En fallstudie av muntlig kommunikation inom matematikundervisning i gymnasieskolan

Nawid Hatami & Adrian Öster

Examensarbete
2025:E22

Lunds universitet

Naturvetenskaplig fakultet
Matematikcentrum
Matematikdidaktik

Centrum Scientiarum Mathematicarum

En fallstudie av muntlig kommunikation inom matematikundervisning i gymnasieskolan

Abstract

This paper aims to analyse the oral communication patterns amongst upper secondary school students within the subject of math. To this end, Mohan's Knowledge Framework (1986) has been utilised, which seeks to sort knowledge into six different categories: three practical and three theoretical. The data collection consisted of observations made from lessons where the students solved math problems in groups, followed by stimulated recall interviews. The results suggest that students mainly tend to use practical language and that they also showcase similar language in the interviews but also highlight certain settings, such as presenting a problem in front of the whole class, where they communicate using more of the theoretical aspects of the Knowledge Framework. These findings provide insight for teachers who are looking to implement more oral mathematics in their lessons and how to possibly bring about more rich and theoretical discussions within student groups.

Keywords: Math Education, Secondary Education, Communication in Mathematics, Oral Mathematics, Group Discussions.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

FÖRORD

Idén till ämnet föddes under en lektion i en förberedelsekurs inför examensarbetet där båda skribenterna hade en idé att skriva om muntlig matematik och bestämde oss för att skriva tillsammans. Att skriva ett examensarbete i par kan vara utmanande. Krav ställs som inte bara påverkar dig själv och man är beroende av varandras prestation. Med tydliga arbetsfördelningar, arbetsuppgifter och deadlines har arbetet förts framåt. Frekvent kontakt har förts nästan dagligen online om tankar, idéer och frustration över arbetet. Det flöt på friktionslöst skribenterna emellan och vi är fortfarande vänner.

Vad som skrivits av vardera skribent har i största möjliga mån jämnt fördelats. Nawid hade huvudansvar för kapitlen 3.2, 4.1, 4.1.1, 4.1.5, 4.2, 5.1.2 och 5.1.5, samt programmeringen av whisper.ai. Adrian hade huvudansvar för kapitlen 2, 3.1, 4.1.4, 4.1.6, 5.1.1, 5.1.3 och 5.1.4 och för konstruktionen av uppgifterna som tilldelades eleverna. Resten har skrivits tillsammans. Även om skrivandet var fördelat har båda stämt av, korrekturläst och kommenterat i varandras bidrag.

Vi vill gemensamt tacka den undervisande läraren som ställde upp på fältarbetet och alla elever som deltog i studien och intervjuerna. Vi vill även ge ett särskilt stort tack till vår handledare Kristina Juter: tack för din vägledning, dina tips och din stöttning.

Jag (Adrian) vill tacka min sambo för förståelse för sena nätter och tidiga morgnar.

Jag (Nawid) tackar min partner för hennes stöd. Hon har hjälpt mig bolla idéer, upptäcka möjliga förbättringspotential och har varit med mig i hela denna process. Jag vill även tacka min bror och vår gemensamma vän som båda ställde upp i pilotstudien så att vi kunde förbättra våra intervjufrågor.

1 INTRODUKTION

Bland många matematiklärare och forskare i matematikdidaktik finns en tendens att prata om det som kallas för traditionella undervisningsmetoder. Xenofontos och Andrews (2023) diskuterar hur begreppet egentligen saknar en entydig definition och inramning, och att praktiker som använder sig av begreppet förutsätter att det finns en förutfattad mening om vad det ska betyda. De föreslår även att traditionellt kontra reformativt har blivit dikotomier i den didaktiska diskursen. Problemet med detta, menar Andrews, är att det simplifierar ett annars komplext fenomen. Å andra sidan diskuterar Berry och Sahlberg (2006) samt Çelik (2018) hur en traditionell undervisningsmetod karaktäriseras av att vara lärarcentrerad, där läraren står framför klassen och håller i en genomgång på en tavla. Vidare, beskriver Tularam och Machisella (2018) begreppet 'lärarlett' som fenomenet då inlärning sker genom att elever sitter och lyssnar på läraren. Sammanfattningsvis kan vi tolka 'traditionell matematikundervisning' på högstadiet och i gymnasieskolan som den lektionsstruktur som kännetecknas av att läraren håller i en genomgång på tavlan följt av att eleverna räknar individuellt i sina matteböcker.

Jameel och Ali (2016) fann att elever vittnade om lärare som hade genomgångar av matematiska begrepp som eleverna inte förstod. Forskarna hävdade att studenterna aktivt behövde engageras istället för att vara passiva lyssnare i klassrummet. Vergara et al. (2019) identifierade ett behov av engagerande lektioner i matematik; detta i förhållande till bristen på elevers motivation och arbete med hemläxor. Enligt tidigare forskning (Myers, 2000; Silverman & Thompson, 2008) har implementering av muntlig matematik i klassrummet påvisat ökat engagemang, motivation samt gjort ämnet mer lärorikt för eleverna. Dessutom såg Franke et al. (2007) ett behov av att elever ska få utöva sitt matematiska tänkande och diskutera problemlösning.

I och med att termen 'muntlig matematik' frekvent kommer att användas i detta examensarbete behöver innebörden förtydligas; med 'muntlig matematik' menar vi elevers kommunikation när de arbetar med problemlösning i grupp samt för helklasspresentationer. Det är inte enbart de verbala inslagen i deras matematiska resonemang, utan kombinationen av deras uttryck i både tal och skrift. I detta arbete kommer tyngdpunkten att läggas vid det verbala.

Problemlösning i grupp, eller formellt kooperativt lärande (Johnson & Johnson, 1999), är när elever, indelade i mindre grupper, under en viss tid får arbeta tillsammans mot ett gemensamt mål för att uppnå lärande genom att slutföra skoluppgifter. Kooperativt lärande kan användas i alla skolämnen och för alla olika typer av skoluppgifter och arbeten inklusive matematik. Ett annat begrepp, kollaborativt lärande, beskrivs som ett sätt för elever att komma samman och diskutera fram lösningar på komplexa problem (Le et al, 2018). De Hei et al. (2015) menar att elever får chansen att föra fram sina idéer från sina perspektiv i ett kollaborativt lärande. Därmed är det ett sätt för andra elever att integrera deras idéer och perspektiv till en gemensam uppfattning om uppgiften eller problemlösningen.

Muntliga presentationer i skolan grundar sig i Skolverkets (2025) formuleringar i kunskapskrav, syfte och centrala innehåll. I ämnet matematik ska eleverna "utveckla [...] Förmåga att kommunicera matematik muntligt, skriftligt och i handling" (Skolverket, 2025, s. 1) och i kunskapskraven ska eleverna kunna "föra [...] underbyggda matematiska resonemang och följer [...] matematiska resonemang" (Skolverket, 2025, s. 10–11). Muntliga matematiska presentationer ska alltså innehålla muntlig kommunikation och matematiska resonemang.

Muntliga presentationer i allmänhet sker genom att eleven, framför klassen, presenterar sitt ämne, uppgift eller problem via ett muntligt anförande som hen har förberett (Robillos, 2022; Suliman, 2022; Levin & Topping, 2006).

1.1 Syfte och problemformulering

Vad ovan forskning antytt, enligt vår mening, är att det finns ett behov av muntlig matematik i gymnasiet, både i relation till dess nytta och dess frånvaro. Hur elever faktiskt kommunicerar matematiskt i praktiken är dock mindre utforskat. För att bidra till ökad förståelse om detta vill vi därför undersöka hur elever kommunicerar matematiskt i gymnasieskolan.

Syftet med denna uppsats blir således att undersöka elevers kommunikationsmönster gällande muntlig matematik, samt hur elever kommunicerar matematiskt i olika muntliga lektionsaktiviteter. Mer specifikt, ska uppsatsen svara på följande frågor:

1. Hur använder elever muntlig kommunikation i gruppdiskussioner för att lösa matematiska problem? Hur kommunicerar de när de presenterar sina lösningar inför helklass?

2. Hur reflekterar gymnasieelever kring sina muntliga gruppdiskussioner och presentationer?

2 FORSKNINGSÖVERSIKT

2.1 BESKRIVNING AV SÖKNING

Sökning har gjorts i tidskriften NOMAD och databasen ERIC med sökorden collaborative learning, oral presentations, oral mathematics, oral presentation AND (mathematics OR math) AND mathematical reasoning, (mathematics OR math) AND Speaking assignment, oral AND communication AND (math OR mathematics), muntlig matematik, matematisk kommunikation. NOMAD är en tidskrift för matematikdidaktisk forskning i nordiska länder och har valts då forskning som publiceras där utförs i ett nordiskt perspektiv och har därför relevans för detta arbete. ERIC är en databas för forskning runt om i världen inom utbildningsvetenskap sätter arbetet i en global kontext och utökar sökträffar.

Chain searching metoden för källor (Lunds universitet, 2025) har använts för att hitta artiklar via de som har ansetts relevanta för detta arbete. Tips om artiklar från handledaren har även använts.

2.2 TIDIGARE STUDIER

Det har genomförts flera studier där elever får genomföra muntliga presentationer inom matematik. Elever i åldrarna runt elevernas åldrar i detta examensarbete har undersökts i andra studier. Olika upplägg på presentationer och vad som presenteras har lagts fram.

Malmström och Eriksson (2018) har undersökt en grupp förstaårs-universitetsstudenter. Studenterna blev indelade i grupper och varje vecka fick en grupp i uppgift att tillsammans sammanfatta lektioner under veckan och presentera dem på måndagen efter. Ramarna för undersökningen var gruppdiskussioner som leder till muntliga presentationer inför grupp. Studenterna fick skatta sin upplevda inlärning på en 5-gradig skala i ett formulär med olika frågor som exempelvis “*Working with blackboard presentations had an overall positive effect on my engagement with the mathematics contents of the course throughout the course.”*(s. 733) och “*The student summary presentation on Monday morning, covering last week’s lectures, helped my learning of mathematics contents.*” (s.734) vilka indikerade på positiva resultat på studenternas inställning av arbetssättet. Majoriteten av svaren var 4 eller 5 på samtliga frågor. Författarna menar att olika sätt att arbeta med kursinnehållet samt att studenterna behöver kunna vad de ska presentera på djupet gör att de tycker att de lär sig bättre.

En studie av Li (2014) har undersökt grupppresentationer utan fokus på grupparbete till skillnad från Malmström och Erikssons (2018) studie. En klass som läser *pre-calculus* (algebra och trigonometri), en förberedelsekurs man läser tidigt i sin utbildning på universitet och liknar gymnasiematematik, fick i grupper presentera teorier och satser inom ämnet. Till skillnad från Malmström (2018) var en del av uppgiften att presentera exempel inom områdena och inget fokus på sammanfattning. Elevers resultat på quiz och betyg jämfördes under 3 års tid i 3 olika årskullar före och efter studien och visade på bättre resultat och betyg efter studien. Notera att det inte finns en statistisk signifikans för detta resultat och är endast en direkt jämförelse av resultat på ett quiz före och ett efter studien samt betyg före och efter.

Även Vergara et al. (2019) har undersökt muntliga matematiska presentationer. De studerade elever i högstadieålder som fick förbereda en monter i grupp med fokus på en enda stor uppgift. Mer specifikt undersökte de elevernas problemlösning och deras framställningen av denna monter. Likt de andra undersökningarna indikerade även denna på positiva effekter på motivation och deltagande av implementeringen av studien. Elevernas ålder skiljer sig här från Malmström och Eriksson (2018) och Li (2014) ovan men är närmre åldrarna för eleverna i detta examensarbete.

Dorée et al. (2007) sätter matematiska dialoger i centrum för att utveckla god talförmåga. De menar att i ett större perspektiv är talförmåga på många sätt en förutsättning för att lyckas i skol och arbetslivet. Att lära sig att prata är minst lika viktigt som att prata för att lära sig. Detta menar de beror på att elever behöver öva på att förmedla tankar och diskutera problemlösning muntligt med andra. På så sätt blir de bättre på att använda muntliga talfärdigheter vid andra tillfällen man behöver det i livet. Exempelvis vid arbetsintervjuer och att kunna tala effektivt överhuvudtaget. Matematiska talövningar behöver inte vara avancerade men måste aktivt införas av läraren menar de. I artikeln visar de på att elever tycker att det hjälper deras inlärning att lyssna på andras framföranden och att göra sina egna. Att förklara för andra, ”learning by teaching” (Fiorella & Mayer, 2015, s. 151–163), vad man ska lära sig själv har bevisat positiv effekt på inlärning.

Grupparbeten har analyserats i Johnson och Johnsons (1999) artikel om kooperativt lärande. De kom fram till fem framgångsfaktorer för grupparbeten i ett klassrum. Den första (1) är positivt, ömsesidigt beroende. Det innebär att eleverna ser värdet i att arbeta som en grupp, och inser att gruppens bidrag är större än det enskilda bidraget. För att uppnå detta behöver gemensamma mål upprättas. Den andra (2) har att göra med individuellt ansvarstagande, och kan ökas genom att läraren på måfå ber en gruppmedlem att presentera en lösning inför sin grupp. Därefter kommer främjande interaktion (3), där eleverna interagerar med och stöttar varandra. Den fjärde framgångsfaktorn (4) är att gruppen har en viss social färdighet i vissa av sina medlemmar. Slutligen (5) är en framgångsfaktor gruppens självutvärderingsförmåga.

Huang et al. (2005) publicerade en studie om språkanvändning i matematiklektioner med Knowledge Framework (Mohan, 1986) som teoretisk utgångspunkt. Kort beskriver teorin hur kunskap kan delas in i sex olika aspekter, benämnt kunskapsstrukturer: tre praktiska och tre teoretiska (detta presenteras mer ingående i avsnitt 3.2). Det saknades tidigare i litteraturen publikationer som beskriver ett sätt att systematiskt analysera förhållandet mellan dialoger i klassrummet och matematiskt innehåll. Här presenteras en detaljerad metod för att analysera dialog i förhållande till kunskapsstrukturer inom matematik. I studien undersöktes högstadieelevers dialoger när de löste matematikproblem och presenterade dem inför klassen. Forskarna genomförde observationer, röstinspelningar och intervjuer för datainsamling. I framställningen av datan visar de explicit hur kodning av transkriptioner ser ut och det presenteras på ett tydligt och lättläst sätt. Målet med studien var att analysera lärarens respektive elevens dialog: hur de skiljer sig och hur de samspelar. Resultaten visade på att eleverna till största del använde sig av praktiska kunskapsstrukturer och att eleverna, även när läraren frammanade dem, misslyckades till största del att använda de teoretiska strukturerna. Mest teoretiska kunskapsstrukturer påvisades av eleverna när de presenterade inför helklass, och slutsatsen forskarna drog var att detta kan ha berott på att de satts i en lärarroll (Huang et al., 2005).

