Populärvetenskaplig sammanfattning

Vad är ett medelvärde? Om vi har två tal a och b, skulle nog de flesta säga att deras medelvärde är $A = \frac{a+b}{2}$, vilket vi kallar deras aritmetiska medelvärde. Men om $a, b \geq 0$ så har vi också ett annat rimligt medelvärde, nämligen det geometriska $G = \sqrt{ab}$. Redan i antikens Grekland kände man till AM-GM olikheten som säger att $A \geq G$ med likhet om och endast om $a = b$, och deras förståelse byggde på geometriska argument som i Figur 1 och 2. Dessutom gäller AM-GM olikheten för fler variabler en två, dvs om

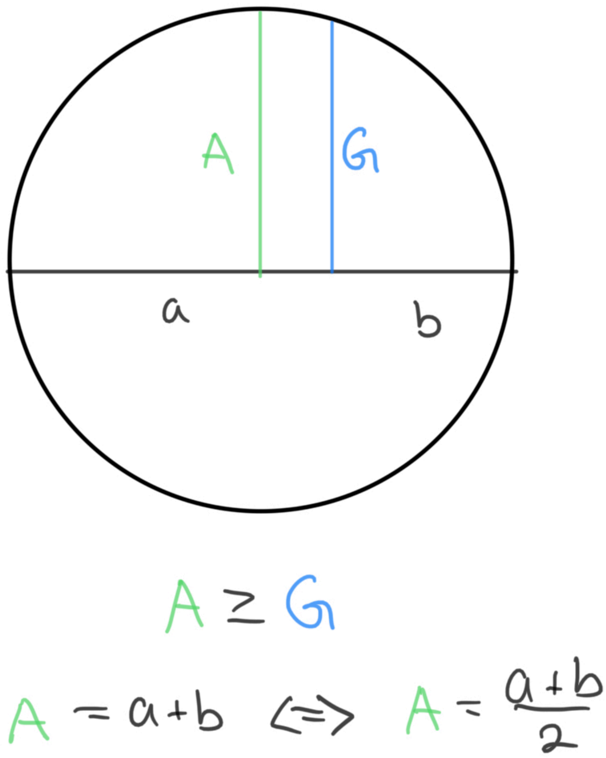
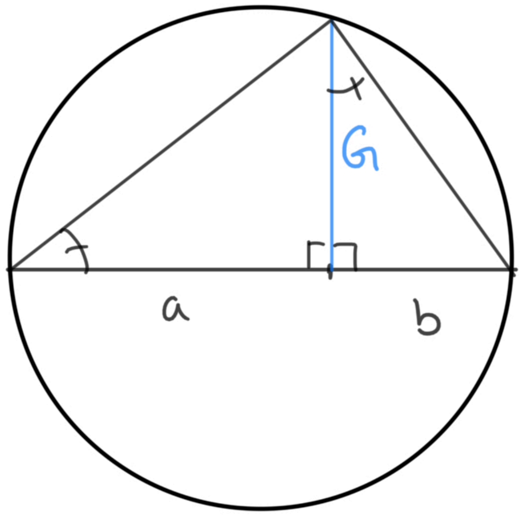


Figure 1: I grönt är det aritmetiska medelvärdet eftersom det är radien i cirkeln, och $a+b$ är diametern. Det geometriska medelärdet G är i blått och i nästa figur förklarar vi varför det är det geoemtriska medelvärdet. Notera även att $A = G$ i figuren om och endast om $a = b$.

$x_1, \ldots, x_n \geq 0$ så definierar vi det aritmetiska medelvärdet $A = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ och det geoemtriska medelvärdet $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$. Återigen gäller att $A \geq G$ med likhet om och endast om $x_1 = \ldots = x_n$. Samtidigt kan man även beräkna medelvärdet av ett kontinuum genom att använda integraler,



$$\frac{a}{G} = \frac{G}{b} \iff ab = G^2 \iff G = \sqrt{ab}$$

Figure 2: Vi använder likformighet för att visa att G faktiskt är det geometriska medelvärdet. Beviset bygger på att proportionen mellan a och G är densamma som den mellan G och b, från vilket är följer att $G = \sqrt{ab}$.

exempelvis om man ska beräkna tyngdpunkten av ett objekt. Frågan är då om det finns ett motsvarande geometriskt medelvärde för kontinuumet, och i så fall om AM-GM olikheten fortfarande gäller?

