



# LUND UNIVERSITY

## Konstruktionsberäkningar för gummikomponenter

Austrell, Per Erik

2001

*Document Version:*  
Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*

Austrell, P. E. (2001). *Konstruktionsberäkningar för gummikomponenter*. (TVSM-7000; Nr. TVSM-7131). Division of Structural Mechanics, LTH.

*Total number of authors:*

1

### General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

### Take down policy

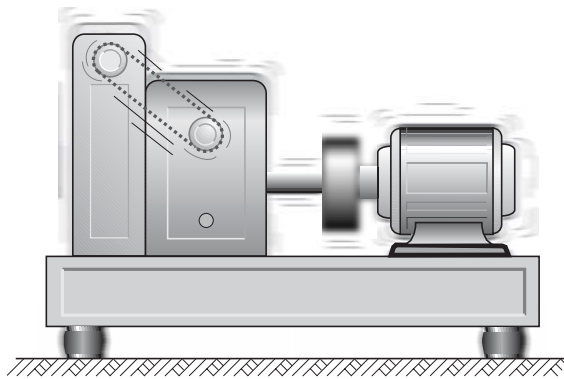
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117  
221 00 Lund  
+46 46-222 00 00



**LUND**  
UNIVERSITY



# KONSTRUKTIONSBERÄKNINGAR FÖR GUMMIKOMPONENTER

PER-ERIK AUSTRELL

---

Structural  
Mechanics

---



Structural Mechanics

ISRN LUTVDG/TVSM--00/7131--SE (1-34)

ISSN 0281-6679

# KONSTRUKTIONSBERÄKNINGAR FÖR GUMMIKOMPONENTER

PER-ERIK AUSTRELL

Copyright © 2000 by Structural Mechanics, LTH, Sweden.  
Printed by KFS i Lund AB, Lund, Sweden, June 2001.

For information, address:  
Division of Structural Mechanics, LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.  
Homepage: <http://www.byggmek.lth.se>



# Förord

Gummimaterialens unika egenskaper utnyttjas i många tillämpningar och har ofta en avgörande betydelse för en konstruktions mekaniska beteende. En väl genomförd konstruktion med gummikomponenter kan ofta ersätta flera mekaniska delar. Tyvärr utnyttjas inte möjligheterna med gummi som konstruktionsmaterial fullt ut av konstruktörer. I många fall beror det på att konstruktören inte känner sig behärska materialet och dess egenskaper tillräckligt.

Den här texten har som syfte att ge en första inblick i och översikt av beräkningsmetoder och typiska mekaniska egenskaper för gummimaterial.

Texten togs fram våren 1999 som ett kompletterande kursmaterial i '*Gummi! Ett utbildningsmaterial för gummindustrin*' YFIND (Yrkesnämnden för fabriksindustrin) på uppdrag av Sveriges Gummitekniska Förening.

Per-Erik Austrell  
LTH i oktober 2000



# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Statisk analys</b>	<b>7</b>
2.1	Några definitioner av storheter . . . . .	7
2.2	Mekaniska egenskaper . . . . .	8
2.3	Beräkningsmetoder - statiskt elastiskt . . . . .	10
2.4	Några uttryck för styvhet i tryck och skjuvning . . . . .	10
2.4.1	Skjuvfjädrar . . . . .	11
2.4.2	Tryckfjädrar . . . . .	12
2.4.3	Kombinerade skjuv- och tryckfjädrar . . . . .	13
2.4.4	Andra styvhetsuttryck . . . . .	13
2.5	Finit elementanalys . . . . .	14
2.5.1	Olinjära elastiska materialmodeller . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Dynamisk analys</b>	<b>19</b>
3.1	Mekaniska egenskaper . . . . .	19
3.1.1	Dynamiska modulens frekvens- och temperaturberoende . . . . .	20
3.1.2	Den dynamiska modulens amplitudberoende . . . . .	21
3.1.3	Utmattning . . . . .	22
3.1.4	Kryp- och relaxationsfenomen . . . . .	22
3.2	Modellering . . . . .	23
3.3	Ett endimensionellt modellsystem . . . . .	23
3.3.1	Fria vibrationer . . . . .	24
3.3.2	Påtvingade vibrationer . . . . .	24
3.3.3	Transmissibilitet . . . . .	24
3.4	Linjär viskoelasticitet . . . . .	26
3.4.1	Harmonisk excitation och komplex modul . . . . .	26
3.4.2	Reologiska modeller . . . . .	27
3.5	Dynamiska fjäderstyvhetsuttryck . . . . .	29
3.6	Möjligheter i finita elementprogram . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Exempel</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>Textfrågor</b>	<b>33</b>



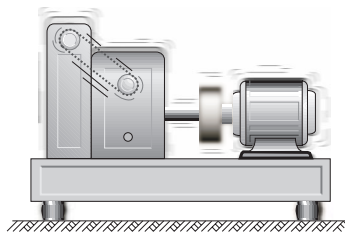


# 1 Inledning

Gummimaterialens unika egenskaper utnyttjas i många tekniska tillämpningar. Komponenter av gummi används som kopplingselement mellan styva strukturer. Exempelvis som vibrationsisolatorer, stötupptagare, flexibla leder, tätningar mm. Dessa kopplingselement har ofta en avgörande betydelse för konstruktionen som helhet. Det är därför av stor betydelse att känna till materialegenskaper och beräkningsmetoder för dessa material med sina unika egenskaper.

Utvecklingen av datorer och beräkningsprogram har även påverkat gummiområdet. Nya kraftfulla beräkningsverktyg finns nu tillgängliga för konstruktion av gummikomponenter. Datorsimuleringar med hjälp av finita elementmetoden har därmed blivit mer användbara genom utvecklingen av datorer och program som ger möjligheter att studera produkter med komplicerad geometri, komplexa belastningsfall, varierande materialegenskaper mm. Men datormetoderna utesluter inte användning av enklare traditionella metoder att konstruera gummikomponenter. Dessa metoder är fullt tillräckliga för många produkter. Även för mer komplicerade fall är det bra att först undersöka komponentens mekaniska beteende med hjälp av enklare mer överslagsmässiga metoder.

Texten har som syfte att ge en överblick av såväl enkla som mer komplicerade beräkningsmetoder. Dessutom beskrivs typiska mekaniska egenskaper för gummimaterial. Texten är indelad i två huvuddelar där den ena behandlar statiska och den andra behandlar dynamiska förhållanden. Uppdelningen är motiverad av att man ofta har lastfall som består av en statisk last och en överlagrad dynamisk belastning. Konstruktionsarbetets första fas består då i att dimensionera för den statiska lasten och i den andra fasen ta hänsyn till den dynamiska lasten. För



Figur 1: *Tillämpning med en maskin uppställd på gummidämpare.*

att vara mer specifik, betrakta en typisk applikation enligt figur 1, som visar en maskin uppställd på gummidämpare. Det första kravet är att dämparna skall kunna bära den statiska lasten på ett tillfredställande sätt. Därutöver kan det finnas krav på de dynamiska egenskaperna tex att den kraft som transmitteras genom dämparna till underlaget är tillräckligt liten eller att maskinens vibrationsamplitud begränsas. Då blir det viktigt att också känna till dynamiska storheter som tex transmissibilitet, dynamisk styvhet, dämpning och resonansfrekvens.

Statiska egenskaper och samband för gummimaterial och komponenter behandlas i avsnitt 2. Dynamiska förhållanden diskuteras i avsnitt 3. Ett antal tillämpningsexempel ges i avsnitt 4 tillsammans med några textfrågor. Texten avslutas med referenser för ytterligare läsning.

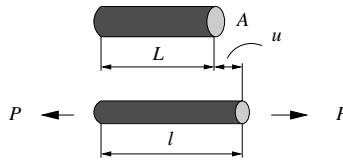


## 2 Statisk analys

I det här avsnittet som berör konstruktion med hänsyn till statisk eller långsam belastning behandlas mekaniska egenskaper för gummi, metoder för konstruktionsberäkningar och något om olinjärt elastiska materialmodeller.

### 2.1 Några definitioner av storheter

Stången i figur 2 som antages vara av linjärelastiskt material, används för att definiera storheter och begrepp på material- och strukturnivå, som förekommer i fortsättningen.



Figur 2: *Elastisk stång belastad med kraften P.*

För ett materials styvhet använder man sig av begreppet elasticitetsmodul som anger kvoten mellan samhörande värden på spänning och töjning i någon typ av belastning, tex i dragbelastning. På *materialnivå* ger Hookes lag genom E-modulen ett samband mellan spänningen och töjningen i stången enligt

$$\sigma = E\epsilon \quad (1)$$

där spänning och töjning definieras av

$$\sigma = P/A \quad \text{respektive} \quad \epsilon = u/L \quad (2)$$

eftersom spänning och töjning är konstant i detta enkla fall. I fortsättningen kommer även andra tillstånd på materialnivå att diskuteras.