En annan studie av Gleason et al. (2017) har också applicerat Knowledge Framework (Mohan, 1986) i kontexten av matematikundervisning. De undersökte kunskapsstrukturerna *Val* och *Utvärdering* i diskurs som uppstod bland högstadieelever i bland annat matematik och vetenskap. De lät elever diskutera och genomföra problemlösning i lärarledda diskussioner. Resultaten visar på att eleverna mest använder kunskapsstrukturen *Val* när de diskuterar matematik vilket är i linje med resultaten i Huang et al. (2005). Även när läraren försöker framkalla den teoretiska kunskapsstrukturen *Utvärdering* har eleverna svårt för det. I de samhällsvetenskapliga ämnena framkommer däremot *Utvärdering* oftare. Forskarna menar att för att använda sig av den teoretiska kunskapsstrukturen *Utvärdering*, behöver elever behärska ämnet, känna sig självsäkra och ha ett utvecklat ordförråd; de behöver känna sig som experter.

En relation mellan diskurs, innehåll och lärande kan förklaras med hjälp av explicithet (Mohan, 1986), det vill säga detaljerna i beskrivningen. Till exempel kan en fläck på en matta beskrivas som *den, fläcken, fläcken nära bordet* (Cazden 1972, se Mohan, 1986). Explicitheten påverkas av dels mängden delad psykologisk kontexten av förkunskap och erfarenhet, dels av närvaron eller frånvaron av en fysisk kontext. Till exempel minskar explicitheten av kommunikationen om objektet i fråga befinner sig i miljön så att ett pekande räcker. När det inte finns en fysisk kontext närvarande, som till exempel i ett klassrum där innehållet är mer abstrakt, blir den psykologiska bakgrunden alltmer viktig (Mohan, 1986). Vidare applicerar Mohan explicithet till Knowledge Framework genom att betrakta ett barn som lär sig om världen. Barnets förståelse kommer från det specifika, fysiska och praktiska. För att övergå till det distinkta, generella och teoretiska behöver barnet lära sig meningen bakom det direkta, och detta genom alltmer explicit kommunikation. Utvecklingen av barnets förståelse av ett fenomen är alltså kopplat till diskursen om det fenomenet. För att ytterligare bygga på hur explicithet i diskursen tar form i skolsammanhang analyserar Mohan (1986) hur diskursen skiljer sig när en expert gör sin förståelse explicit till en annan expert jämfört med en nybörjare (svensk översättning av *learner*). När experten kommunicerar med en annan expert delar de samma förkunskap och diskursen blir mer nyanserad än när experten förmedlar sin kunskap till en nybörjare.

Nyhetseffekten (översättning av *The novelty effect*) (Marek & Wu, 2021; Iannone & Vondrová, 2024) beskriver effekten av att introducera någonting nytt för en grupp som redan har en annan etablerad aktivitet. Nyhetseffekten kan ge upphov till positiv inställning och ökad motivation i gruppen oavsett om implementeringen är bra eller inte utan bara för att den är ny. Marek och Wu (2021) menar att motivation på grund av nyhetseffekten stiger och är som högst efter 3-5 veckor avtar sedan. Iannone och Vondrová (2024) beaktar nyhetseffekten i sin studie för att motivera de slutsatser de drar kring elevers positiva inställning om muntor. Deras resultat indikerade att elever som redan använder muntliga inslag i sin matematikutbildning har positiv inställning till andra nya muntliga interventioner vilket alltså inte påverkas av nyhetseffekten i det fallet.

3 TEORI

3.1 SOCIOKULTURELLT PERSPEKTIV

Synen på lärande som en sociokulturell produkt fördes fram av Lev Vygotskij under tidigt 1900-tal (se Vygotskij, 1978). Han menade att social interaktion är grundläggande för kognitiv utveckling hos barn. Det bygger på att kunskap överförs mellan individer genom dialog och deras interaktion med vad Vygotskij beskriver som verktyg. Verktyg syftar till det människor använder för att utveckla och anpassa sitt intellekt till den kultur vi lever i. Dessa verktyg för intellektuell anpassning innefattar det muntliga och skriftliga språket, användning av tal och symboler och olika mnemoniska tekniker. Barn och unga använder verktygen i sin tankeverksamhet för problemlösning i deras uppväxt och formar sättet de interagerar med sin omvärld. När barn och ungdomar interagerar med andra medlemmar i samhället som besitter mer kunskap än de själva kan de ta till sig ny kunskap. *Externa hjälpmedel* och *Externa aktiviteter* (Vygotskij, 1978; Vygotskij 1962) är det människor får tillgång till när de genomgår lärprocesser i sociala sammanhang. Det kan vara en annan person med mer kunskap än en själv som hjälper en med uppgifter, att lyssna på någon som löser matematiska problem eller andra lärprocesser som sker i samband med någon/något annat än sitt eget sinne.

Vygotskij (1978) föreslår att för att få sann tillgång till information så att man förstår den måste man internalisera och rationalisera den. Internalisering av ny information sker i ett första steg genom socialt prat där vi talar med andra och lyssnar. Språket främjar högre mentala funktioner såsom problemlösning och abstrakt tänkande. Talet fungerar således i detta skede som ett verktyg för den som pratar att föra fram tankar och för den som lyssnar, att ta till sig dessa tankar. När vi sedan processar informationen och kan tänka på och om den använder vi det inre språket. Detta inre språk är våra tankar och inre dialog som vi använder vid mental problemlösning, för att komma på idéer och att kunna förstå flera perspektiv samtidigt. När vi sedan talar med andra om vad vi har konstruerat med vårt inre språk blir det sociala språket ett verktyg för att skapa en koppling mellan olika människors inre språk.

Det övergripande sociokulturella perspektivet beskriver hur social interaktion och verbal kommunikation kan tolkas som är intressant för detta examensarbete. För att möjliggöra en djupare analys av detta, kommer *Knowledge Framework* (Mohan, 1986) att användas som teori och ramverk.

3.2 KNOWLEDGE FRAMEWORK - ETT RAMVERK FÖR KUNSKAP

Eftersom arbetets syfte är att undersöka hur elever kommunicerar, kommer ramverket ‘Knowledge Framework’ (Mohan, 1986) användas. Knowledge Framework, hädanefter förkortat KF, delar in kunskap i sex så kallade kunskapsstrukturer (se Figur 1); tre av dem teoretiska och tre av dem praktiska (Mohan, 1990). Med denna kategorisering av kunskap kan elevernas kommunikation delas in i dessa kunskapsstrukturer vilket kan möjliggöra analys av mönster i elevers kommunikation.

Praktisk Kunskap	Beskrivning	Sekvens	Val
Teoretisk Kunskap	Klassifikation	Princip	Utvärdering

Figur 1: Knowledge Framework (Mohan, 1986; Mohan, 1990; Mohan, 2007).

3.2.1 Ramverkets ursprung

KF har sitt ursprung i lingvistikens Language Socialization Model (Mohan, 1990) samt Systemic Functional Linguistics (Mohan, 1986; Mohan, 2007; Gleason et al., 2017). Det upprättades inom sammanhanget för engelska som andraspråk, med syfte att bistå lärare i planering av material. Den föreslagna användningen var i sammanslagningen av språk och innehåll; att språkinlärningen sker genom ett specifikt innehåll (Mohan, 1986). Målet var att läraren skulle kunna utveckla alla sex kunskapsstrukturer, hädanefter förkortat KS, som i sin tur förde med sig ett bredare ordförråd.

De tre praktiska KS (*Beskrivning*, *Sekvens* och *Val*) ingår i vad Mohan (1986) benämner handlingssituationer (översättning av *action situations*). En handlingssituation kan till exempel vara en specifik händelse eller händelseförlopp. Språket som handlingssituationer för med sig är ofta kontextualiserad till den fysiska miljön som en händelse utspelar sig i. En dialog om en händelse eller en dialog under en händelse involverar inte bakomliggande förklaringar, utan kunskapen är begränsad till vad som är *objektivt beskrivbart*. Följande frågor är vägledande för att identifiera de tre aspekterna:

1. ***Beskrivning*****:** Vem? Vad? Var?
2. ***Sekvens*****:** Vad händer? Och efter det? Vilka processer/procedurer/rutiner finns?
3. ***Val*****:** Vilka val sker? Konflikter/alternativ/dilemman/beslut?

Synonyma begrepp till handlingssituationer är specifik kunskap, situationsanpassad kunskap och praktisk kunskap (Mohan, 1986). I denna uppsats använder vi benämningen praktisk kunskap, eftersom den illustrerar den rutinmässiga aspekten av matematik, som enligt vår mening kännetecknar en praktisk färdighet.

De tre teoretiska KS (*Klassifikation, Principer och Utvärdering*), som även benämns bakgrundskunskap (översättning av *background knowledge*), är en mer abstrakt form av kunskap jämfört med praktisk kunskap (Mohan, 1986). Den brukar kunna förklara *bakomliggande orsaker* till händelser och händelseförlopp. Till skillnad från handlingssituationer, saknar bakgrundskunskap fysisk kontext och är generaliserbar. Ett exempel på ett sammanhang som involverar bakgrundskunskap är en föreläsning, som inte alls är bunden till en specifik händelse, utan är generell kunskap. Följande frågor är vägledande för identifiering av dessa:

1. ***Klassifikation*****:** Vilka matematiska begrepp är tillämpliga? Hur är de relaterade till varandra?
2. ***Princip*****:** Vilka principer råder? (orsakssamband, medel-mål, metoder, tekniker, regler, normer, strategier)
3. ***Utvärdering*****:** Vilka värderingar och standarder? Vad är bra/dåligt? Finns det anledning att välja det ena över det andra? Vilka mål finns?

Likt ovan, har bakgrundskunskap synonyma termer: teoretisk kunskap och generell kunskap. I denna uppsats används benämningen teoretisk kunskap eftersom den belyser det abstrakta tänkandet bakom operationer.

3.2.2 Anpassning till matematik

I och med att KF konstruerades i andraspråksdidaktiska sammanhang är det rimligt att ställa sig frågan om huruvida den är applicerbar inom området matematisk kunskap och språkanvändning eller inte. Som svar på frågan om *om* det går, så har det framkommit från Mohan och Slater (2005) att KF kan utökas till flera discipliner:

> In our heuristic model, there is no requirement that classifications should be as clear-cut as taxonomies in science, and general implication relations need not involve cause-effect relations but can include rules and principles, as, for example, in mathematics. We believe our model can be applied more widely than science and history. How widely is a question for further research. (Mohan & Slater, 2005, s. 170)

Vidare, undersökte Huang et al. (2005) vilka KS som framkommer i lärares och elevers kommunikation inom matematik, och använde ramverket KF till det syftet. Där framgick även en bekräftelse av att KF, även om det primärt använts i andraspråkssammanhang, var en lämplig teori då den kopplade samman språk och ämneskunskap.

För att utöka förståelsen av hur KF kan appliceras i matematiksammanhang, sammanfattas de termer som tidigare studier (Mohan, 1990; Huang et al., 2005; Mohan & Slater, 2005; Gleason et al., 2017) använt som indikatorer för respektive KS, i Figur 2. För att ytterligare exemplifiera, har möjliga fraser som gymnasieelever kan säga under en matematiklektion kategoriserats i ramverket i Figur 3. Notera att rutan för *Beskrivning* i Figur 2 inte innehåller mycket. Detta beror på att matematik inte involverar *Beskrivande* kunskap i lika stor utsträckning som *Klassificerande* kunskap (Huang & Mullinix, 2002). Även i transkripten och kodningen från Huang et al. (2005) förekom inga exempel på situationer med *Beskrivande* kunskap.

	Praktisk	**Teoretisk**	
Beskrivning	• observationer • identifierar saklig information från uppgift	• definitioner • relationer • redogöra för olika former för funktioner • kategorisering • del-helhet	*Klassifikation*
Sekvens	• procedur • rutiner • steg för steg metod • nästa steg…	• strategier • orsak-effekt • medel-mål • motiveringar • implikationer • formler och regler • innebörd av koncept • tolka	*Princip*
Val	• identifiera alternativ till metod/lösning • dilemman • identifiera problem och begränsningar • problemlösning	• rättfärdiga • kritisera • utvärdera • preferens • uppskattning • diskussion av applicerbarhet	*Utvärdering*

Figur 2: Indikatorer för de sex olika kategorierna i KF.

Sammanfattningsvis kan praktisk kunskap inom matematiken ses som en kombination av att vara operativ, rutinmässig och ytlig. Där ingår inte bakomliggande förklaringar till varför olika steg genomförs. Teoretisk kunskap inom matematiken kännetecknas av rättfärdigande, motiverande och rigoröst språk, och används i större utsträckning av lärare än elever (Huang et al., 2005).

	Praktisk	**Teoretisk**	
Beskrivning	“Stängslet är 450 meter långt.”	“Detta är en andragradsfunktion.”	*Klassifikation*
Sekvens	“Sen tar vi roten ur…”	“För att hitta maximipunkten så behöver vi bestämma symmetrilinjen”	*Princip*
Val	“Vi kör pq-formeln.”	“Kan vi verkligen anta att…? Borde inte…?”	*Utvärdering*

Figur 3: Egna exempel på kategorisering av matematisk kunskap baserat på ordanvändning.

4 METOD

I detta avsnitt beskrivs de metoder som används i denna uppsats. För att få de betingelser som möjliggjorde studier av muntlig matematik, förbereddes ett upplägg i samverkan med en gymnasielärare i matematik, som diskuteras i den första delen. En del av dessa lektioner observerades därefter, följt av intervjuer med elever enligt metoden stimulated recall (Gass & Mackey, 2017). Dessa transkriberades och analyserades tematiskt enligt Braun och Clarkes (2006) sexstegsmodell med förutbestämda kategorier från Mohans KF (1986).

4.1 DATAINSAMLING

Datainsamlingen delas in i två delar: lektionsobservationer och intervjuer. De etiska överväganden som genomförts beskrivs inledningsvis. Därefter i avsnitt 4.1.2 beskrivs dels den övergripande planen för fältarbetet, dels en mer detaljerad lektionsplanering för de lektioner fältarbetet genomfördes. Under 4.1.3 redogörs hur vi arbetat med lektionsobservationer, och under 4.1.5 förklaras den metod som användes för vägledning av intervjuer samt hur vi arbetat med det.

4.1.1 Etiska överväganden

Denna studies etiska överväganden grundas på Vetenskapsrådets (2024) rapport om hur forskning bör bedrivas. Inför fältarbetet utdelades samtyckesblanketter till deltagande i studien. Där kunde elever välja om de ville delta, om de samtyckte till att bli inspelade samt om de ville ställa upp på inspelad intervju. Elevernas samtycke till inspelning var vägledande vid gruppindelningen, så att samtliga observationer och intervjuer kunde spelas in och transkriberades. Vi tog hänsyn till de elever som inte samtyckte till att bli inspelade och placerade oss på motsatt sida av klassrummen vid varje tillfälle så att de inte hördes.

Vid transkriberingen användes openai.whisper som paket till python, så att ingen molntjänst eller onlinetjänst utnyttjades. Efter att programmet transkriberat så korrekturläste vi allt och redigerade där det blev fel utifrån ljudfilerna. Ljudfilerna lagras på krypterad disk och kommer att raderas när examensarbetet är avslutat och godkänt.

