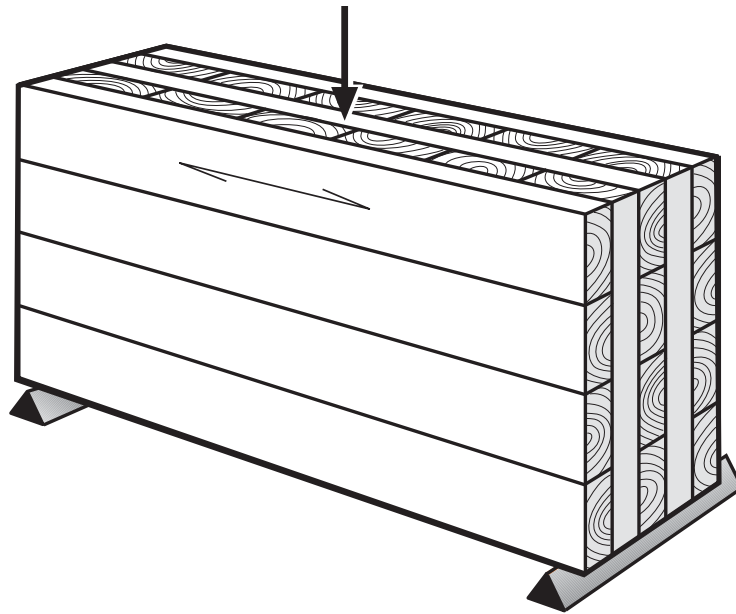




**LUND**  
UNIVERSITY



# KORSLIMMAT TRÄ – STYVHET VID BALKBELASTNING I PLANET

AZUR BASIC och KRESHNIK AMRLLAHU

---

Structural  
Mechanics

*Master's Dissertation*

---



DEPARTMENT OF CONSTRUCTION SCIENCES  
DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS

ISRN LUTVDG/TVSM--18/5232--SE (1-38) | ISSN 0281-6679

MASTER'S DISSERTATION

# KORSLIMMAT TRÄ – STYVHET VID BALKBELASTNING I PLANET

AZUR BASIC och KRESHNIK AMRLLAHU

Supervisor: **HENRIK DANIESSON**, PhD, Division of Structural Mechanics, LTH.

Examiner: Professor **ERIK SERRANO**, Division of Structural Mechanics, LTH.

Copyright © 2018 Division of Structural Mechanics,  
Faculty of Engineering LTH, Lund University, Sweden.

Printed by V-husets tryckeri LTH, Lund, Sweden, January 2019 (*PI*).

**For information, address:**

Division of Structural Mechanics,  
Faculty of Engineering LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.

Homepage: [www.byggmek.lth.se](http://www.byggmek.lth.se)



## Sammanfattning

Problemställningen för detta examensarbete är att utvärdera en föreslagen beräkningsmodell för korslimmat trä (KL-trä) vid balkbelastning. I detta ingår att undersöka de antaganden som ligger till grund för beräkningsmodellen och att undersöka huruvida lamelltjockleken har en inverkan på styvheten i kontaktytan mellan lamellerna. Beräkningsmodellen är presenterad i Marcus Flaigs doktorsavhandling från 2013 och även i andra, senare vetenskapliga publikationer. Vidare diskuteras olika typer av beräkningsmodeller för KL-trä vid balkbelastning i planet och vilka värden på styvhetsparametrar som bör användas för de respektive beräkningsmodellerna.

Målet med detta examensarbete är att utvärdera lamelltjockleken inverkan på skjuvstyvheten i kontaktytan mellan longitudinella och transversella lameller samt kunna redogöra för vilka styvhetsparametrar som bör användas för olika typer av beräkningsmodeller. För att kunna göra denna studie krävs en fördjupning i Flaigs beräkningsmodell samt en kartläggning hur väl modellen beskriver styvheten i elementets korsningsområde mellan de transversella och longitudinella lamellerna i KL-trä.

En litteraturstudie har gjorts där Flaigs avhandling är den centrala litteraturen. Även andra vetenskapliga publikationer har också använts som komplement till avhandlingen. För att kunna undersöka validiteten i Flaigs antaganden har testresultat utvärderats och jämförts med beräkningsmodeller. Beräkningar baserade på en 3D solidmodell har utförts i Finita elementprogrammet Abaqus, för att undersöka lamelltjockleken inverkan på styvheten i korsningsområdet.

Resultat som presenteras i detta examensarbete visar att lamellens tjocklek har en inverkan på styvheten vilket gör att lamelltjockleken är en faktor som bör beaktas vid vidare dimensionering. Vidare presenteras också att värdet på styvhetsparametern  $K$  för 1D-balkmodell och balkrostmodell bör vara ungefär enligt de värden som Flaig och Meyer mätt upp, ett medelvärde på cirka  $8 \text{ N/mm}^3$  för en lamelltjocklek på 20 mm. För en 3D-solidmodell har det visat sig vara annorlunda. För att erhålla en total rotationsstyvhet som motsvarar  $K_{ut}$  på ca  $7.5 \text{ N/mm}^3$  vid utvärdering av provuppställningen som Flaig och Meyer gjort måste man för FE-beräkningar ansätta ett värde av styvheten i kopplingen mellan lamellerna på ca  $1000 \text{ N/mm}^3$  för en lamelltjocklek på 20 mm. Vidare kan ett värde på  $K_{ut}$  erhållas från vårt framräknade resultat som presenteras i figur 21 för varierande lamelltjocklek och användas i 1D-balkmodell och balkrost beräkningsmodell.

**Nyckelord:** Korslimmat trä, KL-trä, CLT, Skjuvstyvhet, FE-analys



## Abstract

This master thesis deals with evaluation of a previously proposed calculation model for Cross laminated timber (CLT) beams at in-plane beam loading and investigation of the underlying assumptions in the proposed model. This includes examining the assumptions of the model and investigating whether the lamination thicknesses influence the stiffness in the crossing areas between the laminations. The above-mentioned calculation model is presented in Marcus Flaig's PhD thesis from 2013 and also other later scientific publications. Furthermore, different types of calculation models for CLT at in-plane beam loading and which values of stiffness parameters that should be used for the different models are discussed.

The aim of this degree project is to evaluate the impact of lamination thickness on the stiffness in the contact areas between longitudinal and transversal laminations as well as to explain the stiffness parameters used for the different types of models. To be able to do this study, an in-depth analysis of Flaig's calculation model and an investigation of how well the model describes the stiffness in the crossing area between the transversal and longitudinal lamellae in CLT is required.

A literature study has been made where Flaig's thesis is the central literature. Other scientific publications have also been used to supplement that thesis. In order to investigate the validity of Flaig's assumptions, test results have been evaluated and compared with calculation models. Calculations based on a 3D solid model have been performed in Finite element software Abaqus, to investigate the influence of the lamination thickness on the stiffness in the crossing areas.

Results presented in this master thesis show that the thickness of the laminations has an impact on the stiffness, which means that the thickness of the laminations is a factor that should be taken into account in further design. Furthermore, it is also disclosed that the value of the Stiffness Parameter  $K$  for 1D-beam model and beam rust model should be approximately consistent with the values measured by Flaig and Meyer, an average of  $8 \text{ N/mm}^3$  for a lamella thickness of 20 mm. For a 3D-solid model it has proved to be different. To obtain a total rotational stiffness corresponding to  $K_{ut}$  of about  $7.5 \text{ N/mm}^3$  when evaluating the test set-up as Flaig and Meyer made, FE-calculations must apply a value of stiffness in the connection between the lamellae of approximately  $1000 \text{ N/mm}^3$  for a lamella thickness of 20 mm. Furthermore, a value of  $K_{ut}$  can be obtained from our calculating results, which is presented in figure 21 for varying lamella thickness can be used in 1D-beammodel and beam rust calculation model.

**Keywords:** Cross laminated timber, CLT, Shear stiffness, FE-analysis





## Förord

Detta examensarbete omfattar 30 högskolepoäng och har genomförts vid avdelningen för Byggnadsmekanik vid Lunds universitet. Examensarbetet har skrivits av Azur Basic och Kreshnik Amrllahu som en avslutande del på civilingenjörsutbildningen Väg och vattenbyggnad vid Lunds universitet. Arbetet har genomförts på vårterminen 2018.

Vi vill rikta ett stort tack till Henrik Danielsson och Erik Serrano som med sitt engagemang och gedigna erfarenhet inom byggnadsmekanik hjälpt och guidat oss under arbetets gång. Vi vill också tacka Lunds universitet för stödet med de programvaror som varit nödvändiga för att driva detta arbete framåt.

Lund  
2018-12-21

Azur Basic & Kreshnik Amrllahu



## Innehållsförteckning

<b>1 Inledning .....</b>	<b>11</b>
<b>1.1 Bakgrund .....</b>	<b>11</b>
<b>1.2 Syfte, mål och metod.....</b>	<b>12</b>
<b>1.3 Avgränsningar .....</b>	<b>12</b>
<b>2 Beskrivning av KL-trä .....</b>	<b>13</b>
<b>3 Analytiska beräkningsmodeller .....</b>	<b>15</b>
<b>3.1 Brott/deformationsmoder .....</b>	<b>15</b>
3.1.1 Brott/deformationsmod 1 .....	15
3.1.2 Brott/deformationsmod 2.....	15
3.1.3 Brott/deformationsmod 3.....	15
<b>3.2 Kraft och spänningsfördelning för mod 1 och 2.....</b>	<b>17</b>
<b>3.3 Kraft och spänningsfördelning för mod 3 .....</b>	<b>20</b>
3.3.1 Skjuvspänningar parallellt med balkaxeln .....	21
3.3.2 Skjuvspänningar vinkelrätt balkaxeln .....	22
3.3.3 Skjuvspänningar på grund av torsion – modell A.....	24
3.3.4 Skjuvspänningar på grund av torsion – modell B.....	26
<b>3.4 Böjstyvhet .....</b>	<b>28</b>
<b>3.5 Skjuvstyvhet .....</b>	<b>29</b>
<b>4 Experimentella tester av enskilda korsningsytor.....</b>	<b>31</b>
<b>5 Numeriska beräkningar av enskilda korsningsområden.....</b>	<b>35</b>
<b>5.1 Modellering av lameller .....</b>	<b>36</b>
<b>5.2 Modellering av kontakt mellan lameller .....</b>	<b>36</b>
<b>5.3 Randvillkor .....</b>	<b>37</b>
<b>5.4 Beräkning av styvhet.....</b>	<b>39</b>
<b>6 Resultat .....</b>	<b>41</b>
<b>7 Diskussion .....</b>	<b>43</b>
<b>8 Referenser .....</b>	<b>45</b>



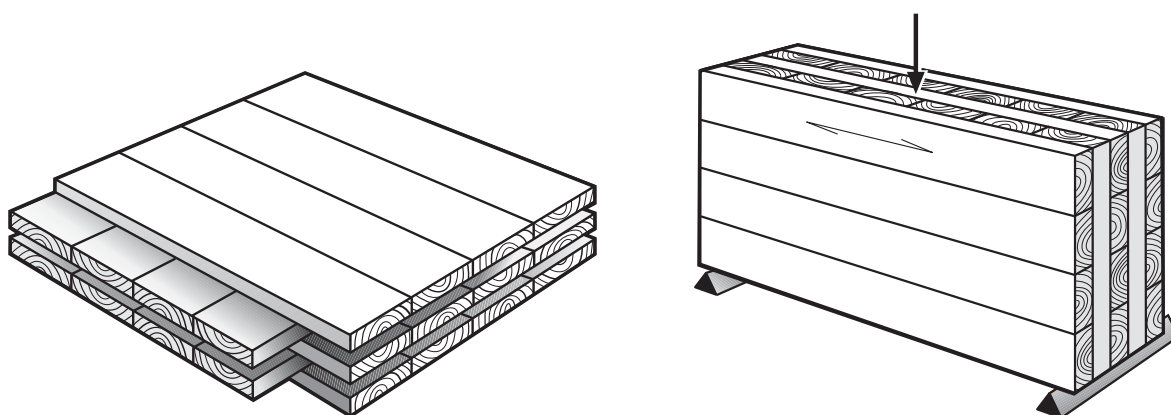
# 1 Inledning

## 1.1 Bakgrund

Korslimmat trä, som förkortas KL-trä på svenska och CLT på engelska, tillverkas av korsvis limmade brädor och är en produkt med ett brett användningsområde. I de nordiska länderna används KL-trä främst som bärande element i form av väggar, bjälklag, pelare och balkar i olika typer av byggnader som exempelvis flerbostadshus, skolor, industrilokaler och enfamiljshus. Utvecklingen och användandet av KL-trä startade i Centraleuropa i slutet på 1900-talet för att utnyttja trämaterialiet på ett effektivt sätt [1]. Efter några års utvecklingsarbete presenterade forskare i Österrike en produkt som de valde att kalla Kreuzlagenholz och som är uppbyggt av ett antal skikt av trälameller, där varje skikt har lamellerna orienterade ortogonalt i förhållande till intilliggande skikt enligt figur 1.

KL-träelement har, tack vare uppbyggnaden av korsvis orienterade skikt av lameller, god styvhet och styrka i två riktningar vid belastning vinkelrätt elementets plan. Detta är en fördel till exempel vid användning av KL-trä som bjälklagselement. KL-trä kan även hantera laster i elementets plan och kan alltså användas även som bärande väggelement, både för att hantera vertikala laster och för att hantera horisontella laster och för stabilisering av byggnader [1].

Vid användning som balkelement, se figur 1, har KL-trä i vissa avseenden även betydande fördelar. Vid belastning parallellt fiberriktningen har trä generellt mycket god styrka och styvhet i förhållande till sin egenvikt. Trä har dock mycket låg hållfasthet och styvhet vid belastning vinkelrätt fiberriktningen. Tack vare uppbyggnaden av korsvis orienterade lameller har KL-träbalkar högre styrka och styvhet med hänsyn till tryck- och dragbelastning vinkelrätt mot balkaxeln, jämfört med vanliga solida trä- och limträbalkar. De transversella lamellerna i elementet fungerar som en typ av armering och utgör en förstärkning av elementet. De förbättrade egenskaperna för belastning i tryck och drag vinkelrätt balkaxeln kommer dock till priset av ökad komplexitet vid beräkning och dimensionering [7].



Figur 1. Uppbyggnad av KL-trä och KL-trä vid balkbelastning.