I samband med gummimaterial användes ofta töjningsmättet *stretch*, som definieras av längdförhållandet dvs deformerad delat med odeformerad längd. För stången får man då

$$\lambda = l/L = 1 + \epsilon ,$$

eftersom den deformerade längden  $l = u + L$ .

Utgående från materialnivån kan samband på *strukturell nivå* härledas. Stångens *styvhet*  $K$  ger en koppling mellan strukturstorheterna kraft och förskjutning enligt sambandet

$$P = Ku .$$

Insättning av (2) i (1) ger stångens styvhetssamband

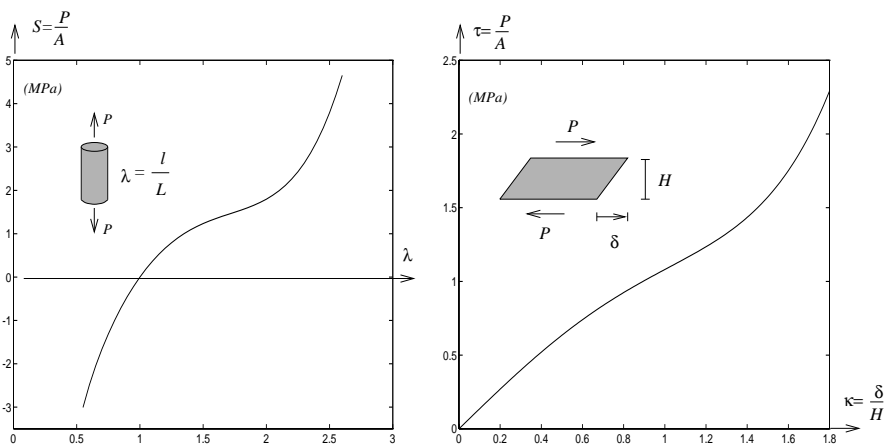
$$P = \frac{EA}{L}u \quad \text{dvs} \quad K = \frac{EA}{L}$$

som kopplar kraft och förskjutning för stången. Styvhetsuttryck för gummikomponenter i tryck och skjuvning kommer att diskuteras i avsnitt 2.4.

## 2.2 Mekaniska egenskaper

De viktigaste mekaniska egenskaperna hos gummitmaterial som utnyttjas i tekniska tillämpningar är den töjningsupptagande förmågan, den vibrationsdämpande egenskapen och nötningsstyrkan.

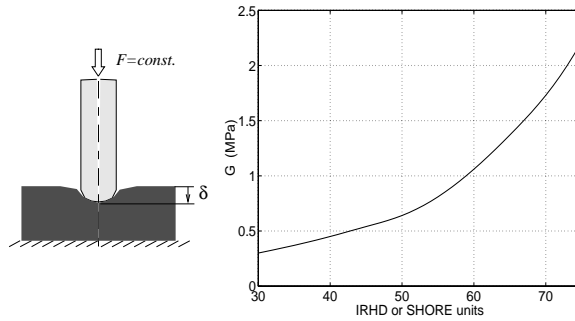
Den mest framträdande och karakteristiska egenskapen hos gummitmaterial är den stora elasticiteten dvs förmågan att tåla stora töjningar utan permanenta deformationer efter avlastning. Det innebär också att gummitmaterial har en förmåga att lagra mycket töjningsenergi per volymenhet och dessutom frigöra det mesta vid avlastning. Den goda elasticiteten har sin förklaring i den molekylära strukturen. De långa veckade polymerkjedjorna kan sträckas och orienteras i töjningens riktning. Orsaken till detta är att polymerens byggstenar i kedjan har en förmåga att rotera i kopplingspunkterna mellan enheterna (monomererna). Därigenom är det möjligt att uppnå töjningar på flera hundra procent.



Figur 3: Spännings-töjningsdiagram för ett 60 IRHD naturgummi. Vänster: tryck/drag belastning. Höger: Enkel skjuvning.

För statiska beräkningar behövs ett mått på materialets styvhet. Figur 3 visar spännings-töjningsdiagram för naturgummi med hårdhet 60 IRHD i tryck/dragbelastning respektive skjuvbelastning. Enkel skjuvning enligt figur 3 ger ett mer linjärt samband mellan spänning och töjning än vad som är fallet vid tryck/dragbelastning. Det är därför mer motiverat att använda skjuvmodulen  $G$  som en materialkonstant än  $E$ -modulen eftersom den senare varierar kraftigt med töjningen. (Modeller som beskriver det olinjära beteendet enligt figur 3 behandlas kortfattat i avsnitt 2.5.1.)

Hårdhetsmätning är ett indirekt sätt att klassificera materialstyvhet. Det finns två dominerande metoder att mäta hårdhet för gummi: IRHD (International Rubber Hardness Degrees) och Shore metoden. Båda metoderna innebär att man trycker en spets mot ytan av en provbit eller en färdig komponent, med en konstant kraft och avläser hur mycket spetsen sjunker in i ytan. Metoderna skiljer sig åt bla genom utformningen av spetsen. Vid IRHD mätningen använder man

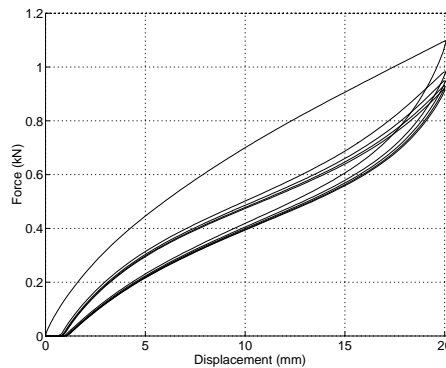


Figur 4: Sambandet mellan skjuvmodulen  $G$  och hårdheten enligt Lindley.

en nål med halvsfärisk spets eller en liten kula, medan man i Shore mätningen använder en nål med en spets i form av en kapad kon. Metoderna ger ungefär samma numeriska hårdhetsvärde för material med hårdhet inom intervallet 30-80 IRHD. Detta värde är ibland det enda mått på materialstyvheten som finns tillgängligt. Det behövs då en relation mellan hårdheten och materialets styvhet.

I figur 4 visas sambandet mellan hårdheten och skjuvmodulen (enligt Lindley [6] tabell 3, sid.8).

Vissa typer av vulkaniserat gummi utan fyllmedel som tex naturgummi har hög elasticitet med små förluster vid cyklisk belastning. I regel är det dock nödvändigt att tillsätta fyllmedel för få tillräcklig styvhet i materialet och uppnå tillräcklig nötningsbeständighet. Det vanligaste fyllmedlet, sot eller så kallad



Figur 5: Kraft-deformationssamband för ett kimröksfyllt naturgummi utsatt för cyklisk belastning.

kimrök har egenskaper som ökar dämpningen och minskar elasticiteten. Vid upprepade på- och avlastning av ett kimröksfyllt naturgummi av hårdhet 60 IRHD får man ett typiskt kraft-deformationssamband enligt figur 5.

Förutom att man får en skillnad mellan på- och avlastningskurvorna som indikerar att materialet inte är idealt elastiskt, får man också en viss sänkning av

materialets styvhet. Denna sänkning är dock begränsad och når ett stationärt värde efter ett fåtal belastningscykler enligt figur 5. Det töjningsmjuknande beteendet (som också kallas Mullins effekt) beror av molekylära omlagringar och brott i tvärbindingar mellan polymer och fyllmedelspartiklar. Töjningsmjuknandet ökar med ökande mängd fyllmedel.

En annan karakteristisk egenskap för gummi är den stora skillnaden mellan skjuvmodulen och bulkmodulen. Typiska värden för gummi är en skjuvmodul  $G \approx 1$  MPa och bulkmodul  $B \approx 2000$  MPa. Den stora volymetriska styvheten jämfört med skjuvstyvheten betyder att volymändring kräver väsentligt större kraft än formändring genom skjuvning. Den stora skillnaden indikerar att materialet är i det närmaste inkompressibelt och i många sammanhang betraktar man därför gummi som fullständigt inkompressibelt.

Avslutningsvis kan nämnas att statistiska mekaniska egenskaper för gummimaterial beskrivs mer utförligt i [3] och [4].

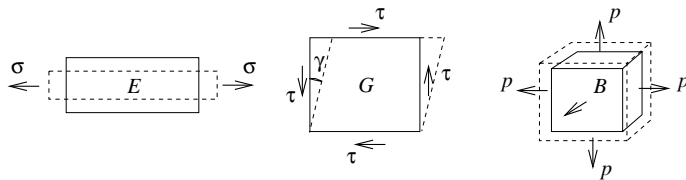
### 2.3 Beräkningsmetoder - statiskt elastiskt

Här följer två avsnitt som behandlar statistiska elastiska beräkningsmetoder för gummielement. Avsnitt 2.4 behandlar styvhetuttryck och avsnitt 2.5 behandlar datormodeller. I båda fallen betraktas materialet som idealt elastiskt. I 2.4 diskuteras styvhetsuttryck för några olika belastningsfall med utgångspunkt från linjär elasticitet. I 2.5 behandlas finit elementanalys med förutsättningen att materialet är olinjärt elastiskt.

