**Portföljoptimering med hjälp av Conditional Value-at-Risk**
En empirisk analys för investeringspreferenser

Examensarbete, Höstterminen 2020

Nationalekonomiska institutionen, Lunds Universitet

**Författare**
Pär Börjeson, 19980122-8819
Eric Lindsfors, 19981102-0651

**Handledare**
Birger Nilsson

## Förord

Detta är en kandidatuppsats inom nationalekonomi med en omfattning om 15 högskolepoäng på Lunds Universitet höstterminen 2020/2021.

Först vill vi tacka vår handledare Birger Nilsson som tog sig tid och bidrog med sin kunskap och gav oss värdefull vägledning vid genomförandet av denna studie.

Vidare vill vi även rikta ett stort tack till den nationalekonomiska institutionen på Lunds Universitet som givit oss kunskap inför framtida utmaningar inom våra yrkeskarriärer.

# Sammanfattning

När investerare framställer optimala portföljer med olika tillgångar är det väsentligt att de riskmått som väljs är tillförlitliga och effektiva. Till dessa riskmått tillhör Conditional-Value-at-Risk och Varians. Denna studie syftar till att undersöka ifall riskmåttet CVaR är ett bra riskmått att använda vid optimering utav en portfölj. Detta utforskas genom att två CVaR-optimerade portföljer jämförs med en Minimum-Variance optimerad portfölj med utgångspunkt i investerares olika preferenser. Preferenserna uppskattas med de två nyttofunktionerna Power och S-shaped. Målet för studien är att konstatera vilken av portföljerna de olika investerarna föredrar beroende på vilken nyttofunktion som är relevant för dem.

Studiens resultat visar att investerare med olika nyttofunktioner har olika preferenser för de tre portföljerna. De tester som genomfördes visade att investerare med power utility function föredrar den MV-optimerade portföljen medan S-shaped utility function påvisade ett mer blandat resultat.



**Nyckelord**: Conditional Value-at-Risk, Mean-Variance, portföljoptimering, nyttofunktioner och riskpreferenser.

# Innehållsförteckning

## Förkortningar

| | |
|---|---|
| CE | Certainty Equivalent |
| VaR | Value-at-Risk |
| CVaR | Conditional Value-at-risk |
| MV | Minimum-Variance |
| u(w) | Nyttofunktion |
| CRRA | Constant-relative-risk-aversion |

# 1. Introduktion

## 1.1 Inledning

Att placera kapital effektivt har idag blivit en stor industri. Allt ifrån stora investmentbanker till nya AI-rådgivarna konkurrerar om människors besparingar och pensionsmedel och att få detta kapital att växa. Konkurrensen är mycket hård och det gäller att kunna få en så hög riskjusterad avkastning som möjligt. Vi ser idag en volatil marknad som ett resultat av pågående globala och regionala kriser. Därigenom har behovet av att hitta bra metoder för att beräkna risk ökat kraftigt. Riskhantering innebär att använda lämpliga och relevanta metoder för att identifiera och bedöma olika typer av risker. Förutom den ökande betydelsen av noggranna riskmätningstekniker finns även en ökad efterfrågan på att optimera allokeringen mellan olika tillgångsslag.

VaR har under en lång tid varit ett populärt mått på risk som grund vid investeringsbeslut. Det är en viktig del av kapitalmarknaden, såväl för förvaltare som utvärderingsinstitut och regleringsinstitut, eftersom detta riskmått är lätt att tyda och beräkna.
Baselkommittén använder detta riskmått för att bedöma marknadsrisken och bibehålla banktillsyn.

VaR är en nyckelindikator som mäter till vilken grad en specifik portfölj exponeras för den risk som finns på marknaden och därför används måttet för optimering av portföljer. VaR har sitt ursprung i Markowitz (1952) portföljoptimering för att uppnå en optimal portfölj genom låg risk och hög avkastning. Markowitz använder en metod med ett riskmått Mean-Variance som baseras på standardavvikelsen i avkastning vilket är lämpligt eftersom det gör det lätt för investerare att bedöma sannolikheten för negativ och positiv avkastning. I denna studie används en utvecklad variant på VaR som kallas CVaR. Detta val motiveras i Kapitel 2.

Gällande strukturen i denna uppsats, syftar introduktionen att förse läsaren med adekvat information om studiens ämne och dess syfte. Kapitel 2 förklarar den teoretiska bakgrunden för att ge läsaren en djupare förståelse kring grunden för studiens tes. Därefter beskriver vi i kapitel 3 de metoder som tillämpades för optimeringen utav portföljerna under ramarna för Minimum-Variance och Conditional-Value-at-Risk. I kapitel 4 förklarar vi hur data som ligger till grund för studien har inhämtats och tolkats. Kapitel 5 beskriver studiens empiriska resultat och sist men inte minst så presenterar vi studien slutsats i Kapitel 6.

## 1.2 Bakgrund

CVaR och MV är två etablerade riskmått och metoder inom den finansiella teorin. CVaR är vad som kallas för förväntad kortsiktig förlust och MV är en optimering där variansen minimeras. Minimering av dessa riskmått uppnås genom optimering. Optimering uppnås genom den perfekta kombinationen av allokering i portföljen. Syftet med denna studie är att undersöka vilken av portföljerna de olika investerarna föredrar beroende på investerarens nyttofunktion.

## 1.3 Avgränsningar

Studien begränsas till två olika metoder: MV och CVaR där en MV portfölj jämförs med två CVaR portföljer med olika risk. Alla portföljerna är optimerade under normala antaganden om distribution.

Optimalt för denna studie hade varit att konstruera portföljer som innehåller fler företag men på grund av tidsbegränsningen samt omfattning har data hämtats från OMXS 30. Tre företag uteslöts från indexet med anledning av att de inte funnits med i indexet under hela den estimerade perioden. Således har data hämtats från 27 företag. Det bör observeras att denna data endast innefattar en ytterst liten del av kapitalmarknaden över en kortare tidsperiod. Följaktligen speglar studien bara en begränsad, men dominerande, del av den svenska aktiemarknaden. Studien är begränsad till tidsperioden 2010–2020. Denna period innefattar normala cykler, men även en återhämtningsfas från en finanskris och en pandemi. Av dessa anledningar är denna tidsperiod intressant att studera.

# 2. Teori

## 2.1 Portföljoptimering

Portföljoptimering eller "optimal asset allocation" hänvisar till idén att en optimal portfölj är Mean-Variance effektiv. Vilket betyder att investerare maximerar den förväntade avkastningen samtidigt som den önskvärda nivån av riskexponering bibehålls (Rasmussen, 2003). När balansen i portföljen upprätthålls är grundtanken att de olika tillgångar i portföljen är unika och tillgångsvikterna kan variera. En utav de mest väsentliga delarna inom portföljoptimering är diversifiering. Diversifiering innebär att det är avgörande att investera i olika tillgångstyper och -klasser för att minimera den totala risken i portföljen. (Rasmussen, 2003)

Portföljoptimering tillför en teoretisk grund för studiens aktuella ämne

## 2.2 Risk aversion

I historien benämndes epitet risk aversion först utav Bernoulli (1782 citerad i Bell & Fishbum, 2000). Huvudidén i Bernoullis studie är att två personer som deltar i samma lotteri kan värdera situationen annorlunda på grund utav skillnader i deras psykologi. Enligt Bernoullis studie är nyttan utav rikedom $u$(w) ett mått på intensiteten på en persons preferens för rikedom, vilket ska estimeras utifrån individens preferens utan hänsyn till risk eller sannolikhet för utfallet (Bell & Fishburn 2000). Arrow (1964) och Pratt (1965) utvecklade sedan teorin genom att förstå den väsentliga innebörden utav nyttofunktionens första och andra derivata, följaktligen introducerades riskaversion i deras arbete. *Riskaversion* är kort och gott motvilja mot att ta risker. En person som är riskavert är inte benägen att ta större risker utan att få en stor möjlig kompensation. Enligt Kahneman och Tversky (1979) anses individen att vara riskavers när:

$$u \text{ är konkav, det vill säga när } u''(x) > 0 \qquad (1)$$

vilket betyder att individer har en avtagande nytta utav att ta mer risk.

Konceptet riskaversion är enligt Danthine och Donaldson (2015) när individer föredrar det säkra valet före det icke-säkra då båda fallen har samma förväntade värde, det vill säga att

individer helt enkelt inte vill ta risk. Individer kan också vara riskneutrala, detta innebär att individer är indifferenta mellan säkra och icke-säkra alternativ. De kan även tillhöra kategorin riskälskare, där de föredrar osäkra alternativ före säkra alternativ (Danthine och Donaldson, 2015).
Riskaversion ligger till grund för de test som genomförs i Kapitel 4 där parametervärden utgörs av olika nivåer av riskaversion.

## 2.3. Markowitz Mean-Variance

Att spara i svenska statsobligationer eller sätta in pengar på ett räntekonto hos en bank med statlig insättningsgaranti brukar betraktas som de sparalternativ som har lägst risk. Den förväntade avkastningen på dessa sparformer kallas riskfri ränta. Teorin grundad av Markowitz (1952) har skapat en grund för hela kapitalförvaltnings-industrin som används än idag. Teorin anses vara första försöket till att bestämma sambandet mellan förväntad avkastning och risk. Den allmänna regeln för teorin är att investerare bör anse förväntad avkastning som något som är önskvärt och en avvikelse från avkastningen som icke åtråvärt (Markowitz, 1952). För att förtydliga regeln bör investerare maximera sin förväntade avkastning för en viss risknivå eller minimera risknivån för en viss förväntad avkastning.

Varje portfölj som skapas enligt teorin innehar riskabla värdepapper samt en riskfri tillgång. För att åstadkomma den optimala portföljen identifieras vikterna för varje innehav i portföljen som i sin tur leder till den brantaste Capital Allocation Line (CAL). Därefter väljs en lämplig kombination mellan den optimalt riskfyllda portföljen och den riskfria tillgången (Bodie, Kane & Marcus, 2014).