Datan från ljudinspelningarna och transkriptionerna förvarades på krypterade diskar och eleverna gavs pseudonymer (se 4.1.5) för att skydda deras identiteter.

4.1.2 Upplägg

Syftet med upplägget var att skapa situationer där elever behövde kommunicera matematik muntligt. Själva upplägget studerades inte, men baserades ändå på Johnson och Johnsons (1999) artikel om kooperativt lärande, dels för att lektionen skulle bli så gynnsam som möjligt för eleverna, dels för att skapa mycket dialog. En förutsättning för detta var samarbetet med elevernas gymnasielärare. Tillsammans planerades tvåveckorsperioden (se Tabell 1), samt gruppindelningen. Gruppindelningen präglades alltså, förutom elevernas svar på samtyckesblanketten, på lärarens bedömning om hur dynamiken inom grupperna skulle vara.

Till största del bestod undervisningen av lärarens traditionella lektioner, men även våra så kallade *interventionslektioner*. Dessa 70 (80) - minuters lektioner bestod först av 50 (60) minuters grupparbeten med problemlösning på whiteboardtavlor, följt av 20 minuter av presentationer. Presentationerna genomfördes av en hel grupp och bestod av en lösning på en eller flera av uppgifterna. Totalt presenterade två grupper per interventionslektion. Klassen bestod av 31 elever, som delades in i nio grupper (om 3–4 elever per grupp). Anledningen till storleken var dels för att det bidrar till främjande av interaktionen (3) att ha mindre grupper (Johnson och Johnson, 1999), och dels av logistiska skäl.

Gruppdiskussionernas syfte var att skapa matematisk dialog mellan elever, som kunde observeras av oss. Presentationernas syfte var att observera elevernas kommunikation för att studera om det skiljde sig från kommunikationen vid gruppdiskussionerna.

Tabell 1: Strukturen för upplägget, som sträckte sig över två veckor. Lektionerna anges i kronologisk ordning, och inom parentes är lektionsåtgången i antal minuter angiven.

Logaritmer (75)	Logaritmer (70)	Exponentialekvationer (65)	Intervention (70)	Tillämpningar (70)
Problemlösning (65)	Intervention (80)	Geometri (70)	Geometri (65)	Intervention (70)

4.1.3 Lektionsobservationer

I enlighet med Denscombe (2018) genomfördes en deltagande observation, det vill säga att våra roller som observatörer var kända. Fördelen med detta var just möjligheten att dela ut samtyckesblanketten, vilket var ett etiskt beslut. En annan fördel med vårt deltagande i samtliga lektioner var att det gav oss mer kontext om eleverna vilket kunde fylla i luckor av information vid analysen och ge djupare förståelse.

Lektionsobservationerna spelades in så att de kunde transkriberas. Vid tillfällena satt vi med varsin grupp under hela lektionen med lagom avstånd från gruppen; inte så nära att gruppen känner sig iakttagen, och inte så långt bort att vi inte hör något. Vi förde även anteckningar enligt observationsguiden (se Bilaga 1: ObservationsguideBilaga 1: Observationsguide), med syfte att fånga upp det som inte verbaliserades (till exempel det eleverna skrev på tavlan och icke verbal kommunikation). Vi roterade mellan samtliga grupper vars alla medlemmar samtyckt till att bli inspelade, och valde vid varje tillfälle att sitta med den grupp som skulle presentera inför helklass i slutet på lektionen.

Under observationerna var vårt mål att undvika interaktion till så stor grad som möjligt, som förespråkas av Denscombe (2018). Även om eleverna många gånger fastnade, så undvek vi inte tystnaden då den ofta gav upphov till vidare diskussioner.

4.1.4 Observationsguide

Observationsguiden används som lathund för att precisera hur observationsanteckningarna under fältarbetet ska föras (se Bilaga 1). Då det är två observatörer som inte observerar samma grupp behövs en strukturerad guide för hur det ska genomföras och vad som ska antecknas för att det ska finnas en enhetlighet i anteckningarna.

Observationsanteckningarna syftar i huvudsak till att notera när och hur olika KS (Mohan, 1990) uppkommer under elevers diskussioner. Trots att den största delen av analysen sker med hjälp av ljudinspelningar är det fördelaktigt föra observationsanteckningar. Baserat på Denscombes (2018) *Observationsguide* och *Checklista för observationsscheman* för deltagande observation, har guiden utformats.

Den punkt i checklistan (Denscombe, 2018) som kan ifrågasättas var huruvida den deltagande observationen störde den naturliga miljön eller inte. Argumentet för att observatörernas närvaro inte påverkade datan avsevärt består dels i att den naturliga miljön redan var avsiktligt påverkad med interventionslektionerna, dels i att deras närvaro var något som eleverna redan tog för givet i och med att de deltagit på så många lektioner.

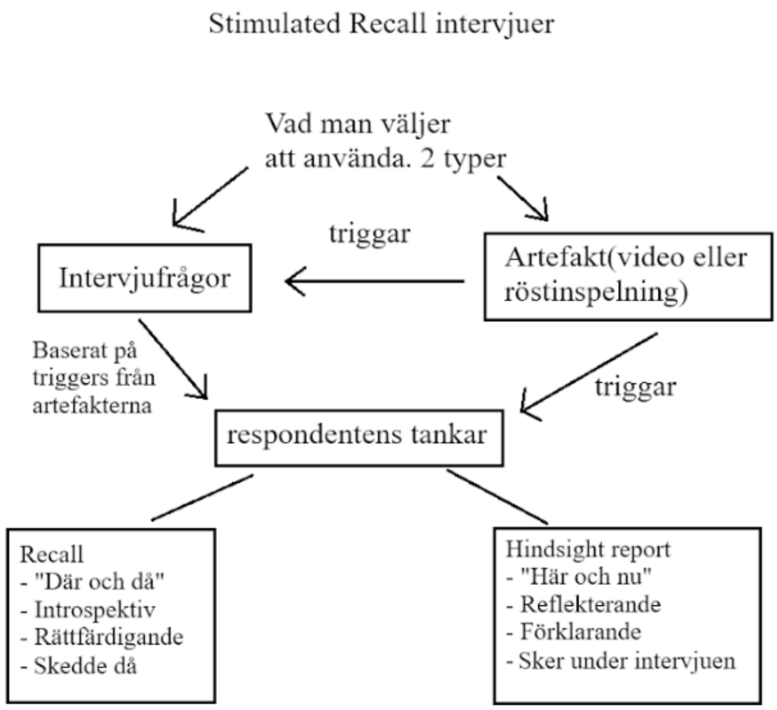
En del av syftet med anteckningarna är att komplettera ljudinspelningarna för kodning. För att sätta kodningen i kontext är det viktigt att anteckningar förs vid observationen. Skrift på tavlan, känslouttryck och kroppsspråk som ljudinspelningen inte fångar upp kan vara intressant för kontext vid analys. Mumlande och tystnad kan vara svårtolkat vid uppspelning och kan således behövas antecknas. Observationerna ger alltså möjlighet till djupare insikter i händelser och tankegångar hos elever under gruppdiskussionerna.

Tidsanteckningar vid intressanta händelser som direkt kan kopplas till KS i teorin (se 3.2) underlättar analysarbetet och skapandet av intervjufrågor då *stimulated recall* intervjuer (Gass & MacKey, 2017) ska föras (se 4.1.5). Efter avslutad observation ska intervjuerna förberedas genom att ta fram de klipp som är kopplade till intervjuerna utefter tidsanteckningarna under observationen.

4.1.5 Stimulated Recall intervjuer

Efter respektive lektionsobservation valdes en elev ut per skribent att intervjuas, totalt sex elever. Dessa fick pseudonymerna Signe, Erik, Oskar, Moa, Maja och Freja. Valet om vilka elever som skulle intervjuas var till viss del slumpmässigt - det spelade ingen roll vilken gruppmedlem det var så länge vårt totala urval var diversifierat med avseende på prestationsgrad. Eleverna som inte intervjuades men som är med i studien och som dyker upp i analysen får pseudonymerna Stina, Tyra, Axel, Thea, Lina, Elin, Rut, Karl, Olivia, Hedda, Ellinor, Lovisa, Ingrid och Märta.

Intervjufrågorna användes för att ge inblick i specifika situationer som uppstod i diskussioner och presentationer; för att ta reda på hur eleverna reflekterade kring händelserna, deras tankar och tillvägagångssätt. Till detta ändamål användes stimulated recall (Gass & MacKey, 2017) som metod. Under intervjuerna presenterades ett stimuli, i detta fall korta ljudklipp från observationen, för respondenten så att en utlösare (översättning av *trigger*) om en händelse väcks. Följt av detta ställdes frågor och respondenten fick svara fritt; intervjuerna var semistrukturerade. Två typer av svar förväntades inför dessa intervjuer: *Recall* och *Hindsight report* (Gass & MacKey, 2017). Recall definieras som förklaringar av händelsen och är introspektivt medan hindsight report syftar till reflektioner och förklarande svar, se Figur 4.



Figur 4: Typer av frågor och tankar man får tillgång till via stimulated recall. (Gass & MacKey, 2017, s. 45, original från Henderson & Tallman, 2006).

Tiden mellan händelsen, gruppdiskussionerna och presentationerna, och intervjuerna ska enligt Ericsson och Simon (1996, se Gass & MacKey, 2017) vara så kort som möjligt. Ett möjligt problem som kan uppstå om det går för lång tid är att respondenter fyller i luckor i minnet med information de tror att intervjuaren förväntar sig samt att de inte har tillgång till korttidsminnet längre. Därför skedde intervjuer löpande under studiens gång, i genomsnitt cirka ett dygn efter varje observationstillfälle.

Frågorna och de utvalda ljudklippen valdes utifrån vår intervjuguide (se Bilaga 2: Intervjuguide) som hade som syfte att svara på våra forskningsfrågor och även interaktioner av intresse med avseende på Mohans (1986) KF. De baserades även på våra fältanteckningar, som i sin tur följde vår observationsguide (se Bilaga 1: Observationsguide) som hade samma syfte som intervjuguiden. Frågorna kvalitetssäkrades ytterligare när vi genomförde en pilotstudie med en nyligen examinerad gymnasieelev. Den före detta eleven fick frågor att genomföra i dialog med en kompis, och han intervjuades dagen därpå. Hans responser analyserades och frågorna justerades som följd genom att stryka vissa frågor, lägga till vissa frågor (till exempel frågan ”vad var det som fick dig att inse…”, se Bilaga 2: Intervjuguide) och att koppla frågorna mer till KF och att omformulera dem så att det finns mindre utrymme för korta svar.

4.1.6 Intervjuguide

Intervjuguiden (se Bilaga 2) skapades för att lättare kunna forma frågor utefter vad som förväntades att observationerna skulle visa. Exempelfrågorna fanns som hjälp med att forma specifika frågor som skulle frammana reflektion om kunskapsstrukturerna i KF (Mohan, 1986). Exempelvis vilka matematiska argument som används, hur de gick till väga för att lösa uppgifter och hur deras diskussioner gick till i problemlösning.

På grund av att *stimulated recall intervjuer* (Gass & MacKey, 2017) skulle föras krävdes ett mer detaljerat förarbete med intervjuguiden för att snabbare kunna formulera frågor (se Bilaga

2). Inför intervjuerna förbereds alltså specifika ljudklipp från tidsstämplarna i observationsanteckningarna och frågor som syftar till att frammana *Recall* och *Hindsight report* hos eleverna om olika KS (Mohan, 1986) de använt. De *generella tipsen under intervjun* specificerade i Bilaga 2: Intervjuguide finns till för de som intervjuar att tänka på under intervjun för att föra den i enlighet med stimulated recall (Gass & MacKey, 2017).

4.2 TEMATISK ANALYS

Den tematiska analysen baseras på Braun och Clarkes (2006) sex-steg-modell, som består av

1. Bekantning med datan,
2. Generering av initiala koder,
3. Sökande efter teman,
4. Återblick av teman,
5. Definiera och namnge teman,
6. Producerande av rapport.

Bekantingen med datan (1) utgjordes av transkriberingen av ljudfilerna från intervjuerna, observationerna och elevpresentationerna. Därefter kodades och kategoriserades (2) datan med förutbestämda koder från Figur 2. Analysen var alltså en teoretisk tematisk analys (Braun & Clarke, 2006), eftersom KF redan var ett ramverk som konstruerats för att kategorisera kommunikation (Mohan, 1986). Steg 2 skedde alltså samtidigt i och med att förutbestämda koder tillhörde förutbestämda teman. Om en elev till exempel hänvisade till en formel under ett mellansteg så kodades det som ‘formler och regler’ och kategoriserades som *Princip*, i enlighet med KF (Mohan, 1986). Detta steg skedde gemensamt av båda skribenterna för att kalibrera med varandra och därmed säkerställa precision. För att ytterligare höja kvalitén på analysen jämfördes även extrakten och kodningen med den från Huang et al. (2005) som använt samma teori för att analysera elevers kommunikation.

Steg 2 upprepades en gång för att korrigera och kvalitetssäkra kategoriseringen. Därefter söktes teman och mönster i elevernas kommunikation (3), för att sedan konkretiseras (5) och representeras på ett tydligt sätt in i analysen (6). Den tematiska analysen följde alltså inte exakt Braun och Clarkes (2006) modell, men inspirerades av den, och den största anledningen var att analysen var starkt teoretiskt strukturerad kring KF (Mohan, 1986). Å andra sidan var vi öppna för att vissa extrakt inte kunde kategoriseras enligt KF, och de kodades fristående från teorin och övervägdes vid definierande av mönster och teman.

För att förenkla tematisk analys av data föreslog Peel (2020) även användandet av programmet HyperRESEARCH 3.7.3, baserat på hennes forskning genomförd 2017. Vid Lunds universitet är standarden NVivo. Vi använde dock inte några program för den tematiska analysen på grund av dess omfattning i relation till uppsatsens omfattning. Istället färgkodades extrakten utifrån kategorierna.

5 RESULTAT OCH ANALYS

I detta kapitel presenteras resultaten från studien, tematiserad inom ramen KF (Mohan, 1986) enligt metoden för tematisk analys från Braun och Clarke (2006). I avsnitt 5.1 analyseras lektionsobservationerna utifrån varje kategori separat. Tyngdpunkten av resultaten ligger i detta avsnitt. I avsnitt 5.2 sammanfattas de resultat från intervjuerna, som också analyseras utifrån KF (Mohan, 1986).

5.1 KATEGORIANALYS FRÅN OBSERVATION

De mönster som upptäckts inom alla kategorier sammanfattas under respektive kategoris underrubrik i detta avsnitt. Ibland sträcker sig ett interaktionsmönster över flera kategorier, och då presenteras det mönstret under en av de kategorierna. Notera dessutom att de mönster som presenteras inte är alla som uppvisats under datainsamlingen eftersom det hade varit för brett för att kunna genomföra en konkret analys. Istället presenteras dels de vanligaste mönstren, tillsammans ett specialfall under 5.1.5 Utvärdering. Resultaten presenteras i så kallade vinjetter, som döps till det eftersom de inte enbart består av transkript utan även av kodning. Elevernas namn har bytts ut mot pseudonym och skribenterna har fått beteckningarna A och N och är fetmarkerade.

