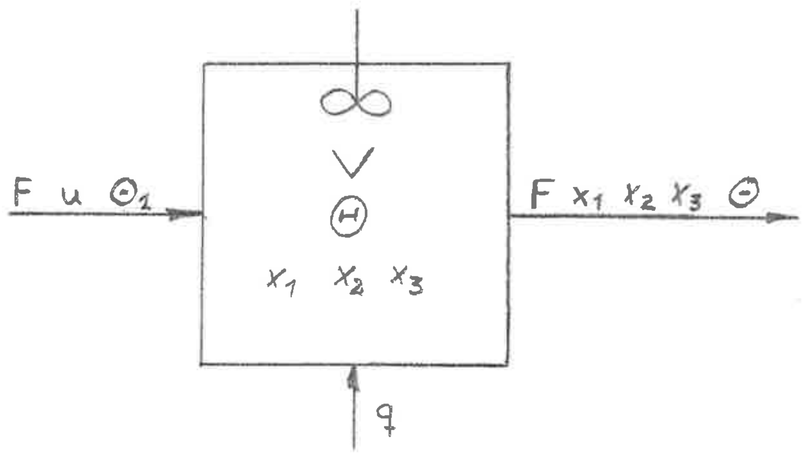
INLEDNING.

Uppgiften är helt teoretisk och består i att försöka dimensionera ett system för reglering av en kemisk reaktor. Vi antar här att den kemiska reaktion som äger rum är av första ordningen dvs, när ett "råmaterial" A tillförs överförs detta vid reaktionen till en "produkt" B och en "biprodukt" C enligt schemat:

$$A \rightarrow B + C$$

Reaktionshastigheten är då proportionell mot koncentrationen av komponenten A.

Reaktorn kan då schematiskt representeras genom följande figur:



Införda beteckningar:

V = reaktorns volym i liter, förutsättes vara konstant.

F = materialflöde i liter/s , samma flöde in som ut ur reaktorn.

u = koncentrationen av komponenten A vid ingången i mol/liter.

θ_1 = temperaturen hos inflödet i °K.

x_1 = koncentrationen av komponenten A i reaktorn och i utflödet.

x_2 = koncentrationen av komponenten B i reaktorn och i utflödet.

x_3 = koncentrationen av komponenten C i reaktorn och i utflödet.

θ = temperaturen i reaktorn och i utflödet (°K)

q = tillförd värme per tidsenhet (cal/s)

r = reaktionskoefficient, anger ändring av konc. per tidsenhet.

Problemställning:

Antag att θ_1 = konstant och F = konstant men att u varierar utan att man kan göra något åt detta. Man önskar x_2 = konstant och detta vill man försöka åstadkomma genom att manipulera värmetillförseln q. Det verkliga värdet på x_2 kan tänkas erhållas ur en kemisk analys av utflödet. Analysen sker snabbt men analysen utförs endast med jämna tidsintervall. Information om det verkliga värdet på x_2 finns därför blott vid diskreta tidpunkter. Reglerkretsen kommer därför att vara av samplad typ. Manipuleringen av värmetillförseln sker via ventiler, värmekapacitanser mm av konventionell typ. Reglersystemet skall kompenseras så att tillfredsställande stabilitet och goda transienta egenskaper erhålles.

METOD OCH MOTIVERING.

Dimensioneringsarbetet kan lämpligen börja med en undersökning av den kemiska reaktorn. Det gäller alltså att ur balansvillkoren ställa upp de differentialekvationer som beskriver reaktorn:

Materialbalans för komponent A.

$$F\,u - F\,x_1 - V\,r = V\,\frac{dx_1}{dt}$$

skrives

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{F}{V}\,x_1 + r = \frac{F}{V}\,u$$

Det gäller att

$$r = k(\theta)\,x_1$$

Proportionalitetskoefficienten är således temperaturberoende och enligt Arrhenius formel:

$$k(\theta) = k_0\,e^{-\frac{E}{R\theta}} = k\,e^{-\frac{b}{\theta}}$$

där E = aktiveringsenergin

R = gaskonstanten

θ = absoluta temperaturen

k_0 = konstant

således finner man att

$$r = k_0\,x_1\,e^{-\frac{b}{\theta}}$$

som insatt i ekvationen ger

$$\dot{x}_1 + \frac{F}{V}\,x_1 + k_0\,x_1\,e^{-\frac{b}{\theta}} = \frac{F}{V}\,u$$

Materialbalans för komponent B.

$$V\,r - F\,x_2 = V\,\frac{dx_2}{dt}$$

Men komponent B bildas med samma hastighet som komponent A förbrukas. Ekvationen kan då skrivas

$$\dot{x}_2 + \frac{F}{V}\,x_2 - k_0\,x_1\,e^{-\frac{b}{\theta}} = 0$$

För komponent C gäller samma ekvation.

