

CYKLISK JAKT OCH FLYKT I PLANET

KLARA ANDERSSON

Examensarbete för Kandidatexamen
2018:K3



LUNDS UNIVERSITET

Naturvetenskaplig fakultet
Matematikcentrum
Matematik

Abstract

Let n bugs constitute the corners of an n -sided polygon. If the bugs cyclically pursue each other, the positions of the bugs will satisfy a system of ordinary differential equations, which we study. We examine the system for different n , but focus on the case $n = 3$.

When $n = 3$, the bugs form a triangle. In this case, the solution will converge to some point. We study how the convergence occur. Ignoring translation, rotation and scaling, the triangle converges to a line.

Further, we also consider when the three bugs escape from each other. If we again ignore rotation, translation and scaling, the triangle converges to an equilateral triangle.

Finally, most theory in this thesis is already known, but we present a new proof for the convergence when three bugs pursuit each other.

Populärvetenskaplig sammanfattning

Vi har $n = 3$ insekter: S_1 , S_2 och S_3 placerade i ett plan. Insekterna kommer då, oavsett hur de placeras i planet, kunna ses som hörnen i en triangel. Vi låter sedan insekterna jaga varandra cykliskt. Hur ser vägen ut som insekterna tar? Redan 1877 formulerade Edouard Lucas denna fråga och sedan dess har problemet studerats och även kompletterats med nya frågor av flera forskare. Till exempel kan man fråga sig om alla insekter kommer att kollidera samtidigt eller inte. Dessutom kan antalet insekter ökas. I den här uppsatsen kommer vi framförallt att fokusera på när insekterna bildar en (ickedegenererad) triangel. I det fallet kommer alla insekterna att krocka samtidigt, även om en insekt är långt ifrån de två andra, så att triangeln som bildas är oliksidig. Om antalet insekter är större är det inte säkert att alla krockar samtidigt.

Låt nu antalet insekter vara tre. Insekterna kommer alltså att krocka samtidigt, men hur rör de sig i förhållande till varandra fram tills kollisionen? Det kan visas att om insekternas startpositioner inte bildar en liksidig triangel, så kommer insekternas positioner gå mot att ligga på en linje. För ett större antal insekter verkar det som att så länge $n < 7$ går insekterna mot att ligga på en linje, vilket överensstämmer med fallet ovan med tre insekter. Däremot om $n \geq 7$ tycks insekterna konvergera mot en regelbunden polygon innan kollisionen sker.

Som nämnades tidigare, är det inte säkert att alla insekter krockar samtidigt om antalet insekter är fler än tre. Om vi har fyra insekter kommer inte alla att krocka samtidigt om insekternas startpositioner bildar en konkav fyrhörning. Däremot kommer de kollidera samtidigt om fyrhörningen som insekterna utgör är konvex. Om antalet insekter är fler än fyra, är det vanligaste att alla insekter krockar samtidigt.

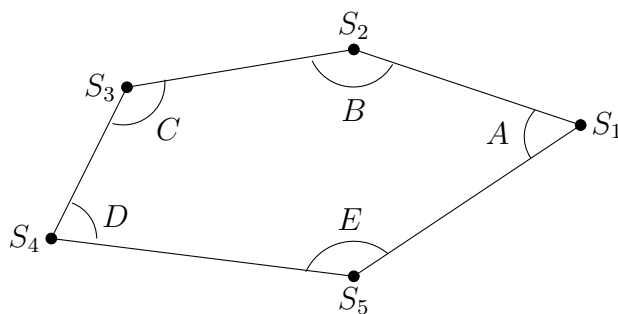
Vidare, kan insekterna istället fly från varandra. Även här fokuserar vi på $n = 3$. I det fallet kommer triangeln som insekterna bildar att expandera obegränsat men vinklarna kommer konvergera mot $\frac{\pi}{3}$. Triangeln går alltså mot att bli liksidig.

Tack

Jag vill tacka min handledare Erik Wahlén för utmärkt handledning under arbetet med uppsatsen, för hans hjälp och engagemang, samt för en lärorik och givande tid.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Historik	1
1.2	Existens och entydighet	2
2	Det symmetriska fallet med n insekter	4
3	Det osymmetriska fallet med tre insekter	6
3.1	Tre insekter jagar varandra	6
3.1.1	Liapunovfunktion till systemet	9
3.1.2	Lösningen konvergerar mot ∂D	13
3.1.3	Lösningen konvergerar inte mot hörnen i ∂D	14
3.2	Tre insekter flyr från varandra	18
4	Vad sker när $n > 3$?	20
4.1	n insekter jagar varandra	20
4.2	n insekter flyr från varandra	22



Figur 1: Fem insekter utgör hörnen i en polygon.

1 Inledning

Ett problem som återkommande har studerats är "insektsproblemet". Problemet har återgetts i olika versioner, men gemensamt för alla är att ett antal insekter (eller något annat djur) bildar hörnen i en polygon, som i figur 1. Här kommer vi även att anta att insekterna ligger i ett plan. Genom att låta insekterna jaga varandra cykliskt kan man studera kurvorna som bildas fram tills dess att insekterna kommer ikapp varandra. Dessutom kan frågan ställas huruvida alla insekter kolliderar samtidigt eller inte. Vi kommer här anta att alla insekter rör sig med samma konstanta hastighet.

Vidare kommer vi även studera när insekterna flyr från varandra. Polygonen som insekterna utgör kommer då att expandera och även rotera. Under vissa antaganden kommer dock vinklarna i polygonen att konvergera, så att polygonen går mot att bli regelbunden.

1.1 Historik

Redan 1877 formulerade Edouard Lucas följande problem i [9]: "Tre hundar placeras i hörnen av en liksidig triangel. De rör sig efter varandra. Vad för kurva beskrivs av var och en av dem?" Sedan dess har problemet återgetts i olika versioner. 1918 omnämner Harry Bateman problemet i [7] där triangeln nu är oregelbunden. Bateman hänvisar till Frank Morley, som var intresserad av hur hundarna kommer ikapp varandra. Kommer alla hundar att kollidera samtidigt eller inte? 1962 generaliserar Clapham problemet i [10] till att gälla n insekter.

Om vi återgår till fallet med tre insekter, visade Klamkin och Newman [11] 1971 att tre insekter som jagar varandra alltid kommer att kollidera samtidigt, oavsett

hur de är placerade från början. Behroozi och Gagnon [8] visade 1979 att det samma gäller för fyra insekter, om deras startpositioner bildar en konvex fyrhörning. Slutligen beskrev Richardson [15] 2001 villkoren för att separata kollisioner ska kunna ske för n insekter.

Som tidigare nämdes kan insekterna istället fly från varandra. Arnold och Zharnitsky visar i [5] att i fallet $n = 3$, kommer konvergens ske mot en liksidig triangel. Därtill visas det i [6] att när $n = 4$ beror konvergens på insekternas startpositioner. Slutligen visar Arnold, Baryshnikov och Liberzon i [4] att under vissa villkor, konvergerar en n -hörning till den regelbundna polygonen med n hörn.

1.2 Existens och entydighet

Antag att n insekter, i planet, utgör hörnen i en polygon. Varje insekts position i planet ges då av $S_i(t) = (x_i(t), y_i(t)) \in \mathbb{R}^2$. Därmed har vi

$$S = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Derivatans ges av $\dot{S} = f(S)$, där $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ och $f(S) = (\dot{S}_1(t), \dot{S}_2(t), \dots, \dot{S}_n(t))$. Från [11] ges hastigheten för insekt i av

$$\dot{S}_i(t) = \frac{S_{i+1}(t) - S_i(t)}{|S_{i+1}(t) - S_i(t)|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

och där $S_{n+1}(t) = S_1(t)$. Det är (1) som vi senare kommer studera med ett varierande antal insekter. Dock kommer vi först visa, med resonemang från [11], att det existerar en unik lösning till (1).

För att visa existens och entydighet kan det först noteras att (1) är oändligt deriverbar på hela \mathbb{R}^{2n} förutom i de punkter där $S_i = S_{i+1}$ för något i , det vill säga där två insekter har krockat. Kontinuerlig deriverbarhet implicerar i sin tur Lipschitzkontinuitet på samma område (se [2], s.31).

Definition 1.1. Låt $f(t, x)$ vara en funktion som är definierad på $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ ($N = 2n$ i det här fallet). Då är f lokalt Lipschitz i en punkt $(t_0, x_0) \in \Omega$ om det existerar en omgivning $Z \subset \Omega$ av (t_0, x_0) och $M > 0$ sådant att

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M|x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in Z.$$

Genom följande sats följer då lokal existens och entydighet.

