



LUNDS
UNIVERSITET

Korttidsprognoser av Kalixälvens vattenflöde

Mathilda Carlsson

31 januari 2023

Handledare: Henrik Bengtsson och Joel Danielsson
Kandidatuppsats i statistik, 15 hp
Statistiska institutionen
Lunds universitet

Abstract

The Kalix River, located in the northern part of Sweden, experiences a slowdown in water flow during cold winters. However, in spring, when snow and ice melt in the mountains, the water flow starts to increase. Towards the end of spring, there is usually a rapid and unpredictable surge in water flow known as the spring flood. The arrival of the spring flood is stochastic in time and does not occur on the same day or even the same week each year. Therefore, accurate forecasts for the arrival of the spring flood are essential and this thesis aims to improve short-term predictions of water flow.

The seasonal dependence and variability of the water flow brings to mind whether some recursive and dynamic models would make better predictions for this river than a simple autoregressive (AR) model. The predictive ability of the AR model of order five is compared to three recursive models, relying on this AR(5) model. These models use the estimation methods; forgetting factor, sliding window and Kalman filter. The coefficients in the recursive models are dynamically estimated and time adjusted.

The performance of each model is evaluated, and it is observed that all models perform well for one-day-ahead predictions, but show slightly lower accuracy for three-day-ahead predictions. Despite the initial expectation of improved predictions with dynamic models, there was no significant improvement compared with the more simple AR(5) model in any case.

Keywords: ARIMA, RecursiveAR, forgetting factor, sliding window, Kalman filter, short-term predictions, water flows

Förord

Jag vill börja med att rikta ett stort tack till Henrik Bengtsson, som först inspirerade och motiverade mig att påbörja denna uppsats och sedan handledde mig så att jag kunde genomföra och slutföra den. Därefter vill jag även tacka Joel Danielsson för hans handledning. Sedan vill jag tacka min sambo Axel för alla statistikdiskussioner och hjälpen med att få struktur på mitt uppsatsskrivande. Slutligen vill jag tacka min pappa Christer och min vän Ida för språklig (och icke-statistisk) korrekturläsning.

Tack!

Malmö 31 januari 2023
Mathilda Carlsson

Innehåll

1	Inledning	4
2	Data	5
2.1	Uppdelning av data för modellering	5
3	Metod	6
3.1	Avtrendifiering	6
3.2	Transformerering	7
3.3	ARIMA	8
3.4	Rekursiva metoder	9
3.4.1	Forgetting factor	9
3.4.2	Fönster	10
3.4.3	Kalmanfilter	10
3.5	Diagnostik och modelljämförelse	10
3.5.1	Diagnostik	10
3.5.2	Modelljämförelse	11
3.6	Prediktioner	11
3.6.1	Prediktioner av förhöjda flöden	12
4	Resultat	12
4.1	ARIMA-modell	12
4.1.1	AR(5)-modellen	13
4.2	Rekursiva modeller	13
4.2.1	Forgetting factor	13
4.2.2	Fönster	13
4.2.3	De rekursiva modellernas koefficientskattningar	13
4.3	Diagnostik och residualanalys	15
4.4	Utvärdering av prediktioner	18
4.4.1	Endagsprediktioner	18
4.4.2	Tredagarsprediktioner	21
5	Diskussion och vidare forskning	24
6	Slutsatser	26

1 Inledning

Kalixälven är en av Sveriges norrländska nationalälvar, vilket innebär att det är en oreglerad älv som inte får byggas ut med vattenkraft. Älvens vattenflöde varierar naturligt med årstiderna. Under vinterhalvåret rinner endast lite vatten innan snön börjar smälta i fjällen, vilket leder till en plötslig, kraftig ökning av flödet i slutet av våren. Denna vårflod kan leda till översvämningar, som påverkar djur, natur och bebyggelse i närheten av älven och dess avrinningsområden.

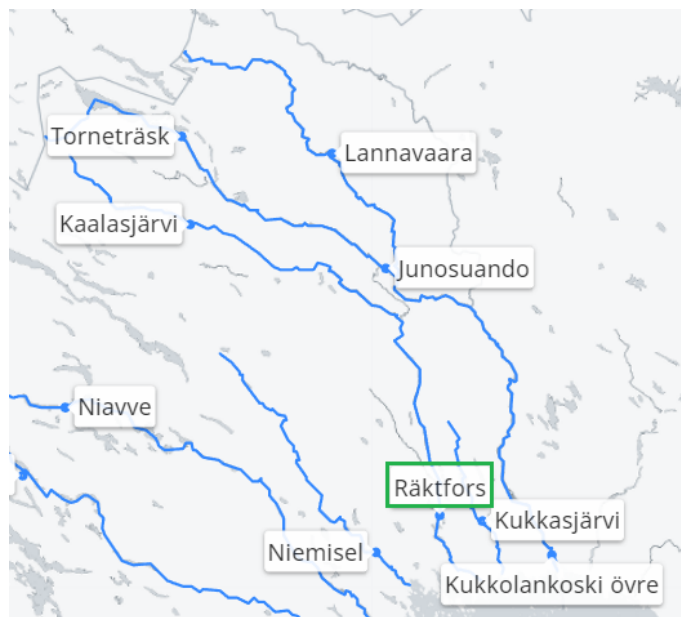
Om vårflodens ankomst är känd går det att förebygga skador genom tillfälliga insatser med exempelvis sandsäckar. Problemet är att vårfloden inte sker samma dag eller ens samma vecka varje år. Därav finns ett intresse att modellera detta statistiskt. Tidigare försök att modellera vattenflödet i nationalälvarna har bland annat gjorts av Pedersen och Bengtsson (2016), med ARMA-, GARCH- och SETAR-modeller.

Fokus i denna uppsats är att skapa korttidsprognoser vars syfte är att prediktera när vårfloden sker samt dess flödesnivå. Prognoserna görs med en vanlig autoregressiv (AR) modell kombinerat med tre rekursiva modeller som uppdateras efterhand. De rekursiva metoder som används är forgetting factor, glidande fönster och Kalmanfilter. De tre rekursiva modellerna baseras på den valda AR-modellen. En central fråga är om den vanliga AR-modellen är bra nog, eller om prediktionerna förbättras med de mer dynamiska modellerna som justerar sig över tid.

Eftersom höga flöden leder till översvämning studeras modellernas prediktionsförmåga av höga flöden lite extra genom att jämföra modellernas sensitivitet vid prediktioner av höga flöden.

Något som däremot inte beaktas är hur höga flöden som är problematiska. Skillnaden mellan exempelvis en dag med $2000 \text{ m}^3/\text{s}$ eller några olika toppar runt $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ studeras inte närmare.

Datamaterialet som används presenteras i nästa avsnitt. Sedan beskrivs metoderna, varefter resultatet av dessa metoder presenteras. Därefter följer diskussion och slutsatser.

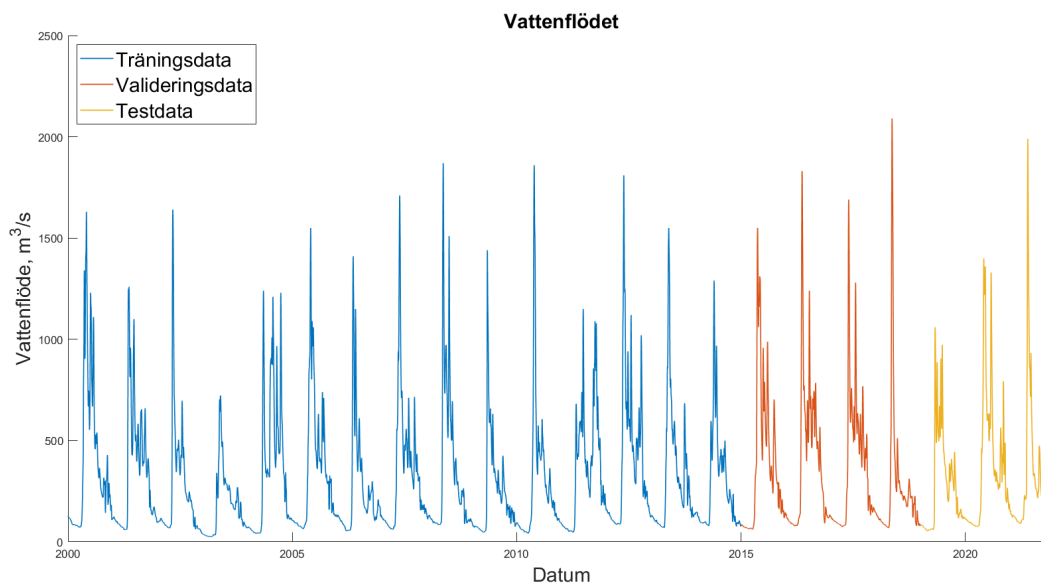


Figur 1: Karta över mätstationer. Räktfors markerad med grön ram.

2 Data

Datamaterialet som används i denna uppsats är hämtat från SMHI (u.å.). Det består av en lång tidsserie av älvens dygnsmedelflöde i kubikmeter vatten per sekund. Observationerna kommer från mätstationen i Räkthors. Stationen ligger i Kalixälvens nedre del, knappt två mil söder om Överkalix, vilket visas på kartan i Figur 1. Materialet som studeras sträcker sig från år 2000 till och med år 2021, vilket innebär 22 års eller 8036 stycken observationer. Inget databortfall förekommer under dessa år.

Vattenflödet visas i Figur 2, där säsongsvariationen syns tydligt med de höga topparna vid vårfloden som följs av perioder med lägre flöden.



Figur 2: Vattenflödet

Under åren 2000 till 2021 ligger de genomsnittliga årsmaxvärdena av dygnsmedelflöde på 1527 kubikmeter per sekund. Det högsta flödet uppmättes till 2090 m^3/s den 14 maj 2018 medan det lägsta årsmaxvärdet uppmättes till 723 m^3/s den 26 maj 2003. I tabell 8 i appendixet finns datum för samtliga 22 års högsta dygnsmedelflöden. Årminimum är i genomsnitt 64 m^3/s . De höga flödesnivåerna är av störst intresse i denna uppsats, men även de lägre nivåerna är relevanta för att förstå dynamiken i processen.

Vattenflödets struktur varierar; vissa år är det endast en kortare period med riktigt höga värden, medan andra har ett par olika kortare perioder med relativt höga värden. Exempelvis har år 2004 tre toppar på ungefär 1200 m^3/s , medan år 2010 endast har en hög topp på 1860 m^3/s .

2.1 Uppdelning av data för modellering

Vid tidsseriemodellering brukar data delas in i tre delar. Modellerna byggs och tränas på den första delen av datan och valideras på följande del för att se om modellerna är rätt specificerade eller behöver justeras på något sätt, exempelvis på grund av överanpassning till träningsdatan. Efter valideringen bestäms vilka modeller som ska användas på den tredje delen av datan, testdatan.

Enligt Hastie et al. (2009, sid. 222) finns ingen generell regel för hur mycket av datan som ska finnas i respektive del, utan det beror på modellernas komplexitet.

Uppdelningen presenteras i tabell 1. I Figur 2 illustreras den genom de tre olika färgerna.

Tabell 1: Uppdelning

Data	Datum	Antal observationer	Andel
Träning	1 januari 2000 till 31 december 2014	5479	68 %
Validering	1 januari 2015 till 31 december 2018	1461	18 %
Test	1 januari 2019 till 31 december 2021	1096	14 %

3 Metod

En vanlig metod för tidsseriemodellering är ARIMA, autoregressive integrated moving average (se avsnitt 3.3), vilket är en av metoderna som används i denna uppsats. På grund av vattenflödets stora variation undersöks även hur bra rekursiva ARIMA-modeller skulle kunna fungera, eftersom de är mer dynamiska och justerar om sina koefficientskattningar med tiden beroende på hur de är specificerade.

Innan den egentliga tidsseriemodelleringen påbörjas görs en avtrendifiering och transformering av datamaterialet. Detta görs för att datan ska bli mer lätthanterlig och lättare kunna uppfylla ARIMA-modellens antaganden.