När teorin är applicerad och Mean-Variance portföljen är skapad givet en särskild risk är portföljen nästan helt diversifierad. Markowitz (1952) hade även andra antaganden kring teorin;

1. Risken för en portfölj baseras på variationen i avkastningen från portföljen.
2. En investerare är riskavvikande.
3. En investerare föredrar att öka konsumtionen.
4. Investerarens verktygsfunktion är konkav och ökar på grund av dennes riskaversion och konsumtionspreferens.

5. Analysen baseras på en enstaka investeringsmodell.
6. En investerare maximerar antingen sin portföljavkastning för en viss risknivå eller minimerar sin risk för en given avkastning.
7. En investerare är rationell.

Mean-Variance modellen har däremot blivit kritiserad på grund av att modellens antaganden inte anses vara realistiska. Enligt Rice (2017), fångas inte de aktuella riskerna som driver dagens marknad. En annan nackdel med modellen är att den kräver ett stort antal uppskattningar för att skapa kovariansmatrisen, vilken behövs för att framställa de optimala vikterna i portföljen. Där kovariansmatrisen består utav tillgångarnas individuella varians samt kovariansen mellan dem. Modellen ger även inga tydliga riktlinjer för framtida prognoser angående riskpremierna, vilket är väsentligt för att kunna konstruera en effektiv gräns för de riskfyllda tillgångarna i portföljen. Då tidigare avkastningar inte ger någon tydlig bild utav de framtida avkastningar är den nackdelen väsentlig (Bodie, Kane & Marcus, 2014).

Det diskuteras fortfarande bland forskare ifall det finns någon bättre optimeringsstrategi än den naiva diversifieringsstrategin där andelen kapital fördelas enligt 1/N (N=antalet tillgångar) över de tillgångar som är befintliga för investeringen. Trots alla teoretiska modeller som har utvecklats över tid och gjort framsteg genom uppskattning av parametrar, används trots allt enkla fördelningsstrategier som den naiva av investerare (DeMiguel et al. 2009). Den naiva diversifieringsstrategin används ofta som riktmärke eller benchmark för att se hur andra portföljer presterar gentemot strategin. Även i denna studie ställer vi MV- och CVaR-portföljen mot den naiva diversifieringsstrategin.

Vidare kritiseras Mean-Variance metoden för att fokus läggs på portföljen med lägsta varians där tillgångsvikterna genererar lägsta möjliga risk för portföljen. Detta innebär att Mean-Variance investeraren antingen inte tar den förväntade avkastningen till beaktning eller så begränsas den förväntade avkastningen (DeMiguel et al. 2009). Inga ytterligare begränsningar för nivån på den förväntade avkastningen används. Istället för att använda Mean-Variance som portfölj begränsas denna studie till en portfölj som representerar den minimala variansen, det vill säga MV.

## 2.4 Value-at-Risk (VaR)

På varje enskild marknad finns det ett effektivt sätt att kvantifiera risker. Varje metod är nära relaterad till dess särskilda marknad och kan på så sätt inte appliceras direkt på andra marknader. Value-at-Risk är det vanligaste riskmåttet som används och definieras som den maximala förlust som förväntas givet en specifik sannolikhet med en konfidensnivå på mellan 1-α, över en given period. Riskmåttet karaktäriserar 1-α i procent för att förlusten över en viss period inte kommer överstiga det specifika VaR-värdet. Notera att det finns en sannolikhet att förlora mer än vad den givna konfidensnivån förutspår även om utfallet är osannolikt. VaR visar inte hur stor förlusten möjligen kan bli, utan enbart hur stor procentuell risk det är att VaR-värdet överträffas. (Crouhy, Galai & Mark, 2001).

För att beräkna VaR är det nödvändigt att använda två parametrar; tidshorisont samt konfidensnivå. Utan att definiera de två parametrarna är det inte möjligt att kalkylera VaR. Vid valet av parametrarna tillkommer faktorer som måste beaktas vilket redogörs nedan. (Dowd, 2005)

Tidshorisonten utgör vanligtvis en vecka eller en månad men kan även förlängas till en längre period såsom kvartal eller halvår. Det beror på vilken institution eller vilken form av investering- och rapportshorisont användaren är i behov utav.

Vilken konfidensnivå som är mest tillämplig beror på användningsområde. De vanligaste konfidensvärdena som används är 95% samt 99%. Som tidigare nämnts avgränsas antagandet till normalfördelning i denna studie. Därför resulterar ett 95% och 99% konfidensintervall α-värden på 1.645 (95%) respektive 2.326 (99%).

I särskilda fall kan både tidshorisonten och konfidensnivå vara förutbestämd i form av regelverk som exempelvis Bank for International Settlements (BIS). Regleringsstandarden i Basel 111-övervakningsprocess kräver Basel Committee on Banking Supervision (2014) att bankerna tillhandahåller marknadsvärden över de portföljer de innehar över 10 dagar (2 börsveckor) med ett VaR-mått på 99%.

De flesta riskanalytiker anser att VaR är ett bra riskmått, men det finns även de som varnar för att VaR kan leda till problem. Ett utav de underliggande problemen med riskmåttet är den giltighet på statistiken som behövs för VaR. Två forskare vid namnen Nassim Taleb och Richard Hoppe kritiserade överföringen från fysikvetenskapen till matematiska och statistiska modeller. Taleb och Hoppe menade främst att statistiken inte anpassar sig efter sociala system och sannolikhetsförändringar utan utesluter viktiga faktorer i verkligheten vilket gör VaR formeln otillförlitlig. Detta gör att funktionerna i modellen kan vara felaktiga med resulterande felaktiga VaR uppskattningar (Taleb, 2008). Ett annat argument av Taleb och Hoppe är att VaR-uppskattningarna inte är tillräckligt precisa för att användas, således blir resultatet missledande och icke applicerbart. Olika VaR-modeller leder till olika VaR-uppskattningar. Är estimaten felaktiga i formeln och investeraren förlitar sig på dem, exponeras de mot en felaktig risk och förlusten kan överskrida formelns begränsningar. (Dowd, 2005)

Ett djupare problem med VaR är att risken är endogen. Med detta menas att om VaR används för att ersätta riskbedömning kommer den som tillämpar VaR att sätta begränsningarna efter sitt eget intresse. Incitament kommer skapas för att leta efter positioner där risken över- eller underskattas vilket leder till ytterligare risktagande än vad själva VaR-uppskattningarna påvisar. VaR-gränsen kan också uppmuntra investerare att ta fler risker med låg sannolikhet och stor inverkan, då det historiskt sett har gynnats att ta risker i normala tider (Dowd, 2005).

VaR används inte i denna studie istället tillämpas CVaR, detta motiveras i avsnitten 2.5-2.6.

## 2.5 Koherenta riskmått

Ansatsen *koherenta riskmått* är den första matematiskt baserade tesen om finansiell risk. Tesen har en central poäng i att det är svårt att ge en kvantitativ bedömning av finansiell risk om inte specificering av riskmått presenteras. För att ett riskmått ska vara koherent måste det uppfylla alla fyra axiom presenterade av Artzner et al. (1999); *monotonocitet, subadditivtet, positiv homogenitet och omvandlingsinvarians.* Nedan beskrivs de olika axiomen enligt följande;

1. *Omvandlingsinvarians*: Beskriver att en ökning av viss mängd kapital minskar risken med samma belopp vilket innebär att:
   För alla $X \in G$ och för alla reala nummer $\alpha \Rightarrow \rho\ (X + \alpha \cdot r) = \rho\ (X) - \alpha$

2. *Subadditivitet*: Beskriver att den sammanslagna risken för två tillgångar ska vara mindre än summan av de enskilda riskerna som:
   För alla $X1$ och $X2 \in G$ => $\rho\ (X1 + X2) \leq \rho\ (X1) + \rho\ (X)$
3. *Positiv Homogenitet*: Beskriver att medan skalning av en portfölj, skalas måttet proportionellt med portföljen, så att:
   För alla $\lambda \geq 0$ och all $X \in G$ => $\rho\ (\lambda X) = \lambda\rho\ (X)$
4. *Monotonicitet*: Beskriver att om förlusten av en portfölj är mindre än för en annan portfölj är riskmåttet för denna portfölj också mindre, så att:
   För alla X och $Y \in G$ där $X \leq Y$ => $\rho\ (X) \leq \rho\ (Y)$

Den viktigaste egenskapen är (2), subadditivitet. Som tidigare nämnt beskriver den att risken för en portfölj är mindre än tillgångarnas risker i portföljen individuellt summerade. Om investeraren lägger till en mängd kontanter lika med K i en portfölj, ger kontanterna en buffert mot förluster och bör minska kapitalkravet med K. Subadditivitet är det viktigaste kriteriet om vad investerare kan förvänta sig att en ”rimlig” riskåtgärd uppfyller. Det återspeglar en förväntan när enskilda risker sammanvägs, diversifierar de eller i värsta fall inte ökar: risken för att summan alltid är mindre än eller lika med summan av riskerna. Subadditivitet innebär att aggregering av att risker inte ökar den totala risken. Exempelvis är icke-subadditiv förrädisk då det antyder att diversifiering är något en investerare inte bör göra, vilket föreslår slutsatsen att det är bra riskhanteringspraxis att lägga alla ägg i samma korg. Det betyder också att när investerare lägger till risker tillsammans skapas en extra ”kvarvarande” risk som någon måste bära, och som inte existerade tidigare. (Dowd, 2005)