Sats 1.2 (Picard–Lindelöf [17]). Låt $f \in C(Z, \mathbb{R}^N)$ och $(t_0, x_0) \in Z$, där Z är en öppen delmängd av \mathbb{R}^{N+1} . Om f är lokalt Lipschitz i det andra argumentet, likformigt i det första, finns det en entydig lösning på något intervall I som innehåller t_0 .

Givet lokal existens och entydighet, är det även av intresse att undersöka om lösningen är global eller inte. Det finns två fall som skulle kunna medföra att lösningen inte är global. Första fallet ges av att $\max_i |S_i(t)| \rightarrow \infty$ då $t \rightarrow T$, där T är ändlig. Dock kan det inte inträffa, då derivatan av S är begränsad: $|\dot{S}_i(t)| = 1$ för alla i . Andra fallet utgörs av att några insekter krockar vid någon tid T , det vill säga $\min_i |S_i(t) - S_{i+1}(t)| \rightarrow 0$ då $t \rightarrow T$. I [15] visas det att fall två alltid inträffar för samtliga insekter, så lösningen existerar endast på ett begränsat intervall.

Förutom att låta insekterna jaga varandra kan de istället fly från varandra [5]. Det motsvaras av att i första fallet vända på tiden. Därmed kommer hastigheten av varje insekt istället att bli

$$\dot{S}_i(t) = \frac{S_i(t) - S_{i+1}(t)}{|S_i(t) - S_{i+1}(t)|}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Även för (2) existerar en unik lösning, genom samma resonemang som för jaktproblemet. Vi är också intresserade av vilket intervall lösningen existerar på. Eftersom

$$\frac{d}{dt} |S_{i+1} - S_i| = \left\langle \frac{(S_{i+1} - S_i)}{|S_{i+1} - S_i|}, \frac{(S_{i+1} - S_{i+2})}{|S_{i+1} - S_{i+2}|} \right\rangle + 1 = \cos \psi_{i+1} + 1 \geq 0$$

är

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n |S_{i+1} - S_i| = n + \sum_{i=1}^n \cos \psi_{i+1} \geq 0,$$

där ψ_{i+1} är vinkeln $S_i S_{i+1} S_{i+2}$. Om vi antar att $S_j(0) \neq S_k(0)$ för $j \neq k$ där $j, k = 1, \dots, n$, så är samtliga sidor i polygonen positiva och då derivatan är icke-negativ följer det att inga insekter kommer att krocka. Lösningen existerar därmed för all framtid.

2 Det symmetriska fallet med n insekter

Antag att n insekter utgör hörnen i en n -sidig regelbunden polygon, med startpositionerna $S_1(0), S_2(0), \dots, S_n(0)$. Polygonen antas ha mittpunkt i origo. Då ges hastigheten av varje insekt av (1). Vi söker nu en lösning till (1) som ges av en regelbunden polygon för alla t . Genom att följa resonemanget i [11] får vi följande.

Inledningsvis kan det konstateras att då insekterna utgör en regelbunden polygon gäller följande samband

$$S_{i+1}(t) = \omega S_i(t), \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}. \quad (3)$$

Med hjälp av (3) kan nu (1) skrivas på formen

$$\dot{S}_i = \frac{S_i(\omega - 1)}{|S_i||\omega - 1|}. \quad (4)$$

Därutöver kan även S_i skrivas om till polära koordinater; $S = re^{i\theta}$, och derivatan av S ges då av

$$\dot{S}_i = \dot{r}e^{i\theta} + ri\dot{\theta}e^{i\theta}. \quad (5)$$

Därmed finns två uttryck för \dot{S}_i ; (4) och (5). Genom att sätta dessa uttryck lika med varandra får vi

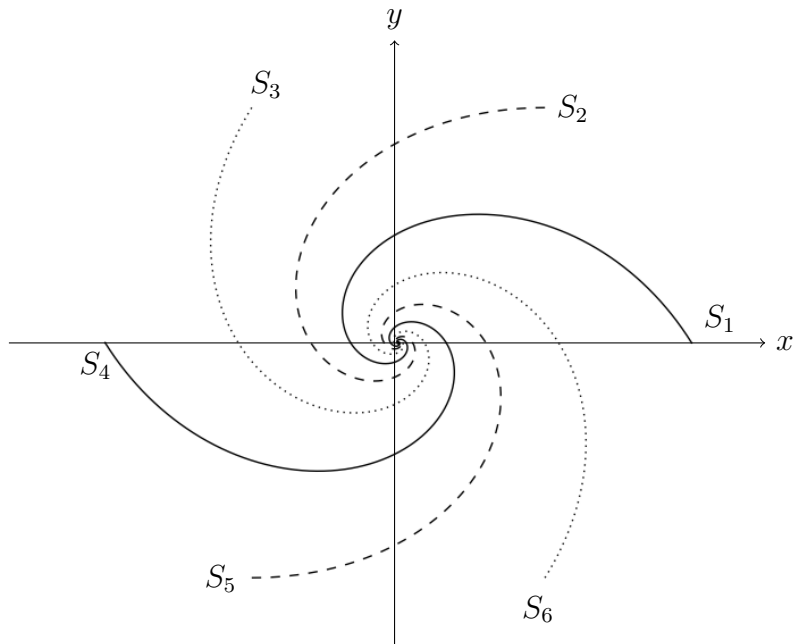
$$\begin{cases} \dot{r} = -\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ \dot{\theta} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{r}. \end{cases}$$

Lösningen av systemet ges av

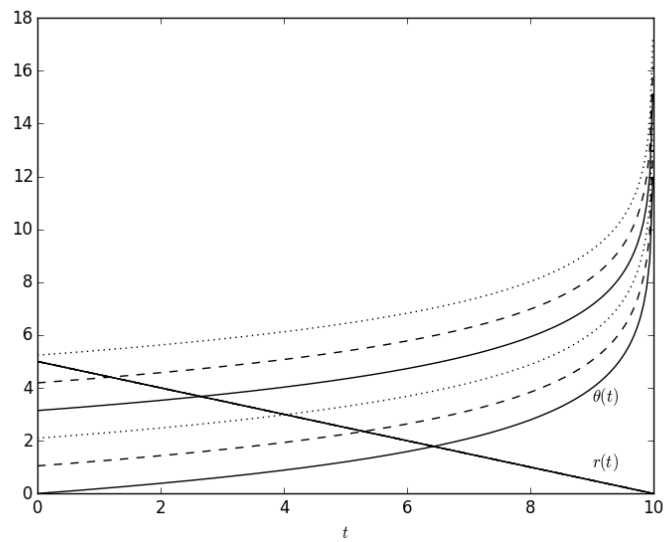
$$\begin{cases} r = r_0 - t \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ \theta = \theta_0 - \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \log\left(\frac{r_0 - t \sin\frac{\pi}{n}}{r_0}\right). \end{cases} \quad (6)$$

där r_0 är startpositionens avstånd till origo och θ_0 vinkeln till den positiva x -axeln. Därmed har vi en lösning där insekterna utgör en regelbunden polygon för alla t . Sedan tidigare är entydighet för (1) visat, vilket ger att om insekterna vid någon tidpunkt bildar en regelbunden polygon, så kommer de göra det för alla t .

Ekvationerna i (6) ger insektens position i polära koordinater, där r_0 och θ_0 ger den ursprungliga positionen. I figur 2 är funktionerna $r(t)$ och $\theta(t)$ ritade i polära koordinater, för sex insekter som startar på avståndet fem från origo. Från (6) kan vi också få tidpunkten då insekterna kolliderar. Eftersom $r = 0$ vid kollisionen, har vi att kollisionen sker vid $T = \frac{r_0}{\sin\frac{\pi}{n}}$. Vidare får vi att $\theta(t) \rightarrow \infty$ då $t \rightarrow T$, så insekterna roterar oändligt många varv innan de kolliderar. I figur 3 visas fallet med sex insekter.



Figur 2: Insekternas väg fram till krocken.