### 2.4 Några uttryck för styvhet i tryck och skjuvning

I inledningen nämndes att man ofta som ett första steg i designprocessen av en gummikomponent behöver en uppskattning av den statistiska styvheten. Exempelvis för att komponenten skall klara att bära upp en tyngd eller för att man behöver kännedom om komponentens fjädrande egenskaper.

Även om gummi är känt för sin förmåga att fungera elastiskt vid stora töjningar så är många gummifjädrar i praktiska tillämpningar utsatta för relativt små töjningar. Det är därför motiverat i vissa sammanhang att utgå ifrån att materialet fungerar linjärt elastiskt.



Figur 6: Grundläggande spänningstillstånd och motsvarande materialkonstanter.

Gent [4] (kapitel 3 s.35) anger ungefärliga gränser för giltigheten av styvhetuttryck som baserar sig på linjär elasticitet. Vid skjuvning gäller uttrycken upp till ungefär 75% skjuvtöjning och för drag och tryck ungefär till 25% töjning. När

det gäller större töjningar eller mer komplicerade geometrier är datorbaserade metoder som bygger på finita elementmetoden mer lämpliga.

Styvhetsuttrycken för tryck- och skjuvfjädrarna som behandlas här utgår från tillstånden i figur 6. Det första linjärelastiska sambandet enligt figur 6, är tidigare nämnda Hookes lag för enaxligt spänningstillstånd

$$\sigma = E\epsilon, \quad (3)$$

där  $\sigma$  är spänningen och  $\epsilon$  är töjningen i spänningens riktning.

Det andra sambandet beskriver kopplingen mellan skjuvspänning  $\tau$  och skjuvtöjning  $\gamma$  enligt

$$\tau = G\gamma \quad (4)$$

där skjuvtöjningen räknas som skjuvdeformation delat med höjden vinkelrät skjuvriktningen, vilket för små töjningar är lika med vinkeln  $\gamma$  enligt figur 6.

Det tredje sambandet, som också illustreras i figur 6 gäller materialets volymetriska styvhet. Kopplingen mellan den volymetriska töjningen  $\Delta V/V$  och det hydrostatiska trycket  $p$  enligt

$$p = B \frac{\Delta V}{V} \quad (5)$$

ges av bulkmodulen  $B$ .

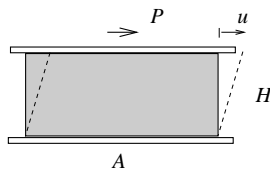
Ofta använder man E-modulen  $E$  och tvärkontraktionstalet  $\nu$  för att beskriva ett linjärelastiskt material. För gummi är det lämpligare att använda skjuvmodulen  $G$  och bulkmodulen  $B$ . Skjuvmodulen varierar betydligt mindre med töjningen än E-modulen och bulkmodulen har en mer konkret tolkning enligt (5), än tvärkontraktionstalet. E-modulen kan uttryckas i termer av bulkmodulen och skjuvmodulen enligt

$$E = \frac{9BG}{3B + G} \quad (6)$$

eftersom endast två oberoende konstanter behövs för att karakterisera ett linjärelastiskt material. Observera att (6) för stora värden på bulkmodulen kan förenklas till  $E = 3G$ .

De grundläggande sambanden (3) - (6) är basen för de styvhetsuttryck som beskrivs nedan.

### 2.4.1 Skjuvfjädrar



Figur 7: Skjuvfjädrar. Tvärsnittsyta  $A$  och höjd  $H$ .



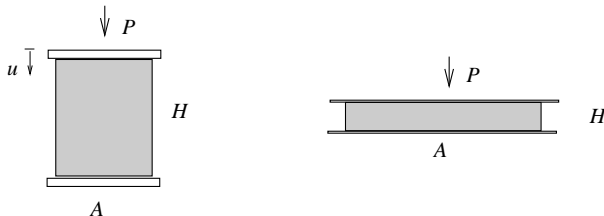
Det grundläggande uttrycket för skjuvfjäders styvhet ges av (4). Genom insättning av  $\tau = P/A$  och  $\gamma = u/H$  får man uttrycket för skjuvfjäders

$$P = K_s u \quad \longrightarrow \quad K_s = \frac{G A}{H} \quad (7)$$

Uttrycket gäller så länge böjning inte avsevärt inverkar på deformationsformen, vilket kräver att höjden är liten jämfört med utbredningen. För tillräckligt små höjder är avvikelser från ideal enkel skjuvning enligt figur 7 obetydlig. Övergången från enkel skjuvning, som dominerar för en relativt låg skjuvfjäder, till böjdeformation som inverkar för en relativt hög skjuvfjäder, diskuteras i [4] s.40 och s.213.

### 2.4.2 Tryckfjädrar

Figur 8 illustrerar tryckfjädrar med olika bredd-höjdförhållanden. För den vänstra tryckfjäders är en utvidgning i sidled endast lite förhindrad, medan fjäders till höger är mer instängd och låst mellan de två fastvulkade metallytorna. Vid



Figur 8: Tryckfjädrar med olika formfaktorer. Tvärsnittsytan  $A$  och höjden  $H$ .

måttliga töjningar är det därför rimligt att anta att Hooke's lag (3) approximativt gäller för fjäders till vänster och att det volymetriska styvhetsuttrycket (5) är av betydelse för fjäders till höger i figuren. Det är en betydande skillnad mellan tryckstyvheter i de två fallen eftersom  $B \approx 2000G$ .

För att beskriva övergången från inverkan av E-modulen till inverkan av bulkmodulen införs den så kallade formfaktorn  $S$ , definierad som

$$S = \frac{\text{belastad yta}}{\text{obelastad yta}}. \quad (8)$$

I definitionen (8) är den belastade ytan begränsad till den övre ytan utsatt för kraften  $P$ , och den obelastade arean är den fria omgivande (bukande) ytan. Genom att definiera en så kallad kompressionsmodul  $E_c$  som är beroende på formfaktorn, kan tryckstyvheten för olika formfaktorer beskrivas i ett enda uttryck

$$K_c = E_c(S) \frac{A}{H}. \quad (9)$$

Enligt Lindley [6] s.33, kan kompressionsmodulens beroende av formfaktorn uttryckas som

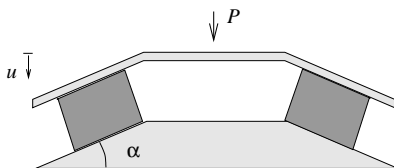
$$E_c(S) = E_0 (1 + 2k S^2) \quad (10)$$

där  $k$  är en faktor i storlek mellan 0.9 och 0.5 som minskar med ökad gummi-hårdhet, enligt tabell 1. (En likvärdig tabell finns i [4] kapitel 8 s.215.)

Hardness IRHD	$E_0$ (MPa)	G (MPa)	k
30	0.92	0.30	0.93
35	1.18	0.37	0.89
40	1.50	0.45	0.85
45	1.80	0.54	0.80
50	2.20	0.64	0.73
55	3.25	0.81	0.64
60	4.45	1.06	0.57
65	5.85	1.37	0.54
70	7.35	1.73	0.53
75	9.40	2.22	0.52

Tabell 1: *Beroendet av hårdheten för moduler och faktorn k för kimröksfyllda naturgummin, enligt Lindley.*

### 2.4.3 Kombinerade skjuv- och tryckfjädrar



Figur 9: *Kombinerade skjuv- och tryckfjädrar.*

Ett vanligt belastningsfall för gummielement är en kombination av tryck och skjuvning. Den kombinerade skjuv- och tryckfjädrern illustreras här genom ett exempel. Figur 9 visar två gummielement utsatta för samtidig skjuvning och tryck på grund av den snedställda monteringen.

Betraktas tryck och skjuvning oberoende av varandra så ges kraftkomponenterna i respektive riktning, av styvhetsuttrycken  $P_c = K_c u_c$  och  $P_s = K_s u_s$ . Genom att kombinera ekvationerna får man uttrycket för fjäderstyvheten  $K$  för det kombinerade lastfallet

$$K = 2(K_c \cos^2 \alpha + K_s \sin^2 \alpha) \quad (11)$$

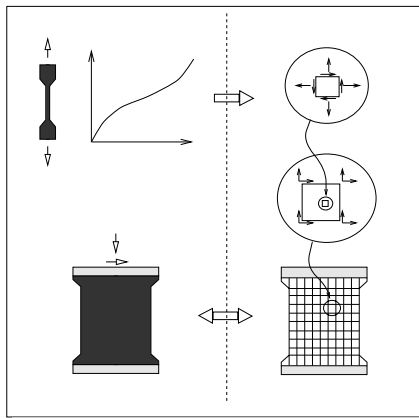
där man kan se att styvheten är beroende av vinkeln  $\alpha$ .

### 2.4.4 Andra styvhetsuttryck

Flera andra styvhetsuttryck behandlas i referenserna [4] och [6]. Gummifjädrar diskuteras även av Grafström i [3] (kapitel 8.1). Där presenteras även halvempiriska diagram, som inkluderar rekommenderade spänningsnivåer för design av gummifjädrar med olika hårdhet.