De rekursiva metoder som används i denna uppsats är forgetting factor, glidande fönster samt Kalmanfilter. Databearbetningen och analysen görs i programmet MATLAB (2022a).

I följande avsnitt beskrivs avtrendifieringen samt logaritmeringen, varefter tidsseriemodelleringen följer. I avsnittet om tidsseriemodellerna beskrivs modellerna, prediktionerna samt diagnostiken som används för validering av, samt jämförelse mellan de olika modellerna. Resultatet av dessa presenteras därefter i avsnitt 4.

3.1 Avtrendifiering

Det finns en uppåtgående trend för både årsminimum- och årsmaximumvärdena samt för årsgenomsnittet. Vad denna trend beror på undersöks inte i och med att trenden inte är relevant för uppsatsens syfte och endast försvårar modelleringen eftersom modellantagandet om konstant väntevärde inte uppfylls. Därför görs avtrendifieringen på hela datamaterialet innan uppdelningen inför tidsseriemodelleringen.

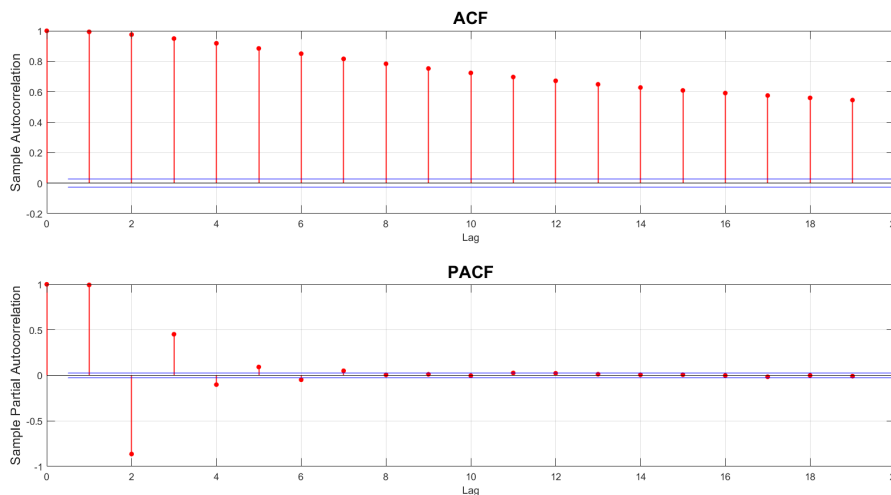
Regressionslinjen för det logaritmerade (se avsnitt 3.2) datamaterialet är

$$y = 5.233 + 0.000031274t \tag{1}$$

där y innebär logaritmerat vattenflöde och t innebär tiden i dagar från 31 december 1999. Omräknat och avlogaritmerat motsvarar detta en ökning på ungefär $54 \text{ m}^3/\text{s}$ från år 2000 till år 2021. Regressionslinjen finns utmarkerad i Figur 19 i appendixet.

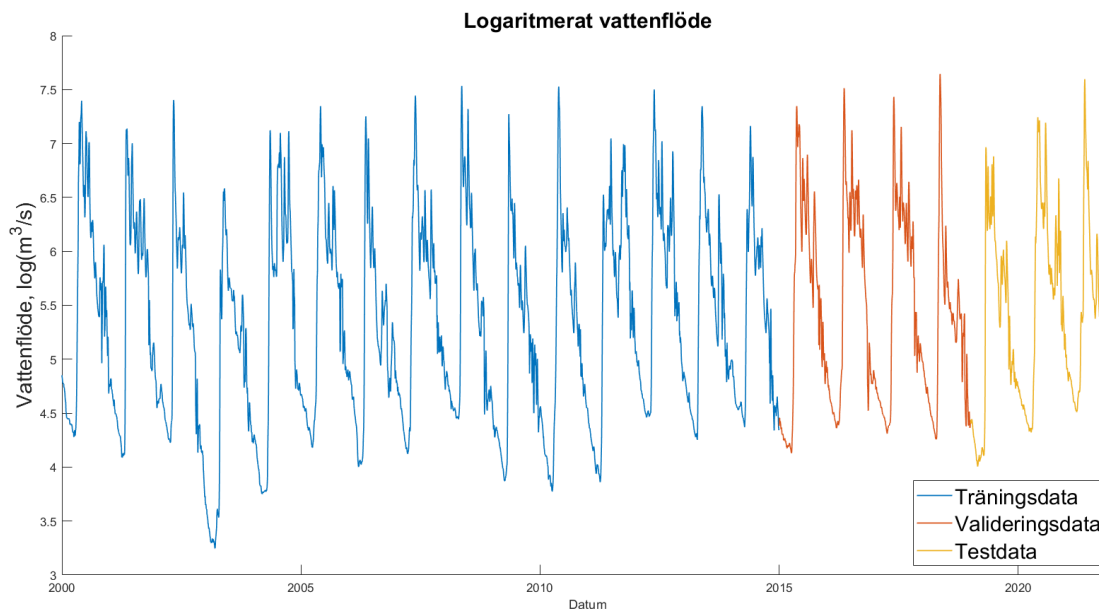
3.2 Transformerings

Vattenflödets autokorrelationsfunktion (ACF) och partiella autokorrelationsfunktion (PACF) (se Cryer och Chan, 2008) studeras för att se om tidsserien är stationär eller behöver transformeras. De långsamt avtagande signifikanta laggarna i ACF:en i Figur 3 tyder på att vattenflödet inte är stationärt.



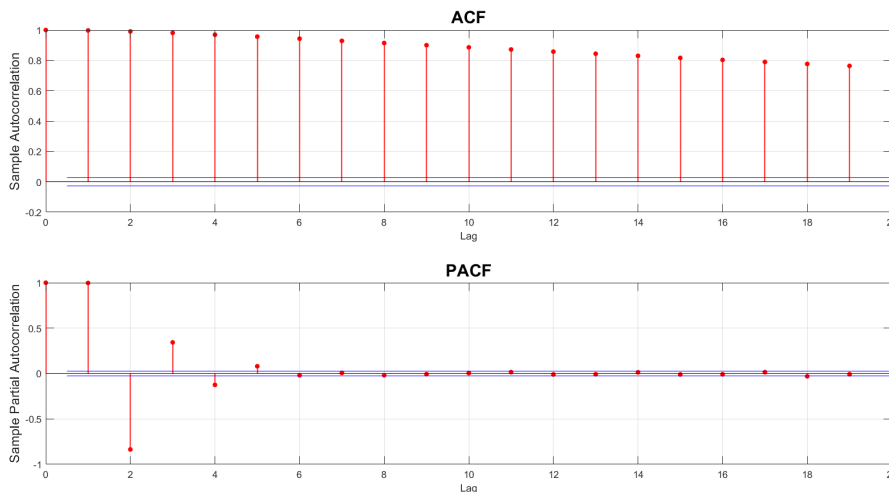
Figur 3: ACF och PACF för otransformerat vattenflöde

För att förenkla modelleringen och för att försöka uppnå stationaritet transformeras flödet genom logaritmering. Logaritmering stabiliserar datan, genom att göra höga värden mindre och låga värden större. Detta kan ses i Figur 4.



Figur 4: Logaritmerat vattenflöde

Efter logaritmering verkar tidsserien fortfarande vara icke-stationär, vilket kan ses i Figur 5 på de långsamt avtagande signifikanta laggarna i ACF. Däremot har PACF:en nu färre signifikanta laggar.



Figur 5: ACF och PACF för logaritmerat vattenflöde

3.3 ARIMA

ARIMA(p, d, q)-modellering, även känd som Box-Jenkins metod, är en modell bestående av p stycken autoregressiva parametrar och q stycken parametrar med löpande medelvärde, "moving average". I:et i ARIMA står för integrerad, vilket innebär antalet differentieringar som görs på datamaterialet, för att uppnå stationaritet. Om ingen differentiering görs förenklas modellen till en ARMA(p, q)-modell, och på samma sätt blir det en AR(p) modell om inte heller någon MA(q)-parameter tas med (se Cryer och Chan, 2008).

I ekvation 2 visas ekvationen för en AR(p)-modell, där värdet Y för dag t beror på värdet dagen innan, dag $t - 1$, som multipliceras med koefficienten ϕ_1 , samt motsvarande för ytterligare p dagar bakåt. Därtill tillkommer innovationstermen e_t , en normalfördelad slumpterm med väntevärdet 0 och konstant varians.

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t \quad (2)$$

I Matlab skattas ARIMA-modellens ϕ -koefficienter med maximum-likelihood-metoden (MATLAB, 2022c).

ARIMA-modellen har vissa krav på stationaritet vilket bland annat innebär att både väntevärde och varians ska vara konstanta över tid. Därutöver ställs följande krav på residualerna från en ARIMA-modell (Cryer och Chan, 2008):

- Residualerna ska vara okorrelerade
- Residualerna ska inte uppvisa trender
- Residualerna ska uppvisa homoskedasticitet
- Residualerna ska ha väntevärde 0

I avsnitt 3.5 förklaras hur dessa antaganden kontrolleras.

3.4 Rekursiva metoder

De rekursiva metoderna modelleras med funktionen RecursiveAR (MATLAB, 2022d). De tre olika estimeringsmetoderna forgetting factor, glidande fönster ("finite sliding window") och Kalmanfilter används.

Forgetting factor och Kalmanfilter är så kallade "infinite-history estimation methods" vilket innebär att deras algoritmer minimerar prediktionsfelen från datamaterialets start. Fönstermetoden har däremot "finite-history", vilket innebär att prediktionsfelen endast minimeras för de observationer som väljs ut att tas med, motsvarande antalet observationer enligt den valda storleken på fönstret (MATLAB, 2022b).

Dessa tre modeller är alla baserade på den AR-modell som väljs (se resultatavsnittet, avsnitt 4). De blir därmed tre utvidgade och mer dynamiska versioner av den enklare konstanta AR-modellen. Därav gäller modellantagandena för AR-modellen även de rekursiva modellerna.

Skillnaden mellan den simpla AR-modellen och de dynamiska är framförallt hur värdena på ϕ -koefficienterna ändras (respektive inte ändras) när modellerna körs på validerings- och testdatan efter att ha anpassats på träningsdatan. Den vanliga AR-modellen anpassas för träningsdatan och ändras sedan inte mer. De värden på ϕ -koefficienterna som har anpassats och som presenteras i tabell 2 är konstanta och används således även på ny data. De dynamiska modellerna har däremot ϕ -koefficienter som förändras över tid. Hur förändringen ser ut skiljer sig åt mellan de olika modellerna. Dessa presenteras i Figur 6, 7 och 8 i resultatavsnittet 4.2.3.

I följande avsnitt förklaras hur respektive rekursiv modell specificeras.

3.4.1 Forgetting factor

Forgetting factor är en form av viktad minsta kvadratmetod. Den använder en parameter, λ , för att vikta de olika observationerna, så att äldre observationer blir mindre viktiga än nyare observationer. Observationen för tidpunkten $k \leq t$ viktas som λ^{t-k} gånger den senaste observationens vikt (Ljung, 2001). Enligt MATLAB (2022b) brukar vanliga värden för λ vara mellan 0.98 och 0.995.

För att få en uppfattning om hur snabbt observationernas vikter avtar talar Ljung (2001) om en minneshorisont, vilket innebär vid vilket $t - k$ som vikten blir ungefär en tredjedel av den senaste observationens vikt. Denna minneshorisont beräknas som:

$$t - k = \frac{1}{(1 - \lambda)} \quad (3)$$

där exempelvis en forgetting factor $\lambda = 0.9$ motsvarar en minneshorisont på 10 observationer och $\lambda = 0.99$ motsvarar 100 observationer. Om $\lambda = 1$ innebär det således att alla observationer har samma vikt och att koefficienterna estimeras konstant, på samma sätt som en vanlig ARIMA-modell.

Valet av λ består av vissa avvägningar. Det värde som fungerar bäst för endagsprediktioner kanske fungerar sämre på tredagarsprediktioner och vice versa. Ett värde kan minimera medelkvadratfelet, MSE, medan ett annat minimerar medelabsolutfelet, MAE (se avsnitt 3.5.2). Det λ som väljs behöver fungera relativt bra utan att överanpassas för tränings- respektive valideringsdatan.