5.1.1 Sekvens

När elever är osäkra på hur de ska gå vidare i en uppgift eller inte kan problemlösa använder de ofta den *Sekventiella* kunskapsstrukturen. Ett mönster vi observerat är att i uppgifter där eleverna är osäkra och väljer att testa sig fram följer *Sekvens* som karakteriseras av följande. När de utför beräkningar vid dessa tillfällen motiverar de inte sina mellansteg och de testar sig fram med olika siffror eller uttryck. De kan ställa upp ekvationer och utan vare sig plan eller mål börja förenkla och lösa. När de kommunicerar detta återger de helt enkelt vad de redan skriver på tavlan. I följande Vinjett 1 skriver Stina upp på tavlan de beräkningarna gruppen säger muntligt. Alla i gruppen är delaktiga i att försöka få fram värden som verkar stämma. De följer ingen plan i deras problemlösning, räknar sig fram och gör beräkningar med de siffror de får fram. Endast praktisk kommunikation om vilka beräkningar de gör och vilka värden de testar och får fram, sker här.

	Transkript	Kodning
Stina:	Om vi bara testar att x är 100. Så kommer det vara 100 gånger 250. Det blir ändå ganska stort.	Val: testa sig fram
Signe:	Du kan skriva typ så x är lika med 100 testa det. Så f av 100.	
Tyra:	Då är det 100	Sekvens: procedur
Stina:	Gånger 250	
Stina:	Ja, och det blir 250.	
Stina:	Exakt. 25 000	
Tyra:	Ja nu måste vi bara försöka såhär… om x är lite…	Val: testa sig fram
Signe:	Men ska vi testa om vi bara tar… alltså dela 225 på två?	
Signe:	Då ska vi ha 450 minus 2 gånger 12,5.	Sekvens: procedur
Stina:	Då blir det… 112,5	
Signe:	Så ta f 112,5	
Stina:	Och då ska vi ha 450 minus 2 gånger 112. Det är 225.	
Tyra:	Ja, det är det.	
Stina:	Ja okej, det är exakt. Och då ska vi ha 100…	
Stina:	Nej, 225 gånger...	
Stina:	Men x kan ju inte vara...	
Tyra:	Vad blir 450 minus...	
Signe:	Det blir 225.	
Tyra:	Kommer det? Ska det vara 225 där?	Val: dilemma
Stina:	Ja, 112,5.	Sekvens: procedur
Stina:	Det blir 25312,5	

Vinjett 1: Från lektionsobservation.

Är elever däremot mer säkra på sin problemlösning eller känner igen en viss typ av uppgift, sker *Sekvenser* ofta med rutinmässig prägel. När de utför beräkningar på problem som liknar sådana de gjort vid andra tillfällen motiverar de sällan mellansteg. De besitter en automatisering av problemlösning och behöver inte tänka på de steg de tar. Varje steg i beräkningarna följs av nästa förutbestämda steg ända fram till lösningen. Ett typexempel på detta är när elever använder PQ-formeln för att ta reda på nollställen i en andragradsfunktion. Vinjett 2 visar hur elever per automatik kan identifiera att det är PQ-formeln som ska appliceras och utför beräkningarna i den. Även hur *Sekvenser* kan efterfölja *Val*. Trots att de vid vissa ställen glömmer bort detaljer kommer de tillbaka till korrekt beräkning igen. När de applicerar PQ-formeln på andragradsfunktionen går de igenom beräkningarna med rutinmässiga steg och de använder formeln strikt praktiskt som ett verktyg för att få fram nollställen. För det första kommunicerar Axel i tredje raden att de inte ska sätta fel tecken på $\frac{p}{2}$. Ingen förklaring till varför följer och de andra accepterar rättelsen. Därefter går de vidare till att efter att ha satt in p i rottecknet till att först förenkla kvadrattermen till att sedan förlänga bråken till samma nämnare och sedan adderar ihop dem för att till slut ta roten ur. Allt i en bestämd ordning. De motiverar inte varför de räknar som de gör eller vilka värden de använder, vilket de inte behöver eftersom alla i gruppen besitter praktisk kunskap om hur PQ-formeln ska appliceras.

	Transkript	Kodning
Axel:	Jag känner direkt att detta blir en PQ formel.	Val
	……	
Thea:	Då blir det väl *x* är lika med minus en halv.	
Axel:	Nej *x* är lika med bara en halv för man byter ju tecken på P. Så *x* är lika med en halv.	
Oskar:	Så *y* är lika med.	
	……	
Axel:	*x* är lika med.	
Thea:	En halv. Plus minus en halv.	
	……	
Axel:	En halv kvadrat plus tre tredjedelar.	Sekvens: rutin, procedur
	……	
Axel:	Det blir tre andredelar och minus en halv.	
Oskar:	Plus minus en halv.	
Thea:	Det där är en fjärdedel.	
Oskar:	Det blir ett fyra.	
Axel:	Exakt.	
Thea:	Så det blir ett.	
Axel:	Plus tre genom fyra och det är roten ur också.	
Oskar:	Det blir en halv plus minus roten.	
	……	

Vinjett 2: Från lektionsobservation.

Slutligen, när elever har ett tydligt mål de vill nå men utan en plan, använder de kunskapsstrukturen *Sekvens* varvat med andra kunskapsstrukturer. De utför beräkningar och löser ekvationer allt eftersom de diskuterar problemlösning och vilka steg de vill ta. Vinjett 3 nedan visar hur *Val* ger upphov till *Sekvenser* av beräkningar följt av fler *Val* och *Klassifikationer*. Eleverna ställs inför en ekvation de ska balansera med logaritmer i termerna. De vet att de ska lösa ut x men är osäkra på hur de ska komma dit. Efter det att Lina och Elin har omskrivit uttrycket och flyttat runt termer stannar Elin upp och för fram logaritmering som problemlösningsmetod. Därefter följer Lina och Majas beräkning och balansering av ekvationen varpå Maja identifierar dilemmat med att dividera med x. Detta leder till fler procedurer som för gruppen närmare sitt mål att lösa ut x.

	Transkript	Kodning
Lina:	Ja, man kan väl göra om dem till den minus den.	Sekvens: procedur, steg för steg metod
Elin:	Okej och det är lika med fyra… plus 36	
Maja:	Hur kommer vi vidare härifrån?	
Elin:	Men om vi lägger det här runt lite. Om vi logaritmerar andra sidan också så får vi samma… Eller aha då [har vi kvar] fyran…	Klassifikation: definitioner, redogör för funktioner
Lina:	[Skriver på tavlan] lg $4x$ är lg $36x$ minus lg 3	
Maja:	Så kan du flytta ner x ut. Och då kan du, om du vill kan du flytta över lg 3 så att den blir positiv och sen subtraherar här.	Sekvens: procedur, steg för steg metod
Maja:	Eller så kan du bara ha lg 3 som negativ.	Val: problemlösning, dilemma
Lina:	Kan man inte bara dividera med x? Om man tar den [vägen]. Alltså dividera med x här.	
Maja:	Ja, men det kan man också göra... Fast då får du liksom inget x någonstans.	
Lina:	Ja, det är sant, det är inte jättesmart.	
Maja:	Eller alltså jag vet inte.	
Elin:	Har vi inte x-et kvar där.	Klassifikation
Lina:	Kan man göra så här?	
Maja:	Du kan skriva lg 3 där, där du skrev x lg.	Sekvens: procedur, steg för steg metod
Maja:	För att du vill ha det är positivt.	Val
Maja:	Och sen får du då skriva lika med… Tror jag, x lg 36.	Sekvens: procedur

Vinjett 3: Från lektionsobservation.

5.1.2 Val

Val innefattade flera aspekter. En uppenbar aspekt var att eleverna i regel inte motiverar sina val. Detta illustreras av Vinjett 4 nedan, där Rut och Karl precis har bestämt $f(x)$ och $g(x)$, och nu ska beräkna $f(g(x))$. Rut föreslår att de sätter in deras uttryck för $g(x)$ som variabeln i $f(x)$, men Karl funderar på om det skulle gå att förenkla i och med att uträkningarna ser ut att bli omständiga. Diskussionen fortsätter som ett dilemma som de till slut inte lyckas lösa, vilket inte heller går att lösa. Hela vinjetten belyser just aspekten av att även om eleverna diskuterar dilemmat, så motiverar de inte sina påståenden. När Karl säger “Nej, det kan vi inte göra”, till exempel, så ifrågasätter Rut heller inte detta.

Transkript		Kodning
Rut:	Då skriver vi in i det uttrycket?	Val: dilemma
Karl:	Ja, men vi kan förenkla… Nej, vi kan inte förenkla.	
Rut:	Nej.	
Karl:	Vi kan faktorisera det. Om vi vill göra det kortare. Men det blir inte kortare riktigt.	
Rut:	Nej. Vi kan nog skriva in det här.	
Karl:	Nej… Nej, det kan vi inte göra. Vad ska vi göra?	
……		
Karl:	Det här bara gör vi.	

Vinjett 4: Från lektionsobservation.

För att utveckla det spåret, belyser Vinjett 5 och Vinjett 6 en tydlig kontrast mellan gruppövningar och gruppresentationer vad gäller motivation bakom *Val*. Under gruppövningen i Vinjett 5 blir det särskilt tydligt när eleverna utesluter alternativ A, C och D utan någon som helst motivering. Detta följs dessutom av tveksamhet som mynnar ut i ett dilemma om de verkligen kan utesluta dessa. Vad som blir särskilt intressant blir hur samma grupp, när de senare presenterar, motiverar samtliga av sina *Val*, vilket visas i Vinjett 6. Den empiriska datan pekar över lag på att frekvensen av omotiverade *Val* är lägre under presentationerna.

	Transkript	Kodning
Olivia:	Högsta värdet är då 65… och lägsta är 7.	Klassifikation: begrepp
Hedda:	Ja, så det kan ju inte vara A.	
Olivia:	Och det kan inte vara D.	Val
Hedda:	Och det kan inte vara C.	
……		
Freja:	A kan det inte vara.	
Hedda:	Det kan inte vara D och det kan inte vara C… Så det är B eller E.	
Hedda:	Jo, vänta, det kan… Eller kan det vara dem?	Val: dilemma
Freja:	Fast det… Nej, fast det kan väl...	
Hedda:	Jo, det kan det ju i och för sig vara. Vänta, ta bort dem. För det är ju inte det sträcket… Det är ju det… Alla slutar ju på 65. Så det hjälper ju oss inte.	
Olivia:	Men det kan inte vara D, eftersom att de har någon som är 5 år.	Princip: motivering, innebörd av begrepp
Hedda:	Ja.	Val: dilemma
Freja:	Men det kan väl inte heller vara A.	
Olivia:	Det känns väldigt orimligt, men jag vet inte.	
Hedda:	Det kan inte vara D i alla fall.	

Vinjett 5: Från lektionsobservation.

	Transkript	Kodning
Freja:	Ja, det kan inte vara C eftersom det ligger mellan 15 och 30… vilket är orimligt.	Princip: innebörd av begrepp
Hedda:	För ingen gör det.	
Olivia:	Och minsta värdet är det här strecket [pekar på lådagrammets minimum].	Val
Olivia:	Och det kan inte vara D eftersom att minsta värdet här är fem. Och yngsta personen är sju…	Princip: motivering
Olivia:	Så det är inte D och det är inte C.	
Hedda:	Och det kan inte vara E och B. För att deras median ligger över 30. Och det kan det inte göra...	
A:	**Varför kan det inte göra det?**	
Hedda:	Vi ska [visa]... Om man raddar upp dem så kommer nummer 165 [ritar på tavlan]…	Sekvens: procedur
……		
Hedda:	165 kommer att ligga på mitten. Och det måste vara mellan 7 och 15.	
Ellinor:	Ja, för det är 300 stycken som är mellan 7 och 15.	
Hedda:	Och 165 ligger under 300.	
Ellinor:	Så det är A.	Princip: implikation

Vinjett 6: Från lektionsobservation.

Något annat som blev tydligt var hur eleverna kommunicerade när de inte visste hur de skulle ta sig framåt. Särskilt tydligt åskådliggörs detta av Vinjett 7. Här löser eleverna en relativt enkel problemlösningsuppgift med andragradsfunktioner, och har nyligen kommit överens om vad definitionsmängd innebär men fastnat i hur de tar sig vidare därefter. Vinjetten inleds med att Signe föreslår att utgå från ett litet x-värde att testa att sätta in i funktionen. Funktionsvärdet beräknas och tolkas därefter, och jämförs med vad som hade hänt om x-värdet varit ännu mindre, och Signe kommer fram till att det hade varit “en dålig hage då”. Eleverna fortsätter och generaliserar svaret till att det minsta x-värdet är precis över noll. Deras diskussion i helhet kodas som *Klassifikation* på grund av “del-helhet” aspekten - de utgår från isolerade mindre faktamängder som utvecklas till större samband - men detaljkodningen visar på att eleverna först testar sig fram med specifika värden, vilket kategoriseras som *Val* enligt Mohans (1986) modell.

	Transkript	Kodning	
Signe:	Vi säger att x är 1… En meter liksom. Testa det i den funktionen.	Val: testar sig fram	Klassifikation: del-helhet
Tyra:	Det vill säga att det är 450 minus… två.	Sekvens	
……			
Signe:	Och då är ju den här… 448… Ja. Och sen så kan vi ju testa… Då kan ju det största vara att den ska vara… 449. Alltså om vi säger att istället den här är en meter… Ja. Hur långa blir x då?	Val: testar sig fram	
……			
Signe:	Så om y då är 1… Eller, inte y. Men om den sidan är 1 så är ju… 449 delat på 2.		
Anna:	Ja men sen är också 1 delat på 2 också…	Sekvens	
……			
Signe:	Den här ska ju vara 450. Så om vi bara låtsas att den är 1 så vet vi att det är 449 som x ska vara. Och då bara tar vi 449 delat på 2.	Val: testar sig fram	
……			
Signe:	Men det kan ju vara mindre, men det är en dålig hage då.	Val: dilemma, problemlösning	
Tyra:	Sen kan man bara byta plats på dem. Så x egentligen bara får så…		
Signe:	Alltså om den här är en meter. Så är ju x så mycket. Men det kan ju vara mindre än en meter också.		
A:	**Vad händer om x är mindre än 1?**		
Tyra:	Om det är noll så...		
Signe:	Det blir en sjukt dålig hage.		
A:	**Vad är det minsta x kan vara?**		
Signe:	Det minsta det kan vara är väl precis över noll.		

Vinjett 7: Från lektionsobservation.