Värmebalans för reaktorn.

Inför $\rho_1\ \rho_2$ —— specifika vikten hos in- resp. utflödet.

$c_1\ c_2$ —— specifika värmet hos in- resp. utflödet.

Då gäller:

$$F\rho_1 c_1 \Theta_1 - F\rho_2 c_2 \Theta - V\ h\ r + q = \frac{dQ}{dt} = V\rho_2 c_2 \frac{d\Theta}{dt}$$

där h = reaktionsvärmet (=den värme som förbrukas vid omvandling av en mol substans. Vi betraktar alltså här en endotermisk reaktion).

Ekvationen skrives:

$$\dot{\Theta} + \frac{F}{V}\Theta + \frac{h\,k_0}{\rho_2\,c_2}x_1 e^{-\frac{b}{\Theta}} = \frac{F\rho_1 c_1}{V\rho_2 c_2}\Theta_1 + \frac{1}{V\rho_2 c_2}q$$

Antag för enkelhets skull att $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$c_1 = c_2 = c$

Sammanfattningsvis har vi alltså:

$$\dot{x}_1 + \frac{F}{V}x_1 + k_0 x_1 e^{-\frac{b}{\Theta}} = \frac{F}{V}u$$

$$\dot{x}_2 + \frac{F}{V}x_2 - k_0 x_1 e^{-\frac{b}{\Theta}} = 0$$

$$\dot{\Theta} + \frac{F}{V}\Theta + \frac{hk_0}{\rho\,c}x_1 e^{-\frac{b}{\Theta}} = \frac{F}{V}\Theta_1 + \frac{1}{V\rho c}q$$

Linjärisering av ekvationerna.

Ersätt x_1 med $\bar{x}_1 + x_1$ etc. Medelvärden anges här med ett streck över, medan de ursprungliga beteckningarna betyder avvikelser.

Ekvationerna kan därmed skrivas:

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}_1 + x_1) + \frac{\bar{F}}{V}(\bar{x}_1 + x_1) + k_0(\bar{x}_1 + x_1)e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}+\Theta}} = \frac{\bar{F}}{V}(\bar{u} + u)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}_2 + x_2) + \frac{\bar{F}}{V}(\bar{x}_2 + x_2) - k_0(\bar{x}_1 + x_1)e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}+\Theta}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{\Theta} + \Theta) + \frac{\bar{F}}{V}(\bar{\Theta} + \Theta) + \frac{hk_0}{\rho c}(\bar{x}_1 + x_1)e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}+\Theta}} = \frac{\bar{F}}{V}\bar{\Theta}_1 + \frac{1}{V\rho c}(\bar{q} + q)$$

Om endast första ordningens avvikelser medtages blir ekvationerna för dessa:

$$\dot{x}_1 + \frac{\bar{F}}{\bar{V}} x_1 + k_0 x_1 e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}}} + \frac{k_0 b \bar{x}_1}{\bar{\Theta}^2} e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}}} \theta = \frac{\bar{F}}{\bar{V}} u$$

$$\dot{x}_2 + \frac{\bar{F}}{\bar{V}} x_2 - k_0 x_1 e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}}} - \frac{k_0 b \bar{x}_1}{\bar{\Theta}^2} e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}}} \theta = 0$$

$$\dot{\theta} + \frac{\bar{F}}{\bar{V}} \theta + \frac{h\,k_0}{\rho\,c} x_1 e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}}} + \frac{h k_0 b \bar{x}_1}{\rho\,c\,\bar{\Theta}^2} e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}}} \theta = \frac{1}{\bar{V}\rho\,c} q$$

Bestämning av reaktorns parametrar.

Parametrarna bör väljas realistiskt men har i övrigt valts ganska godtyckligt.

En lämplig arbetspunkt kan då tänkas vara:

$$\bar{\Theta} = 350\ ^\circ\mathrm{K}$$

$$\bar{V} = 2000 \text{ liter}$$

$\bar{F}$ väljes nu så att reaktorn får en lämplig tidskonstant. Sätt $\bar{F} = 20$ liter/s , vilket medför en tidskonstant på 100 s.