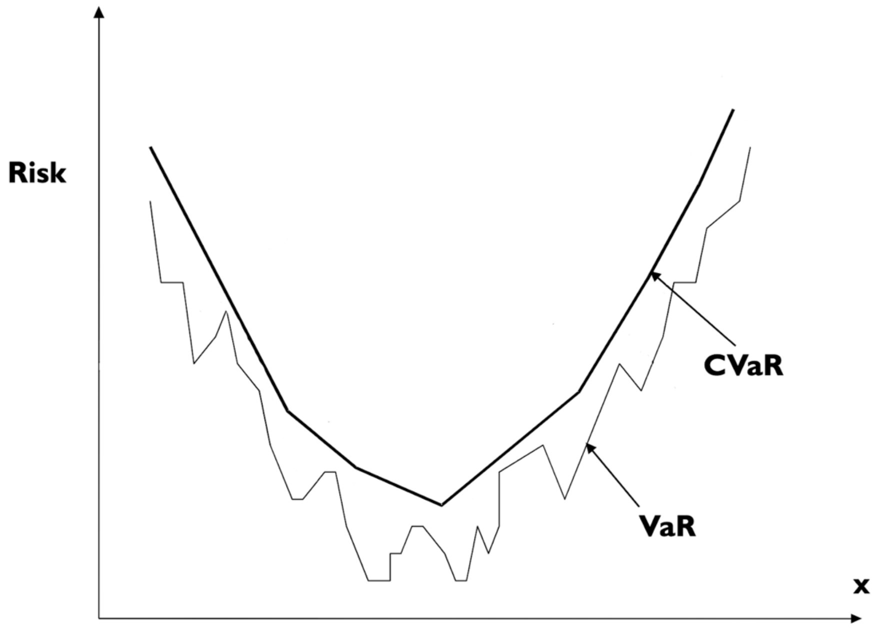
## 2.6 Conditional Value-at-Risk

Då VaR inte uppfyller alla fyra aximon och således inte är ett koherent riskmått behövs ett annat mått. Rockafellar och Uryasev (2002) föreslog CVaR även kallad för Expected Shortfall som ersättare för VaR. De hävdar att CVaR har dominerande egenskaper såsom koherent, feta svansar samt höga förluster med liten sannolikhet i beräkningen.

En åtgärd som kan ge bättre incitament för investerare än VaR är CVaR. Detta kallas ibland också villkorligt riskvärde eller förväntad svansförlust. VaR beskriver hur stor risken är för ett dåligt utfall. CVaR beskriver istället vad den förväntade förlusten är vid ett eventuellt dåligt utfall. CVaR, liksom VaR, är en funktion av två parametrar: T (tidshorisonten) och X (konfidensnivån). Det är den förväntade förlusten under tiden T förutsatt att förlusten är större än den X:s percentilen av förlustfördelningen.

Riskhantering med CVaR-funktioner kan utföras effektivt. CVaR kan optimeras och begränsas med konvexa och linjära programmeringsmetoder, medan VaR är relativt svårt att optimera. Figur 1 visar hur de båda kalkyleringar visas upp i en graf.

Figur 1: CVaR och VaR i graf




Källa: Sarykalin, Serraino & Kalinchenko (2011)

Det som uppenbaras i figur 1 är att VaR fluktuerar avsevärt mer än CVaR vilket är en utav anledningarna till att optimering utav VaR är mer komplicerat att uppnå än för CVaR. Att identifiera punkter där VaR optimeras är inte det komplexa utan snarare att utläsa ifall punkten är en global eller lokal minimipunkt. I CVaR’s fall finns det enbart en optimeringpunkt. Som ett verktyg vid optimerings-modellering, har CVaR bättre kvaliteér i många aspekter. Detta gör CVaR tillämpningsbar som komplement till VaR. En utav de viktigaste tillämpningar med CVaR är dess minimeringsformel, formeln kan enkelt införlivas i optimeringsproblemet med hänseende på $x \in X$. Därmed uppnås framstående genvägar samtidigt som särskilda funktioner som konvexitet står sig (Rockafellar & Uryasev, 2002). Med anledning till detta optimeras CVaR inom denna studie.

## 2.7 Nyttofunktioner

Enligt Tobin (1958) delas riskaversiva individer in i två kategorier: diversifierade individer vars nyttofunktioner är konkava och så kallade dykare vars nyttofunktioner är linjära eller konvexa. Antagandet bakom Tobin's (1958) teori är att investerarens preferenser är styrda utav en kvadratisk nyttofunktion eller sannolikhets fördelningen utav avkastningen.

Eftersom en kvadratisk nyttofunktion inte är realistiskt och således inte är komparativ till individers preferenser gällande risk. Representerar istället en mer komplex nyttofunktion som S-shaped individers ställning till risk. (Adler & Kritzman, 2007, Sharpe, 2007).

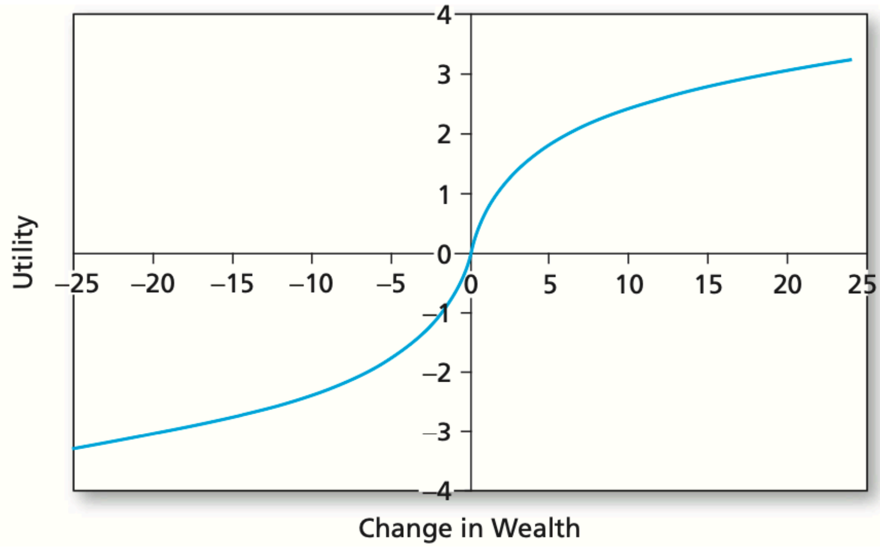
Enligt Gourieroux och Monfort (2004) kan ovanstående nyttofunktioner vara relevanta för att definiera effektiva portföljer. Deras teori grundar sig i att funktionerna visar individers preferenser och således möjliggör olika marknadsportföljer att jämföras med den effektiva delen i individuella portföljer för att testa jämviktsmodeller. Därför kommer nyttofunktionen S-shaped samt nyttofunktionen Power-utility användas i denna studie.

### 2.7.1 S-shaped nyttofunktion

Kahneman och Tversky (1979) var pionjärer och uppfinnarna av idén att en investerares nyttofunktion kan vara s-formad. Funktionen bevisar enligt en studie att investerare föredrar en säker vinst framför en osäker större vinst och även en osäker förlust framför en säker mindre förlust. Investerare vill således inte riskera att förlora en garanterad vinst samtidigt som de är villiga att riskera en större förlust mot att ta en förlust direkt. Detta resulterar att en "böjning" i funktionens graf bildas och grafen blir således s-formad. Det är i själva böjningspunkten som säkerhetspreferenserna om olika beslut ändras och går från konvex till konkav lutning vilket indikerar den kritiska avkastningsnivån z. Figur 2 visar hur Kahneman och Tversky's s-shaped funktion ser ut visuellt.

De parametrar som ingår i funktionen är $\gamma 1$ och A som representerar formen respektive storleken för funktionens nedgångssida, samt $\gamma 2$ och B som representerar uppgångssidan på samma sätt. Bestämmelser av eventuella vinster eller förluster görs antingen av enbart $\gamma$-parametrarna, A- och B-parametrarna eller båda. Ifall avkastning underskrider det kritiska värdet z anses investeraren vara riskälskare och ifall det överskrider z så anses investeraren vara riskavvikande. En stor kvot i förhållandet A/B resulterar i att portföljens risk är mindre. $\gamma$-parametrarna har ingen större påverkan på portföljens allokering utan bestämmer primärt böjningen på S-kurvan (Hagströmer et al. 2008). De parametervärden som tillämpas i denna studie anges i Kapitel 3.

Figur 2: S-Shaped utility function

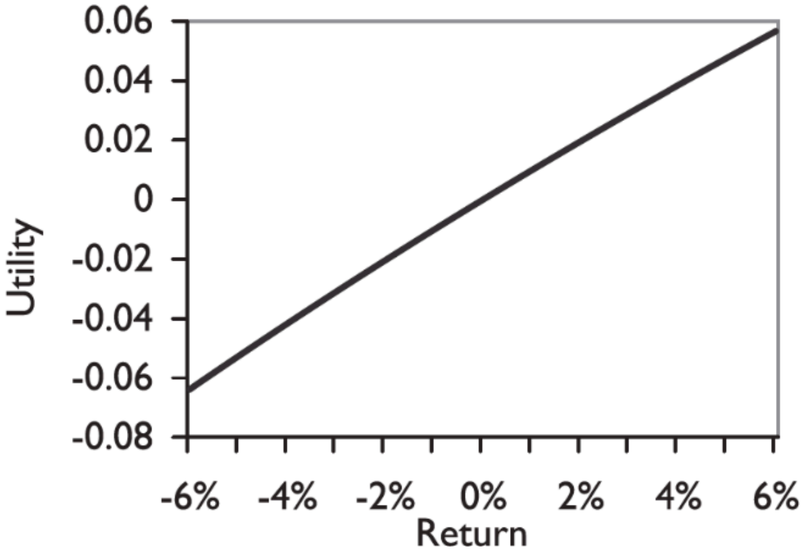



Källa: Investments. (2014)

### 2.7.2 Power utility function

Hagströmer et al. (2008) konstaterar i deras studie att power utility function tillhör nyttofunktionsklassen ”constant-relative-risk-aversion”. Funktionen är ett sätt att säkerställa självständigheten för riskaversion från förmögenhet och portföljavkastning. Till skillnad från kvadratiska nyttofunktioner antar power utility function en preferens för uppåtriktade avvikelser vilket resulterar i att funktionens graf aldrig antar negativ lutning. Funktionen anses därför vara en mer tillförlitlig framställning av investerares preferenser än kvadratisk nytta (Adler & Kritzman, 2007). I power utility är $\gamma$ graden av relativ riskaversion. Funktionens specialfall uppstår då $\gamma$ antar ett värde av 1, i detta fall används log-nyttofunktion istället. Desto högre $\gamma$ och A är desto högre är riskaversionen hos investeraren (Hagströmer et al., 2008). De parametervärden som tillämpades anges i Kapitel 3.