Ett annat sammanhang där elever tenderar att testa sig fram illustreras av Vinjett 8. Här har eleverna precis fått reda på att de fått fel svar på sin ekvation och försöker nu att rätta till det. Lina föreslår först att de byter tecken på en av deras logaritmer i förhoppningen om att det är ett slarvfel det rör sig om, vilket också förstärks av Maja och Elin. Mellan dialogerna (markerat "......") får de reda på att deras svar åter är fel, och nu funderar Elin på om de kan sätta ett minustecken någon annanstans i ekvationen för att fixa den. Slutligen diskuterar Maja och Elin om de kan använda sig av en logaritmlag istället. Vad som framkommer under gruppövningen är att eleverna tycker att logaritmer är "jättesvårt", vilket sammanfattar denna vinjett: eleverna tenderar att gissa sig fram även när de tycker att det är svårt.

Transkript		Kodning
Lina:	Är det negativ 2?	Val: testar sig fram
Maja:	Ja, det är det ju… så.	
Maja:	Men nu är det pos…	Val: dilemma
Lina:	Men ska det där vara fortfarande…	
Elin:	Ska det inte vara negativt där?	Val: testar sig fram
……		
Elin:	Är det inte bara ett minus… ska vi inte bara sätta ett minustecken?	Val: testar sig fram
……		
Elin:	Spelar det roll ifall vi tar minustecknet i exponenten eller i basen?	Val: testar sig fram Klassifikation: begrepp, definitioner
Maja:	Ja, det gör det ju för där blir det såhär decimaltal… och det blir negativt, fast det…nej, jag vet inte.	
Sara:	Varför kan man inte göra som du gjorde från början?	Val: dilemma
Maja:	Jag vet inte.	
Elin:	Men… lg… ska vi göra det här [där man] sätter ner x:et?	Val: testar sig fram
Maja:	Men det måste vara upphöjt i nånting då.	Okategoriserat: behov av formelblad
Maja:	Det kan jag inte i huvudet…	
Elin:	Upphöjt i nånting…	
……		
Elin:	Eller är det inte bara att sätta ner det x:et där?	Val: testar sig fram
Maja:	Jag fast då har vi bara kvar här, jag vet inte riktigt hur…	Val: dilemma
Elin:	Och det tar ut 10:an?	Val: problemlösning

Vinjett 8: Från lektionsobservation.

5.1.3 Klassifikation

Klassifikation är den teoretiska kunskapsstrukturen eleverna använder sig av mest. Kommunikationen syftar oftast till att föra fram definitioner gruppen kan använda sig av för att förenkla och omskriva uttryck, förtydliga steg de tar i beräkningar samt kategorisera uttryck i uppgifter och jämföra dem med allmänna uttryck. Ett mönster vi har observerat är att *Klassificerande* kommunikation ofta leder till kunskapsstrukturerna *Val* och *Sekvens* då det möjliggör problemlösning och procedurer på uttryck de behärskar. Vinjett 9 nedan exemplifierar hur elever använder definitionen av logaritmen för att förenkla ett uttryck med logaritmer. Gruppen har tidigare identifierat att de vill förenkla och skriva om lg $x^2 = \lg 36$ till $x^2 = 36$ men har inte kunnat bevisa mellansteget. Axel påbörjar problemlösningen genom att titta på definitionen av logaritmer och ser implikationen av att ha en logaritm i exponenten med basen 10. Med yttrandet "10 upphöjt till det tal 10 ska upphöjas till för att få y" förtydligar Axel definitionens implikation för hur de ska bevisa mellansteget. Implicit höjer de upp båda leden i exponenten med basen 10 och kan utföra omskrivningen för att sedan rutinmässigt med *Sekvenser* lösa ekvationen.

	Transkript	Kodning
Axel:	Logaritmen är ju det tal som 10 ska upphöjas till för att få y i det här fallet.	Klassifikation: definitioner
…….		
Axel:	Så vi har ju 10 upphöjt till det tal 10 ska upphöjas till för att få y.	
Axel:	Då blir det [lgx^2 och lg36] då y. Okej, och då kan vi skriva detta [lgx^2=lg 36] som x delat på 2 är 36.	Sekvens: steg för steg metod
Axel:	Precis så då är det…	
…...		
Axel:	36.	Sekvens: steg för steg metod
Thea:	Då är det jättelätt ju.	
Axel:	Ja, exakt, 36 gånger 2.	Sekvens: procedur, rutin
Thea:	Exakt.	
Axel:	Då är x 72.	

Vinjett 9: Från lektionsobservation.

Följande Vinjett 10 belyser en annan strategi för hur elever använder *Klassifikation* när de löser uppgifter samt att *Klassifikation* ofta leder till *Val*. Elever kategoriserar uttryck och jämför dem med allmänna definitioner för att lättare förstå uppgifter och hur de ska gå till väga för att lösa dem. Genom att notera att det är en exponentialfunktion de ska lösa i uppgiften vill de ställa upp den allmänna exponentiella funktionen $y = Ca^x$. Då har de en funktion att jämföra med när de ska applicera information från uppgiften. *Valen* de gör sker i direkt anslutning till att de ställer upp funktionen enligt definitionen. Exempelvis när Ingrid identifierar ursprungsvärdet som 37 grader och vill sätta in det i funktionen för C.

	Transkript	Kodning
Lovisa:	Ja det är ju formeln.	Val: dilemma, Klassifikation: kategorisering
Ingrid:	Men det står ju att avta exponentiellt… det här är ju ingen exponential…	
……		
Lovisa:	Men det är en exponentialfunktion då ska t vara i exponenten.	Klassifikation: definitioner, redogör för funktioner
Lovisa:	Men skriv…	
Moa:	Ska jag skriva klockan 15?	Val
Lovisa:	Nej, skriv y är lika med C.	
Moa:	C?	
Lovisa:	Ja, men bara så vi får exponentialfunktionen gånger a upphöjt med x.	Klassifikation: definitioner, redogör för funktioner
Lovisa:	Det här blir väl en exponential. x är exponentiell.	
Moa:	Ja och x är variabeln.	
Moa:	Och C är bara en konstant.	
……		
Ingrid:	Är inte C-värdet då 37 grader?	Val
Lovisa:	Vänta, varför det?	
Ingrid:	För att det är ursprungsvärdet.	Klassifikation: definitioner

Vinjett 10: Från lektionsobservation.

5.1.4 Princip

När elever använder sig av kunskapsstrukturen *Princip* i deras kommunikation är formler och regler vanligast förekommande. *Princip* uppkommer ofta i förhållande till *Sekvens*. Detta används i kommunikationen för att motivera mellansteg i deras problemlösning. De refererar ofta till matematiska formler, lagar och regler från deras formelblad. Vid alla tillfällen har *Princip* observerats. Särskilt vid uppgifter som handlar om potenser, logaritmer och geometri som kräver att elever använder matematiska lagar. Vid flera tillfällen refererar de direkt till dem. Vinjett 11 visar ett exempel av hur detta kan se ut. Eleven identifierar först att triangeln i uppgiften är likbent. Sedan kommunicerar eleven vad detta har för implikation för basvinklarna, att de är lika stora. Erik förtydligar och repeterar för Karl att det är principen om basvinklar i likbenta trianglar som används för att få fram ett uttryck för x. Med denna information om reglerna kring likbenta trianglar som Erik refererar till tillsammans med vetskapen om att trianglar har vinkelsumman 180° kan eleven ställa upp en ekvation som de kan lösa.

	Transkript	Kodning
Erik:	Så att. Vi vill ju ha att det här ska vara x. [den ena basvinkeln]	Val
Erik:	Då så vet vi automatiskt den här. [den andra basvinkeln]	Sekvens
Erik:	Eftersom att x −180 blir.	
Karl:	Ja.	
Erik:	Och då ser vi att eftersom att den här är likbent.	Klassifikation: redogör för formler
Karl:	Ja.	
Erik:	Så måste den här vinkeln också vara x	Princip: formler och regler, implikation
Erik:	Då så kan man se att den här är 180 minus $2x$. Och då så blir den här vinkeln. Eftersom att det här är 180. Så det blir 180 minus $2x$.	Sekvens
	……	
Erik:	Eftersom den är likbent så är den här sidan också $2x$.	Princip: formler och regler, implikation
Erik:	Då betyder det att 180 minus $4x$ är x.	Sekvens
Karl:	Vänta, vad sa du?	
Erik:	Att eftersom att hela den här är likbent så måste de här två vinklarna tillsammans vara $2x$.	Princip: formler och regler, implikation
Erik:	Eftersom att vi har $2x$ här så måste de här vara $2x$.	
……		
Erik:	Så 180 minus $4x$ är lika med x.	Sekvens

Vinjett 11: Från lektionsobservation.

Princip förekommer även om lagar och regler inte används. Då använder eleverna mer logiska resonemang och informell bevisföring men är fortfarande noggranna med mellansteg i sin problemlösning. Orsak-effekt och medel-mål samband, implikation och tolkningar används istället som strategi för att ta sig vidare i uppgifter. Detta exemplifieras med följande Vinjett 12. Ingrids *Val* att räkna ut symmetrilinjen påbörjar gruppens problemlösning. Lovisa bygger vidare på Ingrids idé och kommer på att de kan hitta extremvärdet för en andragradsfunktion om de använder symmetrilinjens ekvation. Trots att Lovisa och Moa därefter definierar funktionens nollställen använder de istället Ingrids plan att använda PQ-formeln till slut som medel för att få fram symmetrilinjen. Vinjett 11 nedan visar på hur elever kan kommunicera fram och tillbaka som strategi för att komma fram till problemlösning utan att, till att börja med, referera till formler och regler. Deras motiverande sker här, till skillnad från när de använder formel och regler, indirekt genom att de kommer fram till en strategi som verkar fungera.

	Transkript	Kodning	
Ingrid:	Ja, och då kan man räkna ut, vad heter det… symmetrilinjen.	Val, Klassifikation: begrepp	Princip: strategi
Märta:	Ja.		
Lovisa:	Ja, just det! Och så får man extremvärdet… eller minimi…	Princip: medel-mål	
Lovisa:	Jo, extremvärdet va?		
……			
Lovisa:	Vi har ett nollställe där.	Klassifikation	
Moa:	Och sen har vi ett nollställe vid 450.		
Ingrid:	Då skriver vi bara upp den där på PQ-formeln, för då får man upp vad symmetrilinjen är.	Princip: medel-mål, formler och regler	

Vinjett 12: Från lektionsobservation.

5.1.5 Utvärdering

Inom kategorin *Utvärdering,* som var den minst förekommande kunskapsstrukturen i elevernas kommunikation, bestod en av de vanligaste interaktionerna i en uttryckt kritik eller osäkerhet efter gruppens lösning som resulterade i ett rättfärdigande. Detta illustreras bland annat i Vinjett 13, som börjar med ett *Val* av Axel i hur en del av ett uttryck kan omskrivas, följt av att Thea hänvisar till formeln P3 (potenslag 3) som motivation. Därefter blir Axel själv osäker på om det var korrekt, och ifrågasätter deras omskrivning. Detta följs av att Axel rättfärdigar deras beslut genom att argumentera för formeln P3:s applicerbarhet och se formelns likhet med deras uttryck.

	Transkript	Kodning
Axel:	Vi kan ju uttrycka det där som 6 upphöjt till $2x$.	
Thea:	Kan man skriva att det är… Ja, exakt, det kan man göra.	Val
Thea:	Och då blir det 6 upphöjt till $2x$.	
Thea:	Eftersom P3 [potenslag 3].	Princip: motivering, formler och regler
Axel:	Blir det verkligen det?	
Thea:	Jag tror det.	Okategoriserat: osäkerhet
Axel:	För det här är ju ett tal inom parantes upphöjt till… jo, jo!	
Thea:	Inom parantes igen liksom.	Utvärdering: rättfärdigande
Axel:	Exakt.	

Vinjett 13: Från lektionsobservation.

Ett annat utdrag som innehåller liknande interaktion framgår i Vinjett 14. Eleverna har precis löst en uppgift och väljer att sammanfatta allt de gjort och detta val grundar sig i Elins uttryckta osäkerhet. Resultatet blir en nyanserad dialog med rättfärdigande och motivering till diverse formler och principer. Denna typ av interaktion skedde enbart en gång under hela datainsamlingen, men den ger värdefull insikt i att eleverna i detta fall kommunicerar med mer teoretiska kunskapsstrukturer när de utvärderar sin lösning i efterhand, i jämförelse med när de löser uppgiften. Vad som även här är, precis som i Vinjett 13, blir tydligt är hur elevernas rättfärdigande ofta sker i respons till osäkerhet eller kritik från antingen en annan elev eller sig själv.

	Transkript	Kodning
Elin:	Okej, hängde alla med här nu?	Okategoriserat: osäkerhet
Elin:	För jag vet knappt om jag hängde med själv.	
Lina:	Tror det?	
Elin:	Är det ens rätt?	
Lina :	Men kan man göra om detta till det? Kan man göra så?	Utvärdering: kritik, rättfärdigande
Elin:	Fyra… ja men det kan man ju…	Princip: formler och regler
Elin:	… för man kan addera exponenterna om det är samma bas.	
……		
Elin:	Och sen, vad har vi gjort här nu? Med detta steget.	Utvärdering
Maja:	Skriva lika bas, lika exponent och så får du...	Princip: formler och regler
Elin:	Lika bas, lika exponent, så vi stryker basen så…	
Elin:	Får man göra så?	Utvärdering: kritik, rättfärdigande
Maja:	…Lika bas lika exponent kan du bara skriva.	
Lina :	Jättesvårt.	
Elin:	… lika bas, lika exponent… vad betyder lika exponent?	Klassifikation: definition
Maja:	Det är att… Om basen är lika så är exponent samma, för så annars stämmer det inte, alltså…	Princip: formler och regler, orsak-effekt
Elin:	Ah, ja. Men finns det någon speciell regel som säger att man bara får ta bort basen sen?	
Maja:	Nej, men det är väl det vi räknat ut…	
Elin:	Okej, så man fattar att man får bara ta bort dem?	Utvärdering
Maja:	Ja men jag antar det, jag vet inte.	

Vinjett 14: Från lektionsobservation.

Ytterligare ett element som framkom inom kunskapsstrukturen *Utvärdering* är det som benämns framsynthet, och det belyses av Vinjett 15 nedan. Inom ramen för denna analys beskrivs det som en elevs vädjan om att göra eller inte göra ett visst val, i detta fall att kontrollera så att rötterna inte är falska. Denna vädjan grundar sig ofta antingen på att eleven tänker flera steg framåt (*Sekventiella* argument), eller på *Principer*. Anledningen till att den kategoriseras som *Utvärdering* är att det inte är uttrycket för *Principen* eller *Sekvensen* i sig som är tyngdpunkten i elevens kommunikation, utan snarare ett rättfärdigande för att göra eller inte göra ett visst *Val*. I Vinjett 15 baseras Axels yttranden om att inte testa lösningarna på principen att falska rötter enbart uppstår när ett led kvadreras, således har Axel rättfärdigat beslutet att inte göra det *Valet*.