## 2.5 Finit elementanalys

För gummielement med komplex geometri och belastning räcker inte metoderna som beskrevs i föregående avsnitt. Då krävs datormetoder som finita elementmetoden, som inkluderar materialmodeller som kan beskriva gummimaterials olinjära elastiska egenskaper.



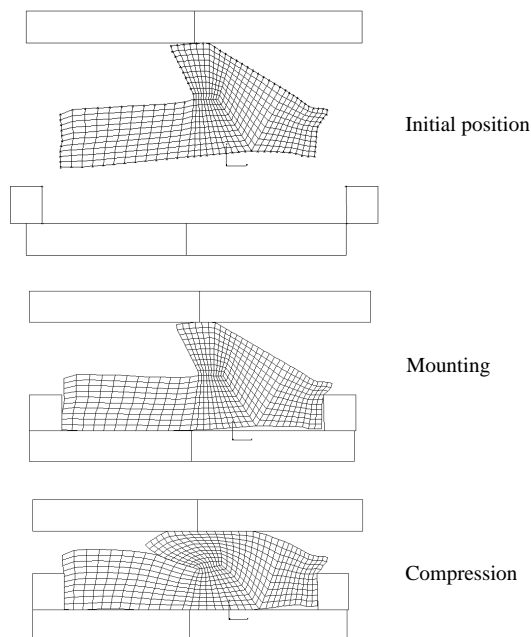
Figur 10: *Finit elementanalys av gummikomponent.*

Finita elementmetoden är den mest allsidiga och framgångsrika datormetoden inom hållfasthetsläran och strukturmekniken. Den erbjuder ett systematiskt tillvägagångssätt för analys av komponenter av olika typer av material och godtycklig geometrisk form. Strukturen som ska analyseras delas in i mindre delar, element, sammankopplade i noder. För varje element definieras en styvhetsrelation dvs ett samband mellan krafterna och förskjutningarna som verkar på elementet. För att ta fram elementstyvheten för ett enskilt element, krävs att relationen mellan spänning och töjning i elementet är känt. Denna relation ges av en materialmodell, som beskriver det aktuella materialet. Här antages att materialmodellen är olinjärt elastisk. (Materialmodeller diskuteras i nästa avsnitt.) Elementstyvhetsuttrycken bygger upp ett ekvationssystem genom sammankopplingen av krafter och förskjutningar i noderna.

Figur 10 visar principen för finit elementanalys av en gummikomponent. För att bygga upp en modell som beskriver den verkliga komponentens mekaniska funktion krävs följande moment.

- Kalibrering av materialmodellen för det aktuella gummimaterialet med hjälp av provdata.
- Geometrisk modellering av komponenten som innebär en indelning i ett med hänsyn till noggrannheten, tillräckligt antal element.
- Definition av laster och inspänningsförhållanden.

I det första steget används de experimentellt framtagna töjnings- och spänningsvärdena för gummimaterialet ifråga till att genom en passningsprocedur kalibrera materialmodellen som beskriver gummimaterialets elastiska egenskaper. Olika



Figur 11: *Analys av ett tvärsnitt av en betongrörstättning genom datorsimulering med finita elementmetoden.*

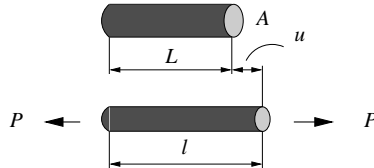
typer av sådana materialmodeller finns inlagda i de större generella kommersiellt tillgängliga finita elementprogrammen. Kalibreringen resulterar i en uppsättning av indataparametrar vilka definierar materialmodellen. Dessa parametrar, tillsammans med en geometri- och lastbeskrivning enligt steg två och tre ger nödvändiga indata för datormodellen som beskriver den verkliga komponentens elastiska egenskaper.

Flera generella finita elementkoder som ABAQUS, ANSYS, MARC och NAS-TRAN, kan användas för olinjära elastiska analyser. Ett exempel på de möjligheter finita elementanalyser erbjuder ges i figur 11. Figuren visar en simulering av montering och kompression av en betongrörstättning. Stela element används i monterings- och kompressionsstegen för att modellera betonginneslutningen. Analysen kan bland annat avslöja huruvida kontaktrycket mellan röret och tätningen är tillräckligt högt. Det visade exemplet är ett relativt komplicerat problem som innehåller flera beräkningsmässiga svårigheter, såsom stora töjningar, olinjärt material, kontaktvillkor, och inkompressibelt materialbeteende.

### 2.5.1 Olinjära elastiska materialmodeller

Mooney och Rivlin utvecklade under 1950-talet den olinjära fenomenologiska elasticitetsteorin för stora deformationer. Mooney initierade arbetet genom att utveckla en speciell materialmodell varefter Rivlin utvecklade en generell teori baserad på ett töjningsenergiuttryck. I de så kallade *hyperelastiska materialen*

enligt Rivlin definieras en töjningsenergifunktion  $W$  som är att betrakta som en potentialfunktion för spänningarna i materialet. De elastiska egenskaperna bestäms med hjälp av funktionen  $W$ , som representerar *töjningsenergi per volymenhet* för det aktuella materialet.



Figur 12: *Elastisk stång belastad med kraften  $P$ .*

För att illustrera hur töjningsenergin kan definiera relationen mellan spänning och töjning betraktas först fallet med en linjärelastisk stång enligt figur 12. Töjningsenergin per volymenhet ges i detta fall av

$$W = \frac{1}{2}E\epsilon^2$$

där  $\epsilon = u/L$  är töjningen i stängen. Spänningen  $\sigma$  kan fås genom derivering med hänsyn till töjningen enligt

$$\sigma = \frac{dW}{d\epsilon} = E\epsilon.$$

Resultatet är alltså den välkända Hookes lag för det enaxliga fallet. Exemplet visar att det är möjligt att erhålla materialsambandet för ett elastiskt material genom att använda töjningsenergin som en potentialfunktion. I den generella fleraxliga och olinjära teorin är principen för att härleda materiallagen densamma. Men i det olinjära fallet krävs i regel fler materialparametrar. Dessutom måste töjningsmättet generaliseras för att även täcka fleraxliga tillstånd av töjning som uppkommer vid godtyckligt belastade kroppar. Töjningsmått som kallas töjningsinvarianter införs som grundläggande variabler i töjningsenergiuttrycket. Töjningsinvarianterna uttrycks ofta i stretch (som definierades tidigare).

### Töjningsenergiuttryck

Två generella töjningsenergifunktioner som används i samband med hyperelastiska modeller ges av ett uttryck på polynomform i töjningsinvarianter eller av ett uttryck i huvudstretchvärden enligt Ogden.

Den generella polynomformen av töjningsenergifunktionen  $W$ , som ingår i de flesta finita elementprogram som innehåller hyperelastiska material, ges av serien

$$W = \sum_{i=0, j=0}^N C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \quad (12)$$

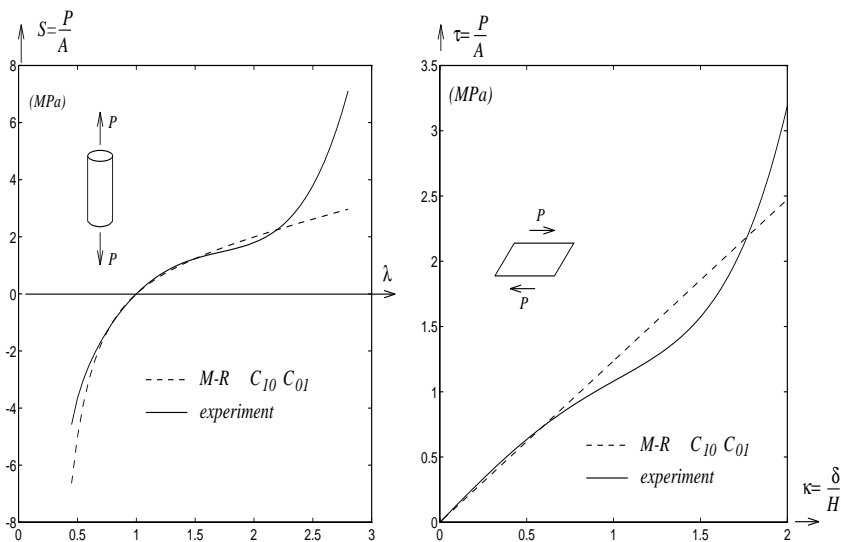
där  $C_{ij}$  är materialkonstanter.  $I_1$  och  $I_2$  är de generaliserade töjningsmått, de så kallade töjningsinvarianterna.

Den generella formen av Ogdenmodellen uttrycks också som en serie men töjningsmättet är, som nämndes ersatt av stretchvärden  $\lambda_i$  enligt

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3), \quad (13)$$

där  $\alpha_i$  och  $\mu_i$  är materialkonstanter. Ogdenmodellen kan generellt inte direkt jämföras med polynomformen, förutom för speciella val av konstanterna. För båda formerna behöver i regel endast ett fåtal termer i summorna användas.