KL-trä är fortfarande i en utvecklingsfas men används mer och mer runt om i Europa och i övriga världen. Forsknings- och utvecklingsarbetet har framförallt bedrivits i Tyskland och Österrike och stora framsteg har gjorts avseende utveckling av beräkningsmodeller och dimensioneringsanvisningar. I nuvarande version av Eurokod 5 [3] finns dock inga anvisningar för dimensionering av KL-trä, vilket försvårar det praktiska arbetet för konstruktörer och generellt försvårar användandet av KL-trä för bärande strukturer.

Avseende forsknings- och utvecklingsarbete relaterat till balkbelastning av KL-trä har betydande bidrag presenterats av Flaig [4], som i sitt forskningsarbete utvecklat en modell för beräkning av KL-träbalkars styrka och styvhet. Denna modell är baserad på ett nätverk av balkelement som antas kopplade till varandra via kontaktytor, även kallade korsningsområden, som representerar limfogarna mellan lameller i olika skikt. Styvheten och kraftfördelning inom balken bestäms enligt modellen baserat på antaganden om styvheten av de enskilda lamellerna och styvheten av korsningsområdena mellan longitudinella och transversella lameller. För relativ förskjutning och rotation mellan två intilliggande lameller av olika skikt antas, enligt Flaigs modell [4], exempelvis att styvheten är oberoende av de sammankopplade lamellernas tjocklek.

## 1.2 Syfte, mål och metod

Syftet med detta examensarbete är att fördjupa kunskapen om styvheten för KL-trä vid balkbelastning. I detta arbete ingår granskning och utvärdering av den beräkningsmodell som presenterats av Flaig [4] avseende skjuvstyvhet för KL-träbalkar. Speciellt studeras styvheten avseende relativ förskjutning och rotation i anslutning till korsningsområdet mellan intilliggande longitudinella och transversella lameller i olika skikt.

Specifika mål med arbetet innefattar att undersöka hur kopplingen mellan enskilda lameller bör modelleras vid användning av en beräkningsmodell baserad på ett nätverk av balkelement respektive vid användning av en modell baserad på finita elementmetoden och modellering av enskilda lameller som 3D-solider.

Tidigare utförda experimentella tester av styvheten vid rotation mellan två ortogonalt orienterade lameller (ett korsningsområde) jämförs i detta arbete med beräkningar enligt finita elementmetoden och modellering av lamellerna som 3D-solider. Även inverkan av lamellernas tjocklek på styvheten undersöks genom beräkningar med hjälp av finita elementmetoden.

## 1.3 Avgränsningar

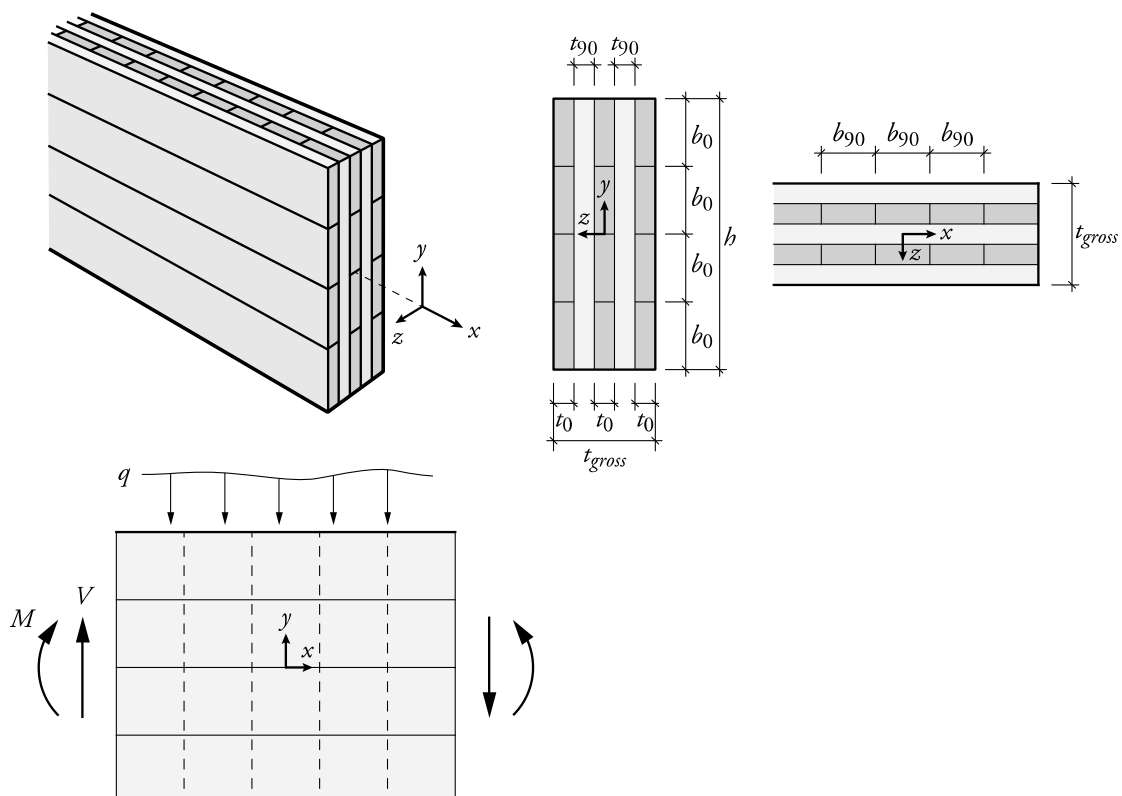
Beräkningsmodeller från litteraturen avseende kraftfördelning och styvhet för balkbelastning av KL-träelement behandlas i rapporten. Avseende utvärdering av tidigare utförda tester och egna finita elementberäkningar är dock arbetet avgränsat till analys av en specifik försöksupställning med ett enskilt korsningsområde. Vidare beaktas framförallt styvhetsegenskaper medan egenskaper relaterade till hållfasthet beaktas mycket begränsat.

## 2 Beskrivning av KL-trä

Korslimmat trä är ett massivt tvådimensionellt konstruktionselement för bärande ändamål och består oftast av tre till sju skikt. Elementen är uppbyggda av transversella lameller som limmas ihop vinkelrätt mot longitudinella lameller. Tjockleken för de longitudinella skikten är inte alltid densamma som i de transversella skikten och tjockleken kan skilja sig mellan de yttre och de inre skikten, men elementen är vanligtvis symmetriskt uppbyggda i tjockleksriktningen ( $z$ -riktningen). KL-träelement kan framställas med eller utan kantlimning, vilket innebär att lamellerna inom samma skikt limmas till varandra.

Den korsvisa uppbyggnaden av transversella och longitudinella skikt ger en betydligt mer komplex spänningsbild i jämförelse med solida träbalkar och limträbalkar [7]. Enligt den europeiska standarden EN 16351:2015 [6] är även spår i och mellanrum mellan lamellerna tillåtna. En utmaning som föreligger vid dimensionering av KL-trä är alltså de flertal diskontinuiteter i form av att spänningsfria ytor som finns inom elementet och som bidrar till den komplexa spänningsbilden.

De olika parametrarna för laster och geometri visas i figur 2 och redovisas i texten som följer. Tjockleken på de longitudinella lamellerna betecknas som  $t_0$  och tjockleken på de transversella lamellerna betecknas som  $t_{90}$ . Bredden  $b_0$  och  $b_{90}$  gäller för de longitudinella respektive transversella lamellerna. Totala tjockleken för balken betecknas som  $t_{gross}$ .



Figur 2. Definition av parametrar.

Lamellernas dimensioner är ofta definierade av tillverkaren för ett KL-element. Bredden för en lamell är vanligtvis 80–250 mm för både longitudinella och transversella lameller [7].

Exempel på beräkningsmodeller av KL-träbalkars kapacitet och styvhet vid belastning i planet och analyser för spänningsfördelning finns i [2], [4] och [8]. Dessa modeller är baserade på konventionell balkteori och andra förenklande antaganden för att kunna beräkna och dimensionera på ett praktiskt sätt. Ett vanligt förekommande antagande är att normalspänningarna som uppstår vid belastning i planet tas upp av skikten som är orienterade med fibrerna i den aktuella normalspänningens riktning. Motivering till detta antagande är att styvheten i fiberriktningen är cirka 15–35 gånger större än vinkelrät fibrerna. Beräkning och dimensionering enligt handböcker och Europeiska Tekniska Bedömningar (ETA) stämmer inte alltid överens med modellerna enligt [2], [4] och [8] vid framtagning av kapacitet och spänningsfördelning för KL-träelement vid balkbelastning.



## 3 Analytiska beräkningsmodeller

Nedan beskrivs Flaigs beräkningsmodell för KL-träbalkar, enligt [2,4]. De tre första avsnitten beskriver skjuvspänningsfördelningen inom lameller och över korsningsområden i en KL-träbalk. Avsnitt 3.4 och 3.5 behandlar böjstyvhet och skjuvstyvhet. Beräkningsmodellen och ekvationer som presenteras nedan är baserade på antagande om att ingen kantlimning mellan lamellerna finns [2].

### 3.1 Brott/deformationsmoder

Det finns tre brott/deformations-moder som kan uppkomma i ett KL-träelement vid skjuvbelastning i planet. Transversella krafter som verkar i elementets plan ger upphov till skjuvspänningar. Dessa skjuvspänningar är till viss del lika dom skjuvspänningar som uppstår i vanliga solida balkar och skjuvspänningsfördelningen antas vara konstant över tjockleken för de enskilda lamellerna. Överföringen av skjuvkrafter mellan längsgående och tvärgående skikt orsakar också skjuvspänningar i korsningsområdena mellan lamellerna. Skjuvspänningar i lamellerna och korsningsområdena kan orsaka tre olika brottmoder i KL-balkar, som illustreras i figur 3.

#### 3.1.1 Brott/deformationsmod 1

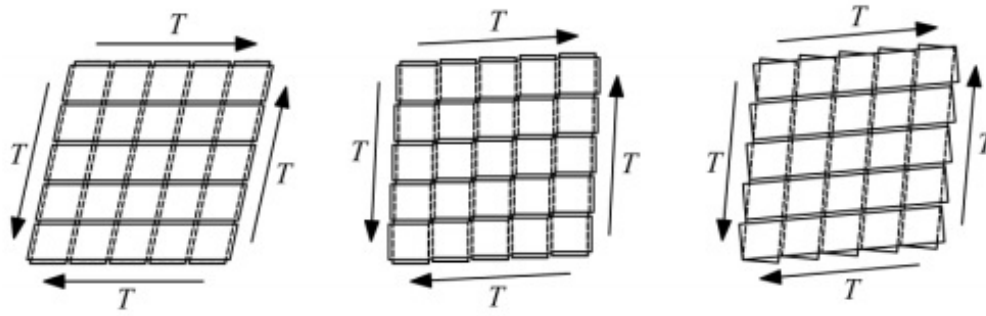
Brottmod 1 kännetecknas av skjuvbrott genom sprickbildning parallellt fiberriktningen i bruttotvärsnittet och är vanligtvis endast aktuellt för kantlimmade element. Brottet uppstår i sektioner mellan olimmade anslutningar med lika skjuvspänningar i de longitudinella och transversella skikten.

#### 3.1.2 Brott/deformationsmod 2

Brottmod 2 är relevant för KL-trä utan kantlimning och kännetecknas av skjuvbrott vinkelrätt fiberriktningen i nettotvärsnittet. Brottet uppstår i snitt mellan olimmade lameller. I snitt som sammanfaller med olimmade kanter mellan angränsande lameller kan skjuvkrafter endast överföras i de lameller som är orienterade vinkelrätt mot detta snitt. För en balk där den totala tjockleken av de transversella skikten är mindre än den totala tjockleken av de longitudinella skikten ( $t_{\text{net},90} < t_{\text{net},0}$ ) kan man då förvänta sig ett brottplan enligt illustrationen i figur 4.

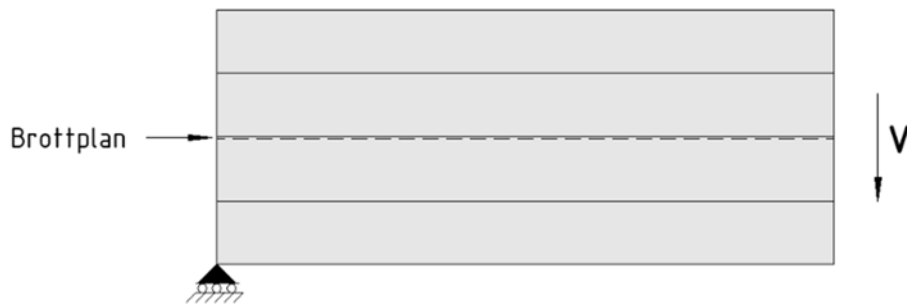
#### 3.1.3 Brott/deformationsmod 3

Brottmod 3 kännetecknas av skjuvbrott i korsningsområdena mellan longitudinella och transversella lameller. Brottet orsakas av vridning och skjuvning mellan transversella och longitudinella lameller som ger upphov till en kombination av längsskjuvspänningar och rullskjuvspänningar i korsningsområdet.



Figur 3. Brottmod 1, 2 och 3 [2].