	Transkript	Kodning
Oskar:	Så då är det plus minus 1.	
Thea:	Ja, perfekt.	Sekvens: procedur
Oskar:	Så då är det $x_1 = -\frac{1}{2}$.	
Thea:	Sen måste vi testa de här lösningarna.	Val
Axel:	Nej… vi har inte dragit roten ur någonting.	
Thea:	Det är sant. Är det bara då…?	Utvärdering: rättfärdigande
Axel:	Jag tror bara det är då man får falska rötter, men vi kan ju lika bra dubbelkolla	

Vinjett 15: Från lektionsobservation.

5.2 ELEVERNAS REFLEKTION EFTER OBSERVATIONSTILLFÄLLEN

Resultatet för stimulated recall-intervjuerna pekar i stora drag mot att eleverna inte reflekterade annorlunda mot hur de resonerade under lektionerna. För att illustrera detta, beakta Vinjett 16 från ett lektionstillfälle. Där föreslår Erik först att gruppen behöver beräkna sidovinkeln till w, benämner den x, och ger ett uttryck för de andra två vinklarna i samma triangel som vinkeln x, med hjälp av det faktum att triangeln är likbent. Notera, i Vinjett 17, hur Erik svarar med i princip identisk metod som i Vinjett 16, på en fråga som inte direkt berörde hans metod utan snarare vad som först fick honom att inse hur de skulle lösa uppgiften.

	Transkript	Kodning
Erik:	Så att. Vi vill ju ha att det här ska vara x.	Val: problemlösning
Erik:	För att om vi vet den här…då så vet vi automatiskt den här [pekar på sidovinkeln till x som de ska bestämma]. Eftersom att…	Sekvens
Rut:	… x minus 180 blir…	
Erik:	Och då ser vi att eftersom att den här är likbent.	
Rut:	Ja.	Princip: implikation
Erik:	Så måste den här vinkeln också vara x.	
Erik:	Då så kan man se att den här är 180 minus $2x$. Och då så blir den här vinkeln. Eftersom att det här är 180. Så det blir 180 minus $2x$.	Sekvens: procedur

Vinjett 16: Från lektionsobservation.

	Transkript	Kodning
A:	**Vad var det första som slog dig med den uppgiften som var så här, "aha, det här, så här ska vi göra"?**	
A:	**Det var nog du som började med att säga någonting om den vinkeln där.**	
Erik:	Ja, så för att ta reda på vinkeln w, då så måste man ju ha den andra vinkeln.	Princip: medel-mål
Erik:	Som jag då kallar för x, som tillsammans med w blir 180 grader.	Klassifikation: definition
Erik:	Så och då så märkte jag att eftersom att den triangeln då är liksidig…	
Erik:	… så kan man ta x på vinkeln DCB också.	Sekvens: procedur
Erik:	Och då så kan man ta då från CDB, den vinkeln, att den är 180 minus $2x$.	

Vinjett 17: Intervju med Erik.

Liknande fenomen illustreras av Vinjett 18. Under lektionen noterades hur Signe direkt såg kopplingen mellan att hitta ett intervall till att hitta intervallets övre och undre gräns. När frågan om hur hon såg kopplingen ställs under intervjun reflekterar hon heller inte över hur hon såg kopplingen, utan ser det som en självklarhet. Vad dessa två exempel illustrerar är hur elever inte tenderar att påvisa annorlunda resonemang under intervjuerna i jämförelse med lektionerna, med avseende på hur de löser uppgifter. De verkar enbart återge vad de gjorde under gruppdiskussionerna.

	Transkript	Kodning
A:	**Vad gör dig övertygad om att det är två värden ni ska ta reda på i intervallfrågan?**	
Signe:	Det måste vara 2 värden…	Val: problemlösning
Signe:	Vi har ju bara 450 att jobba med.	
Signe:	Jag blev direkt övertygad, för det är ju ett intervall; 2 värden att ta reda på.	Klassifikation

Vinjett 18: Intervju med Signe

Ett annat tema som upptäcktes under intervjuerna, vilket eleverna även gav uttryck för under lektionerna, var hur vissa elever tryckte på vikten av att referera till formler utifrån deras formelblad, för att lättare kunna övertyga sina klasskamrater. Detta illustreras bäst av Vinjett 19, där Maja uttrycker hur det är svårt och till och med obehagligt när kamraterna inte håller med, och hur detta hade kunnat lösas av att ha formelbladet för att kunna hänvisa. Att hänvisa till en formel har även enligt observationerna visat sig vara ett effektivt verktyg för att övertyga sina kamrater, som det framgår i Vinjett 20, där Linnéa motvilligt ger upp sin kritik av gruppens antaganden så fort Maja hänvisar till formelbladet.

	Transkript	Kodning
N:	**Får jag höra hur tankegången gick?**	
Maja:	Jag minns de potenslagarna och då tänker jag om det är samma bas… Då kan man ju ställa ut det som ett bråk också. Och då kan man sedan flytta den till det ledet och då då kan man få x ensamt.	Princip: formler, medel-mål
N:	**Och hur var det att kommunicera dessa tankar till Linnéa, då, i det här fallet?**	
Maja:	Alltså, ja… Jag vet inte riktigt. Det är ju lite så, när alla inte håller med så blir det lite obehagligt.	
Maja:	Men vi skulle ha haft med formelbladet för då tror jag att det hade varit lite lättare att… ja… "då behöver vi den här lagen", liksom.	Okategoriserat: behov av formelblad
N:	**Precis, för det är ju det du uttrycker här också att "jag kommer inte ihåg och har inte formelbladet".**	
……		
Maja:	Man minns ju inte vilken lag så man kan inte säga "aah den här lagen är det som vi kan använda", utan man måste säga att det finns någon lag som…	Okategoriserat: behov av formelblad

Vinjett 19: Intervju med Maja

	Transkript	Kodning
Linnéa:	Men det kan man göra, så ska vi flytta… kan man verkligen göra så? Ska inte den vara på andra sidan av likamedtecknet?	Utvärdering: kritiserande, rättfärdigande
Maja:	Mm…. nej… För jag tog det därifrån. [pekar på logaritmlag i formelbladet]	Princip: formler och regler
Linnéa:	Ah, är det en regel igen?	

Vinjett 20: Från lektionsobservation.

Av intervjuerna blir det tydligt att de använder formler och regler som praktiska verktyg för ett visst ändamål. De reflekterar ibland över hur de motiverar mellansteg via formler och regler men inte formlerna och reglerna i sig. Eleverna kan dem utantill och utför beräkningar på grund av dem automatiskt. Detta visas i följande Vinjett 21, där Moa har viss basal kunskap och förståelse för vad som måste stämma för att hon ska kunna applicera PQ-formeln. Hon vet att det inte ska vara någon konstant före x^2 men när hon sedan ska motivera varför syns det att hon saknar den djupa teoretiska kunskapen och förståelsen. Att ha positiva värden på termerna efter kvadrattermen spelar ingen roll för användbarheten för PQ-formeln. Yttrandet "*För det* *är så PQ-formeln fungerar*” är omfattningen av den motivation eleven kan återge och åskådliggör en grundlig och operationell förståelse för formeln.

	Transkript	Kodning
N:	**Hur kom du fram till att man ska dela på minus två? Funktionen var ju från början $y = -2\,x^2$.**	
Moa:	Plus.	
N:	**Precis. Plus 450 x.**	
Moa:	Ja.	
N:	**Dela på -2. Det är ju rätt. Men hur tänkte du?**	
Moa:	Enligt tvåformen. Ja men det blir enklare om man delar den här på två för då behöver man inte dela på två senare.	Sekvens: procedur, rutin
N:	**Mm.**	
Moa:	PQ fungerar ju liksom så. Man behöver ha x ensamt liksom. x upphöjt till 2.	Princip: formler och regler
N:	**Mm.**	
Moa:	Och sen då var den här också. Alltså man kunde också dela den på två. Så det gick ju. Sen minus. Det är för att jag vill hellre ha den här positiv.	Val
N:	**Varför vill du hellre ha den positiv för?**	
Moa:	Haha. För det är ju så PQ-formeln fungerar.	Princip: formler och regler
Moa:	Och det blir mer positiva tal då. För när man sen för in den här talet i PQ-formeln så blir den också positiv.	Sekvens: procedur, rutin

Vinjett 21: Intervju med Moa

Två elever som har använt metoden att testa sig fram, i uppgifter de inte visste hur de skulle lösa, reflekterade över det i intervjuerna men på olika sätt. Hur den första reflekterar stämmer väl överens med hur de resonerade under lektionen (se Vinjett 7). Signe, rättfärdigar metoden genom att återge skälet till att de testar olika värden. Hon menar på att för att ta reda på värdemängden för funktionen i uppgift 1 och *Sekventiellt* komma fram till att y måste vara större behöver de testa olika värden för x och jämföra dem med de y-värden som de får fram. Vidare visar hon på *Principiell* kunskap när hon reflekterar över vad olika x-värden ger för implikation för y-värdena. I slutet bekräftar Signe att de har arbetat praktiskt med uppgiften utan teori som de gjorde på lektionen. Se Vinjett 22 nedan.

	Transkript	Kodning
A:	**Vad är det när ni testar som får dig att inse att det måste vara > 0?**	
Signe:	Vi testar oss fram för att se vad de olika x-värdena kan vara och jämför med y-värden.	Val: att testa sig fram
	……	
A:	**Hjälpte mina tips på uppgift 1? [frågade vad som händer om en sida blir väldigt liten]**	
Signe:	Det blev tydligt eftersom då fick vi något att jobba utifrån. En extra instruktion. Börjar man tänka praktiskt kan man se att det inte kan vara 0	Princip: implikation

Vinjett 22: Intervju med Signe

Den andra eleven, Moa, bekräftar i Vinjett 23 det de gjorde under lektionen, att testa sig fram men reflekterar i efterhand däremot till skillnad från Signe att de kunde gått tillväga på ett annorlunda sätt. Hon kritiserar metoden att testa sig fram och påbörjar att ge ett alternativ. Det kodas som *Val* då hon identifierar ett alternativ till problemlösning. I kontexten av intervjun visar det på en förmåga att kritiskt reflektera över sitt matematiska tillvägagångssätt.

	Transkript	Kodning
N:	**Så, jag märkte basically att det gick ju framåt, men att du inte var med i diskussionen. Hur tänker du kring det?**	
Moa:	Jag försökte mer lyssna på det de ville ha att säga.	
Moa:	För det jag mest tänkte på då var att man skulle typ testa sig fram.	Val: att testa sig fram
Moa:	Men det finns ju enklare sätt. Som till exempel då den där funktionen som vi räknade ut.	Val: identifierar alternativ till problemlösning
N:	**Precis, det gör det lite lättare.**	

Vinjett 23: Intervju med Moa

6 DISKUSSION OCH SLUTSATS

Eleverna använde sig oftast av de praktiska KS *Sekvens* och *Val* i deras gruppdiskussioner. Detta stämmer överens med resultaten i Huang et al. (2005) som visar att de praktiska KS var vanligast förekommande. Eleverna kunde å ena sidan räkna sig fram rutinmässigt i uppgifter de var bekväma med som illustreras i Vinjett 2. En tolkning som angränsar till den som Huang et al. (2005) gör om att elever behöver förklara mellansteg i problemlösning när de förklarar för andra, är att eleverna känner att de inte behöver förklara steg de tar i problemlösning då alla redan vet principerna och stegen. När de å andra sidan var osäkra på uppgifter som syns i Vinjett 1 och Vinjett 3 användes *Sekvens* varvat med *Val* och *Klassifikation*. Detta resultat är unikt i förhållande till Huang et al. (2005) och Gleason et al. (2017) eftersom de inte undersökte samspel mellan praktiska KS. Det indikerar att eleverna känner att de behöver förtydliga och rättfärdiga sina steg mer inför gruppen, samt att eleverna behöver fokusera mer på problemlösning för att komma fram i uppgifter de är osäkra på.

Vidare använder eleverna *Sekvens* efter det att de har använt andra KS. Vinjett 2 och Vinjett 7 visar hur *Sekvens* kan följa *Val*. Vinjett 3 och Vinjett 9 visar hur *Sekvens* kan följa *Klassifikation*. Vinjett 11 och Vinjett 16 visar hur *Sekvens* kan följa *Princip*. En tolkning av det är att eleverna vill sätta upp en plan för vad de vill göra eller komma fram till innan de börjar utföra beräkningar. Detta stärks av Johnson och Johnsons (1999) resultat som pekar mot att om gruppen har ett gemensamt mål fungerar arbetet bättre. Vidare, att först använda en teoretisk KS som *Klassifikation* och *Princip* antyder att eleverna i de tillfällena känner sig som experter (Gleason et al., 2017), vilket i sin tur gör dem självsäkra nog att börja utföra beräkningar och procedurer. När elever får öva på att förklara sin teoretiska argumentation i matematik i förhållande till beräkningar och procedurer utövar de ”learning by teaching*”* (Fiorella & Mayer, 2015). De behöver sätta sig in i teorin och matematiken så att de behärskar det tillräckligt bra för att kunna förklara för andra vilket kan påverka deras inlärning positivt. Det gör i sin tur att de andra i gruppen kan vara delaktiga.

Ett annat resultat var att eleverna tenderade att använda mer teoretiskt språk och motivera fler av sina *Val* när de presenterade inför helklass jämfört med när de diskuterade i sina grupper, vilket illustrerades av transparensen mellan Vinjett 5 och Vinjett 6. Detta är även ett av de resultaten som redovisas av Huang et al. (2005). Likt deras tolkning, menar vi att det troligen kan attribueras till att eleverna tvingas in i en lärarroll som bär med sig normer kring språkbruk. Liknande resonemang förs av Gleason et al. (2017), som menar att en elev behöver känna sig som en expert för att använda sig av den mer teoretiska KS *Utvärdering* i jämförelse med *Val*. Detta passar även in med Mohans (1986) diskussion om hur explicitheten i kommunikationen karaktäriseras beroende på rollerna expert och nybörjare. Däremot ledde han inte en diskussion om hur en nybörjares kommunikation varierar med avseende på om mottagaren är en annan nybörjare eller en expert, men likheten som dras här är hur eleven tvingas in i rollen som expert. Vad detta kan sammanfattas till är att muntliga presentationer inom matematik kan ge positiva effekter för utvecklandet av elevers matematiska språkbruk. Vårt resultat om elevers tendens att använda sig av mer teoretiska kunskapsstrukturer, kombinerat med resultaten från Li (2014) som indikerar att muntliga presentationer ger positiv effekt för elevers resultat, kan antyda att elevers resultat förbättras eftersom de använder sig av mer teoretiska kunskapsstrukturer. Å ena sidan kan det också bero på att eleverna känner sig mer motiverade och delaktiga, som både Malmström (2018) och Vergara et al. (2019) fann. Vad som hade gett en mer nyanserad bild är å andra sidan en undersökning om det finns ett samspel mellan användandet av teoretiska kunskapsstrukturer och högre delaktighet, i relation till elevers resultat.