För att hitta en lämplig forgetting factor skrivs en loop för att ta fram grafer över MSE och MAE vid olika nivåer på λ . Figur 22 i appendixet visar loopens resultat på träningsdatan. Med dessa som utgångspunkt testas ett antal olika modeller som jämförs baserat på prediktionsfel, MSE och MAE. Den valda modellen presenteras i resultatavsnittet.

3.4.2 Fönster

Fönstermetoden använder en fönsterstorlek som avgör vilka observationer bakåt i tiden som tas med vid estimeringen. När tiden går framåt "glider" fönstret med, så att det alltid är lika många dagar bakåt som är med och används för respektive tidpunkt t (Zhang, 2000).

Om fler observationer används blir skattningarnas varians lägre. Samtidigt tillför inte alla observationer nödvändigtvis lika mycket, framför allt för detta datamaterial med varierande flödesnivåer. Därför kan fönstermetodens dynamik lämpa sig väl här. Valet av fönsterstorlek görs på motsvarande sätt som valet av forgetting factor. Figur 23 i appendixet visar loopens resultat av MSE och MAE på träningsdatan. Den valda modellen presenteras i resultatavsnittet.

3.4.3 Kalmanfilter

Kalmanfiltret är en algoritm som börjar med en startpunkt, utgående från den $AR(p)$ -modell som har valts, och sedan gradvis uppdaterar parameterskattningarna vartefter ny information i form av mer data tillkommer. Algoritmen justerar parametrarna lite efter hand för att försöka få dem att passa bättre till datan. För mer detaljerad beskrivning, se Cryer och Chan (2008) och Jakobsson (2015). När Kalmanfilter används som estimeringsmetod i Matlab specificeras endast vilken ordning av $AR(p)$ -modell som ska användas.

3.5 Diagnostik och modelljämförelse

För att utvärdera och jämföra modellerna används flera olika metoder och kriterier. Dessa består av test, diagram och mått. Nedan förklaras hur modellantagandena kontrolleras och hur modellerna jämförs.

3.5.1 Diagnostik

Modellantagandena som presenterades i avsnitt 3.3 kontrolleras genom följande diagnostik av modellernas residualer.

Eventuell kvarvarande korrelation mellan residualerna undersöks genom att studera residualernas autokorrelationsfigurer. Residualernas korrelation kontrolleras även med Ljung-Box test, där hypoteserna ser ut som följer:

- H_0 : ingen autokorrelation
- H_1 : autokorrelation

Om nollhypotesen förkastats finns det fortfarande något beroende kvar i residualerna. Ljung-Box teststorhet Q är χ^2 fördelad med $K - p - q$ frihetsgrader (se Cryer och Chan, 2008).

$$Q_* = n(n+2) \left(\frac{\hat{r}_1^2}{n-1} + \frac{\hat{r}_2^2}{n-2} + \dots + \frac{\hat{r}_K^2}{n-K} \right) \in \chi^2(k-p-q) \quad (4)$$

För att kontrollera residualernas trender, homoskedasticitet och fördelning studeras residualerna grafiskt i spridningsdiagram, histogram, och normalfördelningsfigurer.

3.5.2 Modelljämförelse

Två mått som används vid jämförelse av modellerna är residualernas medelkvadratfel (MSE) och medelabsolutfel (MAE). Dessa mått ska minimeras för att prediktionerna ska bli så bra som möjligt.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum (\hat{Y}_t - Y_t)^2 \quad (5)$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum |\hat{Y}_t - Y_t| \quad (6)$$

3.6 Prediktioner

Eftersom uppsatsens syfte är korttidsprognoser görs prediktioner för $t+1$ respektive $t+3$ dagar. En AR(5)-modells prediktionsekvation för $t+1$ dagar presenteras nedan i ekvation 7, där det förväntade värdet på \hat{Y}_{t+1} beror på de senaste fem dagarnas värden.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+1} &= E(Y_{t+1}|Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, Y_{t-4}) \\ &= \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \phi_3 Y_{t-2} + \phi_4 Y_{t-3} + \phi_5 Y_{t-4} \end{aligned} \quad (7)$$

Prediktionsekvationen för $t+3$ dagar presenteras nedan i ekvation 8. Denna består av fler koefficienter och kombinationer av koefficienter än endagsprognosen. Detta beror på att flödets förväntade värde om tre dagar beror på flödets förväntade värde om två dagar, vilket i sin tur beror på det förväntade värdet om en dag.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+3} &= E(Y_{t+3}|Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, Y_{t-4}) \\ &= (\phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2 + \phi_3) \cdot Y_t + \\ &\quad (\phi_1^2\phi_2 + \phi_2^2 + \phi_1\phi_3 + \phi_4) \cdot Y_{t-1} + \\ &\quad (\phi_1^2\phi_3 + \phi_2\phi_3 + \phi_1\phi_4 + \phi_5) \cdot Y_{t-2} + \\ &\quad (\phi_1^2\phi_4 + \phi_2\phi_4 + \phi_1\phi_5) \cdot Y_{t-3} + \\ &\quad (\phi_1^2\phi_5 + \phi_2\phi_5) \cdot Y_{t-4} \end{aligned} \quad (8)$$

Prediktionerna görs rullande över hela materialet, förutom för de fem första dagarna vid endagsprediktioner respektive de sju första dagarna vid tredagarsprediktioner. Detta är på grund av hur prediktionsekvationen för en AR(5)-modell fungerar och hur många dagar bakåt som modellen behöver för att göra prediktionen för respektive dag.

Genom dessa prognoser skapas prediktionsfelet, $Y_t - \hat{Y}_t$. Prediktionsfelet innebär skillnaden mellan det verkliga och det predikterade värdet för dag t . Det används för att jämföra de olika modellernas MSE och MAE.

Prediktionsfelet används även under modelleringen av forgetting factor- och fönstermodellerna, för att hitta lämpligt värde på λ respektive fönsterstorlek, som nämndes i avsnitt 3.4.1 och 3.4.2.

3.6.1 Prediktioner av förhöjda flöden

Eftersom de höga flödesnivåerna är av störst intresse för denna uppsats undersöks modellernas prediktionsförmåga av förhöjda flödesnivåer mer specifikt. Detta görs genom att dikotomisera flödesnivåerna som antingen normala eller förhöjda värden.

Gränsen för ett förhöjt flöde sätts till $1040 \text{ m}^3/\text{s}$. Denna gräns motsvarar 50 % av det högsta 100-årsflöde som Myndigheten för samhällsskydd och beredskap tog fram i en rapport angående översvänningskartering av Kalixälven (se MSB, 2015).

För att jämföra modellernas prediktionsförmåga beräknas deras sensitivitet och specificitet. Sensitiviteten innebär hur pass bra en modell är på att prediktera förhöjda flöden. Sensitiviteten beräknas genom att dividera antal dagar som respektive modell predikterar ett förhöjt flöde med antal dagar som det verkliga flödet var förhöjt.

Specificiteten innebär på motsvarande vis hur bra en modell är på att prediktera normala flödesnivåer. Beräkningen av specificiteten görs således genom att dividera antal dagar som respektive modell predikterar ett normalt flöde med antal dagar då det verkliga flödet var normalt. Detta innebär i praktiken en dikotomisering av prediktionerna.

Både sensitiviteten och specificiteten ger höga värden för modellerna. Eftersom flera av dessa är nära 100 % beräknas därför deras 95 procentiga konfidensintervall med Wilsons score (se Agresti, 2012, s. 14-15) i stället för med det vanligare Walds score.

4 Resultat

Resultatet av modelleringen presenteras i följande avsnitt. Först presenteras hur modellerna specificerades, sedan utvärderas modellantagandena med residualanalys, varefter prediktionerna slutligen presenteras och jämförs.

4.1 ARIMA-modell

För att välja eller specificera en lämplig ARIMA-modell studeras ACF och PACF för den logaritmerade datan i Figur 5. De fem signifikanta laggarna i PACF:en tyder på att modellen ska innehålla 5 AR-komponenter. ACF:en visar, vilket redan nämndes i avsnitt 3.2, tecken på icke-stationäritet, då många laggar är signifikanta men långsamt avtagande.

Ett antal modeller med olika kombinationer av AR- och MA-komponenter testas. Modellen som väljs är en AR(5)-modell, vars koefficientskattningar presenteras i följande avsnitt. Denna modell används som basmodell för de rekursiva modellerna. Skillnaden mellan modellerna ligger i hur ϕ -koefficienterna skattas, vilket nämndes i avsnitt 3.4.

4.1.1 AR(5)-modellen

Som tidigare nämnt skattas AR(5)-modellens ϕ -koefficienter på träningsdatan och hålls sedan konstanta på validerings- och testdatan. Dessa koefficientskattningar presenteras i tabell 2. I kolumnen värde visas de olika ϕ -koefficienternas värden. Samtliga parametrar har p-värden under 5 %-nivån, vilket innebär att de är signifikant skilda från noll och bör vara med i modellen.

Parameter	Värde	Standardfel	p-värde
AR(1)	2.1715	0.0044	<0.0001
AR(2)	-1.6964	0.0113	<0.0001
AR(3)	0.7396	0.0173	<0.0001
AR(4)	-0.2978	0.0182	<0.0001
AR(5)	0.0800	0.0084	<0.0001

Värt att notera är att storleken på ϕ -koefficienterna i absoluta tal minskar för varje parameter, så att värdet på ϕ_1 är störst, vilket leder till att vattenflödet för dag $t - 1$ blir viktigare än flödet för dag $t - 2$ när prediktioner görs (se ekvation 7).

Modellens residualer analyseras i avsnitt 4.3 och sedan presenteras prediktionerna i avsnitt 4.4.

4.2 Rekursiva modeller

De tre rekursiva modellerna är alla baserade på en AR(5)-modell, enligt respektive metod som presenterades i metodavsnittet 3.4. Eftersom Kalmanmodellen inte kräver ytterligare specifikation beskrivs endast specificeringen av forgetting factor- och fönstermodellerna, innan de tre modellernas koefficientskattningar presenteras.

4.2.1 Forgetting factor

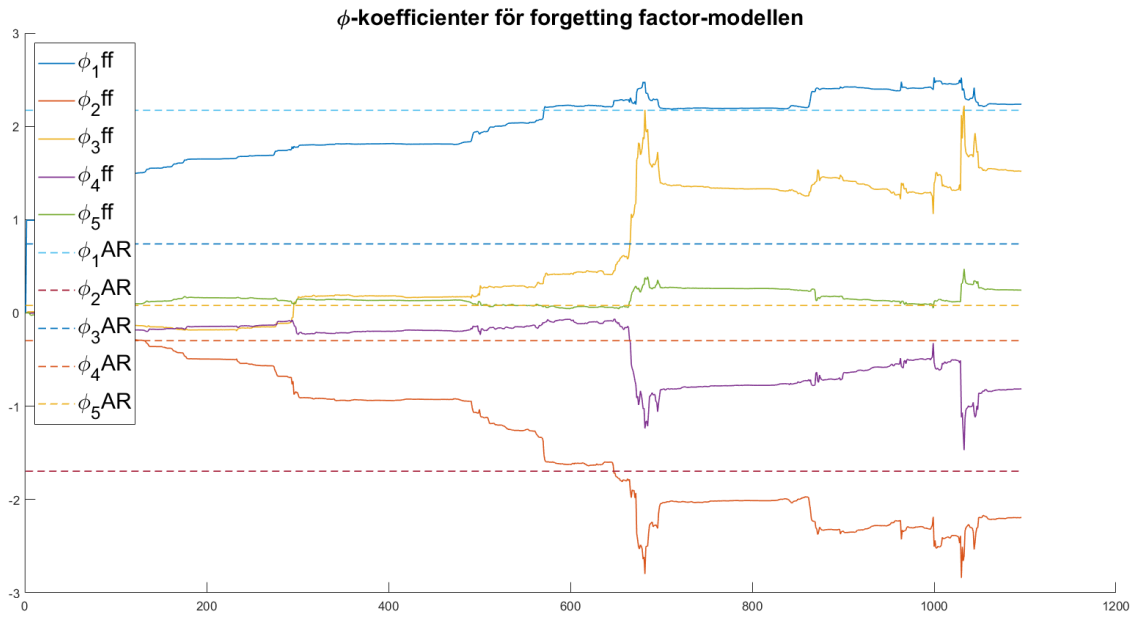
Ett antal olika värden på λ testas på träningsdatan och valideringsdatan. Modellernas prediktionsfel, MSE och MAE jämförs för att hitta ett lämpligt värde, som beskrevs i avsnitt 3.4.1. Slutligen väljs ett λ på 0.992, motsvarande en minneshorisont på 125 dagar, inför testdatan.