Antag att 75% av den tillförda mängden A omvandlas i reaktorn. Insättes detta i materialbalansekvationen för A fås:

$$k(\Theta) = k_0 e^{-\frac{b}{\bar{\Theta}}} = 0{,}03\ \mathrm{s}^{-1}$$

Välj vidare

$$b = 8500\ ^\circ\mathrm{K}$$

$$\bar{x}_1 = 1 \text{ mol/liter}$$

$$h = 50 \text{ kcal/mol}$$

$$\rho = 1 \text{ kg/liter}$$

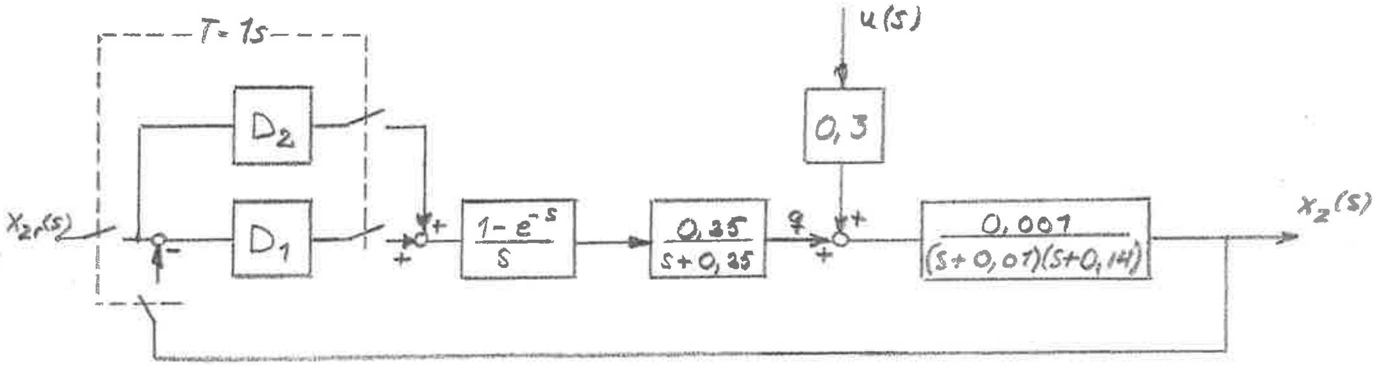
$$c = 1 \text{ kcal/ kg grad}$$

Införes detta i ekvationerna så erhålles ur de Laplacetransformerade ekvationerna följande överföringsfunktioner:

$$\frac{x_2(s)}{u(s)} = \frac{0{,}0003}{(s+0{,}01)(s+0{,}14)}$$

$$\frac{x_2(s)}{q(s)} = \frac{0{,}001}{(s+0{,}01)(s+0{,}14)}$$

Det reglersystem som skall studeras har två ingångar. En metod att kompensera dylika system återges av följande figur:



Beteckningar:

$G_h(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$ nollte ordningens hållkrets, samplingsperiod 1 s.

$G_1(s) = \frac{0,25}{s+0,25}$ flödesregulator mm tidskonstant 4 s.

$G_2(s) = 0,3$

$G_3(s) = \frac{0,001}{(s+0,01)(s+0,14)}$

Den kemiska analysen antas ha överföringsfunktionen 1, men signalen i återföringsgrenen är diskret.

Två digitala regulatorer D_1 och D_2 har införts. Om störningen och referensvariabeln betraktas separat kan utvariabeln uttryckas som följande z-transformer:

$$x_2(z) = \frac{G_hG_1G_3(z)\left[D_1(z)+D_2(z)\right]}{1+G_hG_1G_3(z)D_1(z)}\, x_{2r}(z) \qquad (1)$$

$$x_{2u}(z) = \frac{U\,G_2G_3(z)}{1+G_hG_1G_3(z)D_1(z)} \qquad (2)$$

Man observerar att systemets svar till följd av störningen är oberoende av $D_2(z)$. Här antas att störningen kommer in i form av en stegändring.

Sätt $G(z)=G_hG_1G_3(z)$, där alltså $G(z)=\mathcal{Z}\left[G_h(s)G_1(s)G_3(s)\right]$

Beräkning av ingående z-transformerna.