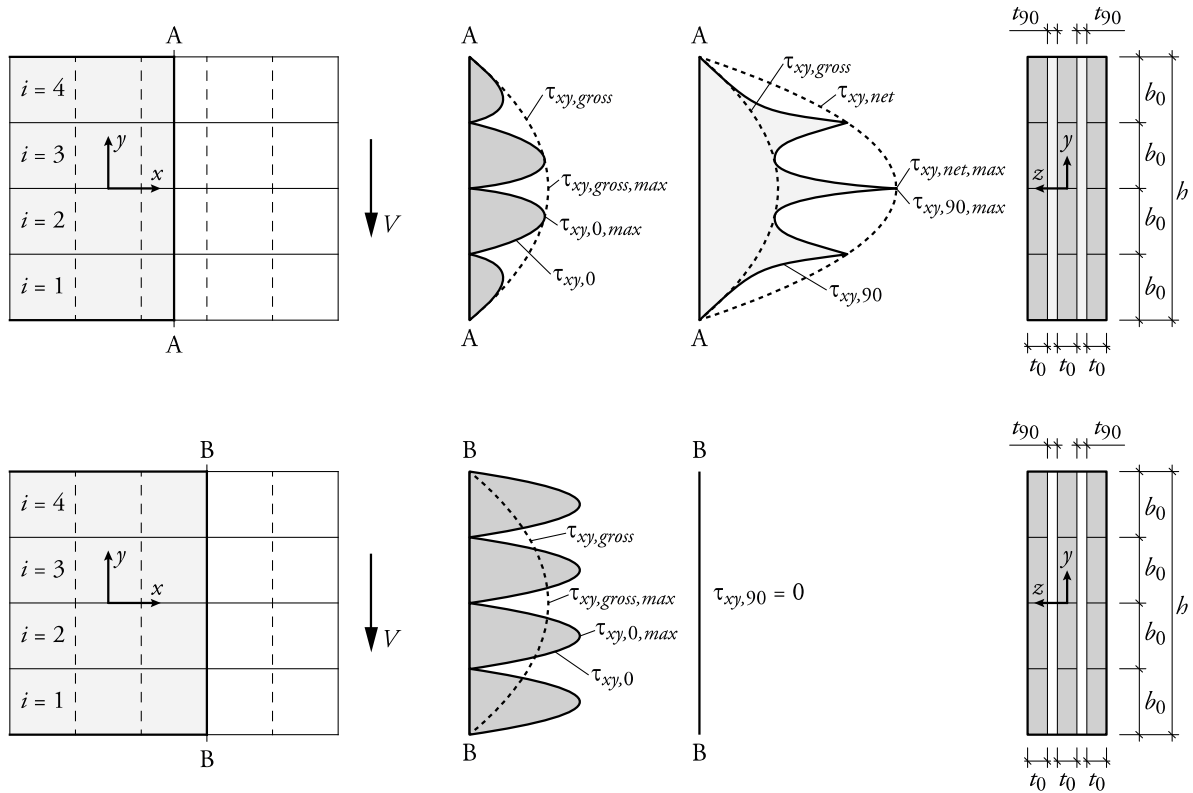
Vid dimensionering av KL-trä är skjuvspänningar för de tre olika brottmoderna nämnda ovan av största vikt att beakta. För brottmod 1 och brottmod 2 måste skjuvspänningar för transversella och longitudinella skikten kontrolleras, se avsnitt 3.2. För brottmod 3 kan tre olika skjuvspänningar särskiljas. De tre olika skjuvspänningar som uppkommer i brottmod 3 beskrivs under avsnitt 3.3.



Figur 4. Möjligt brottplan för brottmod 2, nettoskjuvbrott i transversella lameller.

### 3.2 Kraft och spänningsfördelning för mod 1 och 2

I detta avsnitt presenteras beräkningsmodellen för brottmod 1 och 2 enligt Flaig [2,4] med definition av parametrar enligt figur 5 och 6.



Figur 5. Skjuvspänningsfördelning för en balk med fyra longitudinella lameller i höjdriktningen.

En fiktiv skjuvspänningsfördelning för hela tvärsnittet,  $\tau_{xy,gross}$ , definieras enligt

$$\tau_{xy,gross} = \frac{VS_{gross}}{I_{gross}t_{gross}} \quad (1)$$

där  $S_{gross}$  är det statiska momentet för bruttotvärsnittet,  $I_{gross}$  är tröghetsmomentet för balkens bruttotvärsnitt och  $t_{gross}$  är balkens totala bredd. De största skjuvspänningar i tvärsnittet ges av

$$\tau_{xy,gross,max} = \frac{3}{2} \frac{V}{t_{gross}h} \quad (2)$$

Kurvorna illustrerade i figur 5 och 6 gäller för både de longitudinella (vänstra kurvan) och transversella skikten (högra kurvan). För element utan kantlimning antas skjuvspänningen vara noll i skarvarna mellan lamellerna, eftersom de inte är kopplade till varandra kan inga krafter överföras. Skjuvflödet i balken kan därför inte tas upp av de longitudinella skikten vid deras skarvar och måste då istället tas upp av de transversella lamellerna. Samma sak gäller för skarvar mellan transversella lameller, då skjuvflödet istället måste tas upp av de longitudinella skikten.

En fiktiv skjuvspänningsfördelning för de transversella skikten definieras enligt

$$\tau_{xy,net} = \frac{VS_{net}}{I_{net}t_{net,90}} \quad (3)$$

där  $S_{net}$  är det statiska momentet över de longitudinella skiktens tvärsnittsarea,  $I_{net}$  är tröghetsmomentet för de longitudinella skiktens tvärsnitt och  $t_{net,90}$  är bredden för de transversella skikten. Eftersom det för element med fem skikt finns två transversella skikt gäller då  $t_{net,90} = 2t_{90}$ .

För en balk med ett jämnt antal longitudinella lameller i höjdriktningen och för sektion A-A, se Figur 5, som går genom mitten av en transversell lamell, sammanfaller maxvärdet av skjuvspänningen i de transversella lamellerna  $\tau_{x,90}$  med maxvärdet av den fiktiva skjuvspänningen  $\tau_{xy,net}$ . Högsta skjuvspänningen för de transversella skikten ges då alltså av

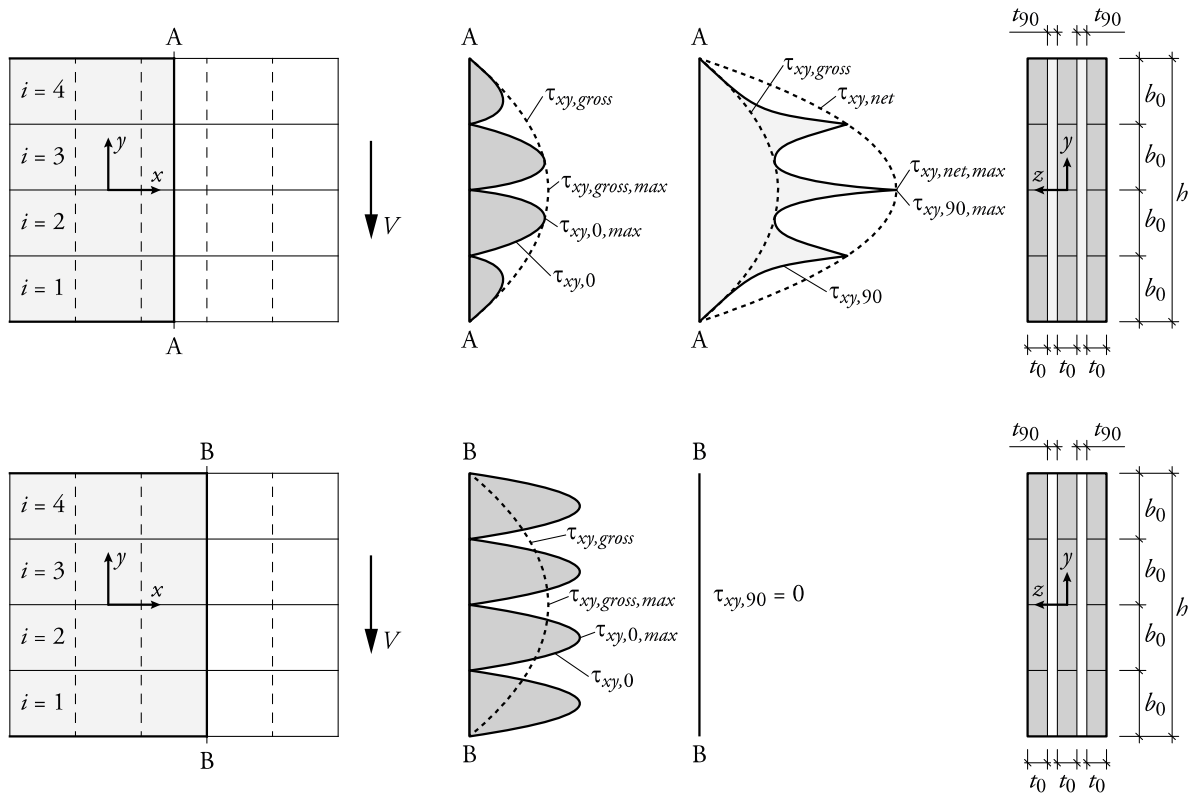
$$\tau_{xy,90,max} = \tau_{xy,net,max} = \frac{3}{2} \frac{V}{t_{net,90}h} \quad (4)$$

I sektion B-B i Figur 5, där snittet går i skarven mellan två transversella lameller tar de longitudinella skikten upp hela tvärkraften, eftersom skjuvspänningen i de transversella skikten här är noll. Enligt Flaigs modell [4] antas att den totala tvärkraften  $V$  fördelas jämt mellan de longitudinella lamellerna. Den största skjuvspänningen i de longitudinella skikten ges då av

$$\tau_{xy,0,max} = \frac{3}{2} \frac{V}{t_{net,0}h} \quad (5)$$

där  $t_{net,0}$  är den totala bredden av de longitudinella skikten. För balken i Figur 5 motsvarar  $t_{net,0} = 3t_0$ .

Figur 6 illustrerar en balk med ett udda antal lameller i höjdriktningen av balken. För en balk med udda antal longitudinella lameller är för snitt A-A  $\tau_{xy,gross,max}$  exakt lika stor som  $\tau_{xy,0,max}$ , vilket inte är fallet för balkar med ett jämnt antal longitudinella lameller. Istället skiljer sig  $\tau_{xy,90,max}$  från  $\tau_{xy,net,max}$ , som bara är ungefär lika stora.



Figur 6. Skjuvspänningsfördelning för balk med tre longitudinella lameller i höjdriktningen.

Nedan visas uttryck för maximala skjuvspänningar vid snitt A-A för både de longitudinella och de transversella skikten, utifrån tidigare antaganden gällande skjuvspänningsfördelningen från Figur 5 och 6.

Största skjuvspänningen i de transversella skikten, beroende av antal lameller  $m$ , kan uttryckas enligt följande

$$\tau_{xy,90,max} = \frac{3}{2} \frac{V}{t_{net,90}h} \quad \text{för } m = 2, 4, 6, \dots \quad (6)$$

$$\tau_{xy,90,max} = \frac{3}{2} \frac{V}{t_{net,90}h} \frac{m^2-1}{m^2} \quad \text{för } m = 3, 5, 7, \dots \quad (7)$$

Största skjuvspänningen i de longitudinella skikten för snitt A-A, beroende av antal lameller  $m$ , kan uttryckas enligt följande

$$\tau_{xy,0,max} = \frac{3}{2} \frac{V}{t_{gross}h} \frac{m^2-1}{m^2} \quad \text{för } m = 2, 4, 6, \dots \quad (8)$$

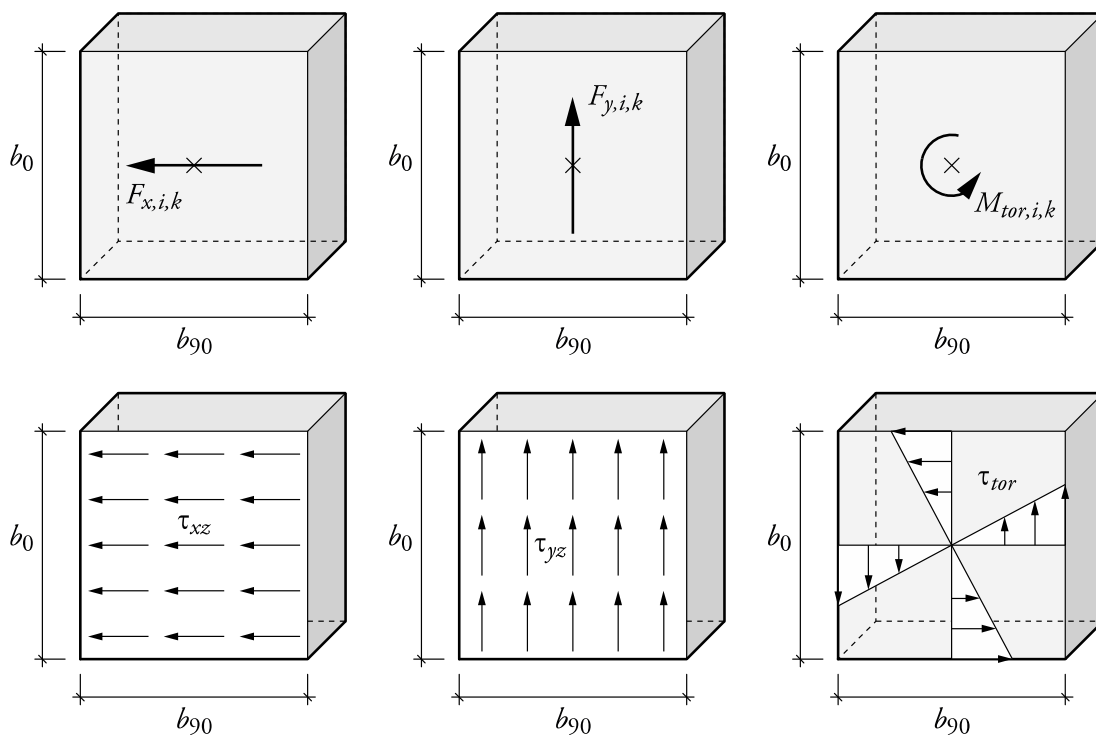
$$\tau_{xy,0,max} = \frac{3}{2} \frac{V}{t_{gross}h} \quad \text{för } m = 3, 5, 7, \dots \quad (9)$$