Figur 3: Power utility function




Källa: Hagströmer et al. (2008)

## 2.8 Certainty Equivalent (CE)

Enligt DeMiguel et al. (2009) finns det tre mått för att jämföra portföljers prestanda: Certainty equivalent, Sharpe-ratio och portföljens omsättning. I denna studie tillämpas certainty equivalent för att jämföra CVaR och MV under s-shaped och power utility.

Grundkonceptet utav certainty equivalent är den garanterade summan pengar individen klassificerar lika önskvärd som en tillgång med risk (Danthine och Donaldson, 2015). Certainty equivalent förändras i enlighet med investerarens tolerans och riskaversion. Där skillnaden i CE förklaras som en säker avkastning av en investering på grund utav en ökning i nytta (Hagströmer et al., 2008). Enligt preferensteorin finns det tre olika typer av förhållningssätt för en beslutsfattare vid risktagande: riskavvikande, riskneutral och riskälskare. Där riskavvikande är den vanligaste attityden för en rationell beslutsfattare. För en karakteristisk riskavvikande individ är CE vanligtvis mindre än det förväntade värdet.

Dessutom föredrar en rationell beslutsfattare investeringar med större CE (Bodie, Kane & Marcus, 2014).

Baserat på power-utility function är en approximation av CE följande:

$$rCE = [1+(1-\gamma)\,\bar{u}\,]^\wedge(1/(1-\gamma))-1 \qquad (2)$$

Där ū står för medelvärdet av nyttan för en den observerade portföljen och y är toleransen av risk för en investerare (Hagströmer et al., 2008). Värt att notera är att CE kan bemöta denna approximation som en rak linje vilket underlättar utvecklingen av ett effektivt urvalsförfarande för att framställa en preferensordning för de angivna portföljerna under effektiva begränsningar (Bodie, Kane & Marcus, 2014). CE kommer användas i denna uppsats genom att mäta vilken utav de tre optimerade portföljerna som ger störst nytta. CE kommer jämföras genom de två nyttofunktionerna, s-shaped samt power-utility, således ställs portföljerna emot varandra för att se vilken som genererar högst nytta. Parametrarna riskaversion, övre- och nedre gränsvärden kommer justeras för att få exakta resultat. Vid senare jämförelser av de tre skapade portföljer är den portfölj med högst CE att föredra.

# 3. Metod

## 3.1 Huvudantaganden

I genomförandet av analysen antas normalfördelning vilket möjliggör optimeringen av MV- samt CVaR-portföljerna. Antagandet bygger på den centrala grundsatsen i statistiken, som innebär att fördelningen av medelvärdet tenderar att gå mot en normalfördelning när antalet observationer går mot oändligheten (Brooks, 2014).

För de olika nyttofunktionerna i analysen varierar parametrarna mellan de värden som anges i tabell 1 som erhållits från Hagströmer et al. (2008):

Tabell 1: Parametrar för nyttofunktionerna

| *Nyttofunktion* | *Parameter-värde* |
|---|---|
| Power | $\gamma$: $1 \leq \gamma \leq 5$ |
| S-shaped | $z$: $-0.05 \leq z \leq 0.00$ |
| | $\gamma_1$: $0.05 \leq \gamma_1 \leq 0.5$ |
| | $\gamma_2$: $0.5 \leq \gamma_2 \leq 0.95$ |
| | $A$: $1.5 \leq A \leq 2.9$ |
| | $B$: $1.5 \leq B \leq 0.1$ |

## 3.2 Optimering

Optimeringen utgår ifrån stängningspriser för 27 företag inom OMXS30 mellan 2010-01-08 till 2017-12-29 (se Kapitel 4).

I den applicerade optimeringen har vikterna begränsats till positiva. Detta innebär att investeraren inte tillåts gå korta positioner i portföljerna. Dessutom har vikterna begränsats till att summera upp till ett. Vilket leder till att ägaren av portföljen alltid investerar hela summan av pengarna och följaktligen inte tillåts att ha kontanter i portföljen. För att uppnå full diversifiering har vikterna således begränsats till:

$$0{,}001 < W < 1$$

Detta innebär att lägsta tillåtna vikt i företagen är 0,1% av hela summan investerad.

### 3.2.1 Minimum-Variance portföljen

I steg 1 beräknas MV-Portföljen. I denna optimering minimeras variansen i portföljen under ovannämnda begränsningar för portföljens vikter. Optimering sker enligt följande:

$$\min_{w}(w\Omega w') \tag{3}$$

Där:

w: Tillgångarnas vikter (uttryckt i 1xn Vektor)

w': Tillgångarnas vikter transponerat (uttryckt i 1xn Vektor)

Ω: Varians-Covarians matris

När variansen minimeras uppnås de optimala vikterna således kan portföljens avkastning räknas ut enligt följande:

$$r(MV)=r(p)=r(medel)*w \tag{4}$$

### 3.2.2 Conditional-Value-at-Risk portföljen

I steg 2 framställs CVaR portföljen, där CVaR minimeras genom optimala vikter och den förväntade avkastningen är ekvivalent till den förväntade avkastningen i steg 1.

För att beräkna den optimala CVaR portföljen används programmet Matlab. Med hjälp utav ett script minimeras då CVaR-portföljerna genom de optimala vikterna. När CVaR optimeras framställs två portföljer med olika beta värden 0,95 respektive 0,99. Detta resulterar i att två portföljer 'CVaR 95 och CVaR 99' med optimala vikter skapas. (Vogiatzoglou, 2008)

De framställda vikterna är summerade i tabell 7 i appendixen. Vikterna för dessa tre portföljer används fortsättningsvis i analysen med hjälp utav de två utvalda nyttofunktionerna. De olika nyttofunktionerna framställda utav Hagströmer et al. (2008) och visas i Tabell 2.

Således erhålls värden för varje u(r) som sedan jämförs och används för att beräkna certainty equivalent för de tre portföljerna genom de två nyttofunktionerna. Skillnaden mellan CE för portföljerna för varje parameter beräknas enligt följande:

$$\Delta CE = rMV - r\text{C}VaR(95\%/99\%) \ \& \ \Delta CE = r\text{C}VaR(95\%) - \text{rCVaR}(99\%) \qquad (5)$$

Tabell 2: Nyttofunktionernas formler och Certainty Equivalent

| *Nyttofunktion* | | *Certainty Equivalent* |
|---|---|---|
| Power | | |
| $u(r_p) = \frac{(1+r_p)^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ | for $\gamma > 0$ | $r_{CE} = [1 + (1-\gamma)\bar{u}]^{1/(1-\gamma)} - 1$ |
| $u(r_p) = \ln(1 + r_p)$ | for $\gamma = 1$ | $r_{CE} = \exp(\bar{u}) - 1$ |
| S-shaped | | |
| $u(r_p) = -A(z - r_p)^{\gamma_1}$ | for $r_p \leq z$ | $r_{CE} = z - \left(\frac{\bar{u}}{-A}\right)^{1/\gamma_1}$ |
| $u(r_p) = +B(r_p - z)^{\gamma_2}$ | for $r_p > z$ | $r_{CE} = z + \left(\frac{\bar{u}}{+B}\right)^{1/\gamma_2}$ |

Källa: Hagströmer et al. (2008)

# 4. Data

Datan som ligger till grund för studiens analys är hämtad från Google Finance (google, 2020). I Google Sheet användes följande formel för att framställa priser:

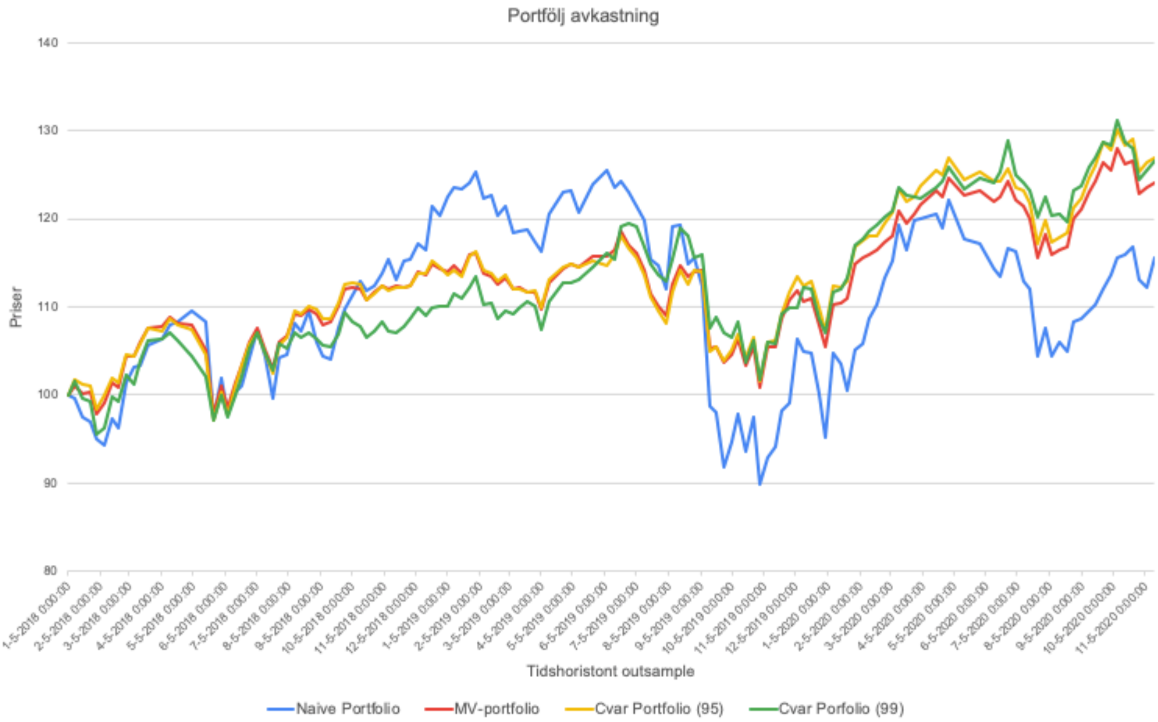
=GOOGLEFINANCE(“Företagsbeteckning”,”price”, Date(2010,1,4), Date (2020,11,17), “weekly”) (6)