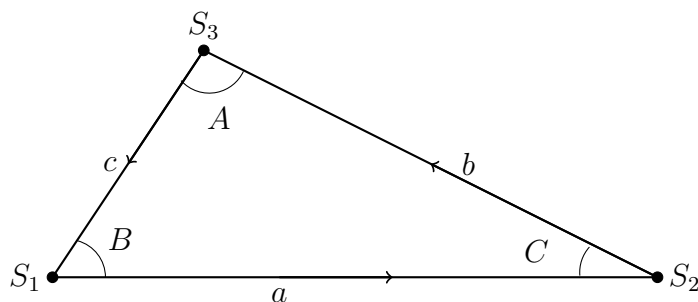
Figur 3: Funktionerna $r(t)$ och $\theta(t)$ för de sex insekterna i figur 2. Då funktionen $r(t)$ är samma för samtliga insekter, kolliderar alla insekter samtidigt. $\theta(t)$ skiljer sig mellan insekterna. Dock har vi $\theta(t) \rightarrow \infty$ då $t \rightarrow T$, för alla insekter.

3 Det osymmetriska fallet med tre insekter

Vi studerar nu fallet med tre insekter. Triangeln, som bildas av insekternas initiala placering, antas vara oregelbunden. Vi förutsätter också att samtliga insekter rör sig med samma hastighet. Här kommer vi först att studera när insekterna jagar varandra, för att sedan undersöka fallet när de istället flyr från varandra.

3.1 Tre insekter jagar varandra

Givet att de tre insekterna jagar varandra kan det visas, med resonemanget som förs i [11], att samtliga insekter kommer kollidera samtidigt och att det sker i ändlig tid. Givet sidorna a , b och c , med respektive motstående vinklar A , B och C , se figur 4, ges ett antal ekvationer för derivatan av sidorna och vinklarna genom följande resonemang.



Figur 4: Triangeln där S_1 , S_2 och S_3 utgör hörnen.

Längden av sida a ges av

$$a = |S_2 - S_1|.$$

Derivering med avseende på t ger

$$\dot{a} = \frac{1}{\sqrt{|S_2 - S_1|^2}} \langle (S_2 - S_1), (\dot{S}_2 - \dot{S}_1) \rangle$$

och som vidare kan skrivas om till

$$\dot{a} = -\frac{\langle (S_1 - S_2), (S_3 - S_2) \rangle}{|S_1 - S_2||S_3 - S_2|} - 1.$$

Genom att använda sambandet mellan skalärprodukt och vinklar, kan \dot{a} ännu en gång skrivas om till

$$\dot{a} = -\cos C - 1. \quad (7)$$

På liknande sätt får vi \dot{b} och \dot{c} ,

$$\dot{b} = -\cos A - 1, \quad \dot{c} = -\cos B - 1. \quad (8)$$

Nästa steg är att hitta förändringshastigheten för vinklarna. Vi tittar speciellt på vinkel A . I första steget används cosinussatsen: $2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$. Vidare ger derivering av denna

$$-bc\dot{A} \sin A = b\dot{b} + c\dot{c} - a\dot{a} - (b\dot{c} + \dot{b}c) \cos A. \quad (9)$$

Genom att ersätta \dot{a} , \dot{b} och \dot{c} med (7) och (8) och även använda likheten $b(\sin A \sin B - \cos A \cos B + 1) = c(\cos A - \cos B) + a(1 + \cos C)$ i (9) fås slutligen den efterfrågade förändringshastigheten för A ,

$$\dot{A} = \frac{\sin A}{b} - \frac{\sin B}{c}. \quad (10)$$

Genom att använda samma resonemang erhålls även \dot{B} och \dot{C} :

$$\dot{B} = \frac{\sin B}{c} - \frac{\sin C}{a}, \quad (11)$$

$$\dot{C} = \frac{\sin C}{a} - \frac{\sin A}{b}. \quad (12)$$

Givet ovanstående ekvationer för \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} , \dot{A} , \dot{B} och \dot{C} kan följande bevisas.

Sats 3.1. *Låt insekterna S_1, S_2 och S_3 utgöra hörnen i en triangel. Om de jagar varandra cykliskt, kommer alla att kollidera samtidigt och det kommer ske vid en tidpunkt T , som är ändlig.*

Bevis. Från (7) och (8) är det klart att \dot{a} , \dot{b} och \dot{c} är icke-positiva då cosinus endast kan anta värden på intervallet $[-1, 1]$. Därmed är \dot{a} , \dot{b} och \dot{c} monoton, så det existerar ett gränsvärde för samtliga. Antag nu att $c \rightarrow 0$, medan $a \rightarrow a_0 > 0$ och $b \rightarrow b_0 > 0$ när $t \rightarrow T$, det vill säga två insekter krockar först. Vidare fås då, för t tillräckligt nära T ,

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{c} < 0.$$

Genom att därefter använda sinussatsen kan ovanstående olikhet skrivas om till

$$\frac{\sin A}{b} - \frac{\sin B}{c} < 0$$

där första termen har multiplicerats med $\frac{\sin A}{a}$ och den andra termen med $\frac{\sin B}{b}$. Från (10) ges det då att $\dot{A} < 0$. Det ska också noteras att vinkeln A ligger i intervallet $(0, \pi)$. Skälet är att om till exempel $A = \pi$, så följer det att de två resterande vinklarna måste vara 0; triangeln är degenererad. Givet dessa vinklar, är \dot{A}, \dot{B} och $\dot{C} = 0$, vilket ger att dessa vinklar är en invariant mängd. Alltså har vi att $A \in (0, \pi)$ förutsatt att triangeln inte är degenererad. Sedan tidigare har vi att $\dot{A} < 0$, så A har ett gränsvärde när $t \rightarrow T$ som ligger i intervallet $(0, \pi)$.

Därmed återstår att undersöka gränsvärdet till vinkeln B . Givet $a > a_0$ och (11) fås följande för \dot{B}

$$\dot{B} - \frac{\sin B}{c} = -\frac{\sin C}{a} > -\frac{1}{a_0}. \quad (13)$$

Genom att integrera (13) följer det att $B + \frac{t}{a_0}$ är växande och uppåt begränsat av $\pi + \frac{T}{a_0}$. Därmed existerar det ett ändligt gränsvärde B_0 av B då $t \rightarrow T$. Vidare ger även integrering av (13)

$$B(T) - B(0) - \int_0^T \frac{\sin B}{c} dt > -\frac{T}{a_0} \quad (14)$$

och då integralen i (14) är positiv och nedåt begränsad, följer det att den är konvergent.

Nästa steg är nu att låta c vara den oberoende variabeln i ovan nämnda integral. Genom att fortsätta följa argumentationen i [11], men även i [13] får vi följande resonemang. Till att börja med utnyttjar vi att $\frac{dc}{dt} = -1 - \cos B$ och $\frac{\sin B}{1 + \cos B} = \tan \frac{B}{2}$. Det ger följande omskrivning

$$\int_0^T \frac{\sin B}{c} dt = - \int_{c(0)}^0 \frac{\sin B}{1 + \cos B} \frac{dc}{c} = \int_0^{c(0)} \tan \frac{B}{2} \frac{dc}{c}.$$

Givet att integralen är konvergent och att $c \rightarrow 0$ vid den undre integrationsgränsen, måste även $\tan \frac{B}{2} \rightarrow 0$ för att integralen inte ska divergera. Samtidigt är

$$\lim_{t \rightarrow T} B = \lim_{c \rightarrow 0} B = B_0$$

vilket leder till att

$$\lim_{c \rightarrow 0} \tan \frac{B}{2} = \tan \frac{B_0}{2} = 0 \quad (15)$$

och då ger (15) att $\lim_{t \rightarrow T} B = B_0 = 0$. Samtidigt så antogs det i början av beviset att c efter någon tidpunkt blivit den kortaste sidan. Det gör att vid samma tidpunkt kommer C att ha blivit den minsta vinkeln. Dock visades det ovan att $\lim_{t \rightarrow T} B = 0$ och sålunda följer det att även $\lim_{t \rightarrow T} C = 0$

Sammanfattningsvis har vi

$$\lim_{t \rightarrow T} A < \pi, \quad \lim_{t \rightarrow T} B = 0, \quad \lim_{t \rightarrow T} C = 0.$$

Detta är en motsägelse då $A + B + C = \pi$ och därför måste alla insekter krocka samtidigt.