4.2.2 Fönster

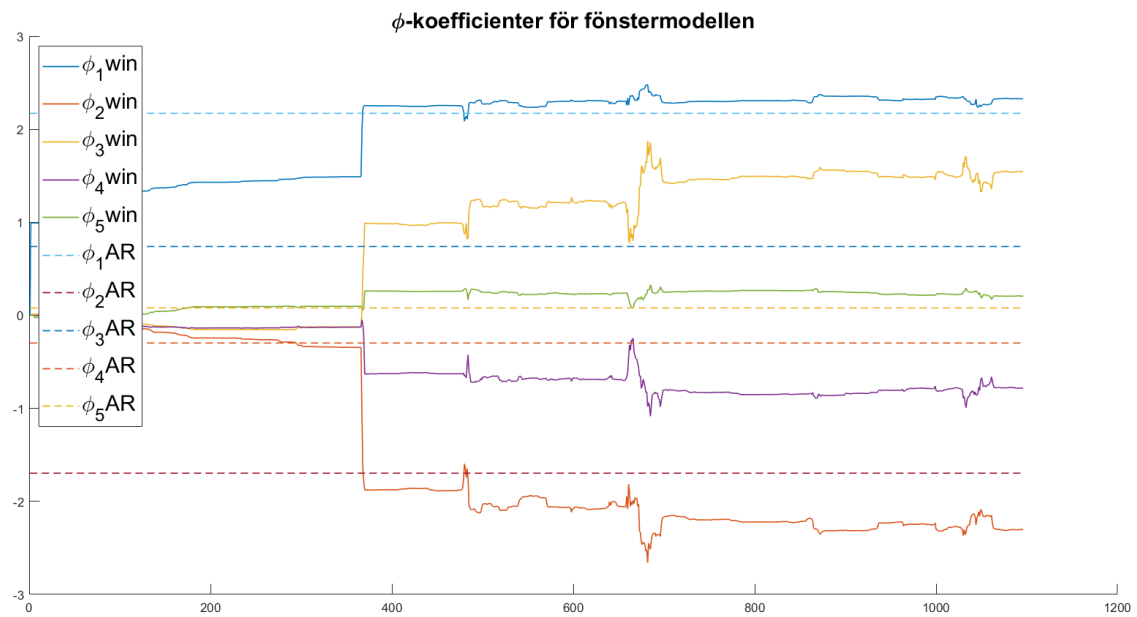
Olika fönsterstorlekar testas och jämförs på motsvarande sätt som vid valet av forgetting factor. Slutligen väljs ett fönster på 365 dagar.

4.2.3 De rekursiva modellernas koefficientskattningar

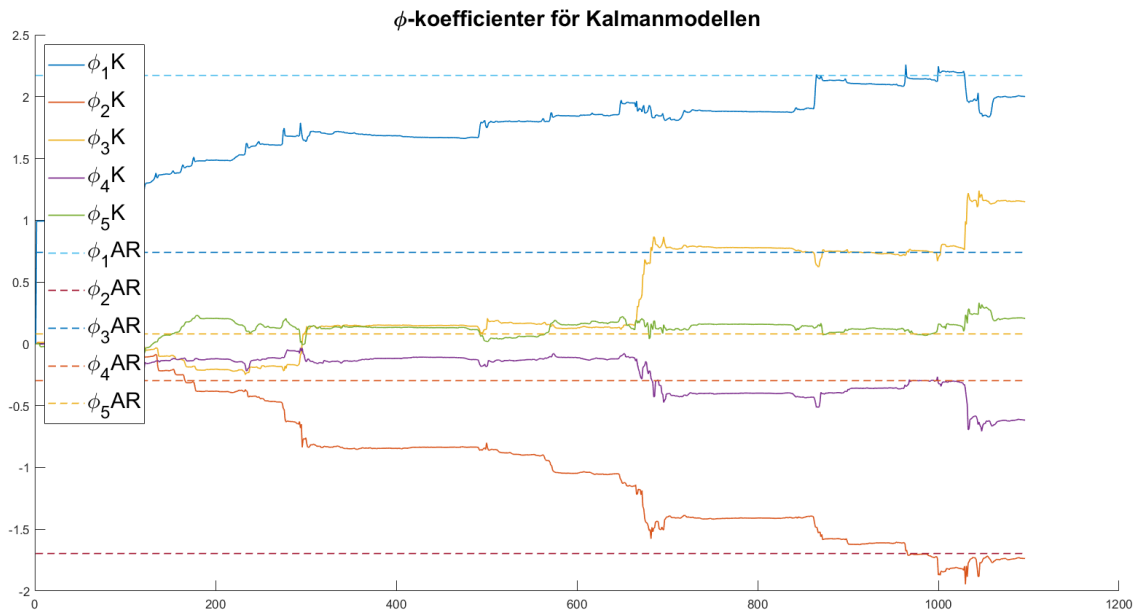
De skattade ϕ -koefficienterna för de rekursiva modellerna visas i Figur 6, 7 och 8. I dessa figurer presenteras koefficienterna för testdatan. Precis som vid de konstanta koefficienterna i den vanliga AR-modellen är absolutvärdena av modellernas ϕ_1 -koefficienter störst och absolutvärdena av ϕ_5 -koefficienterna lägre och närmare noll även för dessa modeller. För att förenkla jämförelse med den vanliga AR-modellens koefficienter finns även dessa med i figurerna, illustrerat med streckade linjer.



Figur 6: ϕ -koefficienter för forgetting factor-modellen



Figur 7: ϕ -koefficienter för de fönstermodellen



Figur 8: ϕ -koefficienter för Kalmanmodellen

Att koefficienterna ökar med tiden beror även på hur många observationer bakåt som respektive modell har tillgång till. Eftersom testdatan endast består av tre år, och modellerna inte har tillgång till observationerna från valideringsdatan på grund av uppdelningen av datamaterialet, leder detta till att koefficienterna ökar eller börjar justera sig först efter en viss tid eller ett visst antal observationer.

Exempelvis i Figur 7 ökar de olika koefficienterna vid 366 dagar, vilket motsvarar modellens fönsterstorlek på 365 dagar. Det syns att koefficienterna justerar sig i anslutning till vårfloderna för alla tre modeller. Däremot verkar de också förändras mycket under hösten 2020, vilket troligtvis beror på ett relativt högt flöde som skedde då, vilket går att se genom att exempelvis jämföra med vattenflödet i Figur 2 eller 4.

Efter hand ser flera av de rekursiva modellernas koefficienter ut att närma sig den vanliga AR-modellens. Eftersom uppsatsens syfte är prediktioner analyseras koefficienternas värden inte mer ingående.

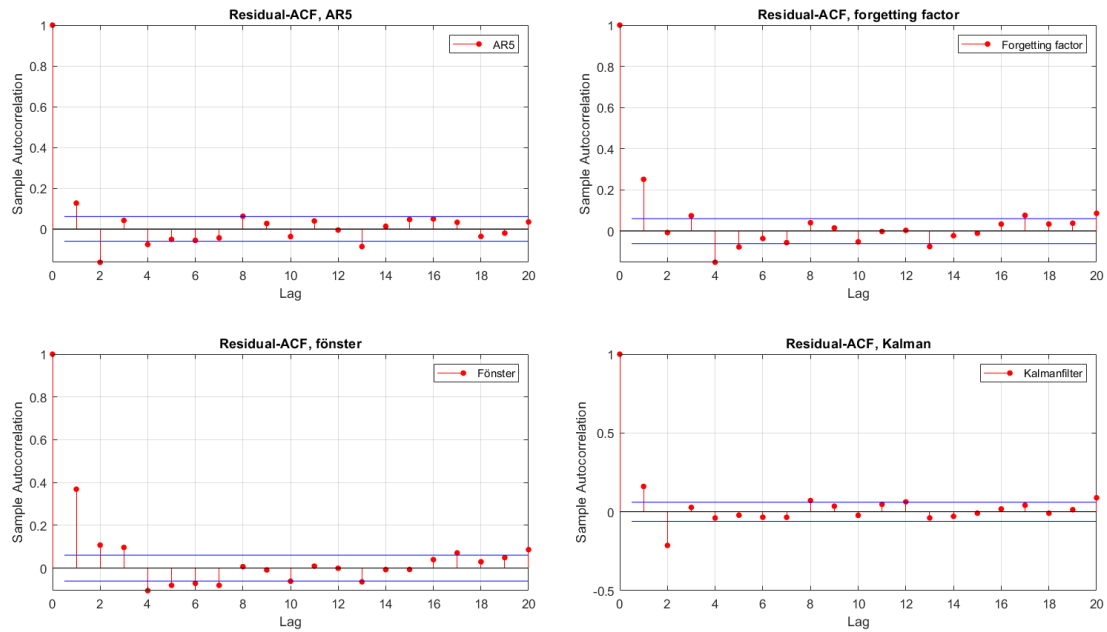
4.3 Diagnostik och residualanalys

I tabell 3 visas resultatet av Ljung-Box test. Samtliga förkastar nollhypotesen, vilket innebär att det fortfarande finns spår av autokorrelation i modellernas residualer. Baserat på teststatistikan förefaller AR(5)-modellen ha minst problem med autokorrelerade residualer, men det är fortfarande långt ifrån ett icke-signifikant p-värde.

Tabell 3: Ljung-Box test

Modell	Teststatistika	Kritiskt värde	p-värde
AR(5)	89.78	31.41	<0.0001
Forgetting factor	142.75	31.41	<0.0001
Fönster	232.00	31.41	<0.0001
Kalman	112.33	31.41	<0.0001

Residualernas autokorrelationsfunktioner visas i Figur 9. Samtliga modeller har flera signifikanta laggar, vilket tyder på att det fortfarande kan finnas korrelation mellan residualerna. De olika modellerna skiljer sig åt lite i hur många eller hur långa dessa laggar är.

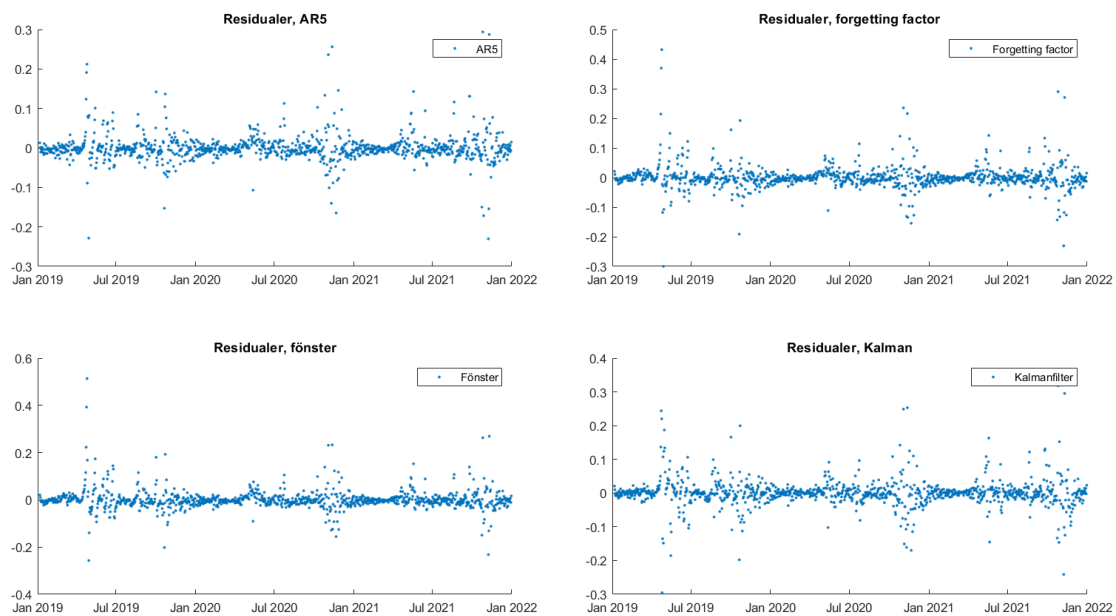


Figur 9: ACF för de fyra modellernas residualer

Modellernas residualer visas i Figur 10. Det syns tydligt att residualerna är mindre i perioder med låga eller jämnare flöden, och större (i absoluta tal) i perioder med högre eller mer varierande flöden. Därmed har residualerna en trend som är beroende av tiden.