$$G(s)=\frac{2{,}5\cdot 10^{-4}\,(1-e^{-s})}{s(s+0{,}01)(s+0{,}14)(s+0{,}25)}$$ som ger

$$G(z)=\frac{0{,}714\ 10^{-4}\,z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2})}{(1-0{,}990z^{-1})(1-0{,}869z^{-1})(1-0{,}779z^{-1})}$$

$$U\ (s)G\ (s)G\ (s)=\frac{3\cdot 10^{-4}}{s\ (s+0{,}01)(s+0{,}14)}$$ som ger

$$U\ G\ G\ (z)=\frac{0{,}214\cdot 10^{-4}\,z^{-1}(8+5z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0{,}990z^{-1})(1-0{,}896z^{-1})}$$

$$U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Först gäller det att minimera effekten från störningen u . Av formel (2) sid 6 framgår att motsvarande pulsöverföringsfunktion inte kan erhållas. Inför därför följande "pulsöverföringsfunktion" som gäller för en viss insignal:

$$K(z)=\frac{U\ G_2G_3(z)}{U\ (z)}\ \frac{1}{1+D_1(z)G(z)} \tag{3}$$

Om man nu skall specificera denna överföringsfunktion, vilka krav skall man då ställa på den?

Stegfunktionen u(s) skall ge stationära felet 0. Då måste enligt slutvärdesteoremet för z-transformer gälla att

$$K(z)=(1-z^{-1})E_1(z) \tag{4}$$

där $E_1(z)$ är ett ännu icke specificerat polynom i z .

Lös ut $D_1(z)$ ur (3):

$$D_1(z)=\frac{U\ G_2G_3(z)-K(z)U(z)}{G(z)K(z)U(z)} \tag{5}$$

Härav framgår att de nollställen hos G(z) vars belopp är större än eller lika med 1, måste elimineras av $U\ G_2G_3(z)-K(z)U(z)$.

Vidare är det klart att karakteristiska ekvationen $1+D_1(z)G(z)=0$ ej får ha rötter på eller utanför enhetscirkeln. Enligt (3) fås:

$$1+D_1(z)G(z)= \frac{U\,G_2 G_3(z)}{U(z)K(z)} \qquad (6)$$

Således tillkommer här kravet att $K(z)$ måste innehålla faktorn z^{-1} som tillika är realiserbarhetskravet.

Ur (5) erhåller vi alltså:

$$U\,G_2 G_3(z)-K(z)U(z)= (1+z^{-1}+z^{-2})\,F_2(z) \qquad (7)$$

där $F_2(z)$ är ett ännu ej specificerat polynomuttryck i z^{-1}. Av formen på $U\,G_2G_3(z)$ kan man inse att ett lämpligt utseende på $F_2(z)$ kunde tänkas vara:

$$F_2(z)= \frac{0,214\cdot 10^{-4} z^{-2}(a_0+a_1 z^{-1}+\dots)}{(1-z^{-1})(1-0,990z^{-1})(1-0,896z^{-1})} \qquad (8)$$

där faktorn z^{-2} redan här införts för att ge en realiserbar lösning på $D_1(z)$, (se sambandet (5)). Koefficienterna a_i skall fastläggas så att $K(z)$ får den enligt (4) krävda faktorn $(1-z^{-1})$. Sätt in (8) i (7) och lös ut $K(z)$:

$$K(z)= \frac{0,214\cdot 10^{-4} z^{-1}(8+5z^{-1}-z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2})(a_0+a_1 z^{-1}+\dots))}{(1-0,990z^{-1})(1-0,896z^{-2})}$$

Det visar sig nu att det räcker om man satter $a_0=\frac{13}{3}$ och övriga $a_i=0$ för att uppfylla alla specifikationer enligt ovan. Därmed erhålles:

$$K(z)= \frac{0,214\cdot 10^{-4} z^{-1}(1-z^{-1})(24+26z^{-1}+13z^{-2})}{3(1-0,990z^{-1})(1-0,896z^{-1})} \qquad (9)$$

Den sökta $D_1(z)$ blir därmed:

$$D_1(z)= 1,401\cdot 10^{4}\,\frac{(1-0,990z^{-1})(1-0,896z^{-1})(1-0,779z^{-1})}{(1-z^{-1})(24+26z^{-1}+13z^{-2})}$$

som är en realiserbar lösning.

När nu $D_1(z)$ är bestämd gäller det att kompensera systemet utan inverkan från störningen u. Enligt (1) sid 6 gäller:

$$G_0(z) = \frac{x_2(z)}{x_{2r}(z)} = \frac{G(z)\left[D_1(z)+D_2(z)\right]}{1+G(z)D_1(z)}$$