Avslutningsvis kan det även visas att tidpunkten T som krocken sker vid, är ändlig. Från (7) och (8) fås det att

$$\dot{a} + \dot{b} + \dot{c} = -(3 + \cos A + \cos B + \cos C). \quad (16)$$

Genom att använda Lagranges multiplikatormetod kan det visas att $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$. Därefter kan (16) integreras och skrivs om till

$$-\frac{9}{2}t \leq a + b + c - a(0) - b(0) - c(0) \leq -4t.$$

Vid $t = T$ är $a(T) = b(T) = c(T) = 0$. Det ger att

$$4T \leq a(0) + b(0) + c(0) \leq \frac{9}{2}T$$

och slutligen har vi då

$$\frac{a(0) + b(0) + c(0)}{\frac{9}{2}} \leq T \leq \frac{a(0) + b(0) + c(0)}{4}.$$

□

3.1.1 Liapunovfunktion till systemet

I föregående avsnitt visades det att alla insekter kolliderar samtidigt och att det sker vid någon ändlig tid T . Vidare är det då av intresse att undersöka hur lösningen beter sig fram tills $t = T$.

I (10), (11) och (12) ges ekvationerna för \dot{A} , \dot{B} och \dot{C} . Givet vinkelsumman för en triangel kan till exempel vinkeln C uttryckas i termer av A och B . Genom att även använda sinussatsen kan \dot{A} och \dot{B} skrivas om till

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{dA}{dt} = \frac{1}{c \sin A \sin B} (\sin^2 A \sin(A + B) - \sin A \sin^2 B), \\ \dot{B} &= \frac{dB}{dt} = \frac{1}{c \sin A \sin B} (\sin A \sin^2 B - \sin^2(A + B) \sin B). \end{aligned} \quad (17)$$

Ovanstående ekvationssystem är inte autonomt. Det kan dock göras autonomt genom variabelbytet

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{1}{c(t) \sin A(t) \sin B(t)} dt,$$

som ger

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c(t) \sin A(t) \sin B(t)}. \quad (18)$$

Vi får då följande autonoma system

$$\begin{aligned} A' &= \frac{d\tilde{A}}{d\tau} = \sin^2 \tilde{A} \sin(\tilde{A} + \tilde{B}) - \sin \tilde{A} \sin^2 \tilde{B}, \\ B' &= \frac{d\tilde{B}}{d\tau} = \sin \tilde{A} \sin^2 \tilde{B} - \sin^2(\tilde{A} + \tilde{B}) \sin \tilde{B} \end{aligned} \quad (19)$$

där $(\tilde{A}, \tilde{B})(\tau) = (A, B)(t)$. Observera att \tilde{A} är utbytt mot A' (och \tilde{B} mot B') för att tydliggöra att vi nu deriverar med avseende på τ istället för t . Vidare är det känt från föregående avsnitt att insekterna krockar vid tiden T och att det ursprungliga systemet (17) endast existerar fram till den tidpunkten. Det motsvaras av att $\tau \rightarrow \infty$ i det autonoma systemet, vilket visas av följande resonemang

$$\tau(T) = \int_0^T \frac{1}{c(s) \sin A(s) \sin B(s)} ds \geq \int_0^T \frac{1}{c(s)} ds. \quad (20)$$

Då ger medelvärdessatsen att

$$c(t) - c(T) = \dot{c}(\xi)(t - T), \quad \xi \in (t, T).$$

Eftersom $-\dot{c} = \cos B + 1 \leq 2$ och $c(T) = 0$ har vi att

$$c(t) \leq 2(T - t)$$

och därmed även att

$$\frac{1}{2(T - t)} \leq \frac{1}{c(t)}.$$

Slutligen har vi

$$\int_0^T \frac{1}{2(T - s)} ds \rightarrow \infty$$

då $s \rightarrow T$ och det följer då från (20) att även $\tau \rightarrow \infty$ då $t \rightarrow T$.

Låt $D = \{(\tilde{A}, \tilde{B}) : \tilde{A} > 0, \tilde{B} > 0, \tilde{A} + \tilde{B} < \pi\}$. Från (19) har vi att $\tilde{A}' = 0$ på \tilde{B} -axeln och $\tilde{B}' = 0$ på \tilde{A} -axeln. Vi har även att $\tilde{A}' + \tilde{B}' = 0$ på linjen $\tilde{A} + \tilde{B} = \pi$. En lösning som börjar på någon av dessa linjer kommer alltså att stanna på linjen. Då olika lösningar inte kan korsa varandra, har vi att D är en invariant mängd.

Definition 3.2 ([17]). $\Phi(t, x)$ definieras som lösningen till $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \hat{x}$ om $\Phi(0, x) = \hat{x}$. Vidare är $\Phi : W \rightarrow M$, där M är en öppen delmängd av \mathbb{R}^n och

$$W = \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times M$$

där I_x är det maximala intervall som lösningen existerar på. När startpunkten \hat{x} är oviktig kan $\Phi(t, x)$ förenklas till $\Phi(t)$.

Definition 3.3 ([17]). Låt funktionen f ha en jämviktpunkt x_0 med någon omgivning Z . Om $L : Z(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion där $L(x_0) = 0$, $L(x) \neq 0$ för $x \neq x_0$ och

$$L(\Phi(t_0)) \geq L(\Phi(t_1)), \quad t_0 < t_1, \quad \Phi(t_j) \in U(x_0) \setminus \{x_0\} \quad (21)$$

så är L en Liapunovfunktion med avseende på x_0 . L är dessutom en strikt Liapunovfunktion om likheten i (21) aldrig inträffar.

Fortsättningsvis är nu målet att hitta en Liapunovfunktion till (19). Definiera funktionen

$$L(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{3}{2} - (\cos \tilde{A} + \cos \tilde{B} + \cos \tilde{C}),$$

där $\tilde{C} = \pi - \tilde{A} - \tilde{B}$. Vi kommer nu visa att $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ är den enda jämviktpunkten i (19) och att $L(\tilde{A}, \tilde{B})$ är en Liapunovfunktion med avseende på $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ i flyktproblemet. Funktionen kommer dock även vara användbar när vi studerar jaktproblemet, även om den inte är en Liapunovfunktion i det fallet.

Genom Lagranges multiplikator metod [1] visar det sig att $L(\tilde{A}, \tilde{B})$ en extrempunkt i $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Då följer det från

$$\frac{d}{d\tau} L(\Phi(\tau, (\tilde{A}, \tilde{B}))) = \text{grad}(L)(\Phi(\tau, (\tilde{A}, \tilde{B}))) \Phi'(\tau, (\tilde{A}, \tilde{B})) \quad (22)$$

i [17] att $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ är den enda möjliga jämviktpunkten till (19). Insättning av $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ i (19) ger att det är en jämviktpunkt till systemet. $L(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 0$ så funktionen uppfyller första kravet till att vara en Liapunovfunktion.

Följande lemma återfinns i [5]. Dock presenteras det här med ett modifierat bevis.

Lemma 3.4. *Låt $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ och $a + b \geq c$, $b + c \geq a$, $a + c \geq b$. Då är*

$$W(a, b, c) = ab^3 + a^3c + bc^3 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 \geq 0, \quad (23)$$

med likhet om och endast om $a = b = c$.

Bevis. Låt $a = x + y$, $b = y + z$ och $c = x + z$. Då har vi att $c + a - b = 2x \geq 0$ eftersom ett antagande i satsen var att $a + c \geq b$. Därmed är $x \geq 0$ och på liknande sätt kan det visas att $y \geq 0$ och $z \geq 0$. Vidare kan (23) skrivas om till

$$W = 2(x^3y + y^3z + xz^3 - xyz(x + y + z))$$

Nästa steg är att använda den viktade olikheten för algebraiskt och geometriskt medelvärde, se [16],

$$\frac{w_1 F_1 + w_2 F_2 + w_3 F_3}{w_1 + w_2 + w_3} \geq \sqrt[w_1 + w_2 + w_3]{F_1^{w_1} F_2^{w_2} F_3^{w_3}}, \quad (24)$$

där $F_1, F_2, F_3 \geq 0$ och $w_1, w_2, w_3 > 0$ med $w = w_1 + w_2 + w_3$. Likhet inträffar endast om $F_1 = F_2 = F_3$. Om $F_1 = x^3y$, $F_2 = y^3z$ och $F_3 = xz^3$, kan vi visa att olikheten

$$\frac{w_1x^3y + w_2y^3z + w_3xz^3}{w_1 + w_2 + w_3} \geq \sqrt[w]{(x^3y)^{w_1}(y^3z)^{w_2}(xz^3)^{w_3}} = x^2yz$$

gäller genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2(w_1 + w_2 + w_3) = 3w_1 + w_3 \\ w_1 + w_2 + w_3 = w_1 + 3w_2 \\ w_1 + w_2 + w_3 = w_2 + 3w_3 \end{cases}$$

som har lösningen $w_1 = 4, w_2 = 1$ och $w_3 = 2$. Därmed är

$$\frac{4}{7}x^3y + \frac{1}{7}y^3z + \frac{2}{7}xz^3 \geq x^2yz. \quad (25)$$

På liknande sätt ges ytterligare två olikheter. De är

$$\frac{2}{7}x^3y + \frac{4}{7}y^3z + \frac{1}{7}xz^3 \geq xy^2z \quad \text{och} \quad \frac{1}{7}x^3y + \frac{2}{7}y^3z + \frac{4}{7}xz^3 \geq xyz^2. \quad (26)$$