### 3.3 Kraft och spänningsfördelning för mod 3

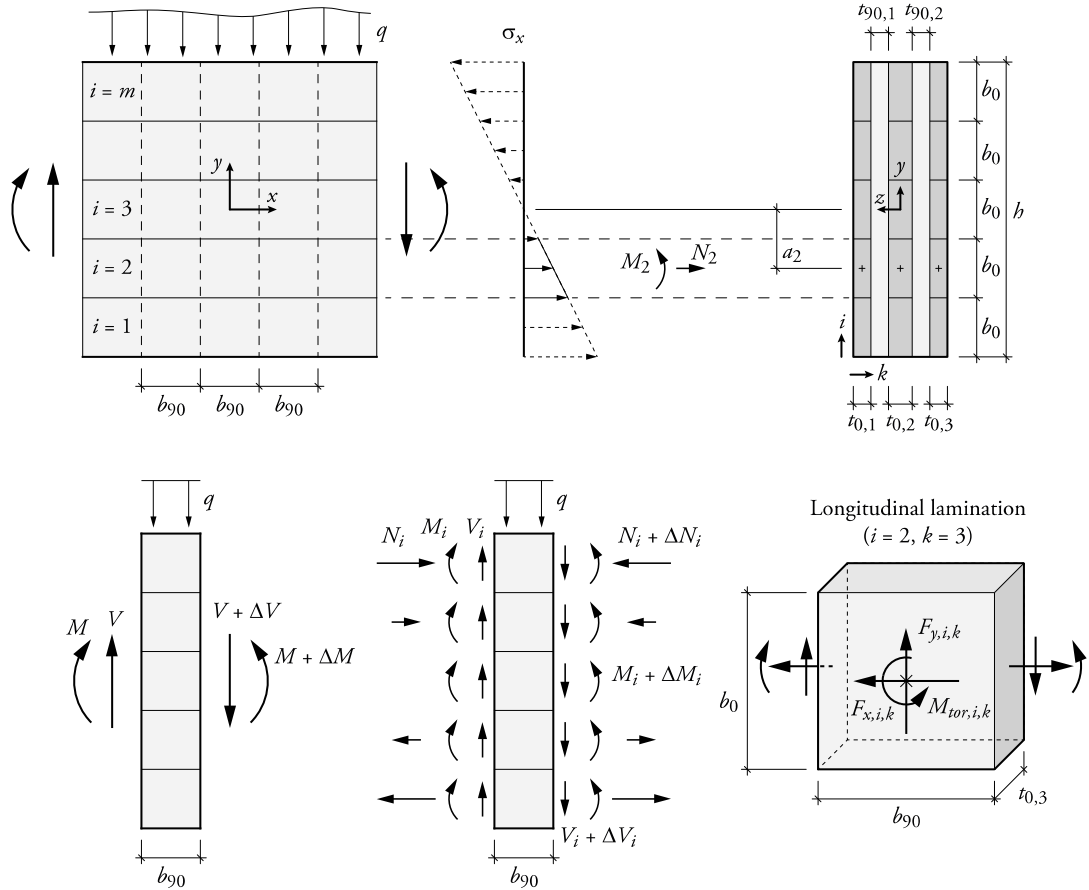
Skjuvspänningstillståndet i korsningsområdet mellan longitudinella och transversella lameller kan enligt [2] beskrivas med hjälp av tre olika kraft/spännings-komponenter enligt figur 7 och 8:

- Skjuvspänningar parallellt med balkaxeln,  $\tau_{xz}$ , orsakad av kraften  $F_{x,i,k}$ .
- Skjuvspänningar vinkelrätt balkaxeln,  $\tau_{yz}$ , orsakad av kraften  $F_{y,i,k}$ .
- Torsionsskjuvspänningar,  $\tau_{tor}$ , orsakade av torsionsmomentet  $M_{tor,i,k}$ .

Index  $i$  beskriver positionen för de longitudinella lamellerna i balkens höjdriktning ( $y$ -riktningen) och index  $k$  beskriver de longitudinella lamellernas position i balkens breddriktning ( $z$ -riktningen), se figur 8.



Figur 7. Illustration av antagna skjuvspänningsfördelningar i korsningsområdena.



Figur 8. Illustration av krafter och moment som verkar inom tvärsnittet och inom korsningsområden.

### 3.3.1 Skjuvspänningar parallellt med balkaxeln

Eftersom ingen kantlimning mellan intilliggande lameller i längsgående skikt finns måste ändringen i normalkraft,  $\Delta N_{i,k}$ , som uppkommer från ändring av böjmomentet längs balkaxeln, föras vidare via korsningsområdet mellan de transversella och longitudinella lamellerna [2]. Skjuvspänningen  $\tau_{xz}$  i korsningsområdet ges av

$$\tau_{xz,i,k} = \frac{F_{x,i,k}}{b_0 b_{90}} = \frac{\Delta N_{i,k}}{b_0 b_{90} n_{CA,k}} \quad (10)$$

där  $\Delta N_{i,k}$  är ändringen i normalkraften i lamell  $i$ , av skiktet  $k$ .  $n_{CA,k}$  är antalet korsningsområden som den longitudinella lamellen i skiktet  $k$  delar med intilliggande transversella lamellerna ( $n_{CA,k} = 1$  för yttre skikt och  $n_{CA,k} = 2$  för inre skikt). Eftersom normalspänningen antas variera linjärt i höjddled och antas vara konstant i breddriktningen kan uttrycket för  $\Delta N_{i,k}$  skrivas enligt

$$\Delta N_{i,k} = \frac{\Delta M}{I_{net}} t_{0,k} b_0 a_i \quad (11)$$

där  $a_i$  är avståndet i  $y$ -riktningen från elementets mittlinje till mittlinjen för lamell  $i, k$  och  $t_{0,k}$  är tjockleken av det longitudinella skiktet  $k$ . Genom att uttrycka ändringen av

böjmomentet enligt  $\Delta M = Vb_{90}$  och använda ekvation (10) och (11) kan skjuvspänningen parallellt balkaxeln uttryckas som

$$\tau_{xz,i,k} = \frac{12V}{h^3 n_{CA,k}} \frac{t_{0,k}}{t_{net,0}} a_i \quad (12)$$

där  $V$  är den totala tvärkraften och  $h$  är den totala balkhöjden.

Den maximala skjuvspänningen parallellt balkaxeln uppträder i korsningsområdena för balkelementets översta/understa longitudinella lameller, där avståndet  $a_i$  är som störst.

Skjuvspänningen  $\tau_{xz}$  är beroende av tjockleken för den longitudinella lamellen,  $t_{0,k}$ . När förhållandet  $t_{0,k}/n_{CA,k}$  är konstant för alla longitudinella lameller uppstår den mest gynnsamma spänningssituationen. Denna spänningssituation uppfylls alltid av ett symmetriskt element med tre skikt. För element med fem och sju skikt är fallet annorlunda. För att element med fem och sju skikt skall kunna uppnå ett konstant värde på förhållandet  $t_{0,k}/n_{CA,k}$  krävs att det inre longitudinella skiktet har en dubbelt så stor tjocklek som de yttre longitudinella skikten. Detta beror på att det inre longitudinella skiktet har två korsningsområden, en på varje sida. Skjuvspänningar parallellt balkaxeln med ett konstant värde på  $t_{0,k}/n_{CA,k}$  för alla longitudinella lameller kan uttryckas som

$$\tau_{xz,i,k} = \frac{12V}{h^3 n_{CA}} a_i \quad (13)$$

där  $n_{CA}$  är totala antalet korsningsytor i elementets breddriktning. För fallet där de longitudinella lamellernas bredd  $b_0$  är lika för alla lameller, kan den maximala skjuvspänningen enligt ekvation (13) skrivas

$$\tau_{xz,max} = \frac{6V}{b_0^2 n_{CA}} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3} \right) \quad (14)$$

där  $m$  är antalet lameller i elementets höjdriktning,  $h = mb_0$ .

Enligt [2,4] ger ekvation (13) och (14) goda approximationer av skjuvspänningar parallellt med balkaxeln, oavsett om elementet består av tre, fem eller sju skikt och oavsett om förhållandet  $t_{0,k}/n_{CA,k}$  är konstant eller ej. KL-trä där förhållandet  $t_{0,k}/n_{CA,k}$  är konstant för alla longitudinella lameller är inte så vanligt förekommande på marknaden idag, vanligare är istället att tjockleken är större i de yttre longitudinella skikten jämfört med de inre. Ekvation (13) och (14) ger därmed ett lägre värde jämfört med värdet av den maximala skjuvspänningen parallellt balkaxeln enligt ekvation (12).

### 3.3.2 Skjuvspänningar vinkelrätt balkaxeln

Skjuvspänningar vinkelrätt balkaxeln,  $\tau_{yz}$ , uppkommer vid transversell belastning. Exempel på transversell belastning är reaktionskrafter från upplag och yttre punktlaster och utbredda laster. Styvheten parallellt fiberriktningen är betydligt större än styvheten vinkelrätt fiberriktningen och därför antas upptagning av transversella laster ske genom de transversella lamellerna. Skjuvspänningar vinkelrätt balkaxeln uppstår även vid plötsliga tvärsnittsförändringar. Exempel på sådana plötsliga tvärsnittsförändringar är hål och urtag.



Skjuvspänningar vinkelrätt balkaxeln uppkommer enligt Flaig [2] på grund av ändring av tvärkraft,  $\Delta V$ , och antas vara jämt fördelade över korsningsområdet i balkens höjdriktning. Skjuvspänningen  $\tau_{yz,i,k}$  för lamell  $i, k$  ges av

$$\tau_{yz,i,k} = \frac{F_{y,i,k}}{b_0 b_{90}} = \frac{\Delta V_{i,k}}{b_0 b_{90} n_{CA,k}} \quad (15)$$

där  $\Delta V_{i,k}$  är ändringen av tvärkraften i lamell  $i$  och skiktet  $k$  över längden  $b_{90}$ . Tvärkraften  $\Delta V_i$  i lamell  $i$  antas vara fördelad mellan lamellskikten  $k$  i balkens breddriktning enligt

$$\Delta V_{i,k} = \Delta V_i \frac{t_{0,k}}{t_{net,0}} \quad (16)$$

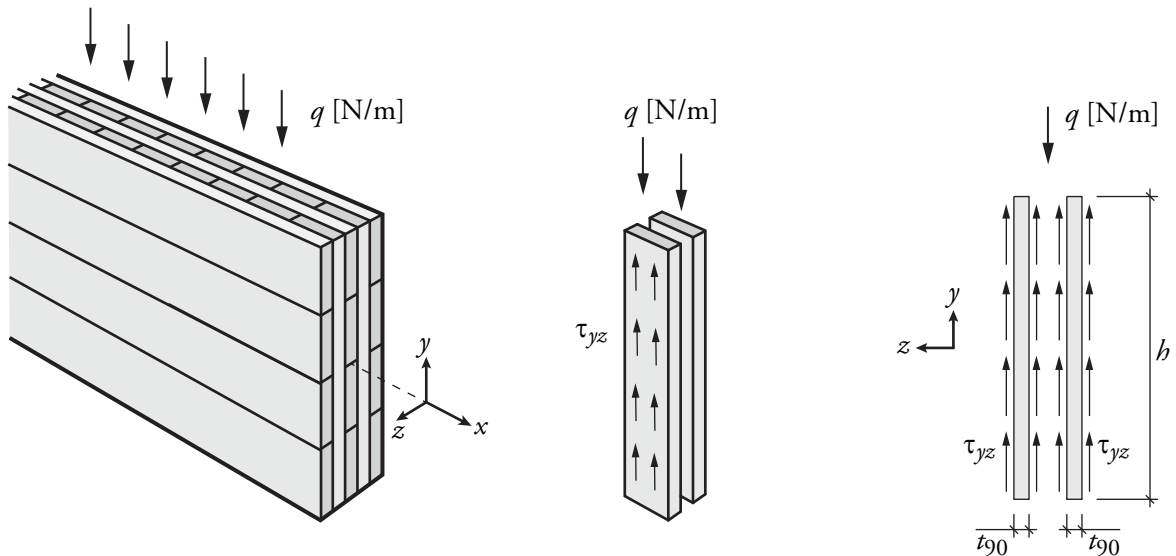
Förutsatt att den totala tvärkraften är jämnt fördelad mellan lamellerna i balkens höjdriktning enligt  $\Delta V_i = \Delta V/m$  och att balkelementet har ett konstant värde på förhållandet  $t_{0,k}/n_{CA,k}$  för alla longitudinella skikt, sammansatt av  $m$  longitudinella lameller i balkens höjdriktning kan uttrycket för skjuvspänningen vinkelrätt balkaxeln skrivas enligt

$$\tau_{yz} = \frac{\Delta V}{b_0 b_{90} m n_{CA}} \quad (17)$$

Genom att uttrycka ändringen av tvärkraften som  $\Delta V = q b_{90}$  kan skjuvspänningen vinkelrätt balkaxeln uttryckas enligt

$$\tau_{yz} = \frac{q}{b_0 m n_{CA}} = \frac{q}{h n_{CA}} \quad (18)$$

där  $q$  [N/m] kan ses en jämnt utbredd yttre last eller en jämnt utbredd reaktionskraft från ett upplag.



Figur 9. Illustration av skjuvspänningsfördelningen vinkelrätt balkaxeln.

### 3.3.3 Skjuvspänningar på grund av torsion – modell A

Uttryck för torsionsmomentet  $M_{tor}$  och den tillhörande torsionsskjuvspänningen  $\tau_{tor}$  som verkar i korsningsområdet mellan de longitudinella och transversella lamellerna kan härledas genom jämviktsbetraktelser. Den härledning som Flaig redovisar i sin avhandling [4] (här kallad modell A) och som redovisas nedan bygger på följande antaganden:

- Lika bredd på alla longitudinella och transversella lameller, d.v.s.  $b_0 = b_{90} = b$ .
- Balkhöjden antas vara  $h = mb$ , där  $m$  är ett heltal.
- Torsionsmomentet  $M_{tor}$  antas vara lika för alla korsningsområden i balkens breddriktning.