Ett stort antal av töjningsenergiuttryck har föreslagits och tillämpats på olika typer av gummimaterial. Modellernas giltighet beror bland annat på hur stort töjningsområde som skall täckas. En noggrann beskrivning av ett gummimaterials beteende över ett stort töjningsintervall kräver komplicerade modeller och många materialparametrar.



Figur 13: *Mooney-Rivlin modellen i jämförelse med faktiska beteenden av ett kimröksfyllt gummimaterial i tryck/drag och enkel skjuvning.*

Mooney-Rivlin modellen, som har två parametrar,  $C_{10}$  and  $C_{01}$ , är ett specialfall av polynomformen. Den har använts i många fall för modellering av gummielasticitet, och den har anpassats framgångsrikt till experimentella data för ofyllda material. Men för kimröksfyllda material ger denna enkla modell dålig överensstämmelsen med experiment. Figur 13 illustrerar detta i en jämförelse av två-parameters Mooney-Rivlin modellen och det faktiska beteendet för ett kimröksfyllt gummi med en hårdhet runt 65 IRHD. För höga töjningsvärden är Mooney-Rivlin modellen linjär i drag medan experimenten visar en progressiv kurva. Modellen avviker även från experiment i enkel skjuvning vid högre töjningsvärden, där Mooney-Rivlin modellen visar ett linjärt beteende medan det verkliga beteendet också här är progressivt.

En tre-parameters modell framtagen av O.H. Yeoh [7], definierad genom

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (14)$$

speglar korrekt det kvalitativa beteendet för kimröksfyllda gummimaterial enligt illustrationen i figur 13. Modellen ger korrekt fysikaliskt beteende och är ganska enkel att använda, eftersom den bara har tre konstanter som dessutom har ett linjärt funktionsberoende eftersom den är på polynomform. Den ger ofta en noggrann och stabil passning till experimentella data.

Ytterligare läsning om hyperelastiska materialmodeller och bestämning av materialparametrar ur experiment behandlas i [1] och [2].

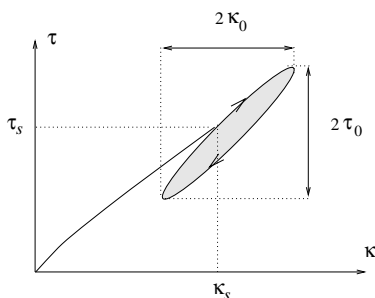
### 3 Dynamisk analys

Det här avsnittet behandlar gummimaterials dynamiska egenskaper och modeller för beskrivning av dessa egenskaper i termer av linjär dynamik och viskoelasticitet. Speciellt betonas dynamisk modul och styvhet och dess beroende på frekvens, temperatur och amplitud.

#### 3.1 Mekaniska egenskaper

Även om gummi är mycket elastiskt, är det inte idealt elastiskt. Avvikelser i form av belastningshastighetsberoende, tidsberoende och förluster genom omvandling av energi till värme kan identifieras i materialbeteende såsom krypnings- och relaxationsfenomen samt som hysteres vid cyklisk belastning.

Dynamisk provning i enkel skjuvning vid små amplituder för ofyllda gummimaterial ger *linjärt dynamiskt* beteende som karakteriseras av att sinusformad excitation ger sinusformad respons, som har samma frekvens som excitationen. Responsen är dock fasförskjuten *fasvinkeln*  $\delta$ , vilket ger en elliptisk spänning-töjningskurva enligt figur 14.



Figur 14: Statisk och dynamisk skjuvspänning ( $\tau$ ) och skjuvtöjning ( $\kappa$ ).

Den elliptiska hystereskurvan är associerad med omvandling av energi. Vid cyklisk belastning av gummimaterial är det därför alltid en del av energin som omvandlas till värme. Den inneslutna ytan mellan pålastnings- och avlastningskurvorna motsvarar den energi som omvandlas till värme. Vid fria vibrationer medför detta en minskande amplitud med tiden och man säger därför att materialet uppvisar *dämpning*. Genom att tillsätta fyllmedel i gummiblandningen ökar dämpningen.

Användning av gummikomponenter involverar ofta utnyttjande av både statiska och dynamiska egenskaper. För att beskriva statiska och dynamiska materialegenskaper är det användbart att studera skjuvmodulen i de båda fallen. Den statiska (sekant) skjuvmodulen och dynamiska skjuvmodulen är definierade som

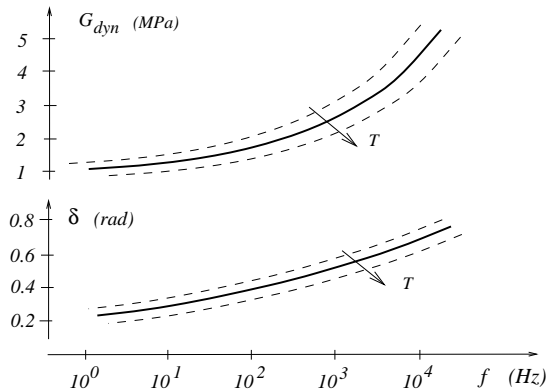
$$G_{stat} = \frac{\tau_s}{\kappa_s} \quad G_{dyn} = \frac{\tau_0}{\kappa_0},$$

med beteckningar enligt figur 14. Den *dynamiska modulen* är alltid större än den statiska modulen, vilket också illustreras i figuren. De dynamiska egenskaperna

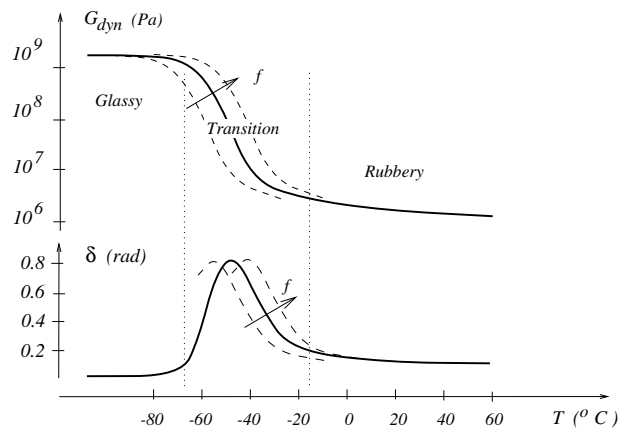


för gummidmaterial är beroende av både temperatur och frekvens, vilket visar sig i den dynamiska modulen och fasvinkeln. En ökning av temperaturen har en mjukande effekt, och en ökning av frekvensen har en hårdnande effekt.

### 3.1.1 Dynamiska modulens frekvens- och temperaturberoende



Figur 15: Dynamiska skjuvmodulens och fasvinkelns frekvensberoende för ett ordinärt naturgummi med fyllmedel. Temperaturens inverkan visas också.



Figur 16: Dynamiska skjuvmodulens och fasvinkelns temperaturberoende för ett ordinärt naturgummi med fyllmedel. Frekvensens inverkan visas också.

Figur 15 visar den dynamiska modulens och fasvinkelns frekvensberoende för ett ordinärt gummidmaterial med fyllmedel. Den dynamiska skjuvmodulen och fasvinkeln ökar med frekvensen. Effekten av förändringar i temperatur visas också.

Figur 16 visar den dynamiska skjuvmodulens och fasvinkelns temperaturberoende för ett gummidmaterial med fyllmedel. Den dynamiska modulen minskar kraftigt med ökad temperatur. Effekten av förändringar av frekvensen visas också. Det

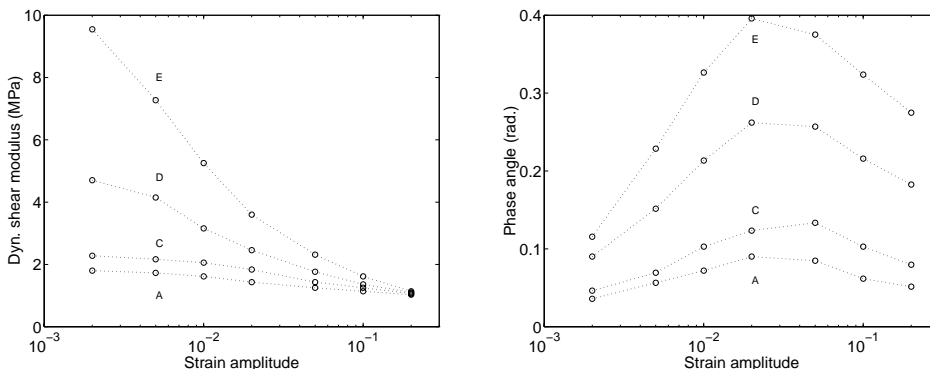
generella beteendet som illustreras i figur 16, är detsamma för alla gummityper, men temperaturskalan är olika och kan förskjutas genom olika tillsatser i gummiblandningen.