Slutligen adderas olikheterna i (25) och (26) som då ger

$$x^3y + y^3z + xz^3 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

Sedan tidigare är det givet att likhet fås om och endast om $x^3y = y^3z = xz^3$. Därmed har vi även

$$x^3 = y^2z \quad (27)$$

$$x^2y = z^3 \quad (28)$$

$$y^3 = xz^2 \quad (29)$$

Därmed ger $\frac{(27)^2}{(28)}$ att $\frac{x^6}{y^3} = \frac{y^4}{x}$ om $x, y > 0$, som kan förenklas till $x^7 = y^7$ och därmed är $x = y$. På liknande sätt får vi tillslut att $x = y = z$. Alltså inträffar likhet endast när $x = y = z$. Om $x = y = z$ får vi också att $a = b = c$. Därmed har vi likhet i (23) om och endast om $a = b = c$. \square

Vidare har vi

$$L'(\tilde{A}, \tilde{B}) = \tilde{A}' \sin \tilde{A} + \tilde{B}' \sin \tilde{B} + \tilde{C}' \sin \tilde{C}.$$

Då \tilde{A}' och \tilde{B}' är givna sen tidigare och $\tilde{C}' = -\tilde{A}' - \tilde{B}'$ kan L' skrivas om till

$$\begin{aligned} L'(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sin^3 \tilde{A} \sin \tilde{C} + \sin^3 \tilde{B} \sin \tilde{A} + \sin^3 \tilde{C} \sin \tilde{B} \\ &\quad - \sin^2 \tilde{A} \sin^2 \tilde{B} - \sin^2 \tilde{B} \sin^2 \tilde{C} - \sin^2 \tilde{A} \sin^2 \tilde{C} \end{aligned} \quad (30)$$

Lemma 3.3 kan nu användas med $a = \sin \tilde{A}$, $b = \sin \tilde{B}$ och $c = \sin \tilde{C}$. Vi har även att

$$\sin(\tilde{A} + \tilde{B}) = \sin \tilde{A} \cos \tilde{B} + \sin \tilde{B} \cos \tilde{A}$$

vilket ger

$$\sin \tilde{A} + \sin \tilde{B} \geq \sin(\tilde{A} + \tilde{B}) = \sin \tilde{C}.$$

På liknande sätt får vi att $\sin \tilde{B} + \sin \tilde{C} \geq \sin \tilde{A}$ och $\sin \tilde{A} + \sin \tilde{C} \geq \sin \tilde{B}$, så olikheterna som antas i lemmat är uppfyllda. Därmed är $L' \geq 0$. (Genom att vända på tiden, kan flyktproblemet istället studeras. Vi får då $L' \leq 0$ och L är därmed en Liapunovfunktion m.a.p. flyktproblemet, vilket vi utnyttjar i avsnitt 3.2.) Sedan tidigare har vi att likhet inträffar i $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Genom ekvationen nedan har vi även likhet på \tilde{A} -axeln, och det kan på liknande sätt visas att $L' = 0$ när $\tilde{A} = 0$ och när $\tilde{A} + \tilde{B} = \pi$.

$$L' = \sin^3 \tilde{A} \sin \tilde{C} - \sin^2 \tilde{A} \sin^2 \tilde{C} = \sin^3(\pi - \tilde{C}) \sin \tilde{C} - \sin^2(\pi - \tilde{C}) \sin^2 \tilde{C} = 0.$$

3.1.2 Lösningen konvergerar mot ∂D

Det kan visas att lösningen konvergerar mot ∂D , på vilken $L(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{2}$. Richardson gör det i [14], men vi presenterar ett annat bevis här. Först behövs dock följande definitioner från [17].

Definition 3.5. Avståndet mellan en punkt $x \in \mathbb{R}^n$ och en mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definieras som

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|.$$

Definition 3.6. Låt $x \in M$. Då definieras ω_+ -gränsmängden av x , som de punkter $y \in M$, där $\Phi(\tau_n, x) \rightarrow y$ för någon följd $\tau_n \rightarrow \infty$.

Lemma 3.7.

$$d(\Phi(\tau, (\tilde{A}_0, \tilde{B}_0)), \partial D) \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Bevis. Sedan tidigare har vi att $\frac{d}{d\tau} L \geq 0$ i jaktproblemet, där likhet endast inträffar i $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ och i ∂D . Det följer då också, på grund av monotonicitet, att $L(\Phi(\tau, (\tilde{A}_0, \tilde{B}_0)))$ har ett gränsvärde L_0 då $\tau \rightarrow \infty$. För alla $y \in \omega_+(\tilde{A}, \tilde{B})$ finns det en sekvens $\tau_n \rightarrow \infty$ så att $\Phi(\tau_n, (\tilde{A}_0, \tilde{B}_0)) \rightarrow y$. Därmed är även

$$L(y) = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} L(\Phi(\tau_n, (\tilde{A}_0, \tilde{B}_0))) = L_0,$$

så L är konstant på $\omega_+(\tilde{A}_0, \tilde{B}_0)$. Dock är L endast konstant i punkten $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ och i mängden ∂D . Då det är en oregelbunden triangel som avses i det här avsnittet, börjar aldrig lösningen i $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ och då $\frac{d}{d\tau} L > 0$ i D förutom i precis nämnda punkt,

ger det att $\omega_+(\tilde{A}_0, \tilde{B}_0)$ utgörs av ∂D . Därmed följer (31), för om det inte gjorde det skulle vi, för något $\epsilon > 0$, ha en sekvens av punkter $\tau_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$ som gav att

$$d(\Phi(\tau_n, (\tilde{A}_0, \tilde{B}_0)), \partial D) \geq \epsilon.$$

Således har vi, för något $\delta > 0$, att

$$L(\Phi(\tau_n, (\tilde{A}_0, \tilde{B}_0))) \leq \frac{1}{2} - \delta \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Det skulle dock motsäga

$$L(\Phi(\tau_n, (\tilde{A}_0, \tilde{B}_0))) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

□

3.1.3 Lösningen konvergerar inte mot hörnen i ∂D

Sedan tidigare har vi att $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ är den enda jämviktspunkten i D . Dock har (19) även jämviktspunkterna $(0,0)$, $(\pi,0)$ och $(0,\pi)$ som ligger i ∂D . Vi visar nu att lösningen inte konvergerar mot origo, men på liknande sätt kan det visas att lösningen inte heller konvergerar mot $(0,\pi)$ och $(\pi,0)$.

Låt $\tilde{A} = r \sin \theta$ och $\tilde{B} = r \cos \theta$. Vi får då att

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{d\tau} &= \tilde{A}'\tilde{B} - \tilde{A}\tilde{B}' \\ r \frac{dr}{d\tau} &= \tilde{A}\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}'. \end{aligned}$$

Definiera därefter $U(\tilde{B}, \tilde{A}) = \tilde{A}'\tilde{B} - \tilde{A}\tilde{B}'$ och $V(\tilde{B}, \tilde{A}) = \tilde{A}\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}'$. $V(\tilde{B}, \tilde{A})$ har Taylorutvecklingen

$$V(\tilde{B}, \tilde{A}) = \tilde{A}^4 + \tilde{A}^3\tilde{B} - 2\tilde{A}^2\tilde{B}^2 - \tilde{A}\tilde{B}^3 - \tilde{B}^4 + \mathcal{O}(|(\tilde{A}, \tilde{B})|)^6.$$

Låt fjärdegradspolynomet i Taylorutvecklingen betecknas $V_4(\tilde{B}, \tilde{A})$, som på polär form skrivs

$$V_4(\tilde{B}, \tilde{A}) = r^4(\sin^4 \theta + \cos \theta \sin^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \cos^3 \theta \sin \theta - \cos^4 \theta).$$

Vidare ska det även noteras att V_4 kan skrivas som $V_4(\tilde{B}, \tilde{A}) = \tilde{B}^4 V_4(1, \tilde{A}/\tilde{B})$, där

$$V_4(1, x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 1.$$

Genom Descartes teckenregel ser vi att $V_4(1, x)$ har precis ett positivt nollställe x_0 . Därmed har V_4 konstant tecken i en sektor $\{(r, \theta) : 0 \leq \theta < \theta_0\}$ och motsatt tecken i $\{(r, \theta) : \theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$. Då

$$x = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$$

ger $\theta = 0$ att $V_4(1,0) = -1$. Därmed finns det en sektor $\{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq \theta_1\}$ där $V_4 \leq -\frac{3}{4}$. Vidare ger det, för r tillräckligt litet och $\theta < \theta_1$, att

$$rr' \leq -\frac{3}{4}r^4 + \mathcal{O}(r^6) = r^4\left(-\frac{3}{4} + \mathcal{O}(r^2)\right).$$

Genom att dessutom välja ett r så att $\mathcal{O}(r^2) \leq \frac{1}{4}$ får vi slutligen att

$$r' \leq -\frac{1}{2}r^3 \tag{32}$$

vilket även ger att $r(t)$ monoton funktion.