Dessa antaganden stämmer överens med tidigare antaganden om att skjuvspänningarna parallellt med balkaxeln ( $\tau_{xz}$ ) är jämnt fördelade över alla korsningsområden i balkens breddriktning, oberoende av den relativa tjockleken av de transversella skikten  $t_{0,k}$ . Härledningen av torsionsskjuvspänningar som presenteras i [4] och som beskrivits nedan är baserade på jämvikt med avseende på enskilda transversella lameller. Baserat på detta samt på övriga ovan angivna antaganden och genom att beakta momentjämvikt för hela de transversella lamellerna vid ett givet snitt i balken, kan ett uttryck för torsionsskjuvspänningar enligt [4] uttryckas som

$$\tau_{tor} = \frac{\sum_{i=1}^m M_{tor,i}}{n_{CA} \sum_{i=1}^m I_{p,CA,i}} \frac{b}{2} \quad (19)$$

där summan av de polära tröghetsmomenten  $I_{p,CA,i}$  för  $m$  antal korsningsområden ges av

$$\sum_{i=1}^m I_{p,CA,i} = m \frac{b^4}{6} \quad (20)$$

och summan av torsionsmomenten ges av

$$\sum_{i=1}^m M_{tor,i} = \sum_{i=1}^m (\Delta N_i a_i) = \frac{\Delta M}{I_{net}} t_{net,0} b \sum_{i=1}^m a_i^2 \quad (21)$$

där  $a_i$  är avståndet i  $y$ -riktning från mittlinjen av tvärsnittet till mittlinjen av lamell  $i$ . Genom att uttrycka skillnaden i böjmomentet som  $\Delta M = Vb$  och använda ekvation (20) och (21) kan ekvation (19) skrivas om enligt

$$\tau_{tor} = \frac{36V}{m^4 b^4 n_{CA}} \sum_{i=1}^m a_i^2 \quad (22)$$

Enligt [4] kan summeringen av det kvadrerade avståndet  $a_i$  för en balk med höjden  $h = mb$  skrivas som

$$\sum_{i=1}^m a_i^2 = \frac{b^2}{12} (m^3 - m) \quad (23)$$

och den maximala torsionsskjuvspänningen kan följaktligen uttryckas enligt

$$\tau_{tor} = \frac{3V}{b^2 n_{CA}} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m^3} \right) \quad (24)$$

De ovan angivna sambanden går att tillämpa enbart när de ovan nämnda antagandena gäller. För balkelement med skilda lamellbredder i de transversella och longitudinella skikten, d.v.s.  $b_0 \neq b_{90}$ , kan skjuvspänningen enligt [4] skrivas som

$$\tau_{tor} = \frac{3V}{b^2 n_{CA}} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m^3} \right) k_b \quad \text{där} \quad k_b = \frac{b_{max}}{b_0} \frac{2b_0^2}{b_0^2 + b_{90}^2} \quad \text{och} \quad b_{max} = \max\{b_0, b_{90}\} \quad (25)$$

För det generella fallet med varierande lamellbredd  $b_{0,i}$  inom de longitudinella skikten kan torsionsskjuvspänningar enligt [4] istället bestämmas enligt

$$\tau_{tor} = \frac{6Vb_{90}}{h^3 n_{CA,k}} \frac{\sum_{i=1}^m (a_i^2 b_{0,i})}{\sum_{i=1}^m I_{p,CA,i}} b_{max,i} \quad \text{där} \quad b_{max,i} = \max\{b_{0,i}, b_{90}\} \quad (26)$$

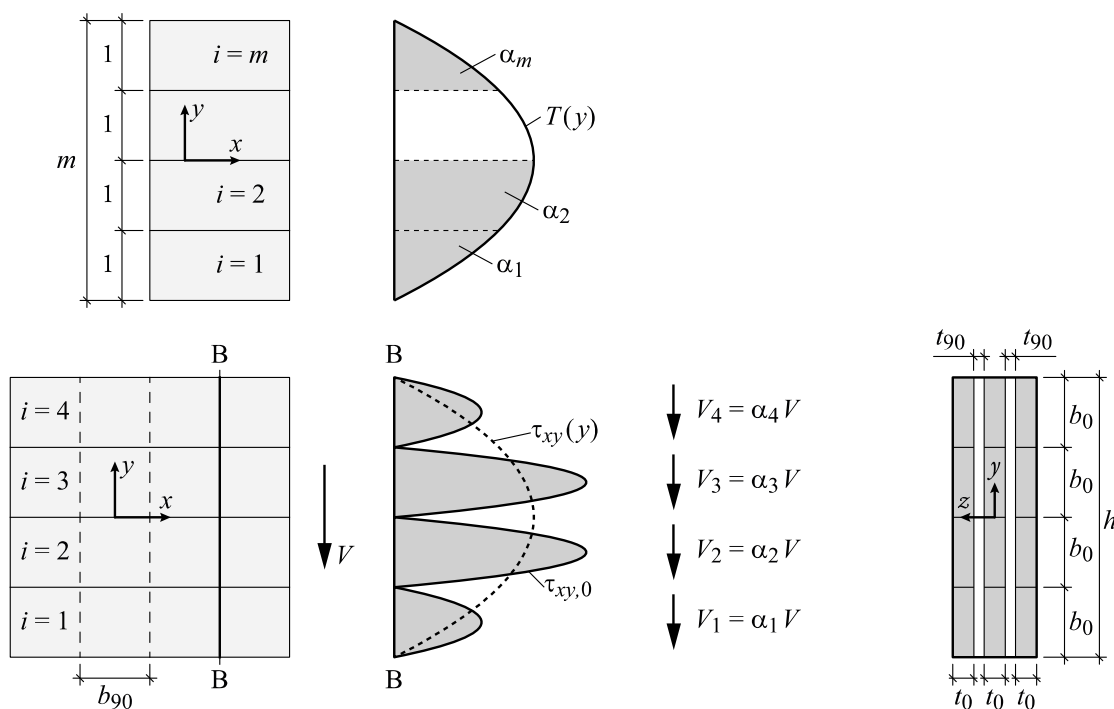
När ojämn fördelning av torsionsskjuvspänningar i balkens breddriktning råder, på grund av varierande kvot mellan de longitudinella skiktens tjocklek och antalet korsningsområden som dessa delar med transversella lameller,  $t_{0,k}/n_{CA,k}$ , kan torsions-skjuvspänningen enligt [4] skrivas som

$$\tau_{tor} = \frac{6Vb_{90}}{h^3 n_{CA,k}} \frac{t_{0,k}}{t_{net,0}} \frac{\sum_{i=1}^m (a_i^2 b_{0,i})}{\sum_{i=1}^m I_{p,CA,i}} b_{max,i} \quad (27)$$

### 3.3.4 Skjuvspänningar på grund av torsion – modell B

Flaigs beräkningsmodell för skjuvspänningar på grund av torsion, se avsnitt 3.3.3, verkar vara baserad på delvis felaktiga antaganden om fördelningen av inre krafter i KL-träbalkar, se [9]. Enligt Flaigs modell antas torsionsmomenten vara lika för alla korsningsområden i balkens höjdriktning, vilket av jämviktsskäl innebär att tvärkraften i den enskilda longitudinella lamellen också måste vara lika för alla lameller i höjddled. Denna fördelning av torsionsmoment och tvärkrafter stämmer illa överens med resultat av FE-beräkningar av KL-träbalkar som redovisas i [9]. Enligt dessa FE-beräkningar erhålls istället betydligt högre torsionsmoment och tvärkrafter nära balkens centrumlinje, och lägre moment och krafter för de övre respektive undre lamellerna i balken.

En modifiering av Flaigs beräkningsmodell, som ger kraftfördelningar som bättre stämmer överens med resultat av FE-beräkningar, har presenterats av Danielsson & Serrano [10]. Enligt denna modell (här kallad modell B) antas inte jämn fördelning av tvärkrafterna i de longitudinella lamellerna. Istället antas tvärkrafterna vara fördelade i enlighet med den paraboliska skjuvspänningsfördelningen enligt figur 10. För snitt B-B, placerad vid en skarv mellan olimnade transversella lameller, antas för modell B en fördelning enligt figur 10. Denna fördelning av tvärkrafter kan jämföras med antagen fördelning för modell A enligt figur 5 och 6.



Figur 10. Antagen tvärkraftsfördelning i KL-träbalk, enligt [10].

Torsionsmoment  $M_{tor,i,k}$  och torsionsskjuvspänning  $\tau_{tor,i,k}$  kan härledas genom jämviktsbetraktelse av en del av en longitudinell lamell, istället för som enligt avsnitt 3.3.3 genom att betrakta hela transversella lameller. Med detta tillvägagångssätt måste krafterna som verkar i den enskilda longitudinella lamellen först bestämmas. Nedan presenteras ekvationer för torsionsmoment och torsionsskjuvspänningar enligt detta tillvägagångssätt, med tvärkraftsfördelning enligt [10].

Den totala tvärkraften  $V$  antas fördelas till de longitudinella lamellerna på ett sådant sätt att tvärkraften  $V_{i,k}$  i de enskilda lamellerna kan uttryckas enligt

$$V_{i,k} = \frac{t_{0,k}}{t_{net,0}} \alpha_i V \quad (28)$$

där  $\alpha_i$  är en dimensionslös viktfaktor som beskriver fördelningen av tvärkrafterna i höjddled. Dessa viktfaktorer kan bestämmas genom att först definiera en dimensionslös parabolisk funktion  $T(y)$  som illustreras i figur 10 och enligt

$$T(y) = \frac{3}{2} \frac{1}{m^3} (m^2 - 4y^2) \quad (29)$$

$$T\left(-\frac{m}{2}\right) = T\left(\frac{m}{2}\right) = 0 \quad \text{och} \quad \int_{-m/2}^{m/2} T(y) dy = 1 \quad (30)$$

Vilket gör att viktfaktorerna för en balk med  $m$  longitudinella lameller av bredd  $b_0$  kan uttryckas enligt

$$\alpha_i = \int_{-m/2}^{m/2} T(y) dy = \frac{6i - 6i^2 + m(6i - 3) - 2}{m^3} \quad (31)$$

Med avseende på momentjämvikt för en del av en enskild longitudinell lamell av längden  $b_{90}$  i  $x$ -riktningen enligt figur 8 erhålls

$$M_{tor,i,k} = \frac{1}{n_{CA,k}} \frac{t_{0,k}}{t_{net,0}} \left( V_i b_{90} + \Delta V_i \frac{b_{90}}{2} - \Delta M_i \right) \quad (32)$$

där  $\Delta V_i$  och  $\Delta M_i$  är ändringen i tvärkraft och moment över längden  $b_{90}$ . Utan någon extern last kan torsionsmomentet bestämmas som

$$M_{tor,i,k} = \frac{V b_{90}}{n_{CA,k}} \frac{t_{0,k}}{t_{net,0}} \left( \alpha_i - \frac{1}{m^3} \right) \quad (33)$$

För fallet med lika bredd på alla longitudinella och transversella lameller enligt  $b_0 = b_{90} = b$ , en spänningsfördelning enligt figur 7 och ett antagande om stelkroppsrotation mellan transversella och longitudinella lameller kan den maximala torsionsskjuvspänningen slutligen skrivas enligt

$$\tau_{tor,i,k} = \frac{3V}{b^2} \frac{1}{n_{CA,k}} \frac{t_{0,k}}{t_{net,0}} \left( \alpha_i - \frac{1}{m^3} \right) \quad (34)$$

### 3.4 Bøjstyvhet

Med antagande om linjär variation av normalspänning i  $y$ -riktningen och konstant spänning i  $z$ -riktning kan bøjstyvheten för ett KL-träelement uttryckas med integralen

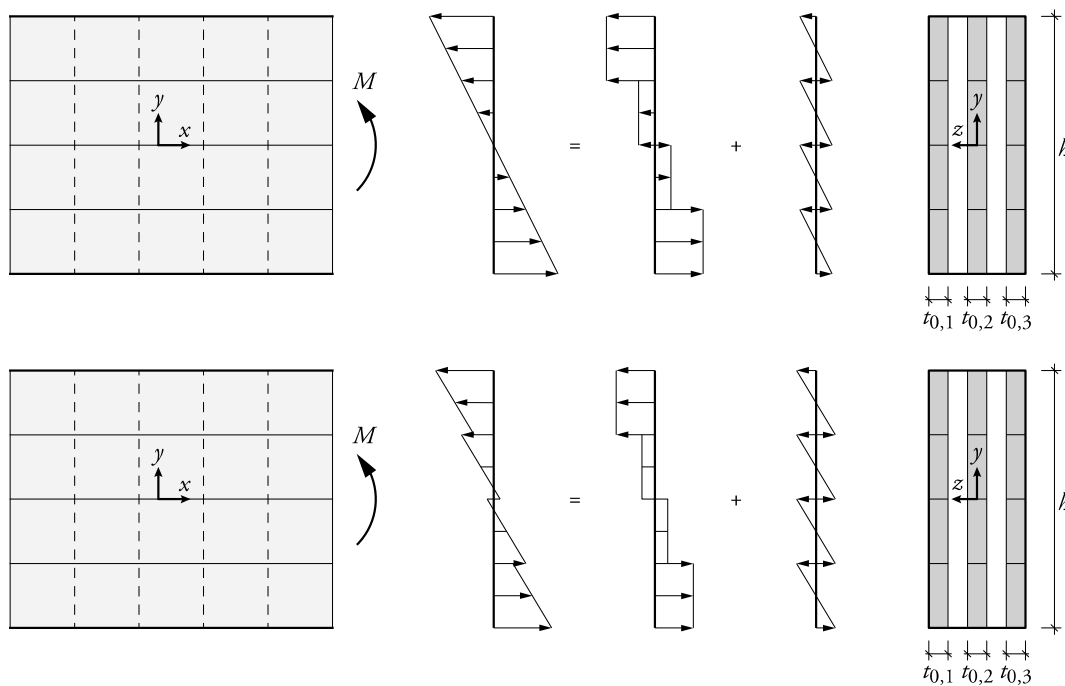
$$D_{EI} = \int_A E(y, z) y^2 dA \quad (35)$$

Vid en förenklad beräkningsmodell för bøjstyvheten  $D_{EI}$ , antas att normalspänningarna enbart tas upp av lameller med orientering av fiberriktningen parallellt med spänningsriktningen. Detta antagande grundar sig på den stora skillnaden i styvheten hos trämaterialen mellan belastning i fiberriktningen respektive belastning vinkelrätt fiberriktningen,  $E_0/E_{90} \approx 15 - 30$ . Normalspänningen antas också ha en linjär och kontinuerlig fördelning över hela balkhöjden, se figur 11. Uttrycket för bøjstyvhet kan då enligt [4] uttryckas som

$$D_{EI} = E_0 I \quad \text{där } I = I_{net} = \frac{t_{ne,0} h^3}{12} \quad (36)$$

där  $t_{net,0} = \sum t_{0,k}$  är nettotvårsnittets bredd med avseende på de longitudinella skikten. Den linjära och kontinuerliga normalspänningsfördelningen följer konventionell balkteori (Bernoulli-Euler och Timoshenko), som säger att plana tvärsnitt förblir plana vid deformation.

En förskjutning mellan de longitudinella lamellerna kan ske för element utan kantlimning, vilket kan medföra en mer eller mindre diskontinuerlig normalspänningsfördelning, se figur 11 nedan. Bøjstyvheten för en sådan situation är lägre jämfört med bøjstyvhet enligt ekvation (36).



Figur 11. Illustration av möjliga normalspänningsfördelningar över höjden av en KL-träbalk.

### 3.5 Skjuvstyvhet

För en KL-träbalk där alla lameller är limmade till varandra i varje kant och yta, d.v.s. en balk med kantlimning, kan skjuvstyvheten antas vara samma som för en homogen limträbalk med samma tvärsnittsmått. För en KL-träbalk utan kantlimning, d.v.s. där lamellerna endast är limmade till varandra över korsningsområdena och där lameller inom samma skikt inte är limmade till varandra, kan skjuvstyvheten inte antas vara lika hög på grund av diskontinuitet mellan lameller inom samma skikt. En beräkningsmodell som beaktar skjuvdeformationen på grund av relativ rotation  $\gamma_{tor}$  och relativ förskjutning  $\gamma_{xy}$  mellan de longitudinella lamellernas centrum med hänsyn till de transversella lamellerna finns i [2], [4] och [11], se figur 12.