Tre temperaturregioner är indikerade. Den första är glasområdet där molekylernas termiska rörelse är kraftigt reducerad och nästan ingen intermolekylär rörelse är möjlig. Materialet är styvt och sprött. Mekaniska beteendet i glasområdet är beroende på de interatomära bindningarna och inte på de intermolekylära rörelserna. Modulen är därför väldigt hög ( $\approx 1 \text{ GPa}$ ) och dämpningen representerad av fasvinkeln är låg. Den andra regionen är övergångsområdet där en drastisk nedgång i den dynamiska modulen äger rum och dämpningen visar ett maximalt värde representerat av en topp i fasvinkeln. Den tredje temperaturregionen är gummiområdet där den dynamiska modulen är låg ( $\approx 1 \text{ MPa}$ ) och materialets mekaniska egenskaper påverkas av möjligheten till intermolekylära rörelser. För gummiliknande egenskaper krävs att materialet är nära slutet av övergångsområdet eller i gummiområdet.

De angivna värdena i figurerna 15 och 16 är approximativa och är också starkt beroende av amplituden.

### 3.1.2 Den dynamiska modulens amplitudberoende

Olinjäriteter i det dynamiska beteendet visar sig som en distorsion av den elliptiska hysteresloopen och som en minskning av den dynamiska skjuvmodulen då amplituden ökar. Sådana dynamiska olinjäriteter orsakas av gumminätverkets olinjära elasticitet, och för fyllda material av fyllmedelsstrukturens nedbrytning och återformning. Här betonas speciellt den dynamiska modulens och fasvinkeln beroende av töjningsamplituden.



Figur 17: *Dynamiska skjuvmodulens och fasvinkels amplitudberoende för några fyllda naturgummin med varierande fyllmedelsinnehåll. A-E representerar ökat fyllmedelsinnehåll. (Reproducerad från Harris och Stevenson.)*

Harris och Stevenson [5] har genomfört experimentella studier av olika olinjära dynamiska egenskaper för gummi material. Man undersökte effekter av frekvens, amplitud och elastisk olinjäritet för fyllda och ofyllda gummi material. För de

ofyllda materialen redovisades ett viskoelastiskt beteende, med en hystereskurva av elliptisk form för små amplituder. För de fyllda materialen, visade experimenten att den dynamiska modulen var starkt beroende av töjningsamplituden. Figur 17 (reproducerad från [5]), visar den dynamiska modulens amplitudberoende för naturgummin med olika kimröksmängder. Materialen hade alla approximativt samma hårdhet (omkring 55 IRHD), vilket kunde åstadkommas genom att använda tre olika typer av kimrök och balansera de förstärkande effekterna av fyllmedlen genom tillsats av en högviskös aromatisk olja. Figur 17 visar inverkan av töjningsamplituden vid enkel skjuvning. Materialen är markerade A,C,D,E ordnade efter ökad andel kimrök, varierande mellan 30 phr (för A) och 75 phr (för E), (hundra delar av vikten gummi). Materialet med den högsta dämpande effekten (representerat av fasvinkeln) och den största variationen i den dynamiska modulen är det med det högsta innehållet av fyllmedel.

### 3.1.3 Utmattning

Hänsyn till *utmattning* är viktigt i många ingenjörstillämpningar för komponenter som är utsatta för långvarig cyklisk belastning. Spänningskoncentrationer vid defekter eller små skador kan orsaka sprickor som utvecklas vid cyklisk belastning. I värsta fall kan utmattning resultera i att komponenten kollapsar.

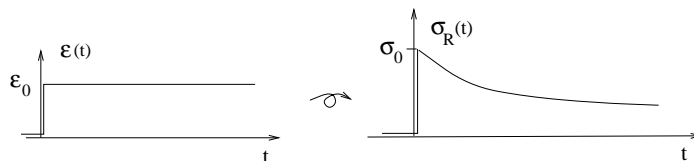
*Rivenergin* är utgångspunkten för att förutse brott och utmattning. För många gummiprodukter som utsätts för dynamisk belastning är brott orsakade av växande sprickor den begränsande faktorn för livslängden.

Brottmekanik och utmattning behandlas mer utförligt i [4] (av Lake och Thomas i kapitel 5 och av Ellul i kapitel 6).

### 3.1.4 Kryp- och relaxationsfenomen

*Krypning* visar sig som en med tiden ökande töjning, som ett resultat av en plötsligt pålagd belastning som sedan hålls konstant.

*Relaxation* är en minskning av spänningen som ett resultat av en plötsligt pålagd töjning som sedan hålls konstant i tiden. Ett relaxationstest utföres alltså genom att lägga på ett töjningssteg enligt figur 18.



Figur 18: *Relaxationsbeteende: Sjunkande spänning som resultat av en pålagd stegtöjning.*

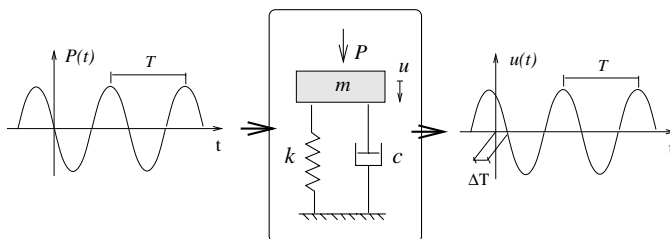
Stevenson och Campion i [4] s.172, diskuterar krypning och relaxation och beskriver ett linjärt logaritmiskt samband för kryptöjning och relaxationsspänning med avseende på tiden.

## 3.2 Modellering

I det här avsnittet behandlas modellering av gummikomponenters dynamiska egenskaper. Begrepp med teoretisk bakgrund i linjär dynamik och viskoelastisk materialmodellering, som resonansfrekvens, transmissibilitet och dynamisk styvhet diskuteras.

En enkel modell av en gummidämpare visas i figur 19. Modellen består av en linjär fjäder parallellkopplad med ett linjärt dämparelement. Den kraft som utvecklas i dämparelementet är direkt proportionell mot hastigheten dvs  $F_v = c\dot{u}$ . (Pricken betyder alltså tidsderivata.) Vid cyklisk belastning orsakar dämparelementet en fasförskjutning mellan kraft och förskjutning vilket också illustreras figuren. Avsättes kraft och förskjutning i samma diagram uppkommer en elliptisk hystereskurva av samma typ som i figur 14. Detta gäller generellt för alla linjära dynamiska system. Egenskapen att svaret på en sinusformad excitation ger en fördröjd sinusformad respons av samma frekvens möjliggör användningen av komplexa kvantiteter och tillåter definition av en komplex styvhet som beror enbart på frekvensen.

Linjära system kan uttryckas i form av mekaniska analogier i form av fjädrar och dämparelement. En godtycklig kombination av dessa element resulterar alltid i ett linjärt dynamiskt system.



Figur 19: Ett linjärt dynamiskt system utsatt för stationär sinusformad belastning. Responsen är en fördröjd sinusformad funktion med samma frekvens.

De linjära dynamiska modeller och samband som presenteras här utgör grunden för beskrivning av gummikomponenters egenskaper men kan inte beskriva alla aspekter av deras dynamiska beteende. En del egenskaper som tex amplitudberoendet av den dynamiska styvheten, närvaron av multipla frekvenser i responsen vid harmonisk excitation och distorsion av hysteresloopen, som berördes i avsnitt 3.1 kan inte beskrivas genom linjär dynamik.

## 3.3 Ett endimensionellt modellsystem

Viktiga egenskaper och begrepp som används vid dynamisk analys av gummikomponenter kan härledas ur det enkla endimensionella systemet i figur 19. Systemet, som består av en linjär fjäder och en viskös dämpare parallellkopplade till en massa, beskrivs av en andra ordningens differentialekvation

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = P(t) . \quad (15)$$

Sambandet (15) härleds ur rörelseekvationen för massan (Newtons andra lag), där den viskösa dämparkraften är proportionell mot hastigheten enligt  $F_v = c \dot{u}$  och den elastiska kraften är proportionell mot förskjutningen  $F_e = k u$ .

### 3.3.1 Fria vibrationer

Den fria responsen för systemet (15) är en exponentiellt avklingande harmonisk funktion av tiden. Vibrationsfrekvensen vid fria vibrationer dvs. för  $P = 0$ , kallas *egenfrekvensen*.

Det odämpade systemet dvs med  $c = 0$ , har en egenvinkelfrekvens  $\omega_0$  som ges av

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (16)$$

Egenfrekvensen  $f_0$  för systemet (15) med måttlig dämpning avviker endast mycket lite från det odämpade systemets egenfrekvens givet av (16).

### 3.3.2 Påtvingade vibrationer

Det tekniskt sett mest intressanta fallet är det med påtvingande sinusformade vibrationer dvs stationära svängningar där systemet drivs av en harmonisk periodisk kraft. Responsen i detta fall är en sinusformad förskjutning med samma vinkelfrekvens som kraften, men med en fördröjning. För ett odämpat system ( $c = 0$ ) i fallet med påtvingade vibrationer med  $P = P_0 \sin(\omega t)$  ger den stationära lösningen vibrationsamplituden

$$u_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (17)$$

där  $\omega$  är den drivande kraftens vinkelfrekvens.