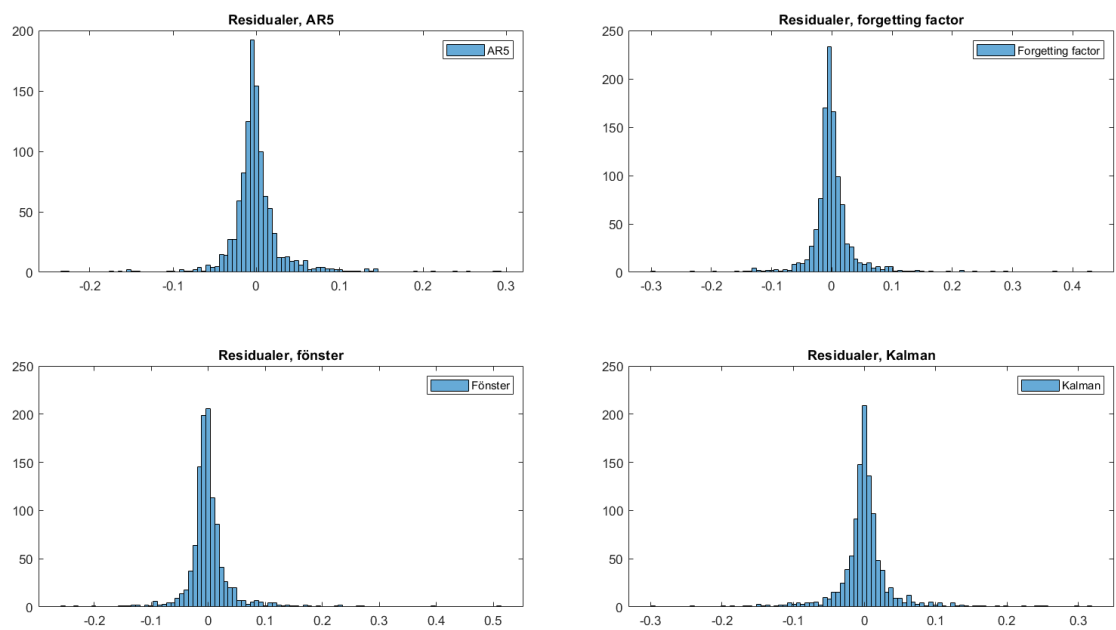
Residualernas varians ser inte konstant ut, eftersom vissa perioder knappt varierar alls, medan andra perioder är mer volatila.

Ingen av modellerna ser ut att skilja sig nämnvärt från de andra, men figurernas y-axlar skiljer sig åt beroende på hur stora respektive modells största residualer är.



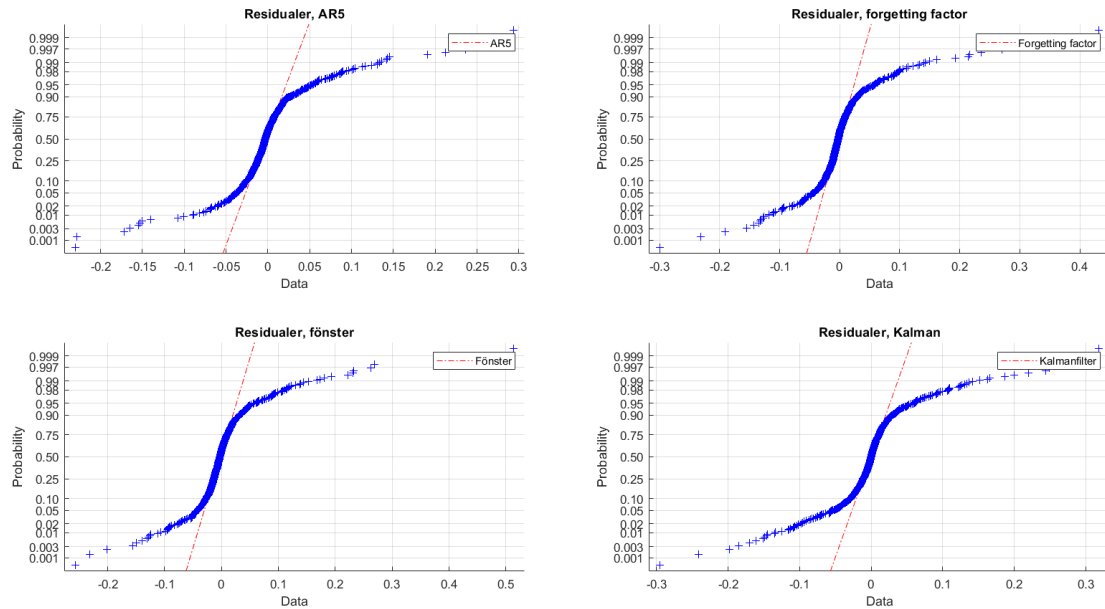
Figur 10: Modellernas residualer

Fördelningen av modellernas residualer visas i histogram i Figur 11. För Kalmanmodellen är den högsta stapeln med flest värden vid nollan, medan de andra modellerna har sina respektive högsta staplar strax under nollan. Generellt ser fördelningarna förhållandevis symmetriska ut, med koncentrerade toppar och långa svansar.



Figur 11: Histogram över residualerna

I Figur 12 visas residualernas normalfördelningsfigurer. Om residualerna hade varit normalfördelade hade de följt den röda streckade linjen. Ingen av modellerna har residualer som ligger nära en normalfördelning, vilket stämmer med histogrammen i Figur 11.



Figur 12: Normalfördelningsfigurer över residualerna

Sammanfattningsvis verkar residualerna för samtliga modeller varken vara oberoende, okorrelerade eller ha konstant varians. De bryter därmed mot flera av modellantagandena för ARIMA-modeller och visar tecken på att modellerna inte är helt korrekt specificerade.

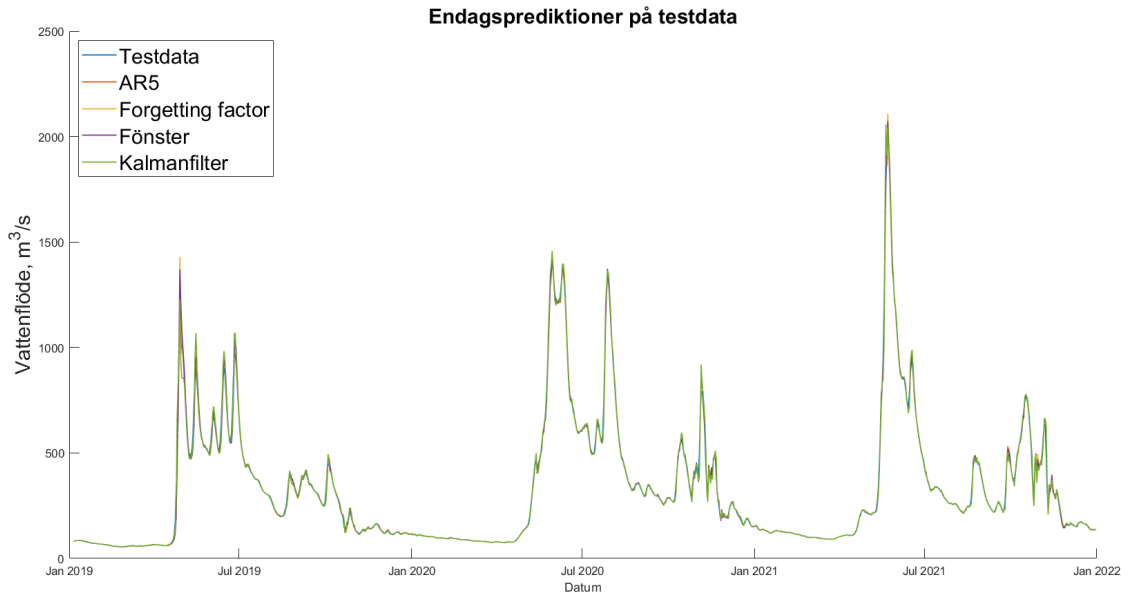
Trots att modellantagandena inte är uppfyllda kan prediktionerna från modellerna vara av värde. Därför utvärderas prediktionerna i nästa avsnitt.

4.4 Utvärdering av prediktioner

För att kunna jämföra modellernas prediktionsförmåga avlogaritmeras prediktionerna och jämförs sedan med det verkliga flödet. Nedan studeras först endagsprediktionerna och sedan tredagarsprediktionerna.

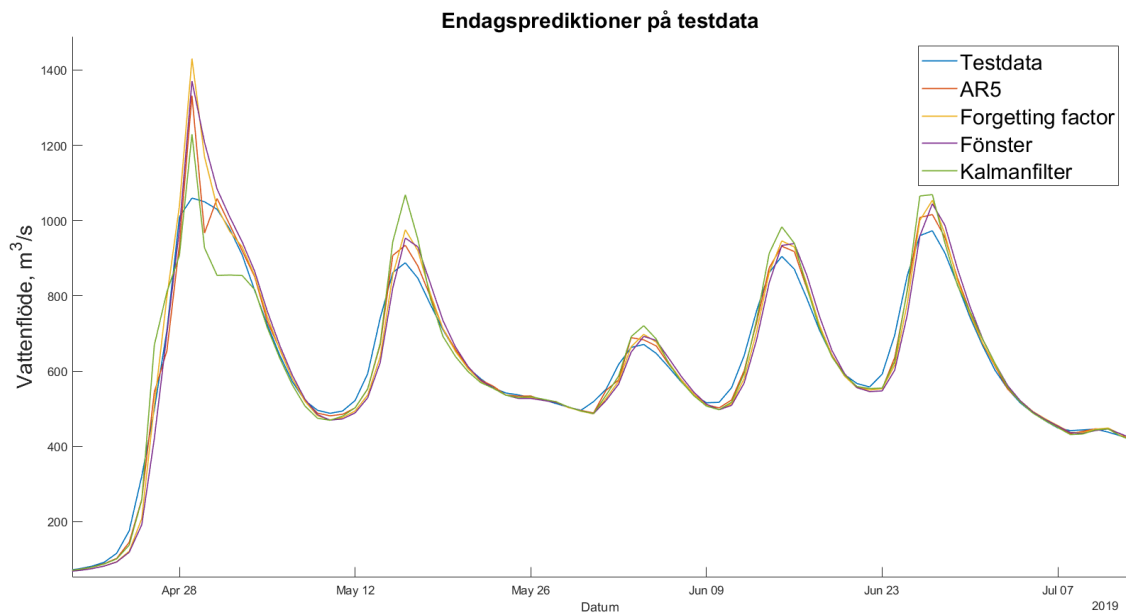
4.4.1 Endagsprediktioner

Prediktionerna för samtliga modeller presenteras i Figur 13. I denna figur är det svårt att konstatera om någon modell är bättre än de andra, eftersom alla linjer ligger nära både varandra och de verkliga observationerna.