Till analysen har data från 27 företag inom OMXS30 används. Indexet består utav de mest omsatta aktierna på stockholmsbörsen (Nasdaq, 2020).
Eftersom stängningspriser på aktierna varje vecka ligger till grund för analysen är kravet som ställs på tillgångarna i studien att dess data sträcker sig över tioårsperioden 01/08-2010 till 11/13-2020.
Därför är den totala inputen 550 priser vilket ger 549 veckovisa avkastningar för vardera tillgång. Där priserna är betecknade i svenska kronor (kr).

I denna studie har vi valt att dela upp perioden i två delar. Där den första perioden sträcker sig mellan 01/08-2010 till 12/29-2017 (in-sample) och ligger till grund för själva optimeringen samt framställningen utav portföljerna. Den andra perioden sträcker sig mellan 01/05-2018 till 11/13-2020 (out-sample), där fokus ligger på hur de konstruerade portföljerna presterar. Utvalda företag och deras vikter hittas i tabell 7 i appendixen.

Avkastningen utav den naiva portföljen, det vill säga portföljen med jämlika vikter är framställd som den blå linjen i figur 4. Observera att portföljen har en uppåtstigande trend fram tills 2019-06-05 vilket är början på en nedåtgående trend där portföljen minskar tills 2019-10-05. Detta är följt utav en stigande trend tills slutdatum 2020-11-05. Portföljen har ett framräknat medelvärde på 0,15% för vardera vecka under två års perioden och en standardavvikelse på 3,03% (se Tabell 3).

Figur 4: Portföljernas prestation




Portföljernas värde med start på 100.

De resterande tre optimerade portföljerna (MV, CVaR(95) samt CVaR(99)) har en snarlik uppåtgående trend som uppvisar sig stabilare än den naiva portföljen. De påverkas även avsevärt mindre utav nedåtgående trender vilket tydligt avspeglas sig i figur 4 under 2019-06-05 där den naiva portföljen som tidigare nämnt minskar kraftigt, medan de resterande bibehåller en positiv trend. Detta resulterar i ett medelvärde runt 0,18% för de tre optimerade portföljerna (se Tabell 3 för exakta värden). Vilket approximativt är 0,03% högre än den naiva portföljen.

Den avgörande skillnaden mellan de tre optimerade portföljerna och den naiva portföljen avspeglas i deras standardavvikelser. De tre optimerade portföljerna har betydligt lägre standardavvikelser som uppgår till approximativt 1,88% medan den naiva portföljen har en standardavvikelse på 3,04% (se Tabell 3). Detta resulterar till en lägre volatilitet för de tre optimerade portföljerna och således lägre skillnad mellan högsta och lägsta avkastning. Detta leder i sin tur till att portföljernas värde påverkas mindre utav uppåt- och nedåtgående trender.

Tabell 3: Data-egenskaper

| | Naive portfölj | MV portfölj | Cvar(95) portfölj | Cvar(99) portfölj |
|---|---|---|---|---|
| Max | 9,9979 | 4,6579 | 4,8004 | 4,4527 |
| Min | -12,1284 | -7,7815 | -7,9204 | -7,1655 |
| Medelvärde | 0,1509 | 0,1726 | 0,1895 | 0,1875 |
| Standardavvikelse | 3,0360 | 1,8585 | 1,8961 | 1,8811 |

Notering: Samtliga värden i Tabell 3 är skrivna i procent (%).

Med utgångspunkt ur Tabell 3 kan slutsatsen dras att avkastningen för den naiva portföljen varierar mellan 9,99% och -12,12% vilket är en differens på 22,11%. Detta är en markant skillnad gentemot differensen mellan max- och minvärden för resterande portföljer som ligger på: 12,43% (MV), 12,72% (CVaR(95)) samt 11,61% (CVaR(99)).

# 5. Empiriska resultat

För utförandet av de två nyttofunktionerna på de tre optimerade portföljerna, användes samma tillvägagångssätt som i Hagströmer (2008). Totalt har 180 test gjorts, 27 gånger på power utility function och 153 gånger på den S-formade funktionen. För varje utfört test har de specifika parametrarna i funktionerna justerats samt ett värde $\Delta CE$ erhållits.

## 5.1 Power-nyttofunktion

I tabellen 4 visas $\Delta CE$ för portföljerna och samtliga värden som parametrarna antar i power utility function.

Tabell 4: ΔCE - Power utility function

| $\gamma$ | $\Delta CE$ *(MV-CVaR(95))* | $\Delta CE$ *(MV-CVaR(99))* | $\Delta CE$ *(CVaR(95)-CVaR(99))* |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,01141 | 0,020756 | 0,009346 |
| 1.5 | 0,01198 | 0,019775 | 0,007797 |
| 2 | 0,00202 | 0,008272 | 0,006248 |
| 2.5 | 0,01312 | 0,017818 | 0,004699 |
| 3 | 0,01369 | 0,016841 | 0,003150 |
| 3.5 | 0,01426 | 0,015866 | 0,001601 |
| 4 | 0,01484 | 0,014892 | 0,000052 |
| 4.5 | 0,01542 | 0,013920 | -0,001497 |
| 5 | 0,01600 | 0,012950 | -0,003046 |

Medelvärdet för $\Delta CE$(MV-CVaR(95)) och $\Delta CE$(MV-CVaR(99)) i power utility function är 0,01253 respektive 0,01568. Eftersom $\Delta CE$ är positiv under alla riskpreferenser för MV-CVaR(99) och MV-CVaR(95) indikerar det att alla investerare hade valt att investera i MV-portföljen framför båda CVaR-portföljen oavsett individens riskpreferens. Desto mindre risk investeraren är beredd att ta desto större skillnad i absoluta termer blir det mellan MV och CVaR(95). Differensen mellan MV och CVaR(99) ökar däremot när investeraren är beredd att ta mer risk.

Skillnaden mellan de två CVaR-portföljerna är mindre jämfört med MV och medelvärdet utav $\Delta CE$ (CVaR(95)-CvaR(99)) uppgår till 0,00315 vilket medför att medel investeraren föredrar CVaR(95)- före CVaR(99)-portföljen. När investeraren är villig att ta mer risk ökar $\gamma$ och således ökar investerarens incitament att välja CVaR(99)-portföljen framför de resterande. Detta beror på att CVaR(99)-portföljen inte är lika känslig mot investerares risktagande som de resterande portföljer är.

Differensen är i den bemärkelsen så liten mellan de två CVaR-portföljerna vilket kan betyda att skillnaden inte är signifikant. Följaktligen får investeraren mindre nytta desto mindre risk investeraren är villig att ta, vilket kan ligga till grund för den minimala volatiliteten i portföljerna då avkastningen inte blir bättre i relation till en förhöjd volatilitet. Således är valet av investeringsportfölj inte självklart och mer information kan behövas för ett sådant investeringsbeslut. Den informationen är dock utöver omfattningen för denna uppsats. Portföljernas enskilda CE värden finns i tabell 8 i appendixen.

## 5.2 S-formad nyttofunktion

Vid test av den S-formade nyttofunktionen utfördes tester med olika värden på inflektionspunkten z, även kallad för kritiska avkastningsvärden, värden på 0.00, -0.025 samt -0.05 testades. I de olika inflektionspunkterna kommer som tidigare nämnt hänsyn tas till de varierande värden på formparametrarna $\gamma 1$ och $\gamma 2$ där magnitudparametrarna A och B är konstanta och vise versa. I tabell 9 i appendixen har årliga CE värden framställts för de olika portföljerna under S-shaped nyttofunktion. Dessa CE värden har sedan används för att beräkna ΔCE som visas i Tabell 5 där $\gamma 1$ och $\gamma 1$ är konstanta. För att tyda den negativa nyttan är det CE-värde som är närmast 0 att föredra då investerare har en positiv marginalnytta av förmögenhet. Ett högre CE innebär således att investeraren värderar den investeringen högre.