Vidare är

$$\begin{aligned} U(\tilde{B}, \tilde{A}) &= \tilde{B}\tilde{A}' - \tilde{A}\tilde{B}' \\ &= \tilde{A}\tilde{B}\left(\frac{\sin^2 \tilde{A}}{\tilde{A}} \sin(\tilde{A} + \tilde{B}) - \frac{\sin \tilde{A}}{\tilde{A}} \sin^2 \tilde{B} - \frac{\sin^2 \tilde{B}}{\tilde{B}} \sin \tilde{A} + \frac{\sin \tilde{B}}{\tilde{B}} \sin^2(\tilde{A} + \tilde{B})\right) \\ &= \tilde{A}\tilde{B}(\tilde{A}(\tilde{A} + \tilde{B}) - \tilde{B}^2 - \tilde{B}\tilde{A} + (\tilde{A} + \tilde{B})^2 + \mathcal{O}(\tilde{A}, \tilde{B})^4) \\ &= \tilde{A}\tilde{B}(2(\tilde{A} + \tilde{B})\tilde{A} + \mathcal{O}(\tilde{A}, \tilde{B})^4) \\ &\geq -2C\tilde{A}\tilde{B}|(\tilde{A}, \tilde{B})|^4 \\ &= -r^2 2 \sin \theta \cos \theta C |(\tilde{A}, \tilde{B})|^4 \\ &= -Cr^6 \sin(2\theta) \\ &\geq -2Cr^6 \theta \end{aligned}$$

för någon konstant $C > 0$ och $r < r_1$. Sedan tidigare är det känt att $r^2\theta' = U(\tilde{B}, \tilde{A})$. Således är

$$\theta' \geq -2Cr^4\theta. \tag{33}$$

Nästa steg är låta θ vara en funktion av r . Från (32) och (33) har vi att

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\theta'}{r'} \leq \frac{2Cr^4\theta}{\frac{1}{2}r^3} = 2Kr\theta(r) \tag{34}$$

så länge $0 \leq \theta \leq \theta_1$ och $r \leq r_1$ och där $K = 2C$.

Vidare har vi

$$\int_r^{r_0} (e^{-Ks^2}\theta(s))' ds \leq 0$$

som ger

$$\theta(r) \geq e^{K(r^2-r_0^2)}\theta(r_0) \quad \text{för } r \leq r_0. \tag{35}$$

Vi kommer nu dela upp D i delmängder där tecknet av r' och θ' är konstanta inom varje delmängd. Sedan tidigare har vi att $r^2\theta' = U(\tilde{B}, \tilde{A})$. Genom satsen nedan, har vi att lösningarna till $U(\tilde{B}, \tilde{A}) = 0$ kan skrivas på formen (36).

Sats 3.8 ([12]). Om $f(x,y)$ är en reellt analytisk funktion i en sluten mängd Ω kring origo med $f(0,0) = 0$ så kommer mängden $\{f(x,y) = 0\}$ bestå av ett ändligt antal reella kurvor på någon av följande form (36).

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = a_k x^{\frac{k}{n}} + a_{k+1} x^{\frac{k+1}{n}} + \dots \end{cases} \quad (36)$$

där k och n är positiva heltal och koefficienterna a_j är reella. Om radien är tillräckligt liten kommer kurvorna endast att skära varandra i origo.

Sedan tidigare är det klart att Taylorutvecklingen av $U(\tilde{B}, \tilde{A})$ ges av

$$U(\tilde{B}, \tilde{A}) = 2\tilde{A}\tilde{B}(\tilde{A}^2 + \tilde{A}\tilde{B} + \mathcal{O}(\tilde{A}, \tilde{B})^4).$$

Därmed är två av lösningarna till $U(\tilde{B}, \tilde{A}) = 0$, $\tilde{A} = 0$ och $\tilde{B} = 0$. Weierstrass preparationsssats [12] ger vidare att

$$U(\tilde{B}, \tilde{A}) = 2\tilde{A}\tilde{B}(\tilde{A}^2 + b_1(\tilde{B})\tilde{A} + b_0(\tilde{B}))E(\tilde{B}, \tilde{A})$$

där $E(\tilde{B}, \tilde{A}) \neq 0$ nära origo. Resterande lösningar ges alltså av

$$\tilde{A}^2 + b_1(\tilde{B})\tilde{A} + b_0(\tilde{B}) = 0. \quad (37)$$

Uttrycket för $U(\tilde{B}, \tilde{A})$ ger att $\tilde{A} = -\tilde{B}$ är en lösning till (37), vilket ger att ekvationen även kan faktoriseras till

$$(\tilde{A} + \tilde{B})(\tilde{A} - z(\tilde{B})) = 0$$

där $h(\tilde{B})$ är den sista roten till $U(\tilde{B}, \tilde{A}) = 0$. Vidare kan både $E(\tilde{B}, \tilde{A})$ och $z(\tilde{B})$ Taylorutvecklas till

$$\begin{aligned} E(\tilde{B}, \tilde{A}) &= k_0 + k_1 \tilde{A} + k_2 \tilde{B} + \mathcal{O}(\tilde{A}, \tilde{B})^2, \\ z(\tilde{B}) &= z_1 \tilde{B} + z_2 \tilde{B}^2 + z_3 \tilde{B}^3 + \mathcal{O}(\tilde{B}^4), \end{aligned} \quad (38)$$

för några konstanter k_i , $i = 0, 1, 2$ och h_j , $j = 1, 2, 3$. Vi har även följande Taylorutveckling

$$\frac{U(\tilde{B}, \tilde{A})}{2\tilde{A}\tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B})} = -\frac{1}{12}\tilde{A}^3 - \frac{7}{12}\tilde{A}^2\tilde{B} - \frac{2}{3}\tilde{A}\tilde{B}^2 - \frac{1}{12}\tilde{B}^3 + \tilde{A} + \mathcal{O}(\tilde{A}, \tilde{B})^4. \quad (39)$$

Men då $\frac{U(\tilde{B}, \tilde{A})}{2\tilde{A}\tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B})} = (\tilde{A} - z(\tilde{B}))E(\tilde{B}, \tilde{A})$ ger det att $z(\tilde{B}) = \frac{1}{12}\tilde{B}^3 + \mathcal{O}(\tilde{B}^4)$ genom att jämföra termerna i (38) och (39).