Figur 13: Endagsprediktioner på testdata

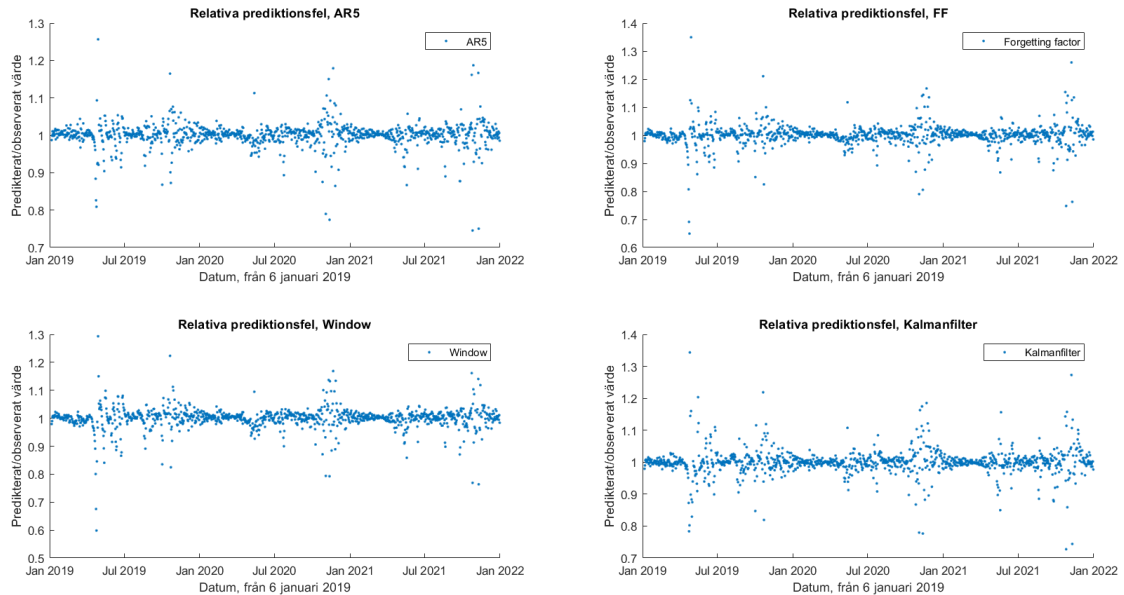
För att enklare kunna jämföra prediktionerna görs en förstoring vid de högsta nivåerna år 2019, vilket visas i Figur 14. Vid den första toppen överpredikterar samtliga modeller, men AR(5)-modellen och Kalmanmodellen är snabbast på att korrigera sig. Vid de flesta topparna är det däremot Kalmanmodellen som över-skattar mest. Den modell som verkar prestera bäst i anslutning till vårfloden är den vanliga AR(5)-modellen eftersom dess värden ofta ligger närmast de verkliga värdena.



Figur 14: Förstoring vid de högsta flödena år 2019

I Figur 15 syns de relativa prediktionsfelen bestående av respektive predikterade värde dividerat med motsvarande verkliga värde, $\frac{\hat{Y}_t}{Y_t}$.

Det syns tydligt att prediktionsfelen för samtliga modeller är som störst i anslutning till vårfloden. Detta är inte en överraskning, då det är just i anslutning till vårfloden som vattenflödet gör snabba förändringar från dag till dag.



Figur 15: Relativa prediktionsfel, endagsprognos

I tabell 4 jämförs MSE och MAE för de olika modellernas endagsprediktionsfel. Den vanliga AR(5)-modellen får lägst värden för både MSE och MAE, vilket indikerar att det är den bästa modellen. Forgetting factor-modellens MAE är något lägre än fönstermodellens, medan det motsatta gäller för deras MSE. Eftersom dessa skillnader är små verkar de två modellerna prestera ungefär lika bra. Kalmanmodellen får både högst MSE och MAE vilket tyder på att den är den sämsta modellen.

Tabell 4: Modelljämförelse endagsprediktion, testdata

Modell	MSE	MAE
AR(5)	332.13	7.83
Forgetting factor	453.21	8.60
Fönster	448.72	9.05
Kalman	578.34	9.86

Hur bra modellerna är på att prediktera höga flöden undersöks genom att titta på de dagar då det verkliga flödet var högt och se om respektive modells predikterade värde också var högt den dagen. Gränsen för högt flöde sätts till $1040 \text{ m}^3/\text{s}$, vilket nämndes i metodavsnittet 3.6.1.

I tabell 5 visas de olika modellernas sensitivitet och specificitet för endagsprediktioner. Dessa värden blir höga, vilket visar att modellerna är bra på att göra endagsprediktioner både för höga och låga flöden.

Tabell 5: Sensitivitet och specificitet för endagsprediktioner

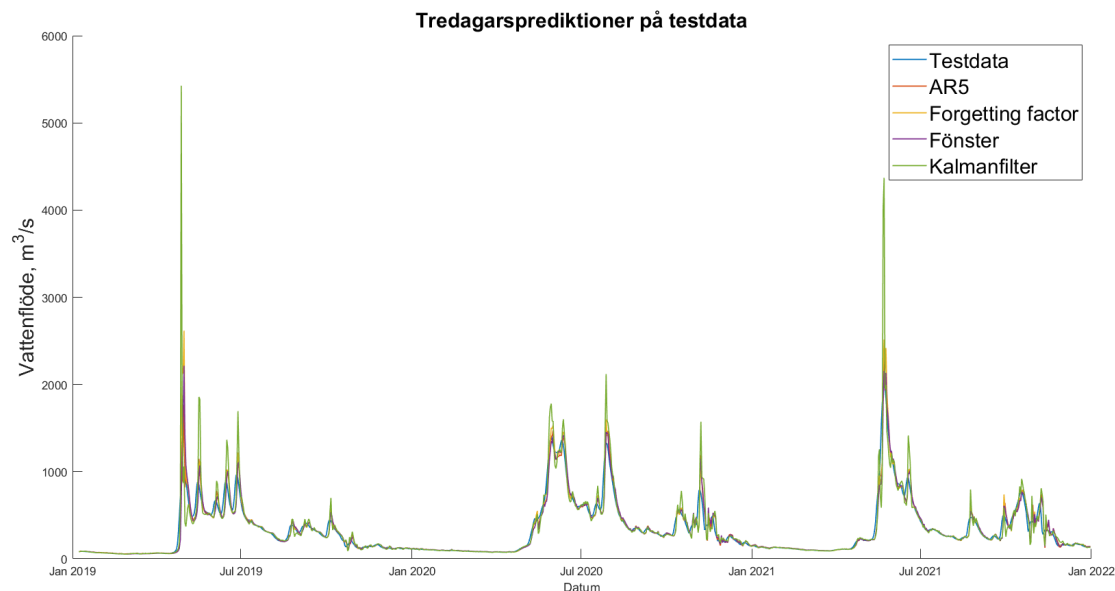
Modell	Sensitivitet	(95% KI)	Specificitet	(95% KI)
AR(5)	93.2	(81.8, 97.7)	99.9	(99.5, 100.0)
Forgetting factor	95.5	(84.9, 98.7)	99.9	(99.5, 100.0)
Fönster	95.5	(84.9, 98.7)	99.8	(99.3, 100.0)
Kalman	95.5	(84.9, 98.7)	99.7	(99.2, 99.9)

Sensitiviteten för de rekursiva modellerna är 95.5 %, medan den enkla AR(5)-modellen har något lägre sensitivitet på 93.2 %. Sensitivitetsmässigt verkar den enkla AR(5)-modellen prestera lite sämre än de andra modellerna, till skillnad från tidigare resultat.

Dessa resultat bör däremot tolkas med försiktighet, eftersom konfidensintervallen överlappar. Eftersom dessa mått är beräknade på testdatan, som endast består av tre år, blir dagarna med höga flöden relativt få, vilket påverkar konfidensintervallens bredd.

4.4.2 Tredagarsprediktioner

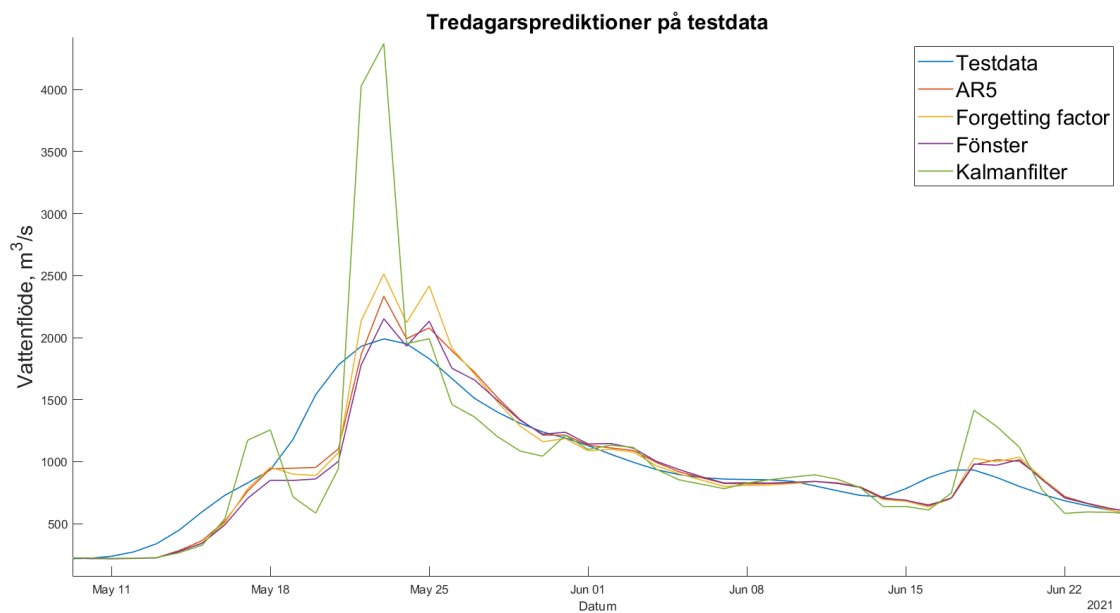
Figur 16 innehåller tredagarsprediktionerna för modellerna. Med ett tydligt undantag är denna figur och dess tolkning mycket lik Figur 13. Precis som för endagsprediktionerna följer de flesta modellernas prediktioner det observerade vattenflödet väl. För tredagarsprediktionerna är dock tendensen att Kalmanmodellen överskattar värdena och därmed också övertolkar uppgången i samband med vårfloden ännu tydligare. Som exempel kan nämnas den 28 april 2019, då Kalmanmodellen predikterar vattenflödet till $5427 \text{ m}^3/\text{s}$ medan det verkliga värdet endast var $1060 \text{ m}^3/\text{s}$.



Figur 16: Tredagarsprediktioner på testdata

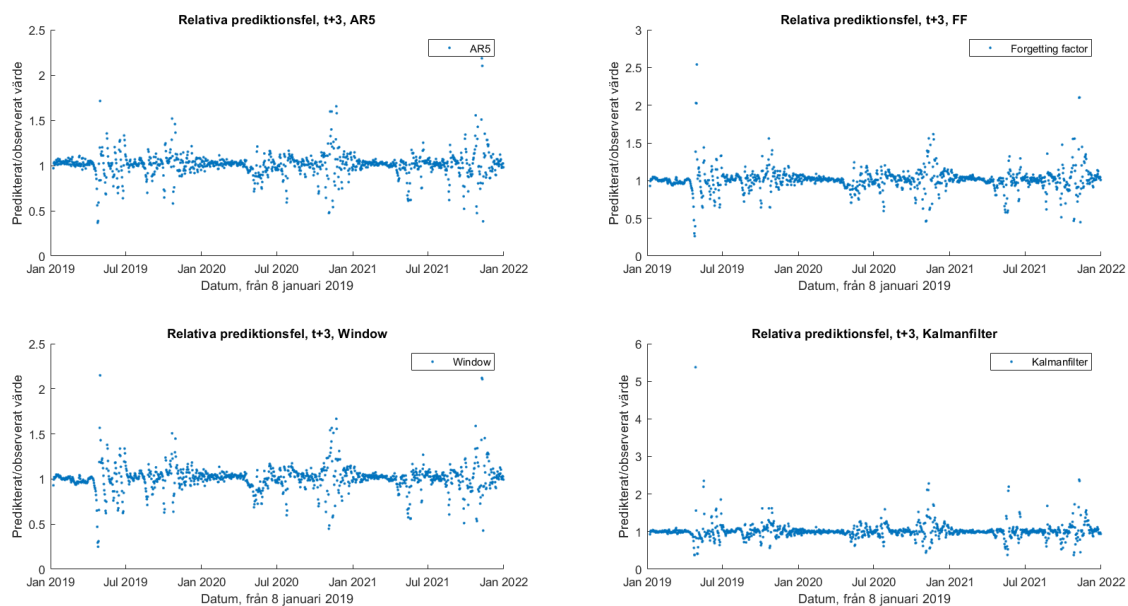
I Figur 17 visas en förstoring vid vårfloden år 2021. Här går det att följa hur Kalmanmodellen verkar notera uppgången i flödet och sedan övertolkar den signalen. Modellen försöker sedan korrigera nedåt igen, och missar således att det faktiskt var en pågående uppgång, vilket leder till tre dagar med för låga värden, följt av två dagar med alltför höga predikterade värden, innan den slutligen börjar följa det verkliga flödet lite bättre.