När elever använder sig av *Princip* för att förtydliga mellansteg är de beroende av det som står i deras formelblad. De är bekväma med att använda dem men har svårt för att själva komma fram till matematiska regler och principer som inte refererar till formelbladet. Detta göra att deras teoretiska resonemang inte blir utvecklade. Det kan bero på att de inte förväntas kunna argumentera formellt matematiskt och därför inte lärt sig det. Skolverket (2025) sätter inga krav på rigorös matematik i form av bevis av satser och regler i kunskapskraven. Eleverna behöver inte anta rollen som experter (Gleason et al. 2017) i detta avseende och riskerar att inte utveckla denna matematiska förmåga. Kanske behöver eleverna öva mer på matematiska dialoger för att utveckla deras talförmåga som beskrivs i Dorée et al. (2007). Vinjett 13 och Vinjett 20 belyser tydligt detta fenomen där eleverna använder regler från formelbladet utan någon rigorös matematisk förklaring till varför de fungerar. Eleverna kan använda sig av *Princip* på detta sätt utan större problem och reflekterar inte över det annorlunda i efterhand. I Vinjett 19 beskriver Maja hur deras problemlösning hade underlättats av att ha tillgång till formelbladet. Moa i Vinjett 20 menar att ”Det är bara så PQ-formeln fungerar” då hon lärt sig att praktiskt applicera formeln utan djupare förståelse för principerna bakom den.

När eleverna inte använder sig av formler och regler för att motivera sina steg som i Vinjett 3 och Vinjett 12 är de tydliga med vilka mellansteg de tar. Även om argumentationen inte är nyanserad går det att följa. Detta kan bero på att eleverna är måna om att de andra i gruppen ska hänga med i problemlösningen samt att de diskuterar mer med varandra om nästa steg. Det stämmer överens med resultaten i Vergara et al. (2019) där elevers delaktighet ökar om de får utöva muntlig matematik. Det kan även vara så att eleverna inte vet hur de annars skulle argumentera. Gleason et al. (2017) menar att för att kunna delta i avancerad diskussion behöver elever ett utvecklat ordförråd som eleverna kanske inte isåfall har.

Vidare är det värt att diskutera de mönster av *Utvärdering* som framkom i resultaten, mer specifikt hur osäkerhet ofta ledde till ett behov av ett rättfärdigande vilket kategoriseras som *Utvärdering* (Mohan, 1990). Vad som skiljer sig från Huang et al. (2005) resultat är att denna kunskapsstruktur dök upp trots att eleverna inte befann sig i någon form av lärarroll, eller att det initierades av en lärare som bad dem förtydliga ett mellansteg; det var initierat av dem själva. Troligen kan detta bero på skillnaden i bakgrund hos urvalet av eleverna i vår studie jämfört med den från Huang et al. (2005), eller så kan den bero på den minimala interaktion med lärare som eleverna hade i vår studie, som ledde till att eleverna inte kunde förlita sig på läraren att ta över utvärderingsarbetet (Gleason et al., 2017). I studien satt nämligen elevgrupperna som observerades med en av oss, och som följd hade varken vi eller gymnasieläraren någon interaktion med gruppen och eleverna tvingades för det mesta att lösa sina dilemman själva. Särskilt tydligt blev det i Vinjett 14, där eleverna själva var tvungna att avgöra om de gjort rätt eller inte, och återskapa alla mellansteg. Den diskussionen visade sig i förhållandevis mest omfattande utsträckning innehålla teoretiska kunskapsstrukturer.

Slutligen sammanfattas resultatet från intervjuerna, som inte indikerade någon skillnad i kommunikationsmönster när eleverna gavs tillfälle att fritt reflektera över sina gruppdiskussioner. Även om stimulated recall intervjuer inte skett i samband med KF inom matematik i tidigare forskning, så kan detta ändå jämföras med resultaten från studien av Huang et al. (2005) och Gleason et al. (2017) som fann att eleverna inte reflekterade avsevärt på sina beräkningar och ansatser i och med den begränsade användningen av teoretiska kunskapsstrukturer. Vi fann att eleverna kommunicerade likartat under intervjuerna som de gjorde i gruppdiskussionerna, vilket kan kopplas till att de i båda fallen befinner sig i en elevroll och förlitar sig åter på läraren att förklara (Gleason et al., 2017) och förstå (vår mening) elevens mellansteg. Kanske är det just i antagandet att motparten förstår som det minskade behovet av explicit kommunikation leder till en begräsning i teoretiska KS? Explicithet diskuteras av Mohan (1986) och är begränsad till överföringen av information från expert till expert samt expert till nybörjare. I klassrummet antog eleverna rollen som expert som redovisade inför en grupp med andra experter med samma förkunskap, men i intervjuerna antog eleverna en elevroll som kommunicerade sin förståelse till en expert med djupare förkunskap. Här befinner sig diskussionen vid ramverkets kant och ett behov av vidare studie inses.

För att anknyta resultaten till uppsatsens forskningsfrågor, så dras slutsatsen att

1. Eleverna använder till största del de praktiska aspekterna av KF under muntliga lektionsaktiviteter inom matematiken, med vissa undantagsfall som tenderar att framhäva mer teoretiskt språkbruk, såsom presentationer.
2. Eleverna reflekterar inte särskilt annorlunda kring sina gruppdiskussioner även när de promptas till det, utan återger ofta sina procedurer.

6.1 KVALITETSASPEKTER AV STUDIEN

Diskussionen om denna studies kvalitet kommer att ha Tracys (2010) kriterier för kvalitet i forskning som utgångspunkt. Vad framkommer från introduktionen är forskning inom detta fält relevant, särskilt i samband med att Skolverket (2025) fastställt att muntlig kommunikation av matematik är ett av de sex målen med ämnet. Våra forskningsfrågor kan bistå lärare vid planering av undervisningen, vilket även framgår i 6.2. I anslutning till forskningsfrågorna anser vi även att vi valde en relevant teori eftersom den delade upp elevernas diskurs i olika kategorier som enklare kunde analyseras, vilket även har gjorts tidigare. En möjlig begränsning är att ramverket är utformat baserat på andraspråksinlärning i engelska och är avsett att bistå lärare med formande av innehåll, men som vi diskuterat i avsnitt 123.2.2 har den även anpassats till att studera elevers språk inom matematik (Huang & Mullinix, 2002; Huang et al., 2005; Gleason et al., 2017; Mohan & Slater, 2005).

Vad gäller metod för datainsamling och resultat, i förhållande till den första forskningsfrågan, kan våra resultat anses överensstämmande med de resultat som framgick av både Huang et al. (2005) och Gleason et al. (2005) vilket stärker dess validitet (Tracy, 2010) då de hade liknande datainsamlingsmetod och resultat. Utöver gruppövningar så analyserade vi även elevernas presentationer och följde upp varje tillfälle med stimulated recall intervjuer så att vår data även kan anses vara triangulerad. Dessutom bidrar vår studie med ytterligare aspekter som mönster av när elever tenderade att använda sig av mer teoretiska aspekter i enlighet med KF. Dock, i och med att studier om elevers matematiska kommunikation i relation till KF inte är ett beforskat område, kan våra nya bidrag behöva studeras vidare.

I detta arbete lades tyngdpunkten vid det verbala inom muntlig matematik eftersom det möjliggjorde en mer djupgående analys; hade både tal och skrift analyserats så hade det även varit väsentligt att analysera tal och skrift separat men även samspelet mellan dem, vilket hade överstigit arbetets omfattning. Dessutom hade det uppstått svårigheter med datainsamling eftersom ljudinspelningar troligen inte hade räckt och behovet av videoinspelningar hade uppstått, vilket förmodligen hade varit svårare att få samtycke för.

En aspekt av lektionsobservationerna som kan ifrågasättas var det faktum att det var en deltagande observation (Denscombe, 2018) och att våra roller som observatörer vad kända och att eleverna skulle kunna känna sig iakttagna. För att minimera den risken befann vi oss på de flesta av elevernas lektioner under datainsamlingsperioden för att göra vår närvaro naturlig. Dessutom hade en av skribenterna redan goda relationer med eleverna, så att närvaron av den andra skribenten inte hade avsevärd effekt. Utöver det, så interagerade eleverna ibland med oss på ett sätt som indikerade att de inte kände sig iakttagna. Däremot medförde detta en annan problematik i att vi hade planerat minimal interaktion med eleverna för att inte påverka deras diskussioner. Oftast handlade dock dessa interaktioner om huruvida deras slutsvar varit korrekta, eller om ämnen som inte rörde uppgifterna (dessa brukade ske efter avslutade uppgifter). Ett fåtal gånger behövde vi initiera interaktion med grupperna när vi insett att de fastnat länge på en uppgift, och detta med syfte att eleverna fortfarande skulle bibehålla en god undervisning vilket därmed var ett etiskt försvarbart beslut.

En annan problematik som uppkom var kategoriseringen enligt KF under analysen. Ibland framkom tveksamheter om huruvida ett extrakt skulle kategoriseras inom ett eller flera KS i och med att ett extrakt kunde kodas med koder som tillhörde flera olika kategorier. I och med att vi var två skribenter och kodade flera gånger blev vår kategorisering mer konsekvent och rutinerad, och vi kunde inse när ett extrakt tillhörde fler kategorier. Så som vinjetterna är utformade går det att visa när en replik tillhör flera kategorier, vilket annars var omöjligt när vi använde oss av färgkodning initialt. Även värt att notera är att dessa typer av kollisioner inte skedde så frekvent. Ett liknande problem uppstod när vissa extrakt var vaga och inte stämde väl överens med något av KS. Vad som avgjorde hur de kategoriserade var kontexten bakom påståendet. Till exempel kodades den sista repliken i Vinjett 6 som *Princip: implikation*, även om det verkar som att den ska kodas som *Val*, och detta är i samband med raderna ovan där eleverna genomfört en uteslutningsmetod. Ibland har även en uttrycks osäkerhet kodats som *Okategoriserat: osäkerhet* och ibland som *Utvärdering: kritik*, och detta har också baserats på bakgrunden till de påståendena som den skribenten som var närvarande oftast hade en bättre uppfattning av. Till exempel kodades Elins osäkerhet som *kritik* i Vinjett 14 i och med att hon frågade ”Får man göra så?”, det vill säga att hon sökte ett rättfärdigande, medan Axel och Theas osäkerhet i Vinjett 13 kodades som *osäkerhet* eftersom de enbart var konfunderade över om de gjort rätt eller inte.

Det som inte gick som förväntat var datainsamlingen i relation till den andra forskningsfrågan om hur elever reflekterar kring sina tankegångar. Begränsningen där var dels i att våra intervjufrågor kan ha varit bristfälliga i att stimulera reflektion, dels i att eleverna, även när uppmuntrade till att reflektera, höll sig till de strategier för att lösa problem som de hade uppvisat under lektionsobservationerna. Även om resultatet diskuterades och analyserades, så har det inte lika hög validitet (Tracy, 2010) som de andra resultaten kopplade till den första forskningsfrågan.

En aspekt som inte fått plats i denna uppsats är nyhetseffekten (Marek & Wu, 2021; Iannone & Vondrová, 2024). Även om den ofta är kopplad till hur det påverkar resultat i kvantitativa studier så är det relevant att föra en diskussion om huruvida den påverkar elevernas deltagande och motivation i kvalitativa studier då eleverna tenderar att gilla det som är nytt och spännande.

I vår studie kan det ha stimulerat eleverna till att föra mer nyanserade dialoger än de annars kanske gjort, och för att stärka validiteten av våra resultat så hade det varit fördelaktigt att studera en grupp som har som vana att arbeta med muntlig matematik. Resultaten från Iannone och Vondrová (2024) indikerade å andra sidan att elever som redan använder muntliga inslag i sin matematikutbildning fortfarande har positiv inställning till andra nya muntliga interventioner. Detta talar för att en replikering av vår studie på en elevgrupp som är vana vid muntlig matematik troligen inte hade lett till en avsevärt större skillnad i resultat till skillnad från den elevgrupp vi studerade i och med att båda typerna av urvalsgrupper har visat sig vara positivt inställda till muntlig matematik.

6.2 KONSEKVENSER FÖR LÄRARPROFESSIONEN OCH UNDERVISNINGENS PRAKTIK

Resultaten visar att elever får tillfälle att öva sina matematiska kommunikativa färdigheter i gruppdiskussioner och presentationer. Lärare kan dra nytta av detta för att inkorporera läraktiviteter som låter elever utveckla matematisk kommunikation i undervisningen i form av gruppdiskussioner där elever får öva mestadels praktiska KS och muntliga presentationer inför helklass där elever får öva på mer teoretiska KS. Elever behöver öva mer på att använda välunderbyggda teoretiska resonemang i deras problemlösning när de diskuterar muntligt. Det innebär att lärare antagligen behöver lägga mer fokus på det i undervisningen. Dock finns det inte belägg för det i kunskapskraven för matematik i gymnasiet men utifrån ett allmänt matematik-kunskapsmässigt perspektiv för gymnasieelever kan det vara fördelaktigt.

Eleverna i denna studie motiverar ofta mellansteg på ett rutinmässigt sätt från vad de lärt sig i deras formelblad som hjälper deras problemlösningsförmåga. Lärare kan med fördel låta elever lära sig lagar, regler och satser på detta sätt utantill från ett formelblad. Som komplement kan läraren gå igenom bevis för dessa vilket skulle kunna fördjupa elevers förståelse av dem och gynna deras matematiska teoretiska förmåga.

För att öka elevers ordförråd och få dem att känna sig som experter inom matematik kan lärare inkorporera fler muntliga inslag i undervisningen. Då får elever öva på att använda sig av ett matematiskt språk och sina resonemangsförmågor. Huruvida det är mer fördelaktigt om läraren är aktiv eller passiv vid dessa diskussioner har inte studerats tillräckligt; både Huang et al. (2005) och Gleason et al. (2017) fann att lärarens försök till framammande av teoretiska KS inte varit framgångsrika, och i den senare studien noterades att läraren inte bör ta över utvärderingsarbetet.

Slutligen indikerar resultaten på att eleverna inte reflekterar särskilt nyanserat över sin problemlösning och matematiska resonemang. Det kan vara ett resultat av att elever inte funderar över sitt användande och sin förmåga av matematik. Att ha insikt om sin kunskap och förmåga kan vara positivt för vidareutveckling av den. Lärare kan således behöva uppmana mer reflektion kring matematik i undervisningen.

6.3 NYA STUDIER

Då detta examensarbete endast undersökte hur kommunikation ter sig i gruppdiskussion och presentationer kan andra utgångspunkter undersökas. Exempelvis hur upplägget som använts påverkar motivation, inställning eller betyg. Ett längre upplägg över en hel termin eller läsår och med fler elever hade kunnat göra större anspråk på resultat och slutsatser.

Det finns rum för fler studier som undersöker KF (Mohan, 1986) i förhållande till muntlig matematik idag i forskningen. Att undersöka implementeringen av upplägget presenterat i denna studie i exempelvis klasser med andra åldrar, i olika länder och elever med olika betygsnivå hade varit intressant.