Det visar sig att svaret är ja på båda ovanstående frågor, och för att definiera det geometriska medelvärdet så använder vi oss av logaritmen och exponentialfunktionen. Detta på grund av att de kopplar ihop addition och multiplikation genom formlerna $\ln xy = \ln x + \ln y$ och $e^{x+y} = e^x e^y$. Exempelvis kan vi överföra det aritmetiska medelvärdet av a och b till det geometriska genomm att använda processen med logaritmer och exponentialfunktionen så som följer;

1. Först ersätter vi a och b med $\ln a$ och $\ln b$ så att multiplikation ersätts med addition.

2. Vi beräknar sedan deras medelvärde som blir $\frac{\ln a + \ln b}{2}$.

3. Slutligen så applicerar vi exponentialfunktionen för att återigen få något

multipllikativt, och vi erhåller $e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}} = \sqrt{ab}$.

Processen med logaritmen och exponentialfunktion, applicerat på ett aritmetiskt medelvärde gav oss således ett geometriskt medelvärde, och vi applicerar samma teknik på kontinuum-aritmetiska medelvärden för att få motsvarande geoemtriska medelvärden. Dessutom applicerar vi även tekniken med logaritmen och exponentialfunktionen på derivator och integraler för att erhålla multiplivativa motsvarigheter.

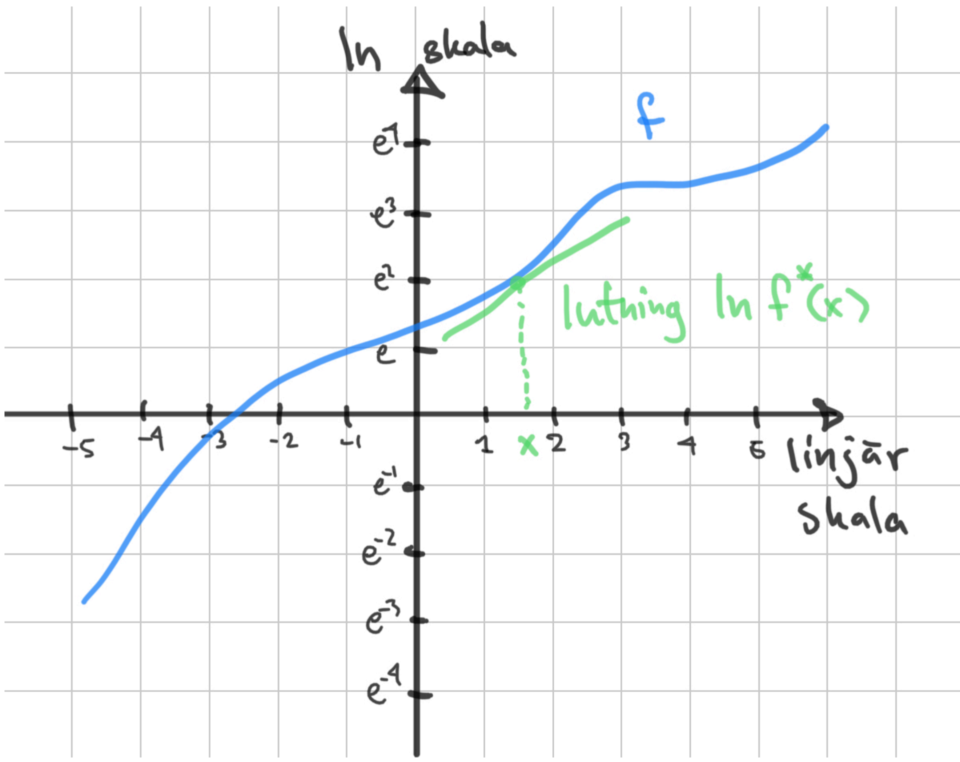


Figure 3: I blått ser vi en lin-ln plot of funktionen f, där x-axeln har linjär skala och y-axeln har logaritmisk skala. Lutningen (grön) i en punkt är då logaritmen av den multiplikativa derivatan $f^*(x)$.