Detta tyder på att Kalmanmodellen har problem med överanpassning. De andra modellerna har liknande problem, men de övertolkar varken lika snabbt eller mycket som Kalmanmodellen.



Figur 17: Förstoring vid de högsta flödena år 2021

På samma sätt som vid endagsprediktionerna kan de relativa prediktionsfelen mellan modellerna jämföras i Figur 18. Genom att exempelvis titta på vad som är högsta värde på respektive y-axel syns direkt att Kalmanmodellen har den största överprediktionen. I övrigt är det inte mycket som skiljer sig från motsvarande för endagsprediktionerna (Figur 15).



Figur 18: Relativa prediktionsfel, tredagsprognos

Tredagarsprediktionsfelens MSE och MAE presenteras i tabell 6. Här återupprepas mönstret från endagsprediktionerna; AR(5)-modellen presterar bättre än övriga modeller, och Kalmanmodellen klart sämre. För endagsprediktioner var fönstermodellen och forgetting factor-modellen ungefär lika bra, men nu finns en tydligare skillnad, där fönstermodellen presterar bättre för båda måtten.

Tabell 6: Modelljämförelse tredagarsprediktion, testdata

Modell	MSE	MAE
AR(5)	6046.00	36.11
Forgetting factor	11052.00	40.68
Fönster	8156.20	39.78
Kalman	40933.00	56.45

Slutligen jämförs tredagarsprediktionernas sensitivitet och specificitet för höga flöden, vilka presenteras i tabell 7. Forgetting factor-modellen har högst sensitivitet på 88.6 %, följt av AR(5)- och fönstermodellerna med 86.4 % och slutligen Kalmanmodellen med 84.1 %. Däremot överlappar konfidensintervallen även här, vilket gör att det inte går att säkerställa om modellernas prediktionsförmåga skiljer sig åt. Samtliga modeller har hög specificitet på över 98 %.

Tabell 7: Sensitivitet och specificitet för tredagarsprediktioner

Modell	Sensitivitet	(95% KI)	Specificitet	(95% KI)
AR(5)	86.4	(73.3, 93.6)	99.0	(98.5, 99.6)
Forgetting factor	88.6	(76.0, 95.1)	99.0	(98.3, 99.5)
Fönster	86.4	(73.3, 93.6)	99.0	(98.3, 99.5)
Kalman	84.1	(70.6, 92.1)	98.0	(97.0, 98.7)

5 Diskussion och vidare forskning

Resultaten visar att en enkel AR-modell överlag presterar bättre än de rekursiva modellerna när det kommer till MSE och MAE. Denna slutsats väcker frågan om det för detta syfte finns en poäng med att använda de mer avancerade metoderna. Generellt finns det inget egenvärde i en komplicerad modell, tvärtom brukar enklare modeller vara att föredra. Samtidigt är flexibiliteten i fönster- och forgetting factor-metoderna både en styrka och en svårighet. Med en annan specificering av sina respektive parametrar hade resultaten eventuellt blivit annorlunda.

Vid studerandet av modellernas sensitivitet och specificitet vid höga flöden finns tendenser till att forgetting factor-modellen presterar aningen bättre än AR(5)-modellen. Däremot överlappar konfidensintervallen, vilket gör att detta resultat inte går att säkerställa.

Syftet med uppsatsen är att skapa modeller för att kunna slå larm om förhöjda flöden. En fundering som har uppkommit är vad som är det viktigaste vad gäller höga flöden; är det viktigare att få en så exakt prediktion som möjligt eller att lyckas prediktera ett förhöjt flöde när det verkliga flödet är förhöjt? I slutändan är det denna avvägning som avgör om MSE och MAE eller sensitivitet ska prioriteras och därmed vilken modell som presterar bäst.

En annan viktig fråga är om den bästa modellen är tillräckligt bra. För att en modell ska vara bra krävs inte bara att den är bättre än de andra modellerna utan även att den är användbar. För endagsprediktioner fungerar samtliga modeller relativt bra, medan tredagarsprediktionernas sensitivitet däremot blir sämre för alla modeller. Vad som är en tillräckligt bra sensitivitet är svårt att svara på. Värdena på MSE och MAE ska minimeras för att modellen ska bli så bra som möjligt, men det finns ingen gräns för hur låga MSE- och MAE-värden som är tillräckligt bra.

Brytpunkten för förhöjda vattenflöden som används vid sensitivitetsberäkningen i tabell 5 och 7 är arbiträrt vald till 50 % av det högsta beräknade 100-årsflödet som MSB (2015) beräknade. Här hade ett närmare samarbete med de som faktiskt påverkas av vårfloden, och som jobbar med att förebygga översvämningarna, kunnat leda till en bättre vald brytpunkt som mer korrekt återspeglar verkligheten.

En viktig begränsning är att ingen av modellerna uppfyller modellantagandena. Hur ska prediktionen värderas om dess modell inte uppfyller dessa antaganden? I och med att sensitiviteten är baserad på prediktioner från tidsseriemodellerna är detta även ett problem för detta mått, om än inte lika stort. I denna uppsats användes logaritmerad odifferentierad data, som visade tendenser till icke-stationäritet. Modellerna hade eventuellt gått att förbättra genom att använda differentierad data, men på bekostnad av tolkningsbarhet under modelleringen.

I avsnitt 4.3 konstaterades att residualerna för samtliga modeller hade icke-konstant varians. Detta tyder på att GARCH-modellering skulle kunna fungera bra, vilket även konstaterades av Pedersen och Bengtsson (2016). GARCH-modellering går ut på att modellera en tidseries varians på ett liknande sätt som hur tidsserien i sig kan modelleras med ARIMA (se Cryer och Chan, 2008, kap. 12).

Något som kunde vara intressant är att studera resultatet av modellerna mer ingående. Går det att förbättra modellerna genom att studera och modellera residualerna och deras fördelning? Kan förändringar i de dynamiska modellernas ϕ -koefficienter användas för att prediktera en förändring i vattenflödet?

Eftersom vattenflödet följer säsongerna hade en säsong-ARIMA-modell (se Cry-

er och Chan, 2008) kunnat vara en tänkbar utgångspunkt. Det är dock svårt då årsberoendet är stokastiskt, det vill säga att vårfloden inte sker på samma dag eller ens samma vecka varje år, utan någon gång i slutet av våren. Ett alternativ hade kunnat vara att kombinera AR(5)-modellen med någon form av månadsmodell eller tröskelmodell, likt den tröskelmodell som Pedersen och Bengtsson (2016) anpassade, där det beroende på vilken del av året eller vilken del av processen flödet befinner sig i skulle kunna påverka hur modellen viktas prediktionen. Exempelvis skulle detta kunna göras så att tendenser för ökande flöden skulle viktas beroende på vilken del av året vi befinner oss i, så att en tendens till uppgång i april-juni skulle tolkas starkare än en tendens till uppgång under andra delar av året.

Myndigheten för samhällsskydd och beredskap har i en rapport med översvämningsskartering av Kalixälven tagit fram högsta 100-årsflöde och 200-årsflöde, där 100-årsflödet beräknades till 2080 m^3/s och 200-årsflödet till 2282 m^3/s (MSB, 2015). Eventuellt hade det varit möjligt att jämföra prediktionerna med dessa värden för att bedöma rimligheten.

I denna uppsats har endast data från mätstationen Räkthors använts. Den stationen ligger ganska långt ner i älven. Eftersom vattenflödet längre ner beror på vattenflödet högre upp, närmare fjällen, skulle det gå att undersöka en kombinerad modell där data från fler mätstationer används, exempelvis stationen Kaalasjärvi (se Figur 1 på sidan 4). En intressant vidareutveckling kunde även vara att testa hur bra dessa modeller fungerar på liknande älvar och hur mycket de eventuellt skulle behöva specificeras om.

Slutligen finns det en poäng i att diskutera rimligheten i att endast använda vattenflödet för att prediktera kommande nivåer av flödet. I verkligheten är flödet en del i en komplicerad meteorologisk process, där bland annat regnmängd och storlek på snölagret samspekar (SMHI, 2022). Att bara lyfta ut vattenflödet ur denna process och förvänta sig bra modeller är kanske inte det rimligaste. En mer komplex modell, skapad i samråd med en ämneskompetent naturvetare, där de ovan nämnda parametrarna inkluderas, borde rimligtvis generera bättre prognoser. Men denna form av tvärvetenskapligt arbete ligger utanför målet med denna uppsats.

6 Slutsatser

Den här uppsatsens huvudsakliga slutsats är att den enkla AR(5)-modellen är bättre än de mer avancerade rekursiva metoderna på att prediktera Kalixälvens vattenflöde. Alla modellerna hade hög prediktionsförmåga för $t + 1$ dag, både generellt vad gäller hur nära prediktionerna blev de verkliga värdena, men även hur hög sensitivitet och specificitet modellerna hade vid prediktioner av höga värden. Endast AR(5)-modellen hade en sensitivitet under 95 % (även om konfidensintervallets övre gräns visserligen är på 97.7 %). Samtliga modeller hade en specificitet på över 99 %.

Däremot var alla modeller något sämre på att prediktera $t + 3$ dagar framåt. Vad gäller sensitivitet och specificitet för höga prediktioner sjönk dessa mått för samtliga modeller jämfört med endagsprediktionerna. Forgetting factor-modellen hade högst sensitivitet, men dess konfidensintervall överlappade med de andra modellernas.

Samtliga modeller gav bra prediktioner och var svåra att skilja åt. Ingen av de dynamiska modellerna presterade signifikant bättre än den enkla AR(5)-modellen. Baserat på den här uppsatsens resultat finns inte ett behov av de mer avancerade modellerna vid modellering av Kalixälvens vattenflöde.