Uttrycket (17) kan tolkas som den statiska lösningen  $P_0/k$  multiplicerad med en förstärkningsfunktion. Detta uttryck illustrerar ett viktigt fenomen, nämligen att vibrationsamplituden kan öka obegränsat när den drivande kraften har en frekvens som överensstämmer med systemets egenfrekvens. Vid denna frekvens får man sk resonans och en alternativ benämning för egenfrekvens är därför *resonansfrekvens*.

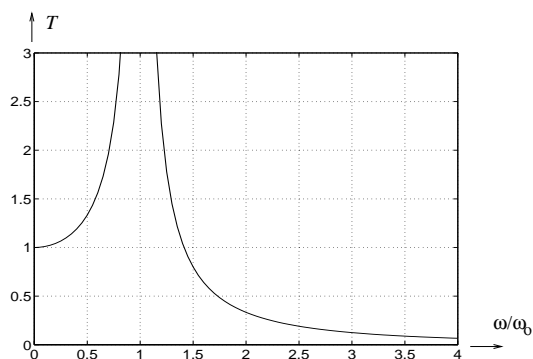
Genom introduktion av måttlig dämpning begränsas amplituden vid resonans samtidigt som systemets egenfrekvens, som nämndes ovan påverkas mycket lite. Det betyder alltså att i ett måttligt dämpat system inträffar den maximala vibrationsamplituden vid  $\omega \approx \omega_0$ .

### 3.3.3 Transmissibilitet

En viktig fråga vid vibrationsdämpning är hur mycket av den drivande kraften som överförs genom dämparen till underlaget. Kvoten mellan den överförda kraften och den drivande kraften kallas *transmissibilitet* som för det odämpade systemet ges av

$$T = \left| \frac{k u_0}{P_0} \right| = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right| \quad (18)$$

dvs fjäderkraftens amplitud dividerat med den drivande kraftens amplitud. Uttrycket (18) visas grafiskt i figur 20. För måttligt dämpade system gäller ut-



Figur 20: *Transmissibilitet mot normaliserad vinkelfrekvens för ett odämpat system.*

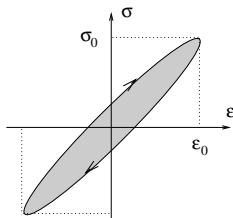
trycket approximativt om den drivande kraftens frekvens är större än resonansfrekvensen, vilket också krävs för en reduktion av den överförda kraften. Enligt diagrammet måste drivfrekvensen vara högre än resonansfrekvensen för att vibrationsdämpningen skall fungera.

### 3.4 Linjär viskoelasticitet

Det föregående avsnittet behandlade en enkel dynamisk modell på strukturell nivå bestående av en parallellkoppling mellan en linjär fjäder och en viskös dämpare. Det här avsnittet behandlar mer sofistikerade modeller på materialnivå uttryckt i linjär viskoelasticitet. Tids- och frekvensberoende egenskaper som också innefattar kryp- och relaxationsfenomen, täcks av den linjära viskoelastiska teorin. Diskussionen här kommer emellertid att begränsas till stationära påtvingade vibrationer och dynamiska materialegenskaper, som kan beskrivas med en komplex elasticitetsmodul. Dessutom ges en kortfattad behandling av reologiska modeller.

#### 3.4.1 Harmonisk excitation och komplex modul

Sambandet mellan spänning och töjning vid stationär sinusformad excitation är av intresse vid många praktiska tillämpningar. Harmonisk excitation av ett linjärt viskoelastiskt material ger en harmonisk respons med samma frekvens som drivfrekvensen. Responserna är dock fasförskjutna jämfört med drivfrekvensen, vilket ger en elliptisk kurva enligt figur 21 då töjningen  $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t)$  och spänningen  $\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$  avsättes i  $(\sigma, \epsilon)$  planet.



Figur 21: *Elliptisk hysteresis kurva. Spänningen  $\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$  och töjningen  $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t)$  plottade i  $(\sigma, \epsilon)$  planet.*

Fasförhållandet för spänning och töjning kan representeras med en roterande vektorbeskrivning och det är därför praktiskt att använda ett beteckningssätt som utnyttjar komplexa tal i analogi med metodiken i växelströmläran. Töjningen och spänningen kan skrivas som de komplexa storheterna

$$\epsilon^* = \epsilon_0 e^{i\omega t} \quad \text{respektive} \quad \sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}. \quad (19)$$

Spänningens och töjningens tidshistoria ges då av realdelen av de komplexa funktionerna i (19).

Beteendet vid stationär harmonisk belastning kan karakteriseras genom en komplex modul som är beroende av vinkelfrekvensen, enligt

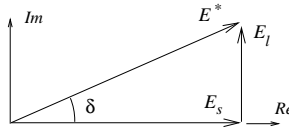
$$\sigma^* = E^*(\omega) \epsilon^* .$$

En tolkning av den komplexa modulen uttryckt i mätbara storheter ges av

$$|E^*| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad \text{och} \quad \arg(E^*) = \delta .$$

Absolutvärdet  $|E^*(\omega)|$  och vinkeln  $\arg(E^*(\omega))$  skall därför tolkas som *dynamiska modulen* respektive *fasvinkeln* enligt avsnitt 3.1.

Notera att den dynamiska modulen och fasvinkeln är funktioner av enbart vinkelfrekvensen  $\omega$ . Den dynamiska modulen för ett linjärt viskoelastiskt material är därför oberoende av töjningsamplituden  $\epsilon_0$ .



Figur 22: Sambandet mellan den polära och den rektangulära formen av den komplexa modulen.

Alternativt kan den komplexa modulen uttryckas på rektangulär form som

$$E^* = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \delta + i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin \delta = E_s + i E_l \quad (20)$$

där realdelen  $E_s$  kallas för *lagringsmodulen* och den imaginära delen  $E_l$  för *förlustmodulen*. Sambandet mellan modulerna illustreras i figur 22. Lagringsmodulen representerar den del av spänningen som är i fas med töjningen medan förlustmodulen representerar den del av spänningen som är  $90^\circ$  ur fas i förhållande till töjningen. En alternativ representation av den rektangulära formen är

$$E^* = E_s (1 + i \tan \delta),$$

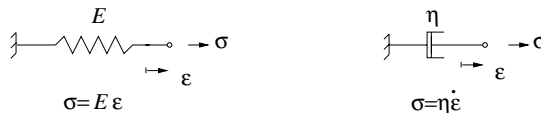
där  $\tan \delta$  kallas *förlustfaktorn*.

Som nämndes tidigare omvandlar viskoelastiska material mekanisk energi till värme vid cyklisk belastning. Den av hysteresiskurvan inneslutna ytan enligt figur 21 representerar energin som omvandlas till värme. Energin som omvandlas under en cykel är

$$U_c = \pi \sigma_0 \epsilon_0 \sin \delta$$

där det framgår att den omvandlade energin (dämpningen) ökar med fasvinkeln  $\delta$ .

### 3.4.2 Reologiska modeller



Figur 23: Enkla element i reologiska modeller: Den linjära fjädern och den linjära dämparen.

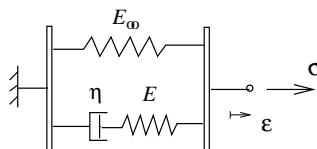
Ett illustrativt sätt att beskriva och tolka viskoelastiskt beteende är att använda reologiska modeller, som är analoga kombinationer av linjära fjädrar och dämpare.



Det mekaniska beteendet för ett specifikt viskoelastiskt material är analogt med beteendet för en motsvarande kombination av fjädrar och dämpare. I reologiska modeller ges det elastiska beteendet av fjädrarna och det viskösa beteendet av dämparna. Figur 23 visar grundelementen. Spänningen i den linjära fjädern är proportionell mot töjningen  $\sigma = E\epsilon$ . Spänningen i dämparen är proportionell mot töjningshastigheten  $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$  (pricken betecknar tidsderivata) och  $\eta$  är viskositetskoefficienten ( $Ns/m^2$ ).

Two enklare viskoelastiska modeller kan åstadkommas genom att använda en fjäder och en dämpare i parallell- respektive seriekoppling. Seriekoppling ger Maxwellmodellen som är en viskoelastisk fluidmodell. Parallellkoppling ger Kelvin modellen som är en viskoelastisk solidmodell, som är motsvarigheten på materialnivå till modellen i avsnitt 3.3. Kelvin modellen ger i vissa avseenden ett ofysikaliskt beteende. Exempelvis ger en plötsligt pålagd töjning en diskontinuerlig respons i form av en spänningsspic.

Den enklaste viskoelastiska solidmodellen som uppvisar ett rimligt fysikaliskt beteende ges av en fjäder parallellkopplad med ett Maxwellelement. Detta är den sk 'Standard Linear Solid' modellen, även kallad Zenermodellen, som är



Figur 24: Zenermodellen.

den enklaste viskoelastiska solidmodellen som beskriver verkliga fasta materials beteende genom att den ger ett acceptabelt relaxationsbeteende och begränsad krypningsrespons.