Utifrån dessa värden kan slusatsen dras att när inflektionspunkten z = 0 är Cvar(95) den portfölj som är framstående. När inflektionspunkten z är ekvivalent till -0,025 är CVar(99) den framstående portföljen. Medan MV portföljen är portföljen som investeraren föredrar när z = -0,05. För att komma fram till en slutsats är således medelvärdet av CE för vardera portfölj central. Där CVaR(95) har det framstående medelvärdet på 4,1332.
Tabell 5: S-shaped utility (del 1)

| Parametrar | | *ΔCE (MV-CVaR(95))* | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | z = 0 | z = -0.025 | z = -0.5 |
| 1.5 | 1.5 | 0.0113 | 0.041349479 | 0.046587508 |
| 1.7 | 1.3 | 0.005982476 | 0.045896293 | 0.049108865 |
| 1.9 | 1.1 | -0.007035611 | 0.051774511 | 0.057504628 |
| 2.1 | 0.9 | -0.037636656 | 0.059609382 | 0.065288622 |
| 2.3 | 0.7 | -0.113892699 | 0.070355219 | 0.079270519 |
| 2.5 | 0.5 | -0.337913128 | 0.084874128 | 0.079270519 |
| 2.7 | 0.3 | -1294425226 | 0.0946336 | 0.111748486 |
| 2.9 | 0.1 | -15.18673873 | -0.363046706 | 0.271062646 |
| *A* | *B* | *ΔCE (MV-CVaR(99))* | | |
| 1.5 | 1.5 | 0.007468047 | -0.058891383 | 0.011669598 |
| 1.7 | 1.3 | 0.002716531 | -0.069661126 | 0.012378904 |
| 1.9 | 1.1 | -0.000873153 | -0.083803166 | 0,014742576 |
| 2.1 | 0.9 | -0.000171915 | -0.10312246 | 0.016936471 |
| 2.3 | 0.7 | 0.014985162 | -0.13083549 | 0.020883196 |
| 2.5 | 0.5 | 0.085557704 | -0.172569689 | 0.020883196 |
| 2.7 | 0.3 | 0.466675991 | -0.229203213 | 0.030080786 |
| 2.9 | 0.1 | 6.917696867 | 0.343300881 | 0.075828608 |
| *A* | *B* | *ΔCE (CVaR(95)-CVaR(99))* | | |
| 1.5 | 1.5 | -0.003814054 | -0.100240862 | -0.03491791 |
| 1.7 | 1.3 | -0.003265945 | -0.115557419 | -0.036729961 |
| 1.9 | 1.1 | 0.006162458 | -0.135577677 | -0.042762052 |
| 2.1 | 0.9 | 0.037464741 | -0.162731842 | -0.048352151 |
| 2.3 | 0.7 | 0.128877861 | -0.201190708 | -0.058387324 |
| 2.5 | 0.5 | 0.423470832 | -0.257443817 | -0.058387324 |
| 2.7 | 0.3 | 1.761101217 | -0.323836813 | -0.0816677 |
| 2.9 | 0.1 | 22.1044356 | 0.706347587 | -0.195234038 |

Notering: I denna tillämpning av S-shaped funktionen varierar parametrarna A, B och z medan $\gamma 1$ och $\gamma 2$ är förblir konstanta vid värdet 0,5.

I tabell 6 visas del 2 utav ΔCE det vill säga när A och B är konstanta. För att analysera detta läggs fokus återigen på ΔCE för de olika inflektionspunkterna. När z = 0 är MV den framstående portföljen medan CVaR(99) är investeraren val då z = -0,025. När z är ekvivalent till -0,05 är CVaR(95) portföljen avsevärt bättre för investeraren än de resterande portföljerna. För att en slutsats ska kunna dras läggs fokus återigen på medelvärdet för CE för vardera portfölj där CVaR(95) har det högsta medelvärdet på 5,9436. Detta beror på portföljens utstickande CE värden när z = -0,05, $\gamma 1 = 0,05$ och $\gamma 2 = 0,95$. Portföljernas enskilda CE värden finns i tabell 9 i appendixen. Vid parametervärdena $\gamma 1 = 0,05/0,01/0,15$ och $\gamma 2 = 0,95/0,9/0,85$ för inflektionspunkten z = -0,025 är ΔCE lika med noll för MV och CVaR(95). Vid parametervärdena $\gamma 1 = 0,05/0,1$, $\gamma 2 = 0,95/0,90$ och inflektionspunkten z = -0,025 är samtliga portföljers ΔCE-värden lika med noll.

När ΔCE är lika med noll innebär det att investeraren är indifferent mellan de aktuella portföljerna.

För att översiktligt jämföra de olika portföljerna räknas medelvärdet ut för samtliga CE värden. Här är även CVaR(95) den framstående portföljen med ett medelvärde på 5,9436. I detta fall beror det på de utstickande värden portföljen antar när inflektionspunkten är z = -0,5. För specifika CE-värden se Tabell 10 i appendixen.

Tabell 6: S-shaped utility (del 2)

| *Parametrar* | | *ΔCE (MV-CVaR(95))* | | |
|---|---|---|---|---|
| $\gamma 1$ | $\gamma 2$ | z = 0 | z = -0.025 | z = -0.5 |
| 0,05 | 0,95 | 7,02078E-09 | 1,06581E-14 | -40,96834781 |
| 0,1 | 0,9 | 3,66394E-05 | 1,06581E-14 | -33,93545454 |
| 0,15 | 0,85 | 0,000518121 | 1,59872E-14 | -27,42417032 |
| 0,2 | 0,8 | 0,001691412 | 0,088179251 | -21,48646024 |
| 0,25 | 0,75 | 0,003037205 | 0,075231764 | -16,17154281 |
| 0,3 | 0,7 | 0,003922418 | 0,063119151 | -11,52248412 |
| 0,35 | 0,5 | 0,003916789 | 0,053889018 | -7,571731029 |
| 0,4 | 0,6 | 0,002682385 | 0,047456536 | -4,33557638 |
| $\gamma 1$ | $\gamma 2$ | | *ΔCE (MV-CVaR(99))* | |
| 0,05 | 0,95 | 1,43771E-09 | 0 | 0,240266132 |
| 0,1 | 0,9 | 8,66846E-06 | 0 | 0,149243628 |
| 0,15 | 0,85 | 0,00010834 | -0,363702673 | 0,094844624 |
| 0,2 | 0,8 | 0,000294634 | -0,296080688 | 0,061990125 |
| 0,25 | 0,75 | 0,000449147 | -0,211744066 | 0,041893138 |
| 0,3 | 0,7 | 0,000556507 | -0,150882748 | 0,02941167 |
| 0,35 | 0,5 | 0,00066061 | -0,109514742 | 0,011467675 |
| 0,4 | 0,6 | 0,000633016 | -0,082762636 | 0,01041643 |
| $\gamma 1$ | $\gamma 2$ | | *ΔCE (CVaR(95)-CVaR(99))* | |
| 0,05 | 0,95 | -5,58307E-09 | -1,22125E-14 | 41,20861394 |
| 0,1 | 0,9 | -2,79709E-05 | -1,22125E-14 | 34,08469817 |
| 0,15 | 0,85 | -0,000409781 | -0,363702673 | 27,51901495 |
| 0,2 | 0,8 | -0,001396778 | -0,384259939 | 21,54845037 |
| 0,25 | 0,75 | -0,002588057 | -0,28697583 | 16,21343595 |
| 0,3 | 0,7 | -0,003365911 | -0,214001899 | 11,55189579 |
| 0,35 | 0,5 | -0,003256179 | -0,163403761 | 7,583198704 |
| 0,4 | 0,6 | -0,002049368 | -0,130219171 | 4,345992809 |

Notering: I denna tillämpning av S-shaped funktionen varierar parametrarna $\gamma 1$, $\gamma 2$ och z medan A och B är förblir konstanta vid värdet 1,5.

# 6 Slutsats

Resultaten av analysen påvisar att utöver de vanliga riskmåtten som volatilitet och genomsnitt i de CVaR-optimerade investeringsportföljerna, så spelar investerares enskilda riskpreferenser en betydande roll i val av investeringsbeslut. Läggs fokus på investerare med power utility function med y värde mellan 1 och 5, så kan slutsatsen dras att ingen investerare skulle välja någon av de två CVaR-portföljerna utan istället föredra MV-portföljen. Resultaten visar att dock att om en investerare är benägen att ta väldigt lite risk, dvs att $\gamma$>5, så blir MV-portföljen bättre jämfört med CVaR(95) men sämre jämfört med CVaR(99).

Läggs fokus på investerare med en mer detaljerad nyttofunktion som S-shaped, så uppvisas blandade resultat. Vid olika inflektionspunkter föredrar investeraren olika portföljer. Beaktas däremot portföljernas CE-medelvärde, så är CVaR(95) den bästa portföljen. Medelvärdet är dock vagt att basera slutsatser på, då det enbart ger en översiktlig bild utav resultatet och inte de specifika riskpreferenserna. Därför kan inte CVaR(95) konstateras som den signifikant bästa portföljen.

Studiens avgränsningar gällande konfidensnivåer samt den mängden data som använts innebär att den har en begränsad statistisk signifikans. Därför kan fördjupad analys av andra avkastningsfördelningar, konfidensnivåer och företag komplettera denna uppsats. Hagströmer et al (2008) framhäver i sin rapport att det fortfarande är svårt att definiera en enskild investerares nyttofunktion eftersom det finns flera parametrar än enbart riskaversion som lägger grunden för ett investeringsbeslut, vilket bör beaktas vid användning av nyttofunktioner.

## Referenslista

Adler, T. and Kritzman, M., 2006. Mean–variance versus full-scale optimisation: In and out of sample. *Journal of Asset Management*, vol. 7, no. 5, pp. 302-311.

Arrow, K.J. (1965). The Theory of Risk Aversion, *Aspects of the Theory of Risk-Bearing (Lecture 2), Helsinki*

Artzner, p., Delbaen, F., Eber, J.-M. & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, vol. 9, no. 3, pp. 203-228

Basel Committee on Banking Supervision. (2014). Analysis of the trading book hypothetical portfolio exercise. Available online: https://www.bis.org/publ/bcbs288.pdf [Accessed 16 November 2020]

Bell, D., & Fishburn, P., (2000). Utility Functions for Wealth, Journal of Risk and Uncertainty, vol. 20, no. 1, pp.5-44.

Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2014). *Investments*, vol. X, 10th edn pp.256, 171-220.