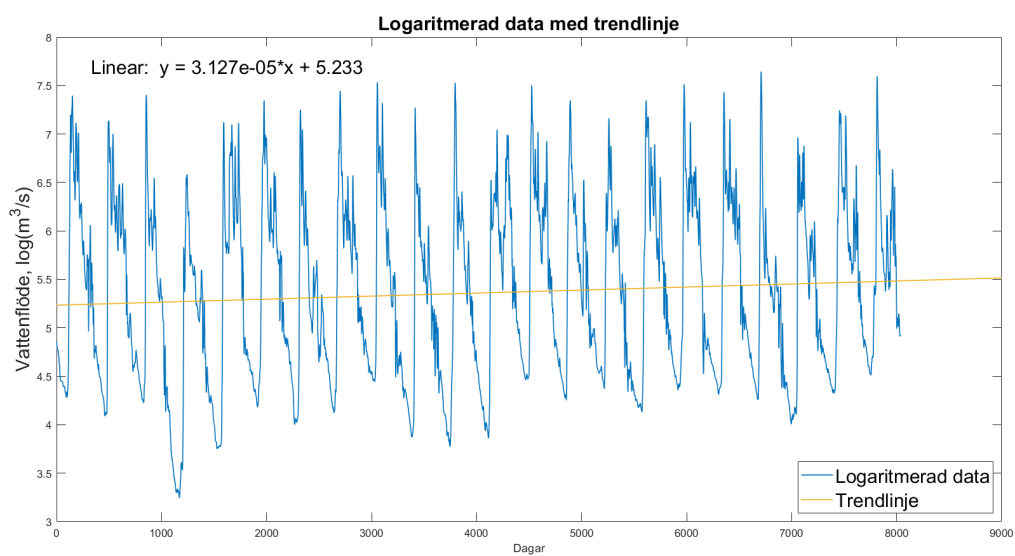
Referenser

- Alan Agresti. *Categorical data analysis*. John Wiley & Sons, 3 uppl., 2012.
- Jonathan D Cryer och Kung-Sik Chan. *Time series analysis: with applications in R*. Springer, 2 uppl., 2008.
- Trevor Hastie, Robert Tibshirani, och Jerome H Friedman. *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. Springer, 2 uppl., 2009.
- Andreas Jakobsson. *An Introduction to Time Series Modeling*. Studentlitteratur AB, 2 uppl., 2015.
- Lennart Ljung. Recursive Identification Algorithms. Technical Report LiTH-ISY-R, 2366, Linköping University, Department of Electrical Engineering, Sweden, 2001.
- MATLAB. *version 9.12.0.2039608 (R2022a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2022a.
- MATLAB. Recursive Algorithms for Online Parameter Estimation. <https://se.mathworks.com/help/ident/ug/algorithms-for-online-estimation.html>, 2022b. Hämtad: 2023-01-02.
- MATLAB. Estimate. <https://se.mathworks.com/help/econ/regarima.estimate.html>, 2022c. Hämtad: 2023-01-30.
- MATLAB. RecursiveAR. https://se.mathworks.com/help/ident/ref/recursivear.html?s_tid=doc_ta, 2022d. Hämtad: 2023-01-02.
- MSB. Översvänningskartering utmed Kalixälven. <https://www.msb.se/siteassets/dokument/amnesomraden/skydd-mot-olyckor-och-farliga-amnen/naturolyckor-och-klimat/oversvanning/oversvanningskartering-vattendrag/kalixalven-2015.pdf>, 2015. Hämtad: 2023-01-02.
- Dennis Pedersen och Henrik Bengtsson. Tidsseriemodellering av fyra oreglerade älvars vattenföring - En explorativ studie med GARCH- och Tröskelteknik, 2016. Kandidatuppsats.
- SMHI. Vårflod. <https://www.smhi.se/kunskapsbanken/hydrologi/vattenforing/varflod-1.7208>, 2022. Hämtad: 2023-01-02.
- SMHI. Vattenwebb. <https://vattenwebb.smhi.se/station/#>, u.å. Hämtad: 2023-01-02.
- Qinghua Zhang. Some implementation aspects of sliding window least squares algorithms. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(15):763–768, 2000.

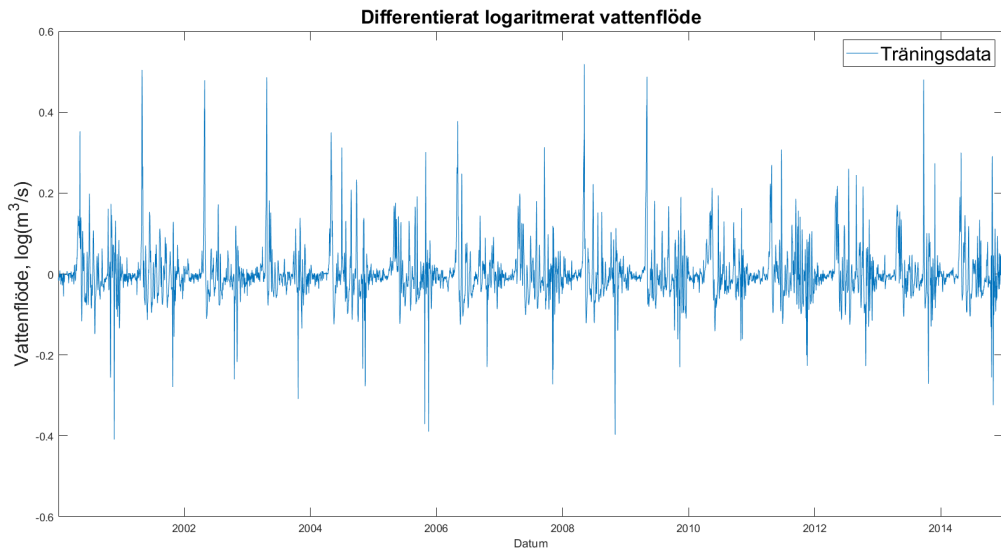
Appendix

Tabell 8: Årsmaxvärden i dygnsmedelflöde

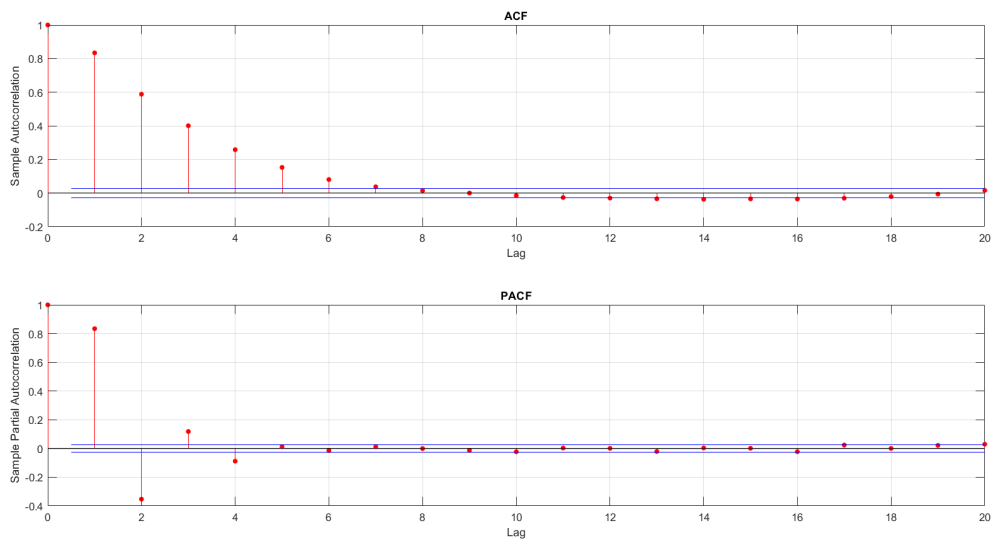
Datum	Flöde (m^3/s)
30 maj 2000	1630
12 maj 2001	1260
3 maj 2002	1640
26 maj 2003	723
10 maj 2004	1240
29 maj 2005	1550
11 maj 2005	1410
24 maj 2007	1710
12 maj 2008	1870
7 maj 2009	1440
23 maj 2010	1860
26 juni 2011	1150
21 maj 2012	1810
23 maj 2013	1550
26 maj 2014	1290
15 maj 2015	1550
11 maj 2016	1830
26 maj 2017	1690
14 maj 2018	2090
29 april 2019	1060
30 maj 2020	1400
23 maj 2021	1990



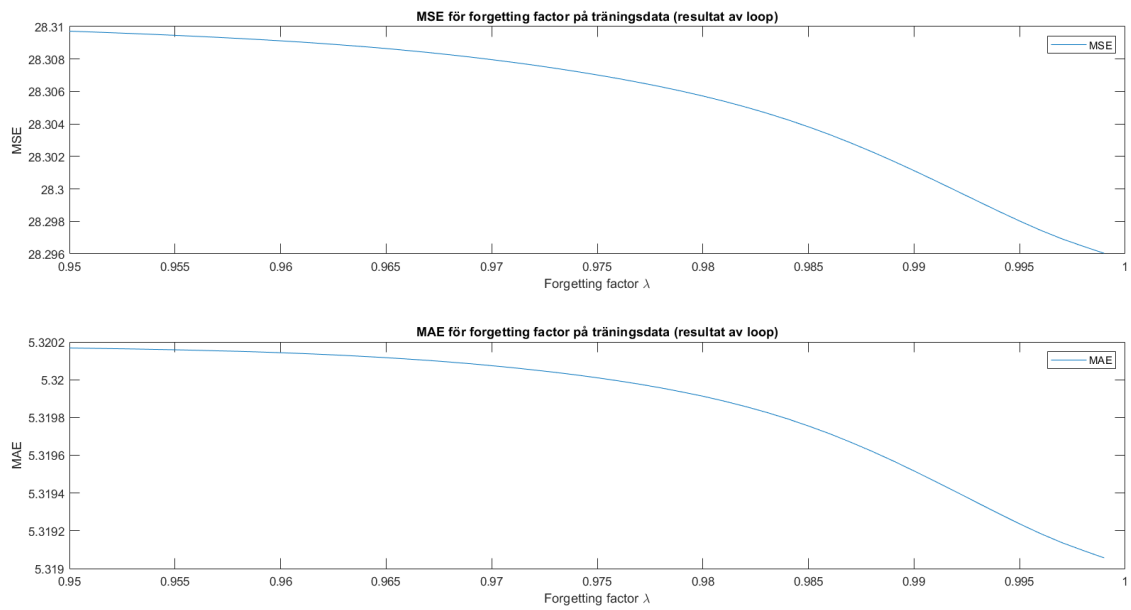
Figur 19: Logaritmerat vattenflöde med trendlinje



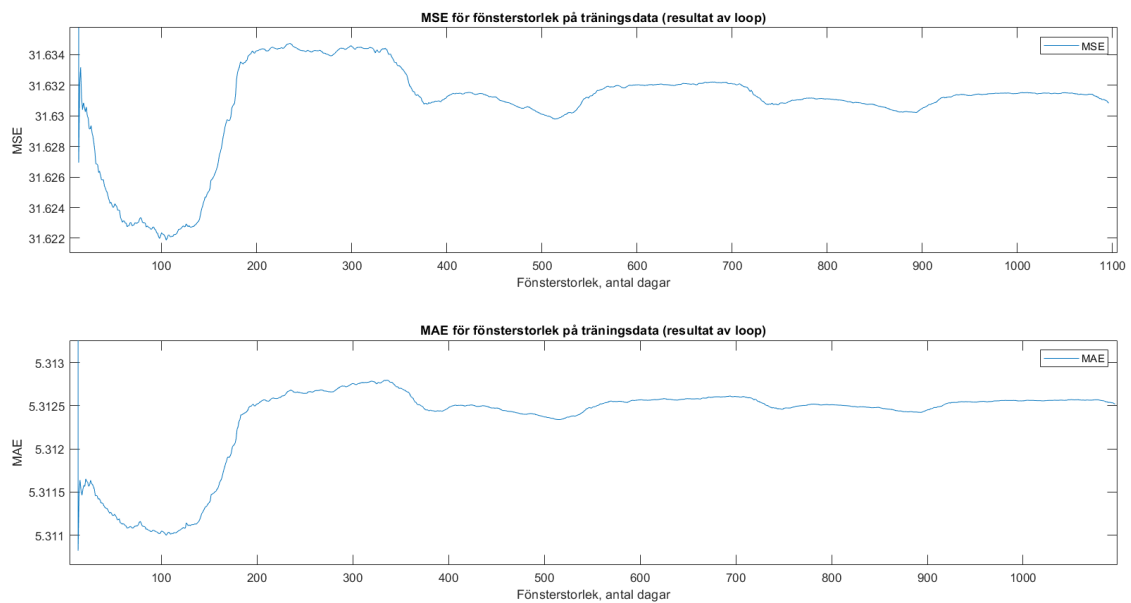
Figur 20: Logaritmerat och differentierat vattenflöde



Figur 21: ACF och PACF för logaritmerat och differentierat vattenflöde



Figur 22: MSE och MAE för forgetting factor på logaritmerad träningsdata enligt loop



Figur 23: MSE och MAE för fönsterstorlek på logaritmerad träningsdata enligt loop. Notera in-zoomning av y-axeln.