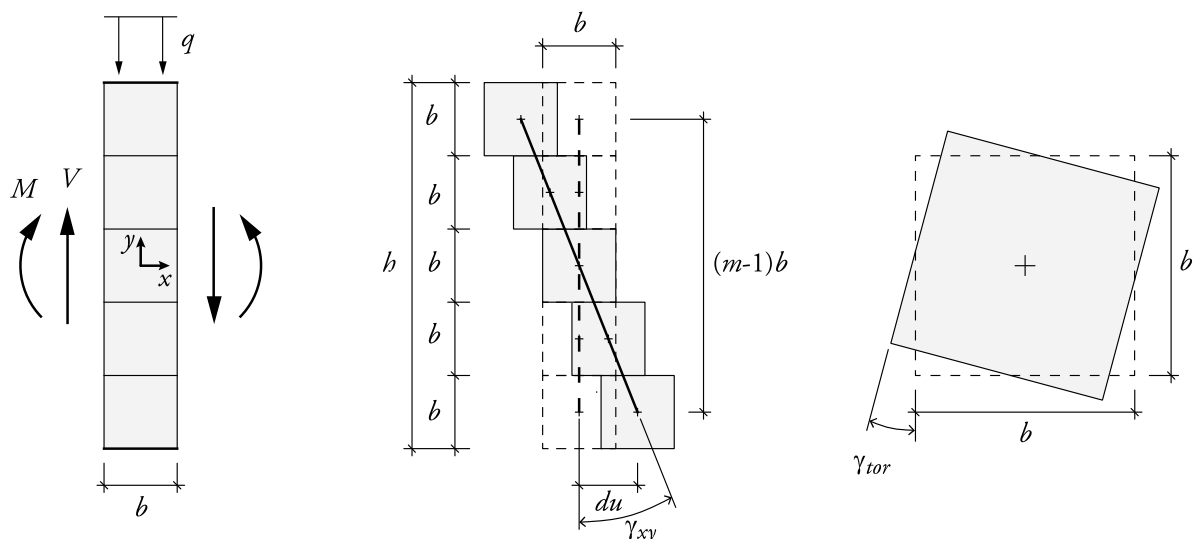
Limmet mellan korsningsområden anses enligt denna modell fungera som en fjäder med en fördelad styvhet  $K$  [N/mm<sup>3</sup>]. Styvheten antas vara oberoende av tjockleken på de sammankopplade lamellerna,  $t_0$  och  $t_{90}$ , [7]. I modellen antas bredden vara lika för de longitudinella och de transversella lamellerna vid korsningsområden,  $b_0 = b_{90} = b$  samt att kvoten  $t_{0,k}/n_{CA,k}$  är konstant för alla longitudinella lameller vilket innebär att skjuvspänningsfördelningen är lika i alla korsningsområden i breddriktningen för balken. Fjäderstyvheteter [N/mm] med hänsyn till relativ förskjutning bestäms genom

$$K_x = KA_{CA} \quad (36)$$

och med hänsyn till relativ rotation bestäms styvheten genom

$$K_\varphi = KI_{p,CA} \quad (37)$$

där  $A_{CA} = b^2$  är arean för korsningsområdet och där  $I_{p,CA} = b^4/6$  är det polära tröghetsmomentet för korsningsområdet.



Figur 12. Relativa förskjutningen mellan de longitudinella och transversella lamellerna.

Den relativa förskjutningen mellan longitudinella och transversella lamellerna i figur 12 ger en skjuvtöjningskomponent  $\gamma_{xy}$  över tvärsnittet enligt följande

$$\gamma_{xy} = \frac{2du}{b(m-1)} = \frac{2\tau_{xz}}{Kb(m-1)} \quad (38)$$

och den relativa rörelsen på grund av torsion ger en skjuvtöjningskomponent  $\gamma_{tor}$  som kan uttryckas genom

$$\gamma_{tor} = \frac{M_{tor}}{KI_{p,CA}} = \frac{2\tau_{tor}}{Kb} \quad (39)$$

där  $\tau_{xz}$  är skjuvspänningen parallellt med balkaxeln och  $\tau_{tor}$  är torsionsskjuvspänningen. Dessa skjuvspänningar uppstår från tvärkraften  $V$  som verkar över hela balkens tvärsnitt. Genom att använda  $\tau_{xz}$  enligt ekvation (14) kan  $\gamma_{xy}$  uttryckas enligt följande

$$\gamma_{xy} = \frac{12V}{b^3K} \frac{1}{m^3} \frac{1}{n_{CA}} \quad (40)$$

och genom att använda  $\tau_{tor}$  och ekvation (24) kan  $\gamma_{tor}$  uttryckas enligt följande

$$\gamma_{tor} = \frac{6V}{b^3K} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m^3} \right) \frac{1}{n_{CA}} \quad (41)$$

Den totala skjuvtöjningen relaterad till relativ rörelse mellan longitudinella och transversella lameller kan då skrivas som  $\gamma_{CA} = \gamma_{xy} + \gamma_{tor}$ . En effektiv skjuvmodul som tar hänsyn till relativ förskjutning och torsion över alla korsningsområden i balken kan uttryckas följande

$$G_{ef,CA} = \frac{V}{k_s A_{gross} \gamma_{CA}} = \frac{Kb^2}{5} \frac{n_{CA}}{t_{gross}} \frac{m^2}{m^2+1} \quad (42)$$

där  $k_s = 5/6$  är en korrektionsfaktor.

Den totala effektiva skjuvmodulen  $G_{ef,CLT}$  för hela tvärsnittet, med hänsyn till skjuvrörelser för lamellerna i  $xy$ -planet och skjuvrörelser för både relativ förskjutning och torsion i korsningsområden, kan uttryckas enligt följande

$$G_{ef,CLT} = \left( \frac{1}{G_{lam}} + \frac{1}{G_{ef,CA}} \right)^{-1} \quad (43)$$

där  $G_{lam}$  är skjuvmodulen för lamellerna med hänsyn till skjuvning i  $xy$ -planet.



## 4 Experimentella tester av enskilda korsningsytor

Tester av enskilda korsningsområden har utförts av Flaig & Meyer [12], för att bestämma styvheten och hållfastheten för KL-trä vid skjuvbelastning och med hänsyn till mod 3. Provkropparna bestod av, i huvudsak, en longitudinell och en transversell lamell som limmats mot varandra enligt figur 13. Två olika limtyper användes för provkropparna, melaminlim och polyuretanlim. 24 individuella tester gjordes för provkroppar limmade med melaminlim och 10 individuella tester för polyuretanlim.

Provkroppen belastades enligt figur 14, med hjälp av en stålram enligt figur 15. Det vertikala stålelementet var fast inspänt till provningsmaskinen medan det horisontella stålelementet kunde rotera fritt, då det var infäst endast via en centriskt placerad bult. Mindre stålplattor svetsades på kanterna av stålramen för att hålla lamellerna på plats i stålramen.

Provkroppen belastades genom att en last  $F$  påfördes på vänster kant av den longitudinella lamellen enligt figur 14. I de fyra hörnen av korsningsområdet mättes den relativa förskjutningen mellan lamellerna, se beteckningar  $u_1 - u_4$  i figur 14.

Enligt [12] har styvheten utvärderats enligt

$$K_{CA} = \frac{\Delta M_{01-04}}{\Delta \gamma_{01-04} I_p} \quad (44)$$

där beteckningen  $\Delta M_{01-04}$  avser skillnaden i moment vid 40% respektive 10% av maxbelastningen,  $\Delta \gamma_{01-04}$  avser den relativa rotationen mellan lamellerna vid motsvarande belastningsnivåer och där  $I_p$  avser det polära tröghetsmomentet. Exakt hur den relativa rotationen  $\Delta \gamma_{01-04}$  har beräknats från mätvärden av förskjutningar vid  $u_1 - u_4$  är dock oklart.

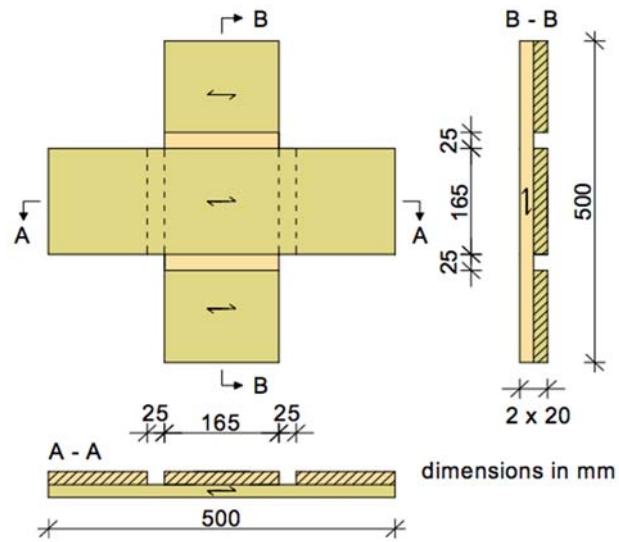
Redovisade värden av styvheten  $K_{CA}$  från [12] finns presenterade i tabell 1 och 2. Uppmätta värden för testerna med melaminlim var mellan  $6.3 - 10.3 \text{ N/mm}^3$  med ett medelvärde på  $8.26 \text{ N/mm}^3$ . Från testen med polyuretanlim uppmättes värden mellan  $5.3 - 8.9 \text{ N/mm}^3$  med ett medelvärde på  $7.06 \text{ N/mm}^3$ .

Styvheten  $K_{CA}$  antas här motsvara styvheten i korsningsområdet, det vill säga styvheten med hänsyn till horisontell och vertikal relativ förskjutning. Enligt Flaigs modell antas de individuella lamellerna följa konventionell balkteori vilket innebär att plana tvärsnitt förblir plana och stela vid förskjutning. Detta innebär att lamellerna antas rotera i förhållande till varandra som två stela kroppar vilket i sin tur innebär att all deformation antas ske över korsningsområdet. Uppmätt värde  $K_{CA}$  motsvarar det som betecknas som  $K$  i avsnitt 3.5.

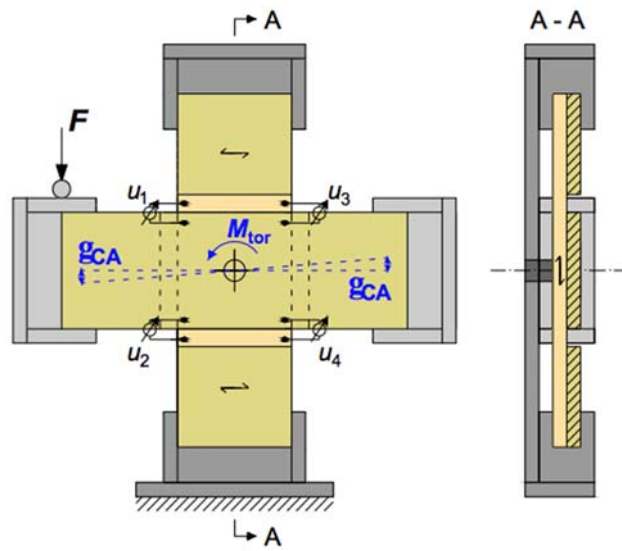
I tabell 1 och 2 finns även densiteten för de två lamellerna och maximal torsions-skjuvspänning från testerna redovisade. Torsions-skjuvspänningen har beräknats enligt

$$\tau_{tor} = \frac{M_u b}{I_p^2} \quad (45)$$

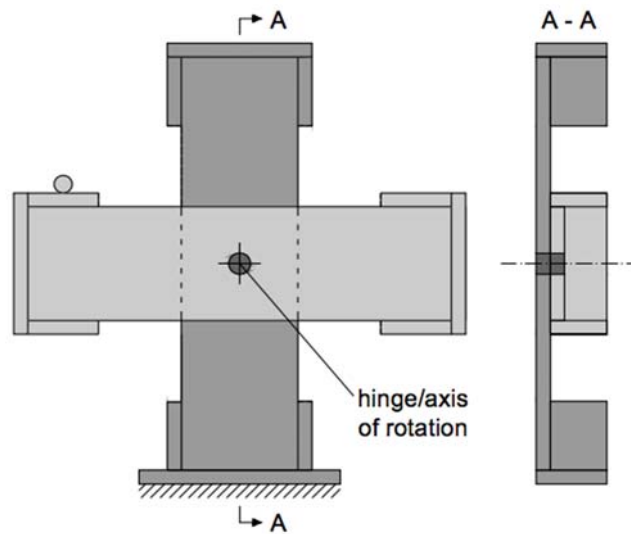
där  $M_u$  är torsionsmomentet vid maximal belastning innan brott.



Figur 13. Provkropp och dimensioner, [12].



Figur 14. Försöksupställningen och belastning, [12].



Figur 15. Stålräm utan provkropp, [12].

Tabell 1. Resultat från Flaig och Meyers tester för melaminlim.

Test	$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_2$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\tau_{tor}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$K_{CA}$ [N/mm <sup>3</sup> ]
1	581	509	2.71	7.00
2	361	518	2.28	9.40
3	347	395	2.25	7.55
4	535	422	2.49	9.18
5	459	414	3.03	7.77
6	441	447	3.18	8.99
7	369	451	2.93	10.3
8	436	352	2.67	6.42
9	479	482	3.46	8.15
10	419	386	2.79	7.42
11	510	459	3.01	9.16
12	430	412	3.28	8.63
13	451	357	3.50	6.50
14	353	387	2.97	9.77
15	468	418	2.10	9.18
16	382	470	2.04	6.54
17	462	255	3.65	8.04
18	483	409	3.20	7.68
19	383	464	3.19	10.1
20	416	435	2.87	7.52
21	354	380	2.33	7.09
22	386	369	2.69	6.33
23	466	417	2.38	8.95
24	423	473	2.15	9.24
Medelvärde	433	424	2.80	8.26

Tabell 2. Resultat från Flaig och Meyers tester för polyuretanlim.