Vidare kan kurvan $\tilde{A} = z(\tilde{B})$ istället uttryckas i polära koordinater. Då $\tilde{A} = r \sin \theta$ och $\tilde{B} = r \cos \theta$ har vi

$$\sin \theta = \frac{1}{12} r^2 \cos^3 \theta + \mathcal{O}(r^3).$$

Genom implicita funktionssatsen [1], kan θ lösas ut som en funktion av r . Således har en funktion vi $\theta = g(r)$ där

$$g(r) = \frac{1}{12} r^2 + \mathcal{O}(r^3)$$

och som då är den sista lösningen till $U(\tilde{B}, \tilde{A}) = 0$. Från utvecklingen av $U(\tilde{B}, \tilde{A})$ ges det att faktorn $(\tilde{A} - z(\tilde{B}))$ avgör tecknet på U och därmed även θ' i D . Därmed är $\theta' < 0$ i

$$P = \{(r, \theta) : 0 < r \leq r_0, 0 < \theta < g(r)\}$$

och positiv i resten av sektorn

$$Q = \{(r, \theta) : 0 < r \leq r_0, 0 < \theta < \pi/2\}.$$

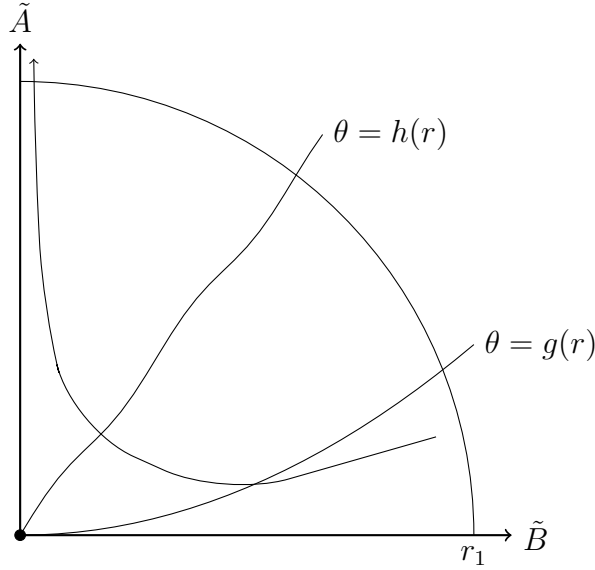
På liknande sätt kan Q delas upp i delmängder där tecknet på r' är konstant i varje delmängd. Vi har då att $r' = 0$ på någon funktion $h(r)$ i D . Då kurvan $\tilde{A} = 0$ inte är en lösning till $V(\tilde{B}, \tilde{A}) = 0$ ger det att $h(0) = \theta_0 \neq 0$. Sedan tidigare har vi att V_4 och r' har samma tecken. Från utvecklingen av $V_4(1, x)$ har vi att $V_4 < 0$ för $\theta < \theta_0$ och $V_4 > 0$ för $\theta > \theta_0$. Alltså har vi att $r' < 0$ i

$$R = \{(r, \theta) : 0 < r \leq r_0, 0 \leq \theta < h(r)\}$$

och positiv i $Q \setminus \bar{R}$. Då $g(r) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0$ medan $h(0) = \theta_0$ så är $P \subset R$ för ett tillräckligt litet r_0 . Vi har också från (35) att $\theta(r) \not\rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0$. Därmed måste lösningen, om den börjar i P , även lämna P . Lösningen kommer alltså att röra sig från P till $R \setminus \bar{P}$. Den kan inte heller komma tillbaka till P utan att lämna Q då $r' < 0$ och $g'(r) > 0$. Det ger att

$$\langle (r', \theta'), (-g'(r), 1) \rangle = -r'g'(r) > 0$$

längs $\theta = g(r)$, där $(-g'(r), 1)$ är normalen till $\theta = g(r)$. Vidare är $\theta' > 0$ i R så om lösningen ska stanna i R , måste r konvergera mot 0. Då kommer θ i sin tur att konvergera mot något tal $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ och det följer då, från [12], att $U_4(\cos \theta_1, \sin \theta_1) = 0$. Men då $U_4 = 0$ endast på axlarna och skild från 0 i den första öppna kvadranten så kan inte lösningen konvergera mot origo om $\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Lösningen lämnar alltså $R \setminus \bar{P}$ genom $h(r)$ och kommer då till $Q \setminus \bar{R}$. Där är $r' > 0$ så lösningen kan inte heller här gå mot origo. Därmed måste lösningen lämna Q genom sidan $r = r_1$, då \tilde{A} -axeln är invariant och därför inte kan korsas. Lösningens väg är ritad i figur 5.



Figur 5: Lösningens väg.

3.2 Tre insekter flyr från varandra

Här låter vi insekterna fly från varandra. I jämförelse med kapitel 3.1 motsvaras detta av att vända på tiden. Därmed går tiden framåt i det här kapitlet. Vi studerar även här fallet med tre insekter, så de kommer att utgöra en oregelbunden triangel. Med resonemang från [5], kommer det nu att visas att samtidigt som den oregelbundna triangeln expanderar, kommer dess vinklar att konvergera till $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Även i detta avsnitt betecknar $S_i(t)$ insekt nummer i 's position i planet. Dock ändras hastighetsekvationerna i jämförelse med föregående fall (multipliceras med -1) och skrivs istället som i (2). Därmed ges följande ekvationer för förändringen i sidorna

$$\dot{a} = 1 + \cos C, \quad \dot{b} = 1 + \cos A, \quad \dot{c} = 1 + \cos B$$

och vinklarna

$$\dot{A} = \frac{\sin B}{c} - \frac{\sin A}{b}, \quad \dot{B} = \frac{\sin C}{a} - \frac{\sin B}{c}, \quad \dot{C} = \frac{\sin A}{b} - \frac{\sin C}{a}.$$

Vi kan igen utnyttja att $C = \pi - A - B$ och får då systemet

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{dA}{dt} = \frac{1}{c \sin A \sin B} (\sin A \sin^2 B - \sin^2 A \sin(A + B)), \\ \dot{B} &= \frac{dB}{dt} = \frac{1}{c \sin A \sin B} (\sin^2(A + B) \sin B - \sin A \sin^2 B). \end{aligned} \tag{40}$$

Genom variabelbytet (18) kan det skrivas om till det autonoma systemet

$$\begin{aligned}\tilde{A}' &= \frac{d\tilde{A}}{d\tau} = \sin \tilde{A} \sin^2 \tilde{B} - \sin^2 \tilde{A} \sin(\tilde{A} + \tilde{B}), \\ \tilde{B}' &= \frac{d\tilde{B}}{d\tau} = \sin^2(\tilde{A} + \tilde{B}) \sin \tilde{B} - \sin \tilde{A} \sin^2 \tilde{B}.\end{aligned}\tag{41}$$

Sedan tidigare har vi att existenstiden är oändlig för (40). Vi visar nu att detsamma gäller för (41). Då $\dot{c} \leq 2$, har vi att $0 < c(t) \leq 2t + c(0)$. Vidare ger (20) att

$$\tau(t) \geq \int_0^t \frac{1}{2t + c(0)} dt \rightarrow \infty \quad \text{då } t \rightarrow \infty.$$

Liapunovfunktionen

$$L(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{3}{2} - (\cos \tilde{A} + \cos \tilde{B} + \cos \tilde{C})$$

är till hjälp även här. Sedan tidigare har vi att $L = 0$ endast i $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Vidare är nu $L' < 0$ i $D \setminus \{(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})\}$. Anledningen är att vi har vänt på tiden i jämförelse med avsnitt 3.1. L uppfyller alltså nu villkoren för en Liapunovfunktion.

Sats 3.9. *Antag att tre insekter S_1, S_2 och S_3 utgör hörnen i en triangel. Om dessa flyr från varandra cykliskt, kommer triangeln att expandera och samtliga vinklar konvergera mot $\frac{\pi}{3}$ då $\tau \rightarrow \infty$. Triangeln konvergerar alltså mot en liksidig triangel.*

Bevis. Om insekternas startpositioner bildar en liksidig triangel, det vill säga lösningen börjar i punkten $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, så ger det att påståendet i satsen uppfyllt, då $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ är en jämviktspunkt.

Antag nu att triangeln är oregelbunden. Sedan tidigare har vi att $L(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{2}$ i ∂D . Vi har för varje $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in D \setminus \{(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})\}$ att $L(\tilde{A}, \tilde{B}) < \frac{1}{2}$ och att $L' < 0$. Därmed är L en strikt Liapunovfunktion i D . Från satsen nedan följer det då att $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ är en asymptotiskt stabil jämviktspunkt. Definiera nu D_δ som den sammanhängande komponenten av

$$\{(\tilde{A}, \tilde{B}) \in D : L(\tilde{A}, \tilde{B}) < \delta\}$$

där jämviktspunkten $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ ingår. Varje $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in D$ ligger då i D_δ för något $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. D_δ är begränsad och $\bar{D}_\delta \subseteq D$ för alla $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Det följer då också från sats 3.10 att lösningen konvergerar mot $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Därmed kommer samtliga vinklar i triangeln att konvergera till $\frac{\pi}{3}$.