Notera dock att vi hittils har begränsat oss enbart till funktioner som antar positiva värden, eftersom logaritmen enbart är definierad för positiva tal. Dock finns en komplex motsvarighet av logaritmen som även fungerar på negativa värden, men den är flervärd. Det beror på att $e^{2\pi in} = 1$ för varje heltal n, vilket kan tolkas som att vi snurrar runt i enhetscirkeln och där varje varv motsvarar vinkeln 2π. Vi använder den flervärda komplexa logaritmen och den komplexa exponentialfunktionen för att definiera komplexa multiplikativa integraler som också visar sig bli flervärda.

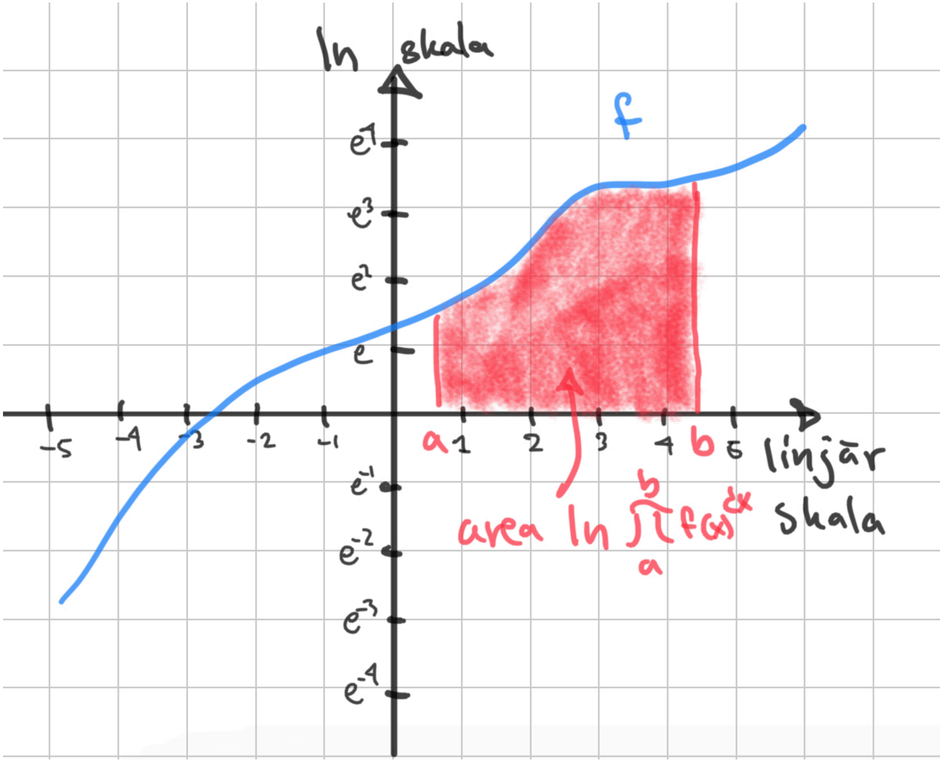


Figure 4: Arean under f i en lin-ln plot är logaritmen av produktintegralen $\prod_a^b f(x)^{\mathrm{d}x}$ (rött).

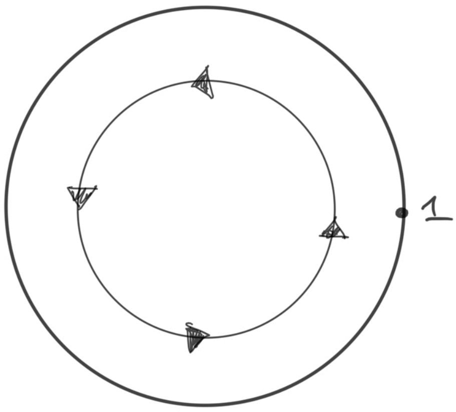


Figure 5: När vi snurrar runt på enhetscirkeln så återkommer vi till 1 efter varje varv.