Som nämnts tidigare upptäckte vi ett mönster av varierande explicithet hos eleverna i intervjuerna, gruppdiskussionerna och presentationerna. Dock var vi begränsade i teorin då den enbart sträckte sig till explicithet i interaktionen expert till expert och expert till nybörjare (Mohan, 1986). Luckan är alltså vad som händer när en elev redogör för sin lärare, det vill säga nybörjare-expert, samt hur explicitheten karaktäriseras när en elev diskuterar med en annan elev utan närvaron av en lärare. Antar nybörjarna expertroller i frånvaron av de faktiska expartnerna? Försämras nybörjarnas kommunikation när de förklarar för en expert?

Då vi sett att elever använder mestadels praktiska KS och använder teoretiska KS i varierande kvalitet vilket även stämmer överens med fynd i Huang et al. (2005) och Gleason et al. (2017) finns det behov av kvalitetssäkrade sätt för lärare att öka elevers teoretiska förmågor. Studier som testar olika arbetssätt och metoder kan hjälpa för detta ändamål.

LITTERATURFÖRTECKNING

Berry, J., & Sahlberg, P. (2006). Accountability affects the use of small group learning in school mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education, 11*(1), ss. 5-31.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), ss. 77-101. doi:https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Çelik, H. C. (2018). The Effects of Activity Based Learning on Sixth Grade Students' Achievement and Attitudes towards Mathematics Activities. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(5), ss. 1963-1977. doi:https://doi.org/10.29333/ejmste/85807

De Hei, M. S., Strijbos, J. W., Sjoer, E., & Admiraal, W. (2014). Collaborative learning in higher education: lecturers' practices and beliefs. *Research Papers in Education, 30*(2), ss. 232-247. doi:https://doi.org/10.1080/02671522.2014.908407

Denscombe, M. (2018). *Forskningshandboken: för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna* (4:e uppl.). (P. Larson, Övers.) Lund: Studentlitteratur.

Dorée, S., Jardine, R., & Linton, T. (2007). Let's Talk about Student Presentations. *PRIMUS, 17*(4), ss. 338-352. doi:https://doi.org/10.1080/10511970601131589

Fiorella, L., & Mayer, R. E. (2015). *Learning as a Generative Activity.* Cambridge: Cambridge University Press. doi:https://doi.org/10.1017/CBO9781107707085

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, ss. 225-256.

Gass, S. M., & Mackey, A. (2017). *Stimulated Recall Methodology in Applied Linguistics and L2 Research* (2:a uppl.). New York & London: Routledge Taylor & Francis Group.

Gleason, J., Berg, M., & Huang, J. (2017). Patterns of oral Choice and Evaluation across secondary content areas. *Language and Education, 32*(2), ss. 93-111. doi:https://doi.org/10.1080/09500782.2017.1391279

Huang, J., & Mullinix, B. B. (2002). *Content Literacy and Language Development across the Curriculum: What Do Core Curriculum Content Standards Have to Say?* Forskningsrapport, Miami, FL.

Huang, J., Normandia, B., & Greer, S. (2005). Communicating Mathematically: Comparison of Knowledge Structures in Teacher and Student Discourse in a Secondary Math Classroom. *Communication Education, 54*(1), ss. 34-51.

Iannone, P., & Vondrová, N. (2024). The Novelty Effect on Assessment Interventions: a Qualitative Replication Study of Oral Performance Assessment in Undergraduate Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*(2), ss. 375-397. doi:https://doi.org/10.1007/s10763-023-10368-9

Jameel, H. T., & Ali, H. H. (2016). Causes of Poor Performance in Mathematics from Teachers, Parents and Student's Perspective. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences, 15*(1), ss. 122-136.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1999). Making cooperative learning work. *Theory Into Practice, 38*(2), ss. 67-73. doi:https://doi.org/10.1080/00405849909543834

Le, H., Janssen, J., & Wubbels, T. (2018). Collaborative learning practices: Teacher and student perceived obstacles to effective student collaboration. *Cambridge Journal of Education, 48*(1), ss. 103-122. doi:https://doi.org/10.1080/0305764X.2016.1259389

Levin, P., & Topping, G. (2006). Perfect presentations! *British Journal of Educational Technology, 37*(6), ss. 983-983. doi:https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2006.00660_12.x

Li, Q. (2014). Integrated Student Group Presentation in Teaching Developmental Mathematics Courses. *European Journal of Educational Sciences, 1*(4), ss. 72-80.

Lunds univeristet. (2025). *Follow citations.* Hämtat från https://libguides.lub.lu.se/c.php?g=677619&p=4828782.

Malmström, H., & Eriksson, D. (2018). Communicating to Learn Multivariable Calculus: Students' Blackboard Presentations as a Means for Enhancing Mathematics Learning. *PRIMUS, 28*(8), ss. 726-741. doi:https://doi.org/10.1080/10511970.2017.1408045

Marek, M. W., & Wu, W.-C. V. (2021). Motivational Affordances of the Novelty Effect in TELL. *International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT)* (ss. 268-269). Tartu, Estland: IEEE. doi:https://doi.org/10.1109/ICALT52272.2021.00086

Mohan, B. A. (1986). *Language and Content.* Massachusetts: Addison-Wesley.

Mohan, B. A. (1990). LEP Students and the Integration of Language and Content: Knowledge Structures and Tasks. *Office of Bilingual Education and Minority Languages Affairs*, (ss. 1-49). Washington, DC.

Mohan, B. A. (2007). Knowledge Structures in Social Practices. i J. Cummins, & C. Davison, *International Handbook of English Language Teaching* (ss. 303-315). Cham: Springer.

Mohan, B. A., & Slater, T. (2005). A functional perspective on the critical 'theory/practice' relation in teaching language and science. *Linguistics and Education, 16*(2), ss. 151-172. doi:https://doi.org/10.1016/j.linged.2006.01.008

Myers, N. C. (2000). An oral-intensive abstract algebra course. *PRIMUS, 10*(3), ss. 193-205.

Peel, K. L. (2020). A beginner's guide to applied educational research using thematic analysis. *Practical Assessment, Research & Evaluation, 25*(1). doi:https://doi.org/10.7275/ryr5-k983

Rieber, R. W., & Carton, A. S. (Red.). (1987). *The collected works of L. S. Vygotsky: Problems of general psychology, including the volume Thinking and Speech.* Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1655-8

Robillos, R. J. (2022). Impact of LoilooNote digital mapping on university students' oral presentation skills and critical thinking dispositions. *International Journal of Instruction, 15*(2), ss. 501-518. doi:https://doi.org/10.29333/iji.2022.15228a

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), ss. 499-511.

Skolverket. (2025). *Matematik [Ämnesplan].* Stockholm. Hämtat från https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne-gy2025?url=907561864%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMATE%26version%3D1%26tos%3Dgy%26origin%3Dgy2025&sv.url=12.467ba den 12 Maj 2025

Suliman, M. M. (2022). Implications of Oral Presentation for Fostering Learners' Autonomy: A Case Study with Saudi Learners Majoring in English as a Foreign Language. *Journal of English Teaching, 8*(1), ss. 107-118. doi:https://doi.org/10.33541/jet.v8i1.3293

Tracy, S. J. (2010). Qualitative quality: Eight a"big-tent" criteria for excellent qualitative research. *Qualitative Inquiry, 16*(10). doi:https://doi.org/10.1177/1077800410383121

Tularam, G. A., & Machisella, P. (2018). Traditional vs Non-Traditional Teaching and Learning Strategies - The Case of E-Learning! *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 19*(1), ss. 129-158. doi:https://doi.org/10.4256/ijmtl.v19i1.21

Vergara, D., Lorenzo, M., & Fernández, M. L. (2019). Enhancing Student Motivation in Secondary School Mathematics Courses: A Methodological Approach. *Education Sciences, 9*(2), ss. 1-11. doi:https://doi.org/10.3390/educsci9020083

Vetenskapsrådet. (2024). *God forskninssed.*

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language.* MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Red.) Harvard University Press.

Xenofontos, C., & Andrews, P. (2023). The experiential construction of mathematics teacher identity and the impact of early mathematical failure. *Sec. Teacher Education, 8*. doi:https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1158973

Bilagor

Bilaga 1: Observationsguide

Vi samlar data i observationerna med ljudinspelningar och fältanteckningar.

Steg för steg guiden:

1. Kontrollera att ljudinspelningsapparaten funkar, och att ljudupptagningen är bra. Gör en testinspelning.
2. När du börjar: anteckna eller prata i mikrofonen den exakta tiden du börjar spela in.
3. Vi placerar oss tillräckligt nära en grupp för att höra vad alla medlemmar säger. Eftersom vi gör en deltagande observation så behöver vi inte tänka för mycket på att vara diskreta i vår placering, men vi ska ändå minimera interaktionen för att låta deras naturliga interaktion få mer plats.
4. Spendera hela lektionen vid samma grupp
5. När vi observerar något av intresse som kan kopplas till kategorierna i teorin, anteckna antingen tid i förhållande till klocka eller i kontext av dialog som ljudinspelningen fångat upp. Anteckna vad som sägs och vilken KS det kan kopplas till. Försök att vara lite diskret i antecknandet, behåll gärna ögonkontakt/titta upp så att det inte känns påträngande.

Exempel på icke verbal kommunikation av intresse:

- Skrift på tavla/skrivbok
- Kroppsspråk
- Mumlande
- Tveksamhet

Tänk, under observationstillfället, på möjliga intervjufrågor utifrån intervjuguide

- Gruppdiskussioner: uppmärksam på kategorier av intresse enligt intervjuguiden
- På presentationerna: utgå från intervjuguiden

BILAGA 2: INTERVJUGUIDE

Frågor om gruppdiskussionerna:

1. Uppstart. Vad tyckte de? Vad tycker du om gruppdiskussioner? (syfte: mjuka upp)
    a. "Vi har observerat dig och dina klasskompisar och sett hur ni diskuterat men vi vet ju inte vad du tänkte. I denna intervju vill vi veta lite mer om hur du tänkte i de olika situationerna."
    b. Tyckte du uppgiften var lätt eller svår?

Övergripande: koppla till intressant observation om vilka KS, formler, metoder, teorier eller argument de använt. Frågan ska vara vad de <u>tänkte</u> under den händelsen, samt hur de <u>tänker</u> kring det.

Inför varje fråga spelar vi upp ljudklippet vi förberett för eleven. Eleven får pausa och kommentera sina tankar under hela klippet. Vi kompletterar med följande exempelfrågor om det behövs:

Exempelfrågor:

2. Koppla till när en elev övertygade en annan elev.
    a. Hur övertygade du X om att…?
    b. Vad i ditt argument var det som övertygade X?

3. Koppla till elev som inte lyckades med att övertyga.
    a. Vad hände när du försökte övertyga X om att…?
    b. Varför tror du att X inte blev övertygad?
    c. När du fick förklara igen efter en fråga, vad gjorde du annorlunda andra gången? Vad i ditt argument var det som var mer övertygande?
    d. Blev du övertygad av X motargument? Varför (inte)?

4. Skulle du vilja göra något annorlunda nu när du lyssnar på inspelningen?

5. Koppla till elev som zonade ut eller inte förstår. (note: känslor, försiktig)
    a. Vad hände under uppgift 6? Följdfråga kopplas till deras svar.
        i. "fattade ingenting" → vad tyckte du om deras förklaringar?
        ii. "de tappade mig halvvägs" → "Vad var det som gjorde att du tappade tråden?" → vad tyckte du om deras förklaringar?
        iii. "svårt att uttrycka sig" → Varför tycker du det? - kan vara många olika anledningar och inte alla är relevanta för arbetet.
        iv. Ointresse - ointressant för studien
        v. "överväldigad/kan inte ta plats/introvert/talånges" → har inte att göra med studien. spännande för annan studie

6. Koppla till en elev som blev tveksam.
    a. Hur gick dina tankegångar när du funderade kring…(om man kan köra topptriangelsatsen osv)?
    b. Vad gjorde att du tvekade?

7. Koppla till en elev som i princip löste en uppgift själv, eller uppgift som alla tyckte var enkla och kommunikationen var minimal.
    a. Hur var det att lösa uppgift 5?
    i. Ställ frågor angående mellanstegen. Fråga hur de visste det, motiverade osv.

8. När det klickar för någon
    a. Vad var det som fick dig att inse?

9. När grupper har mycket kommunikation och diskussioner men kommer inte fram till lösningar.
    a. Vad hände när ni pratade om uppgift 5? Varför tog det stopp?
        i. Hur hjälpte min ledning?

10. (Om vi får Hjärnsläpp):
    a. Hur lätt/svårt tyckte du det var att övertyga dina kamrater? Varför?
    b. Hur tyckte du det var att diskutera matematiska problem?

Frågor om presentationerna (Syfte: mjuka upp)

Vad tyckte du om att presentera matematik muntligt inför klassen?

1. Koppla till ett visst ordval.
    a. Hur gick tankegången? Varför valde du just det ordet?

2. Tyckte du att du återgav gruppens diskussion när du presenterade lösningen på tavlan?
    a. Vad var det i gruppdiskussionen som var viktigt att ta upp?

3. Om vi observerar att en elev tillbringar mer tid vid ett visst steg.?
    a. Jag märkte att du förklarade detta steg väldigt detaljerat. Hur tänkte du kring det?
    b. Varför?

4. När du fick förklara igen efter en fråga, vad gjorde du annorlunda andra gången?

5. (Om vi får hjärnsläpp)
    a. På vilket sätt skilde sig åt för dig att presentera inför helklass/diskutera i grupp?
    b. Tror du att klassen förstod dina mellansteg?

Generella tips intervjuer:

- Arrangera så att man sitter med 90 graders vinkel - kan se men ej fokus på ögonkontakt
- Ha koll på tiden
- Identifiera huvudpunkter och de prioriteringar som informanten uttrycker
- Sök underliggande logik, läs mellan raderna. “vad är det egentligen de berättar för mig?”, “vad berättar de inte?”

- Leta efter motsägelser och inkonsekvenser.
- Uppmärksam på bedrägliga svar
- När avslut: fråga om de vill säga något mer som inte sagts, tacka

Generella tips **<u>under</u>** intervjun

- Var uppmärksam - tappa inte tråden. För anteckningar, titta efter icke verbal kommunikation, kontrollera ljudinspelaren
- Stå ut med tystnad - den kan utnyttjas som en resurs. bli inte obekväm
- Sufflera - driva informanten utan att tvinga fram svar.
- Följ upp - om du vill gå djupare. be om exempel, klargörande, detaljer
- Kontrollera - så att du förstått korrekt - kan bekräfta eller korrigera. kan användas strategiskt för att avsluta pågående diskussion

Master's Theses in Mathematical Sciences 2025:E22
ISSN 1404-6342

LUNFMD-3013-2025

Matematikdidaktik
Matematikcentrum
Lunds universitet
Box 118, 221 00 Lund

http://www.maths.lu.se/