Sats 3.10 ([3]). *Om systemet $x' = f(x)$ har en strikt Liapunovfunktion $E(x)$ i en öppen omgivning O av jämviktspunkten x_0 så är x_0 en asymptotiskt stabil jämviktspunkt. Om den sammanhängande komponenten O_δ av $\{x \in O : E(x) < \delta\}$ som innehåller x_0 är begränsad och $\bar{O}_\delta \subseteq O$ så gäller det också att*

$$x(0) \in O_\delta \quad \implies \quad x(t) \rightarrow x_0 \quad \text{då } t \rightarrow \infty.$$

□

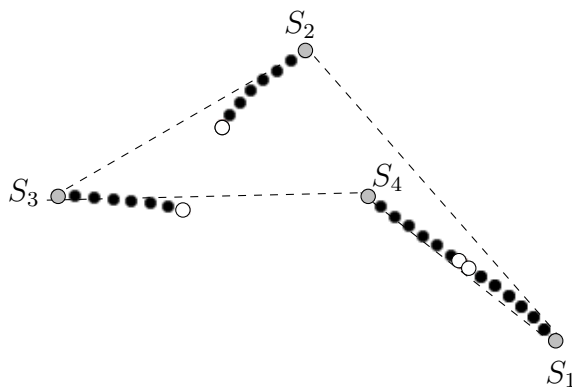
4 Vad sker när $n > 3$?

Vi har tidigare studerat det generella fallet med n insekter i kapitel 2. Dock avsågs då bara det symmetriska fallet, så här kommer analysen även att innefatta de oregelbundna polygonerna. Precis som innan låter vi först insekterna jaga varandra, för att i nästa avsnitt låta dem fly från varandra.

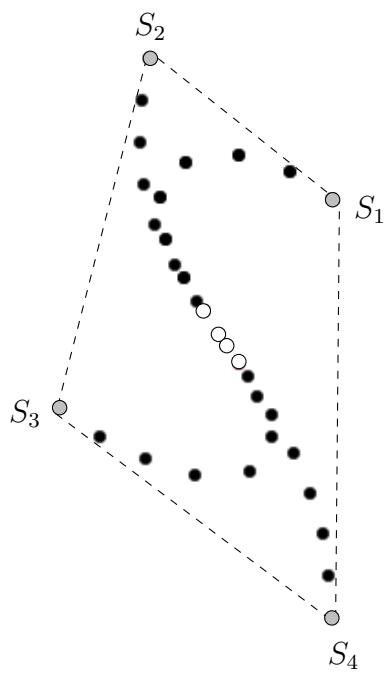
4.1 n insekter jagar varandra

För $n = 3$ kolliderar alla insekterna samtidigt, oberoende av startpositionerna. Gäller det även för $n > 3$? För $n = 4$ visas det i [8] att så är fallet om de fyra insekterna bildar en konvex fyrhörning. Däremot, om fyrhörningen istället är konkav, behöver inte alla insekter krocka samtidigt. Figur 6 visar ett sådant fall. För ett generellt antal insekter hänvisar vi till sats 1.5 i [15].

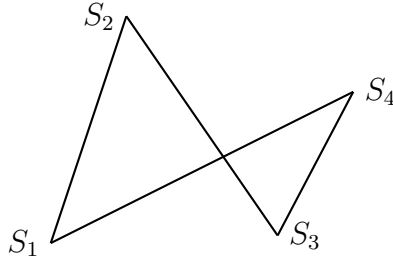
Vidare studerar vi nu de fall där alla insekter kolliderar samtidigt. Precis som i fallet med $n = 3$, kan vi fråga oss hur lösningen uppför sig fram till kollisionen. I [14] diskuterar Richardson vad som sker när antalet insekter är större. För $n < 7$ verkar det som att insekterna går mot att ligga på en rak linje. I figur 7 illustreras detta, med $n = 4$. Däremot, om $n \geq 7$ tyder simuleringar på att insekterna istället konvergerar till att bilda en regelbunden polygon, med n hörn.



Figur 6: Fyra insekter jagar varandra på följande sätt: $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_1$. Insekternas startpositioner (de gråa punkterna) bildar en konkav fyrhörning och därför krockar inte alla insekter samtidigt. S_1 och S_4 krockar först. De vita punkterna visar positionerna vid första krocken.



Figur 7: Fyra insekter bildar en konvex fyrhörning, där de jagar varandra på samma sätt som i figur 6. Då fyrhörningen är konvex kommer alla insekter att krocka samtidigt. Insekterna konvergerar också mot att ligga på en rak linje.



Figur 8: Flug-konfiguration.

4.2 n insekter flyr från varandra

Låt nu insekterna istället fly från varandra. I [6] behandlas fallet $n = 4$. De stationära formerna är när insekterna bildar en kvadrat, när de ligger på en linje och flugkonfigurationen, se figur 8. Vidare analyseras stabiliteten av dessa figurer. Det visas då i [6] att flugkonfigurationen är asymptotiskt stabil och att kvadraten är instabil. Slutligen har vi fallet då insekterna utgör en linje. Det är en invariant mängd. Dock är den instabil på så sätt att om en av insekterna ligger något utanför linjen, kommer figuren istället att konvergera mot flugkonfigurationen. Likaså ger ett nästan degenererat parallelogram att formationen istället konvergerar mot en kvadrat.

Vidare ges, i [4], en analys för n insekter. Följande ekvationer ges

$$\begin{cases} \dot{\psi}_j = \frac{\sin \psi_{i+1}}{l_{i+1}} \\ \dot{l}_i = 1 + \cos \psi_i \end{cases}$$

där $l_i = |S_{i+1} - S_i|$ och ψ_i är vinkeln $S_{i-1}S_iS_{i+1}$. Det visas i [4] att de enda stationära polygonerna är de polygoner där alla l_i är lika och alla ψ_i är lika, det vill säga de symmetriska polygonerna. Slutligen visas det att de symmetriska polygonerna är exponentiellt stabila om

$$(3 \cos^2 \psi + 2 \cos \psi + 1) \cos \frac{2\pi}{n} < 6 \cos^2 \psi + 4 \cos \psi.$$

där $\psi = \frac{(n-2)\pi}{n}$. Olikheten är uppfylld när $n \leq 3$, vilket överensstämmer med resultatet i avsnitt 3.2. När $n = 4$ har vi istället likhet och för $n \geq 5$ är den inte heller uppfylld.

Referenser

- [1] R. A. Adams och C. Essex. *Calculus: a complete course*. Pearson, Toronto, åttonde utgåvan, 2013.
- [2] S. Ahmad och A. Ambrosetti. *A Textbook on Ordinary Differential Equations*. Springer, 2015.
- [3] K.G. Andersson och L.C. Böiers. *Ordinära differentialekvationer*. Studentlitteratur, Lund, andra utgåvan, 1992.
- [4] M. Arnold, Y. Baryshnikov och D. Liberzon. Cyclic pursuit without coordinates: convergence to regular polygon formations. *53:e IEEE Conf. on Decision and Control*, ss 6191–6196, 2014.
- [5] M. Arnold och V. Zharnitsky. Cyclic evasion in the three bug problem. *The American Mathematical Monthly*, 122(4):377–380, 2015.
- [6] M. D. Arnold, M. Golich, A. Grim, V. Zharnitsky och L. Vargas. Square and bow-tie configurations in the cyclic evasion problem. *Nonlinearity*, 30:1773–1787, 2017.
- [7] H. Bateman. *Differential Equations*. Chelsea, 1966.
- [8] F. Behroozi och R. Gagnon. Cyclic pursuit in a plane. *Journal of Mathematical Physics*, 20(11):2212–2216, 1979.
- [9] E. Catalan. *Nouvelle correspondance mathématique*. 1877.
- [10] J.C. Clapham. Playful mice. *Recreational Mathematics Magazine*, ss 6–7, 1962.
- [11] M. S. Klamkin och D. J. Newman. Cyclic pursuit or the three bugs problem. *The American Mathematical Monthly*, 78:631–639, 1971.
- [12] S. Lefschetz. *Differential equations: geometric theory*. Dover Publications, New York, andra utgåvan, 1977.
- [13] P. J. Nahin. *Chases and Escapes The Mathematics of Pursuit and Evasion*. Princeton University Press, 2007.
- [14] T. Richardson. Stable polygons of cyclic pursuit. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 31:147–172, 2001.

- [15] T. J. Richardson. Non-mutual captures in cyclic pursuit. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 31:127–146, 2001.
- [16] Michael J. Steele. *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*. Cambridge University Press, 2004.
- [17] G. Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012.

Bachelor's Theses in Mathematical Sciences 2018:K3
ISSN 1654-6229

LUNFMA-4066-2018

Matematik
Matematikcentrum
Lunds universitet
Box 118, 221 00 Lund

<http://www.maths.lth.se/>