Dimensioneringen av digitalregulatorn $D_2(z)$ kan således överföras till problemet att specificera pulsöverföringsfunktionen $G_o(z)$. Då resonerar man på följande sätt: Det samplade systemet skall ha stationära felet 0 vid en insignal $x_{2r}(s)$ i form av en stegfunktion. Överföringsfunktionen $G_e(z)$, mellan reglerfelet och invariabeln måste då uppfylla följande krav:

$$G_e(z)= 1- G_o(z)= (1-z^{-1})(1+a_1 z^{-1}+ a_2 z^{-2}+\dots) \qquad (10)$$

Ur (4) löser man ut $D_2(z)$:

$$D_2(z)= \frac{1 + G(z)D_1(z)}{G(z)} G_o(z)- D_1(z)$$

Då framgår att $G_o(z)$ som nollställen måste ha alla de nollställen av $G(z)$ som ligger på eller utanför enhetscirkeln. I annat fall blir $D_2(z)$ ostabil. Realiserbarheten av $D_2(z)$ kräver dessutom att $G_o(z)$ innehåller en faktor z^{-1}. En lämplig specifikation synes därför vara:

$$G_o(z) = z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2})(b_o+b_1 z^{-1}+ \dots) \qquad (11)$$

Sätt in (11) i (10) och identifiera koefficienter. Enklast blir då att sätta

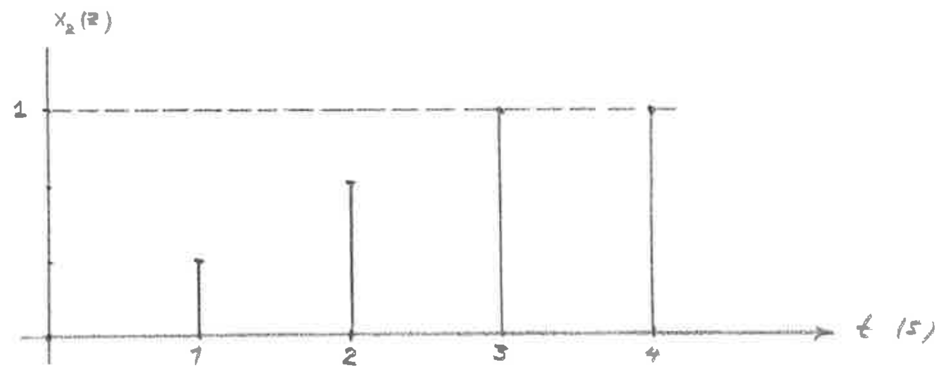
$$G_o(z)= \frac{1}{3} z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2})$$

Denna ansats ger då

$$D_2(z)= 1{,}401\cdot 10^{-4} \frac{(1-0{,}990z^{-1})(1-0{,}869z^{-1})(1-0{,}779z^{-1})(7+5z^{-1})}{(1-z^{-1})(24+ 26z^{-1}+13z^{-2})}$$

som går att realisera.

Slutligen kan det vara intressant att se insvängningsförloppet:



RESULTAT.

För att systemet skall uppfylla specifikationerna kan de samplade regulatorerna ges följande överföringsfunktioner:

$$D_1(z) = 1{,}401 \cdot 10^{-7} \frac{(1-0{,}990z^{-1})(1-0{,}896z^{-1})(1-0{,}779z^{-1})}{(1-z^{-1})(24+26z^{-1}+13z^{-2})}$$

$$D_2(z) = 1{,}401 \cdot 10^{-7} \frac{(1-0{,}990z^{-1})(1-0{,}896z^{-1})(1-0{,}779z^{-1})(7+5z^{-1})}{(1-z^{-1})(24+26z^{-1}+13z^{-2})}$$

Dessa pulsöverföringsfunktioner går att realisera med gängse metoder.

SLUTORD.

När ett dimensioneringsproblem har lösts, ställer man sig osökt frågan om det ändå inte finns andra och bättre lösningar på problemet. Svaret på denna fråga är naturligtvis ett otvetydigt "JA". Problemet går att lösa med ett antal olika typer och konfigurationer av samplade regulatorer. Förmodligen kan problemet även lösas med hjälp av någon kontinuerlig regulator.

Det här förelagda problemet kan utvidgas ytterligare. Man kan t.ex. dimensionera systemet för andra testsignaler. Principiellt blir lösningsmetoden den samma, varför någon sådan utvidgning ej företagits. Systemet kunde även ha dimensionerats för stokastiska signaler och då kunde man ha använt den från kontinuerliga länkar kända teorin. Slutligen bör det nämnas att vid dimensionering av komplicerade reglersystem man med fördel kan utnyttja simulering av system.

REFERENSER:

Donald Campbell, PROCESS DYNAMICS. (Wiley 1958)

Peter Harriot, PROCESS CONTROL. (McGraw-Hill 1964)

J. Ragazzini & G. Franklin, SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEMS. (McGraw-Hill 1958)

J. Tou, DIGITAL AND SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEMS. (McGraw-Hill 59)