Populärvetenskaplig sammanfattning

En differentialekvation beskriver en funktion där förändringshastigheten beror på funktionsvärdet. Som ett exempel kan nämnas befolkningstillväxt, där tillväxthastigheten (i form av födslar) kommer att vara högre för en större befolkning. Numerisk lösning av en differentialekvation innebär att givet ett visst startvärde förutsäga funktionsvärdet vid en senare tidpunkt med tillräckligt god noggrannhet.

Det finns flera olika kategorier av metoder för numerisk lösning av differentialekvationer, varav en av de mest spridda och använda är så kallade explicita Runge-Kutta-metoder. Dessa utgår från det kända startvärdet, tar små steg framåt i tiden och beräknar approximationer av lösningen för varje tidssteg. För somliga problem, kända som styva problem, har det visat sig att explicita metoder fungerar otillfredsställande. Sådana problem kräver implicita metoder, vilket Rosenbrockmetoder är ett exempel på.

Rosenbrockmetoder använder funktionens Jacobian, som beskriver förändringen, för att approximera varje nytt värde. För ett problem med N ekvationer är Jacobianen av storlek $N \times N$, så mängden beräkningar växer snabbt med problemets storlek. Rosenbrock-Krylov-metoder är också implicita metoder och fungerar mycket snarlikt Rosenbrockmetoder, men ersätter Jacobianen med en approximation som är avsevärt mindre. Detta minskar mängden beräkningar som behöver göras när varje nytt värde beräknas, men i gengäld kräver det viss beräkningskraft att ta fram approximationen av Jacobianen.

I den här uppsatsen implementeras och jämförs två explicita Runge-Kutta-metoder, en vanlig Rosenbrockmetod och två Rosenbrock-Krylov-metoder. De testade Rosenbrock-Krylov-metoderna uppvisar likartad noggrannhet per tidssteg jämfört med Rosenbrockmetoder, men med avsevärt kortare exekveringstid för stora system av differentialekvationer. Jämfört med de explicita Runge-Kutta-metoderna presterar Rosenbrock-Krylov-metoderna, som förväntat, mycket bättre på styva problem.