Test	$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_2$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\tau_{tor}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$K_{CA}$ [N/mm <sup>3</sup> ]
1	417	420	3.22	8.33
2	387	393	3.44	5.87
3	510	549	4.07	8.91
4	433	436	3.47	8.90
5	415	426	2.88	6.35
6	360	382	3.15	6.29
7	345	344	2.96	5.98
8	557	553	3.87	8.92
9	360	394	3.59	5.28
10	375	398	3.61	5.85
Medelvärde	416	430	3.43	7.06

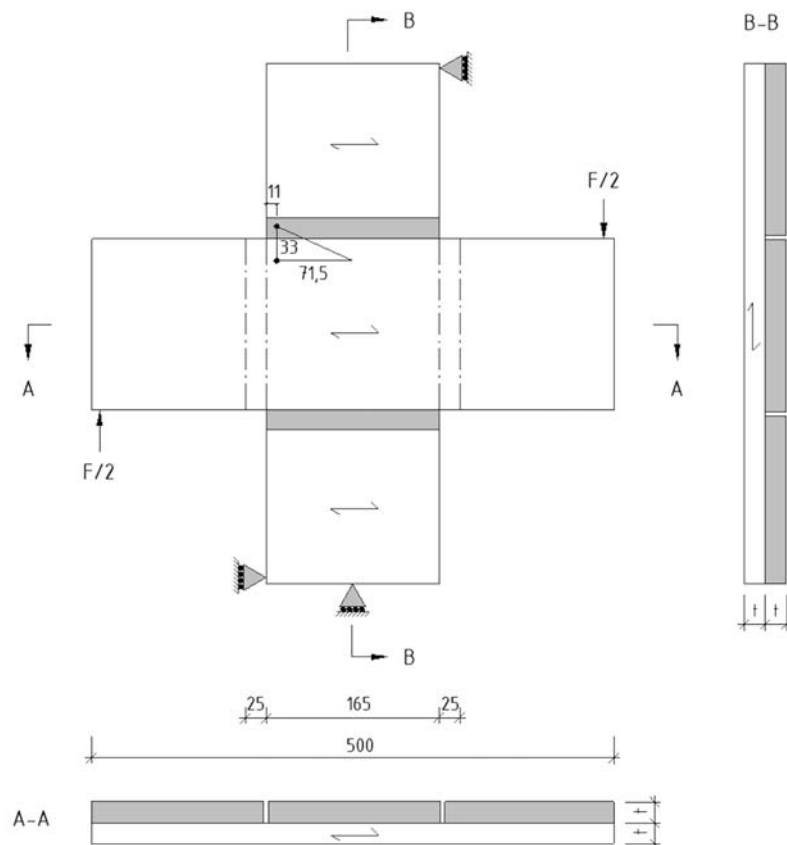


## 5 Numeriska beräkningar av enskilda korsningsområden

Numeriska beräkningar med hjälp av finita elementmetoden (FEM) och det kommersiella programmet Abaqus [13] har utförts för att jämföra resultaten från de experimentella testerna med resultaten som erhålls från FE-beräkningar. I Abaqus modelleras trädelarna som 3D-solider. Enligt Flaigs modell, som ligger till grund för de resultat som presenteras i kapitel 4, antas lamellerna rotera som stela kroppar vilket innebär att all rörelse antas ske i korsningsområdet och ingen deformation sker i själva lamellerna. I FE-modellen anses inte lamellerna som stela kroppar vilket betyder att deformation i lamellerna kan ske.

Provkroppen av sammanlimmade lameller placerades vid testerna i en stålram. I FE-beräkningarna modelleras trälamellerna, men inte stålramen, och randvillkor appliceras istället direkt på trädelarna. Dimensioner på ingående trädelar samt orientering av fiberriktningar är samma som för provkropparna enligt figur 13 och laster och upplagsförhållanden för FE-modellen är enligt figur 16.

För de experimentella testerna som redovisas i kapitel 4 var lamelltjockleken 20 mm för alla provkroppar. För att undersöka lamelltjocklekens inverkan på resultaten utfördes beräkningar på modeller med olika lamelltjocklek,  $t$ .



Figur 16. Illustration av laster och randvillkor för FE-modellen i Abaqus.

## 5.1 Modellering av lameller

Lamellerna modellerades som linjärt elastiska och ortotropa med styvhetsgenskaper enligt tabell 3. Riktning 1 betecknar riktningen parallellt med fibrerna i lamellerna och riktning 2 och 3 betecknar riktningar vinkelrätt fiberriktningen i lamellerna. Element med 8 noder och full integration användes för lamellerna.

Inverkan av lamellernas tjocklek på beräkningsresultaten undersöktes genom att genomföra beräkningar för fyra olika lamelltjocklekar  $t$  (20, 25, 40 och 50 mm), där  $t$  anger lamellernas tjocklek enligt i figur 16.

Tabell 3. Styvhetsparametrar

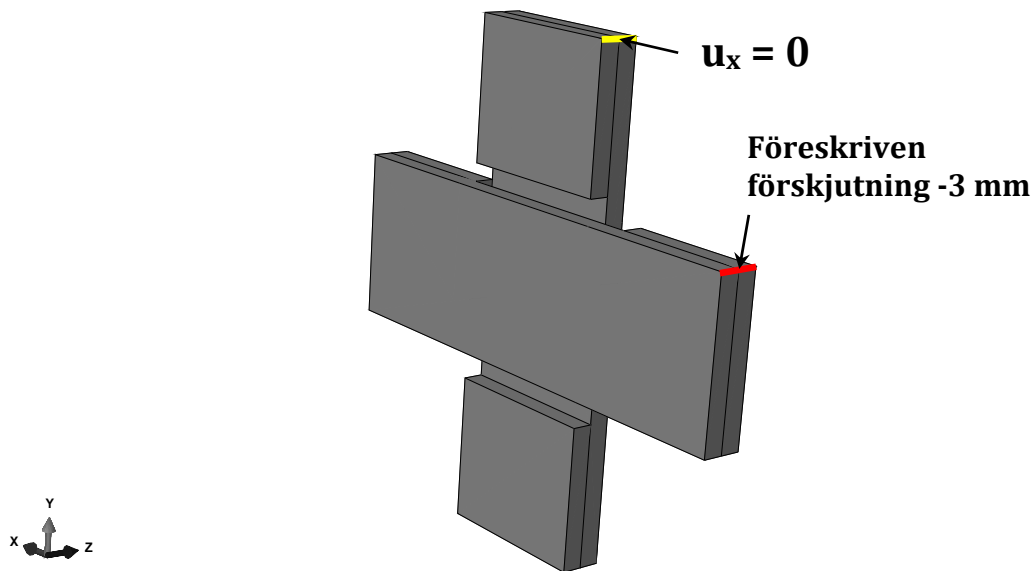
$E_1$	$E_2$	$E_3$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[-]	[-]	[-]
12000	500	500	600	600	60	0.3	0.3	0.3

## 5.2 Modellering av kontakt mellan lameller

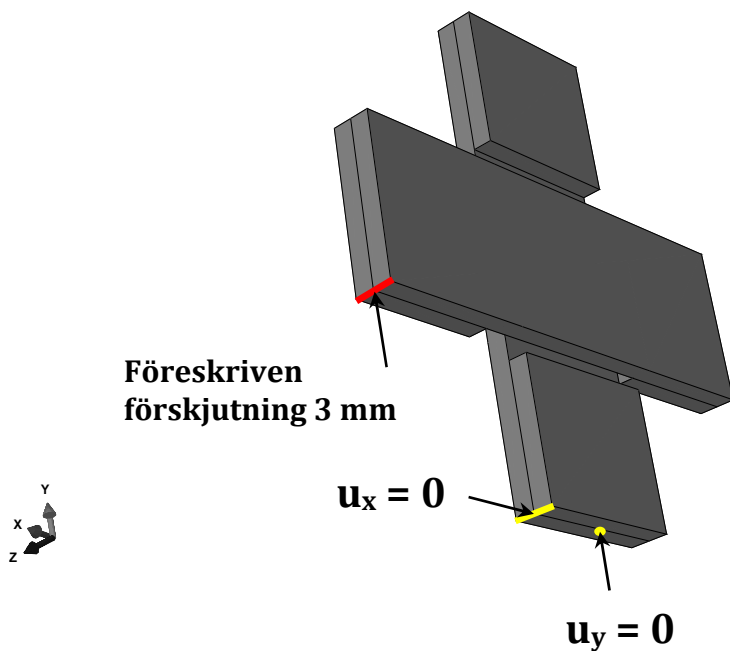
Kopplingen mellan de två lamellerna i korsningsområdet modelleras med hjälp av en kontaktformulering för ytor, i Abaqus kallad *surface-to-surface contact*. För tryckspänning vinkelrätt mot kontaktytan antas ett beteende utan eftergivlighet (*hard contact*). För dragbelastning vinkelrätt mot kontaktytan och för skjuvbelastning i kontaktytans plan antas elastisk respons som beskrivs av ett linjärt samband mellan spänning och förskjutning. Styvhetsgenskaperna för normalriktningen,  $K_{nn}$ , och för de två skjuvriktningarna,  $K_{tt}$  och  $K_{ss}$ , ansattes för varje enskild beräkning till ett och samma värde enligt  $K_{in} = K_{nn} = K_{tt} = K_{ss}$ . Inverkan av styvhetsgenskaperna för kontaktytan på beräkningsresultaten undersöktes genom att genomföra beräkningar för värden på  $K_{in}$  mellan 1 N/mm<sup>3</sup> och 10 000 N/mm<sup>3</sup>.

### 5.3 Randvillkor

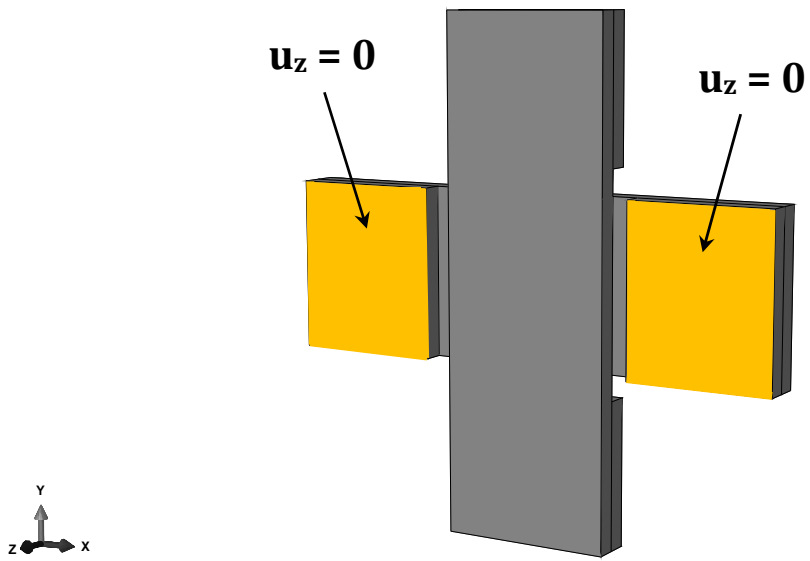
För att efterlikna belastningssituationen och upplagsförhållanden i de experimentella testerna har upplag definierats  $x$ -led,  $y$ -led och  $z$ -led enligt figurerna 17, 18 och 19. Belastningen påfördes modellen som en föreskriven förskjutning på 3 mm längs med två linjer enligt figur 17 och 18.



Figur 17. Illustration av upplag i  $x$ -led och föreskriven förskjutning.



Figur 18. Illustration av upplag i  $x$ - och  $y$ -led samt föreskriven förskjutning



*Figur 19. Illustration av upplag i z-led.*



## 5.4 Beräkning av styvhet

En skjuvstyvhet, här betecknad  $K_{ut}$ , bestäms från FE-beräkningarna på motsvarande vis som skjuvstyvheten  $K_{CA}$  enligt kapitel 4. Skjuvstyvheten  $K_{ut}$  bestäms genom att utvärdera nodförskjutningar för den deformerade geometrin. De noder som beaktas motsvarar de punkter på provkropparna där förskjutningar mättes vid de experimentella testerna, se figur 14 och 16. För att bestämma styvheten  $K_{ut}$  från FE-beräkningarna används följande ekvation från [12]

$$K_{ut} = \frac{M_{tor}}{\gamma I_p} \quad (46)$$

där  $M_{tor}$  är torsionsmomentet vid en given last,  $\gamma$  är vinkeländringen enligt figur 19 och  $I_p$  är det polära tröghetsmomentet för korsningsområdet. Torsionsmomentet  $M_{tor}$  beräknas genom att för ränderna med föreskriven förskjutning summera och multiplicera reaktionskrafterna i  $y$ -riktningen med avståndet till centrum för det aktuella korsningsområdet, se figur 16 och 17. Det polära tröghetsmomentet beräknas enligt

$$I_p = \frac{b^4}{6} \quad (47)$$

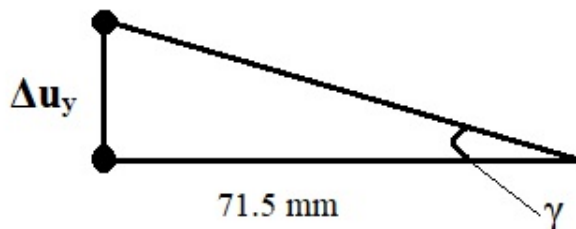
där  $b$  är bredden för korsningsområdet [7].

Vinkeländringen  $\gamma$  bestäms genom att utvärdera nodförskjutningarna i  $y$ -led för två noder som är placerade enligt figur 16 och som tydliggörs i figur 19. Skillnaden i nodförskjutning i  $y$ -led för de två noderna betecknas  $\Delta u_y$  och vinkeländringen bestäms enligt

$$\gamma = \frac{\Delta u_y}{71.5} \quad (48)$$

där 71.5 mm är avståndet från mätpunkterna till modellens centrum i  $x$ -led. Eftersom förskjutningarna är små och vinkeländringen liten antas att ekvation (48) ger tillräcklig noggrannhet.

$K_{ut}$  är en beräknad styvhet som avser styvheten för hela strukturen, bestående av trälameller och en eftergivlig limfog.  $K_{ut}$  är motsvarigheten till  $K_{CA}$  i Flaigs och Meyers experiment enligt tabell 1 och 2.



Figur 20. Placering av noder som används för utvärdering av styvhet enligt FE-beräkningar. Se även figur 16.



## 6 Resultat

Resultaten från FE-beräkningarna presenteras nedan i tabell 4.  $K_{in}$  avser styvhet för kontaktformuleringen mellan lamellerna, se avsnitt 5.2, och är alltså indata för FE-beräkningarna. Styvheten  $K_{ut}$  är den beräknade styvheten från FE-analyserna och avser styvheten för hela strukturen, bestående av trälameller och en eftergivlig limfog beräknat enligt avsnitt 5.4. Resultat från beräkningar avseende lamelltjocklekar  $t = 20, 25, 40$  och  $50$  mm finns presenterade.