Brooks, C. (2014). Introductory Econometrics for Finance, *Cambridge*: Cambridge University Press, 3rd edn 3,6,7, pp. 55 - 72, 87 - 203

Crouhy, M., Galai, D., & Mark, R., (2001). *Risk Management.* 1st edn. pp. 188

Danthine, J., & Donaldson, J., (2015). *Intermediate Financial Theory*. 3rd edn. pp. 55 - 72, 87 - 203

DeMiguel, V., Garlappi, L. & Uppal, R., 2007. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategi?. *Review of Financial Studies,* vol 22, no 5, pp. 1915-1953

Dowd, K. (2005), Measuring Market Risk, 2 edn, *John Wiley and Sons Ltd*, pp. 13 – 140.

Google Finance. (2020).
https://www.google.com/finance [Accessed 5 November 2020]

Gourieroux, C. & Monfort, A., (2005). The econometrics of efficient portfolios. Journal of Empirical Finance, vol. 75, no. 1, pp. 1-41.

Hagströmer, B., Anderson, R. G., Binner, J. M, Elger, T. & Nilsson, B. (2008). Mean-Variance versus Full Scale Optimization: Broad Evidence for the UK. *The Manchester school,* vol. 75, no. S1, pp. 134-156

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). *Econometrica*, vol. 47, n. 2, pp. 263-291

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77-91.

Nasdaq. (2020). http://www.nasdaqomxnordic.com/utbildning/optionerochterminer/vadaromxstockholm30index [Accessed 5 November 2020]

Pratt, J.W. (1964). Risk Aversion in the Small and in the Large, Econometrica, vol. 32, no. ½, pp. 122 – 136

Rasmussen, M. (2003). Quantitative Portfolio Optimisation, Asset Allocation and Risk Management. Palgrave Macmillan, vol. 1, no. 1, pp. 73-128, 392 - 415.

Rice, B. (2017). The Upside of the Downside of Modern Portfolio Theory, *Investments & Wealth Institute,* Available online: https://investmentsandwealth.org/getmedia/69e2c4da-936b-4863-98f8-b4400d2f32e9/IWM17JanFeb-UpsideOfDownsideOfMPT.pdf [Accessed 20 December 2020]

Rockafellar, R.T. & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions, *Journal of Banking & Finance*, vol. 26, no. 7, pp. 1443-1471

Sarykalin, S., Serraino, Gaia., & Kalinchenko, K. (2011). VaR vs CVaR in Risk Management and Optimization Available online: (https://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/VaR_vs_CVaR_CARISMA_conference_2010.pdf) [Accessed 18 November 2020]

Sharpe., W. F. (2007) Expected Utility Asset Allocation. *Financial Analysts Journal*, vol. 63, no. 5. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=1017297 [Accessed 28 November 2020]

Taleb, N. (2008). *THE FOURTH QUADRANT: A MAP OF THE LIMITS OF STATISTICS.* Available: http://edge.org/conversation/the-fourth-quadrant-a-map-of-the-limits-of-statistics. [Accessed 21th November 2020]

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, *The Review of Economic Studies*, vol. 25, no. 2, pp. 65-86

Vogiatzoglou, M. (2008). CVaR optimization. Available online: https://se.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19907-cvar-optimization [Accessed 5 November 2020]

# Appendix

Notering: Samtliga tabeller i appendixen är uttryckta i procent (%). Med undantaget för parametervärden.

Tabell 7: Portföljernas vikter

| Företag | Naive portfölj<br>*Vikter* | MV portfölj<br>*Vikter* | Cvar(95) portfölj<br>*Vikter* | Cvar(99) portfölj<br>*Vikter* |
|---|---|---|---|---|
| ABB Ltd | 0,0370 | 0,0845 | 0,0430 | 0,2733 |
| Alfa Laval | 0,0370 | 0,0010 | 0,0093 | 0,0044 |
| Autoliv SDB | 0,0370 | 0,0285 | 0,0056 | 0,0031 |
| Atlas Copco A | 0,0370 | 0,0010 | 0,0092 | 0,0038 |
| Atlas Copco B | 0,0370 | 0,0010 | 0,0036 | 0,0021 |
| AstraZenica | 0,0370 | 0,1607 | 0,1779 | 0,2482 |
| Boliden | 0,0370 | 0,0010 | 0,0032 | 0,0016 |
| Electrolux B | 0,0370 | 0,0250 | 0,0258 | 0,0674 |
| Ericsson B | 0,0370 | 0,0334 | 0,0058 | 0,0041 |
| Getinge B | 0,0370 | 0,0030 | 0,0334 | 0,0031 |
| Hexagon B | 0,0370 | 0,0010 | 0,0042 | 0,0023 |
| Hennes & Mauritz B | 0,0370 | 0,0823 | 0,0892 | 0,0040 |
| Investor B | 0,0370 | 0,0010 | 0,0070 | 0,0022 |
| Kinnevik B | 0,0370 | 0,0010 | 0,0061 | 0,0019 |
| Nordea Bank Abp | 0,0370 | 0,0010 | 0,0034 | 0,0020 |
| Sandvik | 0,0370 | 0,0010 | 0,0042 | 0,0019 |
| SCA BB | 0,0370 | 0,1084 | 0,1780 | 0,0080 |
| SEB A | 0,0370 | 0,0010 | 0,0033 | 0,0017 |
| Securitas BB | 0,0370 | 0,0369 | 0,0149 | 0,0025 |
| Sv. Handelsbanken A | 0,0370 | 0,0870 | 0,0209 | 0,0063 |
| Skanska B | 0,0370 | 0,0023 | 0,0087 | 0,0086 |
| SKF B | 0,0370 | 0,0010 | 0,0071 | 0,0039 |
| SSAB A | 0,0370 | 0,0010 | 0,0026 | 0,0032 |
| Swedbank A | 0,0370 | 0,0010 | 0,0031 | 0,0018 |
| Swedish Match | 0,0370 | 0,2446 | 0,2325 | 0,3333 |
| Tele2 B | 0,0370 | 0,0894 | 0,0929 | 0,0024 |
| Volvo B | 0,0370 | 0,0010 | 0,0049 | 0,0028 |

Tabell 8: Power utility - Certainty Equivalent för vardera portfölj samt $\Delta CE$

| $\gamma$ | *CE (MV)* | *CE (CVaR(95))* | *CE (CVaR(99))* | *ΔCE (MV-CVar(95))* | *ΔCE (MV-CVar(99))* | *ΔCE (CVaR(95)-(99))* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,17556693 | 0,16415665 | 0,15481095 | 0,01141 | 0,020756 | 0,009346 |
| 1.5 | 0,17033168 | 0,15835346 | 0,15055628 | 0,01198 | 0,019775 | 0,007797 |
| 2 | 0,15456881 | 0,15254468 | 0,14629632 | 0,00202 | 0,008272 | 0,006248 |
| 2.5 | 0,15984894 | 0,14673034 | 0,14203104 | 0,01312 | 0,017818 | 0,004699 |
| 3 | 0,15460152 | 0,14091051 | 0,13776037 | 0,01369 | 0,016841 | 0,003150 |
| 3.5 | 0,14935011 | 0,13508522 | 0,13348426 | 0,01426 | 0,015866 | 0,001601 |
| 4 | 0,14409475 | 0,12925452 | 0,12920267 | 0,01484 | 0,014892 | 0,000052 |
| 4.5 | 0,13883548 | 0,12341847 | 0,12491554 | 0,01542 | 0,013920 | -0,001497 |
| 5 | 0,13357234 | 0,11757713 | 0,12062283 | 0,01600 | 0,012950 | -0,003046 |

Tabell 9: S-shaped - $\Delta CE$ för varje portfölj

| *Del 1* | *A* | *B* | $\gamma 1$ | $\gamma 2$ | *z* | $\Delta CE$ *(MV-Cvar(95))* | $\Delta CE$ *(MV-Cvar(99))* | $\Delta$ *CE (Cvar(95)-(99))* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,5 | 1,5 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,0113 | 0,007468047 | -0,003814054 |
| | 1,7 | 1,3 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,005982476 | 0,002716531 | -0,003265945 |
| | 1,9 | 1,1 | 0,5 | 0,5 | 0 | -0,007035611 | -0,000873153 | 0,006162458 |
| | 2,1 | 0,9 | 0,5 | 0,5 | 0 | -0,037636656 | -0,000171915 | 0,037464741 |
| | 2,3 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 0 | -0,113892699 | 0,014985162 | 0,128877861 |
| | 2,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0 | -0,337913128 | 0,085557704 | 0,423470832 |
| | 2,7 | 0,3 | 0,5 | 0,5 | 0 | -1,294425226 | 0,466675991 | 1,761101217 |
| | 2,9 | 0,1 | 0,5 | 0,5 | 0 | -15,18673873 | 6,917696867 | 22,1044356 |
| | | | | | | | | |
| | 1,5 | 1,5 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | 0,041349479 | -0,058891383 | -0,100240862 |
| | 1,7 | 1,3 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | 0,045896293 | -0,069661126 | -0,115557419 |
| | 1,9 | 1,1 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | 0,051774511 | -0,083803166 | -0,135577677 |
| | 2,1 | 0,9 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | 0,059609382 | -0,10312246 | -0,162731842 |
| | 2,3 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | 0,070355219 | -0,13083549 | -0,201190708 |
| | 2,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | 0,084874128 | -0,172569689 | -0,257443817 |
| | 2,7 | 0,3 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | 0,0946336 | -0,229203213 | -0,323836813 |
| | 2,9 | 0,1 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,363046706 | 0,343300881 | 0,706347587 |
| | | | | | | | | |
| | 1,5 | 1,5 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,046587508 | 0,011669598 | -0,03491791 |
| | 1,7 | 1,3 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,049108865 | 0,012378904 | -0,036729961 |
| | 1,9 | 1,1 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,057504628 | 0,014742576 | -0,042762052 |
| | 2,1 | 0,9 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,065288622 | 0,016936471 | -0,048352151 |
| | 2,3 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,079270519 | 0,020883196 | -0,058387324 |
| | 2,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,079270519 | 0,020883196 | -0,058387324 |
| | 2,7 | 0,3 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,111748486 | 0,030080786 | -0,0816677 |
| | 2,9 | 0,1 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,271062646 | 0,075828608 | -0,195234038 |

| *Del 2* | *A* | *B* | *γ1* | *γ2* | *z* | *ΔCE (MV-Cvar(95))* | *ΔCE (MV-Cvar(99))* | *Δ CE (Cvar(95)-(99))* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,5 | 1,5 | 0,05 | 0,95 | 0 | 7,02078E-09 | 1,43771E-09 | -5,58307E-09 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,1 | 0,9 | 0 | 3,66394E-05 | 8,66846E-06 | -2,79709E-05 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,15 | 0,85 | 0 | 0,000518121 | 0,00010834 | -0,000409781 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,2 | 0,8 | 0 | 0,001691412 | 0,000294634 | -0,001396778 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,25 | 0,75 | 0 | 0,003037205 | 0,000449147 | -0,002588057 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,3 | 0,7 | 0 | 0,003922418 | 0,000556507 | -0,003365911 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,35 | 0,5 | 0 | 0,003916789 | 0,00066061 | -0,003256179 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,4 | 0,6 | 0 | 0,002682385 | 0,000633016 | -0,002049368 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,45 | 0,55 | 0 | 0,001872791 | 0,001495123 | -0,000377667 |
| | | | | | | | | |
| | 1,5 | 1,5 | 0,05 | 0,95 | -0,025 | 0 | 0 | 0 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,1 | 0,9 | -0,025 | 0 | 0 | 0 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,15 | 0,85 | -0,025 | 0 | -0,363702673 | -0,363702673 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,2 | 0,8 | -0,025 | 0,088179251 | -0,296080688 | -0,384259939 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,25 | 0,75 | -0,025 | 0,075231764 | -0,211744066 | -0,28697583 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,3 | 0,7 | -0,025 | 0,063119151 | -0,150882748 | -0,214001899 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,35 | 0,5 | -0,025 | 0,053889018 | -0,109514742 | -0,163403761 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,4 | 0,6 | -0,025 | 0,047456536 | -0,082762636 | -0,130219171 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,45 | 0,55 | -0,025 | -1,075482558 | -0,066798773 | 1,008683785 |
| | | | | | | | | |
| | 1,5 | 1,5 | 0,05 | 0,95 | -0,05 | -40,96834781 | 0,240266132 | 41,20861394 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,1 | 0,9 | -0,05 | -33,93545454 | 0,149243628 | 34,08469817 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,15 | 0,85 | -0,05 | -27,42417032 | 0,094844624 | 27,51901495 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,2 | 0,8 | -0,05 | -21,48646024 | 0,061990125 | 21,54845037 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,25 | 0,75 | -0,05 | -16,17154281 | 0,041893138 | 16,21343595 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,3 | 0,7 | -0,05 | -11,52248412 | 0,02941167 | 11,55189579 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,35 | 0,5 | -0,05 | -7,571731029 | 0,011467675 | 7,583198704 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,4 | 0,6 | -0,05 | -4,33557638 | 0,01041643 | 4,345992809 |
| | 1,5 | 1,5 | 0,45 | 0,55 | -0,05 | -1,807821884 | 0,009675224 | 1,817497108 |

Tabell 10: S-shaped - Certainty Equivalent för varje portfölj (del 1)

| *A* | *B* | *γ1* | *γ2* | *z* | *CE MV* | *CE CVaR(95)* | *CE CVar(99)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 1,5 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,0378 | 0,026485977 | 0,030300031 |
| 1,7 | 1,3 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,008927 | 0,002944516 | 0,006210461 |
| 1,9 | 1,1 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,001738 | 0,008773363 | 0,002610905 |
| 2,1 | 0,9 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,056823 | 0,094459332 | 0,05699459 |
| 2,3 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,299710 | 0,413602245 | 0,284724384 |
| 2,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0 | 1,218386 | 1,556299573 | 1,132828741 |
| 2,7 | 0,3 | 0,5 | 0,5 | 0 | 5,769369 | 7,063793763 | 5,302692547 |
| 2,9 | 0,1 | 0,5 | 0,5 | 0 | 79,079735 | 94,266474 | 72,162038 |
| | | | | | | | |
| 1,5 | 1,5 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,171019558 | -0,212369037 | -0,112128176 |
| 1,7 | 1,3 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,209266564 | -0,255162856 | -0,139605437 |
| 1,9 | 1,1 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,260359437 | -0,312133948 | -0,176556271 |
| 2,1 | 0,9 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,331996648 | -0,391606029 | -0,228874187 |
| 2,3 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,439403244 | -0,509758463 | -0,308567755 |
| 2,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,616823338 | -0,701697467 | -0,44425365 |
| 2,7 | 0,3 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,951244654 | -1,045878254 | -0,722041441 |
| 2,9 | 0,1 | 0,5 | 0,5 | -0,025 | -0,95261427 | -0,589567564 | -1,295915152 |
| | | | | | | | |
| 1,5 | 1,5 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,067698805 | 0,021111297 | 0,056029207 |
| 1,7 | 1,3 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,067698805 | 0,018589939 | 0,0553199 |
| 1,9 | 1,1 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,067698805 | 0,010194177 | 0,052956229 |
| 2,1 | 0,9 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,067698805 | 0,002410183 | 0,050762333 |
| 2,3 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,067698805 | -0,011571715 | 0,046815609 |
| 2,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,067698805 | -0,011571715 | 0,046815609 |
| 2,7 | 0,3 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,067698805 | -0,044049682 | 0,037618019 |
| 2,9 | 0,1 | 0,5 | 0,5 | -0,05 | 0,067698805 | -0,203363842 | -0,008129804 |
| | | | | Medelvärde: | 3,4617 | 4,1332 | 3,1620 |

Tabell 10: S-shaped - Certainty Equivalent för varje portfölj (del 2)

| *A* | *B* | *γ1* | *γ2* | *z* | *CE MV* | *CE CVaR(95)* | *CE CVar(99)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 1,5 | 0,05 | 0,95 | 0 | -8,9846E-10 | -7,91924E-09 | -2,33617E-09 |
| 1,5 | 1,5 | 0,1 | 0,9 | 0 | -1,87292E-05 | -5,53686E-05 | -2,73977E-05 |
| 1,5 | 1,5 | 0,15 | 0,85 | 0 | -0,000487793 | -0,001005914 | -0,000596133 |
| 1,5 | 1,5 | 0,2 | 0,8 | 0 | -0,00229878 | -0,003990192 | -0,002593414 |
| 1,5 | 1,5 | 0,25 | 0,75 | 0 | -0,005183507 | -0,008220712 | -0,005632655 |
| 1,5 | 1,5 | 0,3 | 0,7 | 0 | -0,00741336 | -0,011335778 | -0,007969868 |
| 1,5 | 1,5 | 0,35 | 0,5 | 0 | -0,006858518 | -0,010775307 | -0,007519128 |
| 1,5 | 1,5 | 0,4 | 0,6 | 0 | -0,00282017 | -0,005502554 | -0,003453186 |
| 1,5 | 1,5 | 0,45 | 0,55 | 0 | 0,001848102 | -2,46887E-05 | 0,000352979 |
| | | | | | | | |
| 1,5 | 1,5 | 0,05 | 0,95 | -0,025 | -1,3 | -1,3 | -1,3 |
| 1,5 | 1,5 | 0,1 | 0,9 | -0,025 | -1,3 | -1,3 | -1,3 |
| 1,5 | 1,5 | 0,15 | 0,85 | -0,025 | -1,3 | -1,3 | -0,936297327 |
| 1,5 | 1,5 | 0,2 | 0,8 | -0,025 | -0,923811975 | -1,011991226 | -0,627731287 |
| 1,5 | 1,5 | 0,25 | 0,75 | -0,025 | -0,632051579 | -0,707283343 | -0,420307513 |
| 1,5 | 1,5 | 0,3 | 0,7 | -0,025 | -0,434850475 | -0,497969626 | -0,283967727 |
| 1,5 | 1,5 | 0,35 | 0,5 | -0,025 | -0,306881057 | -0,360770075 | -0,197366315 |
| 1,5 | 1,5 | 0,4 | 0,6 | -0,025 | -0,228653498 | -0,276110033 | -0,145890862 |
| 1,5 | 1,5 | 0,45 | 0,55 | -0,025 | -0,186459632 | 0,889022926 | -0,119660859 |
| | | | | | | | |
| 1,5 | 1,5 | 0,05 | 0,95 | -0,05 | 0,175130505 | 41,14347832 | -0,065135627 |
| 1,5 | 1,5 | 0,1 | 0,9 | -0,05 | 0,164054106 | 34,09950865 | 0,014810478 |
| 1,5 | 1,5 | 0,15 | 0,85 | -0,05 | 0,152787167 | 27,57695749 | 0,057942543 |
| 1,5 | 1,5 | 0,2 | 0,8 | -0,05 | 0,141320325 | 21,62778057 | 0,079330199 |
| 1,5 | 1,5 | 0,25 | 0,75 | -0,05 | 0,129643508 | 16,30118632 | 0,08775037 |
| 1,5 | 1,5 | 0,3 | 0,7 | -0,05 | 0,117745868 | 11,64022999 | 0,088334198 |
| 1,5 | 1,5 | 0,35 | 0,5 | -0,05 | 0,105615709 | 7,677346738 | 0,094148034 |
| 1,5 | 1,5 | 0,4 | 0,6 | -0,05 | 0,093240413 | 4,428816793 | 0,082823983 |
| 1,5 | 1,5 | 0,45 | 0,55 | -0,05 | 0,080606352 | 1,888428237 | 0,070931128 |
| | | | | Medelvärde: | -0,202807297 | 5,943619304 | -0,179545385 |