Tabell 4. Resultat från FE-beräkningar.

$K_{in}$ [N/mm <sup>3</sup> ]	Lamelltjocklek $t$ [mm]			
	20	25	40	50
	$K_{ut}$ [N/mm <sup>3</sup> ]			
1	0.868*	0.862	0.847	0.839
2	1.520	1.511	1.448	1.450
5	2.840	2.784	2.647	2.586
8.26	3.686	3.595	3.370	3.274
10	4.020	3.904	3.640	3.529
20	5.135	4.790	4.529	4.360
100	6.856	6.514	5.804	5.531
500	7.430	7.080	6.250	5.935
1000	7.566	7.170	6.323	5.999
10 000	7.668	7.260	6.394	6.063

Delresultat avseende reaktionskrafter vid ränder med föreskriven förskjutningen eller för nodförskjutningar presenteras inte för alla beräkningar. Istället redovisas delresultat för en beräkning för att illustrera beräkningsgången för att bestämma styvheten  $K_{ut}$ . För lamelltjocklek  $t = 20$  mm och  $K_{in} = 1.0$  N/mm<sup>3</sup> erhålls följande delresultat och värde på styvheten  $K_{ut}$

$$F = 4047.9 \text{ N}$$

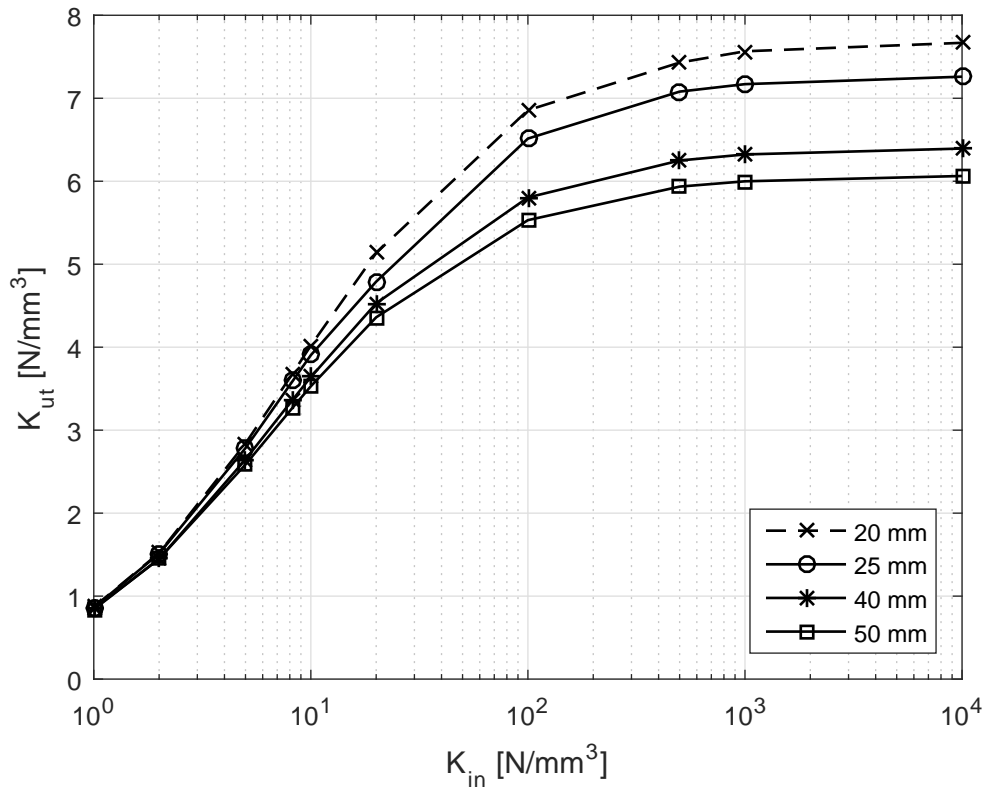
$$M_{tor} = 4047.9 \cdot 250 = 1011975 \text{ Nmm}$$

$$\Delta u_y = 0.6749 \text{ mm}$$

$$\gamma = 0.6749/71.5 = 0.0094$$

$$* K_{ut} = \frac{1011975}{0.0094 \cdot 165^4/6} = 0.868 \text{ N/mm}^3$$

I figur 21 nedan visas ett diagram med datapunkter från tabell 4. På  $x$ -axeln visas kontaktstyvhetsen  $K_{in}$  i logaritmisk skala och på  $y$ -axeln visas den beräknade styvhetsen  $K_{ut}$ . De fyra kurvorna i diagrammet motsvarar de fyra analyserade lamelltjocklekarna.



Figur 21. Resultat för beräknad styvhet  $K_{ut}$  för olika kontaktstyvhetsen  $K_{in}$ .

Resultaten som presenteras i tabell 4 och figur 21 är baserade på analyser av FE-modeller med elementnät där de enskilda elementen har en ungefärlig sidlängd av 6 mm.

För geometrin med lamelltjocklek  $t = 20$  mm och kontaktstyvhet  $K_{in} = 8.26$  N/mm<sup>3</sup> utfördes även en beräkning med ett finare elementnät med en ungefärlig sidlängd på elementen av 3.5 mm. En jämförelse mellan dessa två olika analyser presenteras i tabell 5 nedan. Av resultaten i tabellen framgår att skillnaden i beräknad styvhet  $K_{ut}$  är ca 4.5 % mellan de två beräkningarna.

Tabell 5. Resultat och delresultat för två olika elementstorlekar.

Elementstorlek [mm]	$K_{in}$ [N/mm <sup>3</sup> ]	$F$ [N]	$M_{tor}$ [Nmm]	$\Delta y$ [mm]	$\gamma$ [rad]	$K_{ut}$ [N/mm <sup>3</sup> ]
6	8.26	10255	2563750	0.403	0.0056	3.686
3.5	8.26	9546	2386443	0.392	0.0055	3.523

## 7 Diskussion

De resultat som presenteras i kapitel 6 är baserade på beräkningar utförda i finita elementprogrammet Abaqus, där en FE-modell har skapats för att beskriva försöksuppställningen och testutförandet som användes i [12] och som beskrivs i avsnitt 4.2. Det finns en viss osäkerhet och svårigheter i att beskriva verkligheten i form av en modell. Trä är ett organiskt och heterogent material och FE-modellen representerar förenklingar och idealiseringar av verkligheten, till exempel avseende materialbeteende och geometri.

Under arbetes gång har vi provat oss fram för att komma fram till vilken elementstorlek som är lämplig att använda. Ju fler element desto noggrannare blir beräkningsresultaten men till en kostnad av längre beräkningstid. Här har vi gjort en avvägning mellan resultat och tidsåtgång för att uppnå ett så representativt resultat som möjligt under en rimlig tid.

Det finns en betydelsefull skillnad mellan de antaganden som ligger till grund för utvärderingen av de experimentella testerna som presenteras i [12] och resultaten av FE-beräkningarna som presenteras i kapitel 6. Utvärderingen av de experimentella testerna baseras på antagandet att de två lamellerna roterar som stela kroppar i förhållande till varandra, vilket innebär att det inte uppstår någon deformation inom de respektive lamellerna. Resultatet från de FE-beräkningar som presenteras i kapitel 6 visar att deformationer inom lamellerna utgör ett betydande bidrag till den totala relativa rörelsen mellan de respektive lamellerna.

Resultaten från FE-beräkningarna visar att lamellernas tjocklek har en inverkan på rotationsstyvheten för modellen, när denna styvhet utvärderas enligt beskrivningen i avsnitt 5.4. Lamelltjockleken är alltså en faktor som bör beaktas vid vidare arbete inom området.

Styvhetsparametern  $K_{in}$  (indata till FE-beräkningarna) kan lite förenklat beskrivas som styvheten i limfogen. Resultaten från FE-beräkningarna visar att när styvheten i limfogen är låg, blir inverkan av lamelltjockleken minimal då den största deformationen sker i fogen. När limmets styvhet däremot sätts till ett högt värde erhålls ett beteende där majoriteten av deformationen sker i lamellen och inte i fogen och därmed blir lamelltjocklekens inverkan en betydande faktor. Det intressanta här är också att styvheten minskar med en ökande lamelltjocklek.

Vad gäller Flaigs modell ser vi ett par tveksamheter som bör diskuteras. Flaigs modell bygger på jämnt fördelat torsionsmoment för varje korsningsområde i balkens höjdriktning. Vi tror inte på detta påstående utan tror mer på att torsionsmomentet kommer att vara högre i balkens mitt i jämfört med kanterna. Detta gör att ekvation (24) som redovisas i rapporten inte stämmer. Felet i detta antagande gör att fördelningen av krafterna i balken uppskattas illa, vilket i sin tur gör att beräkningen av skjuvstyvheten antagligen också blir missvisande.

Slutligen är den stora frågan hur skjuvstyvheten skall bestämmas. Vilka styvhetsvärden bör användas för de tre olika beräkningsmodellerna vid varierande lamelltjocklek? Ett värde på  $K_{ut}$  kan erhållas från vårt framräknade resultat som presenteras i figur 21 för varierande lamelltjocklek och användas i 1D-balkmodeller, se ekvation (43), och balkrostmodeller.

En 1D-balkmodell och en balkrostmodell bygger på att lamellernas tvärsnitt antas vara stela, d.v.s. ingen deformation i tvärsnittets plan kan ske. Värdet på styvhetsparametern  $K$  för kopplingen mellan lamellerna bör då vara ungefär enligt de värden som Flaig och Meyer mätt upp och redovisat i [12] för en lamelltjocklek på 20 mm. Denna styvhet beaktar alltså både deformationer i limfogen och deformationer i lamellernas tvärsnitt. Styvhetsparametern  $K$ , kan i sin tur översättas till två translationsfjädrar  $K_x$  och  $K_y$  samt en rotationsfjäder  $K_\varphi$ . Vad det gäller övriga styvhetsparametrar så tillkommer böj och skjuvstyvheten,  $E$  och  $G$ , för de enskilda lamellerna för att kunna definiera styvhetsgenskaperna fullständigt.

Samma resonemang gäller även vid beräkning med hjälp av 1D-balkmodell och bestämning av den effektiva skjuvmodulen  $G_{ef,CLT}$  som beskriver den totala effektiva skjuvmodulen för hela tvärsnittet, med hänsyn till skjuvrörelser för lamellerna i  $xy$ -planet och skjuvrörelser för både relativ förskjutning och torsion i korsningsområdet. Denna kan bestämmas med hjälp av lamellernas skjuvmodul  $G_{lam}$  samt styvheten över korsningsområden/limfogarna  $K$ . Värden på styvheten  $K$  bör även i detta fall ungefär motsvara uppmätta värden enligt Flaig och Meyer [12].

För en 3D modell tvingas inte lamellernas tvärsnitt att förbli plana, utan kan deformeras beroende på belastning. För modellering av en KL-träbalk med hjälp av 3D solider på det sätt som presenteras i kapitel 5 bör alltså styvheten för kopplingen mellan lamellerna sättas till ett betydligt högre värde jämfört med modellerna som diskuteras ovan. För att erhålla en total rotationsstyvhet som motsvarar  $K_{ut}$  på ca  $7.5 \text{ N/mm}^3$  vid utvärdering av provuppställningen enligt avsnitt 5.4 måste man för FE-beräkningar ansätta ett värde av styvheten i kopplingen mellan lamellerna på ca  $1000 \text{ N/mm}^3$  för en lamelltjocklek på 20 mm. Vidare definieras styvheten i korsningsområdet enligt denna modell av styvheten för tre relativa rörelser; skjuvrörelser i två vinkelräta riktningar i limfogens plan samt rörelse i normalriktningen till limfogens plan. Vidare tillkommer för denna modell även styvhetsparametrarna för lamellerna, som för antagande om ortotropt materialbeteende kan definieras av de nio styvhetsparametrarna  $E_x, E_y, E_z, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}, \nu_{xy}, \nu_{xz}$  och  $\nu_{yz}$ , se tabell 3.

## 8 Referenser

- [1]. Borgström E & Fröbel J. KL-trähandbok. Skogsindustrierna, Svenskt Trä, Stockholm, 2017.
- [2]. Flaig M & Blass HJ. Shear strength and stiffness of CLT-beams loaded in plane. In: Proceedings of the International Council for Research and Innovation in Building and Construction, CIB-W18, Meeting 46, Vancouver, Canada, Paper 46-12-3, 2013.
- [3]. European Committee for Standardization (CEN): EN 1995-1-1:2004, Eurokod 5: Dimensionering av träkonstruktioner. Bryssel, Belgien, 2004
- [4]. Flaig M. Biegeträger aus Brettsperholz bei Beanspruchung in Platteebene. PhD-thesis, KIT Scientific Publishing, Karlsruhe, Germany, 2013.
- [5]. Wallner-Novak M, Koppelhuber J & Pock K. Cross-laminated Timber Structural Design. Austria: pro:Holz 2014.
- [6]. European Committee for Standardization (CEN): EN 16351:2015, Timber Structures – Cross laminated timber – Requirements. Brussels, Belgium, 2015.
- [7]. Danielsson H, Jelec M & Serrano E. Strength and stiffness of cross laminated timber at in-plane beam loading. Report TVSM-7164, Division of Structural Mechanics, Lund University, Sweden, 2017.
- [8]. Flaig M. Design of CLT beams with rectangular holes or notches. In: Proceedings of the International Network on Timber Engineering, INTER, Meeting 47, Bath, United Kingdom, Paper 47-12-4, 2014.
- [9]. Danielsson H, Jelec M, Serrano E, Rajcic V. In-plane loaded CLT beams – Tests and analysis of element lay-up. In: Proceedings of the International Network on Timber Engineering, INTER, Meeting 50, Kyoto, Japan, Paper 50-12-2, 2017.
- [10]. Danielsson H & Serrano E. Cross laminated timber at in-plane beam loading – Prediction of shear stresses in crossing areas. Engineering Structures 2018;171:921-927.
- [11]. Flaig M. In Plattenebene beanspruchte Biegeträger aus Brettsperholz (CLT-beams loaded in-plane direction). Bautechnik 92:741-749, 2015.
- [12]. Flaig M & Meyer N. A new test configuration to determine the slip modulus of connections between crosswise bonded boards. In: Experimental research with timber, Proceedings of Cost Action FP1004. Prague, 21-23 May, 2014
- [13]. Abaqus 2016, Dassault Systems.
- [14]. Isaksson T & Mårtensson A. Byggkonstruktion Regel- och formelsamling. Upplaga 3:1. Lund, oktober 2016.