I samband med harmonisk excitation har Zenermodellen följande linjära dynamiska egenskaper:

- Den dynamiska modulen är oberoende av amplituden.
- Harmonisk excitation ger en färförskjuten harmonisk respons med samma frekvens som excitationen och hystereskurvan har elliptisk form.
- Den dynamiska modulen ökar med frekvensen. Elastiskt beteende (ingen dämpning, fäsvinkeln går mot noll) för både låga och höga frekvenser.

En mer utförlig genomgång av modellering av dynamiska materialegenskaper ges i [1].

### 3.5 Dynamiska fjäderstyvhetsuttryck

De statiska styvhetsuttrycken i avsnitt 2.4 kan konverteras till dynamiska genom att införa den komplexa modulen istället för den statiska modulen i de tidigare presenterade uttrycken. Till exempel, den komplexa skjuvmodulen

$$G^* = G_s(1 + i \tan \delta)$$

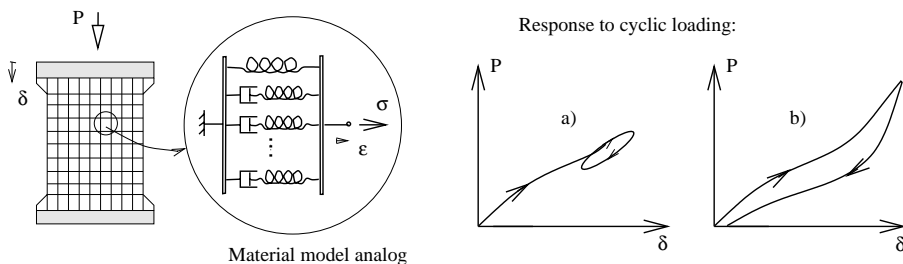
införd i det statiska uttrycket (7) för skjuvfjäders ger den komplexa styvheten

$$K_s^* = \frac{G^* A}{H}. \quad (21)$$

Den dynamiska styvheten och dämpningen för skjuvfjäders ges som absolutbeloppet respektive fasvinkeln av den komplexa styvheten (21).

Den dynamiska styvheten ger ett samband mellan förskjutningsamplituden  $u_0$  och kraftamplituden  $P_0$  enligt  $P_0 = |K_s^*|u_0$  och fasvinkeln mellan kraft och förskjutning ges av  $\delta = \arg(K_s^*)$ . Hysteresarbetet kan också bestämmas ur den komplexa modulen.

### 3.6 Möjligheter i finita elementprogram



Figur 25: *Viskoelastisk finit elementanalys: a) Små stationära vibrationer överlagrade på en stor statisk elastisk deformation b) Transient analys med godtyckliga stora töjningar.*

Konstitutiva modeller i finita elementkoder skall kunna hantera flexibla spänningar och töjningar. Vedertagna materialmodeller som är användbara vid analys av gummikomponenter är antingen hyperelastiska (olinjärt elastiska) enligt avsnitt 2.5.1 eller viskoelastiska enligt avsnitt 3.4. Viskoelasticitet erbjuder ett sätt att i beräkningarna ta med tids- och frekvensberoende egenskaper. Det är dock endast ett fåtal program såsom ABAQUS och MARC som har kapacitet att hantera stora töjningar och viskoelasticitet samtidigt. De konstitutiva modellerna i dessa koder kombinerar hyperelasticitet och viskoelasticitet genom en modifiering av linjär viskoelastisk teori som tar hänsyn till stora töjningar. Dessa visko-hyperelastiska modeller uppvisar olinjär elasticitet och rena töjningshastighetsberoende dämpningsegenskaper. En reologisk modell som är analog med dessa

viskoelastiska modeller illustreras i figur 25. Skillnaden jämfört med linjär viskoelasticitet är att fjädrarna är olinjära för att beskriva det hyperelastiska beteendet. Dämparna är dock av samma typ som i linjär viskoelasticitet.

Det finns två versioner av den visko-hyperelastiska materialteorin. En erbjuder ett sätt att hantera små viskoelastiska vibrationer pålagda på en stor statisk elastisk deformation vilket illustreras i figur 25 a) och den andra är avsedd för transient viskoelastisk analys av stora och godtyckliga töjningar vilket illustreras i figur 25 b).

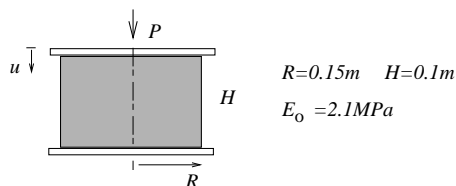
Experimentella undersökningar [5] som tidigare diskuterats, visar att ofyllda gummimaterial kan beskrivas av dessa viskoelastiska modeller. Material med mycket fyllmedel däremot, kräver en annan modell för att korrekt beskriva materialdämpningen.

Ett exempel på en materialegenskap som inte kan beskrivas korrekt av viskoelastisk teori är den dynamiska styvhetens beroende av amplituden. Detta diskuteras mer ingående i [1].

## 4 Exempel

### Ex 1

Bestäm tryckstyvheten  $K_c$  hos en gummicylinder med radien  $R$  och höjden  $H$  vulkad till stålplattor. Den initiala E-modulen  $E_0$  antas approximativt stämma överens med ett 50 IRHD material enligt tabell 1. Cylinderns dimensioner och  $E_0$  ges i figuren



**Lösning:** Fjäders tryckstyvhet  $K_c$  ges av (9) enligt

$$K_c = E_c(S) \frac{A}{H} \quad \text{med} \quad E_c(S) = E_0 (1 + 2k S^2)$$

enligt tabell 1 är faktorn  $k = 0.75$  för  $E_0=2.1$  MPa. Formfaktorn för den cylindriska komponenten är

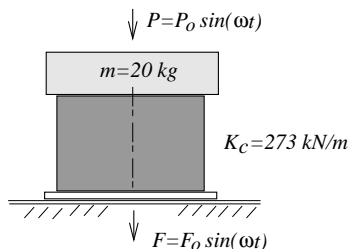
$$S = \frac{\pi R^2}{2\pi R H} = 0.75 .$$

Tryckstyvheten kan nu beräknas som

$$K_c = 2.1(1 + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.75^2) \frac{\pi \cdot 15^2}{10} = 273 N/mm .$$

### Ex 2

Bestäm resonansfrekvensen  $\omega_0$  och transmissibiliteten  $T$  vid vinkelfrekvensen  $\omega = 3\omega_0$  för den cylindriska komponenten med statiska fjäderstyvheten  $K_c=273$  N/mm som analyserades i Ex 1. Cylindern är sammankopplad med en massa  $m=20$  kg, enligt figuren



**Lösning:** Resonansfrekvensen  $f_0$  beräknas med hjälp av uttrycket (16),

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{273 \cdot 10^3}{20}} = 18.6 \text{ Hz.}$$

Transmissibiliteten ges av uttrycket (18),

$$T = \left| \frac{ku_0}{P_0} \right| = \left| \frac{1}{1 - 3^2} \right| = 0.125,$$

vilket betyder att 12.5% av excitationskraftens amplitud transmitteras genom dämparen och till underlaget vid frekvensen  $\omega = 3\omega_0$ .

.....  
**Ex 3**

Uppskatta den dynamiska styvheten  $K_{dyn}$  vid 10 Hz för den cylindriska komponenten som analyserades i Ex 1 och Ex 2. Gummimaterialet antas ha dynamiska skjuvmodulen  $G_{dyn} = 0.9$  MPa vid låga frekvenser.

**Lösning:** Statiska tryckstyvheten  $K_c$  enligt (9) är  $K_c^{stat} = E_c(S)A/H$  där  $E_c(S) = E_0(1 + 2kS^2)$ , beräknades i Ex 1 med  $E_0 = 2.1$  MPa vilket gav  $K_c = 273$  N/mm.

Den komplexa dynamiska styvheten kan uppskattas genom att ersätta den statiska E-modulen  $E_0$  med den komplexa modulen  $E^*$ . Genom att tillämpa sambandet mellan E-modulen och skjuvmodulen för ett inkompressibelt material ges den komplexa modulen av  $E^* = 3G^*$ . Därmed kan den dynamiska tryckstyvheten beräknas

$$K_c^{dyn} = \frac{3G_{dyn}}{E_0} K_c^{stat} = \frac{3 \cdot 0.9}{2.1} \cdot 273 \text{ N/mm} = 351 \text{ N/mm} .$$

.....

## 5 Textfrågor

### Avsnitt 2.1

- Hur definieras spänning, töjning och stretch för en dragbelastad stång?
- Visa hur man härleder styvhetsuttrycket för en stång.

### Avsnitt 2.2

- Skissa spännings-töjningskurvorna för ett gummimaterial i enaxlig spänning respektive enkel skjuvning.
- Hur yttrar sig Mullins effekten?
- Det finns material som är volymetriskt mycket styvare än gummi som ändå inte betraktas som inkompressibla. Varför betecknas gummi som i det närmaste inkompressibelt?

### Avsnitt 2.4

- Ange materialsambanden för enaxligt spänningstillstånd, skjuvning och ren tryckbelastning för ett linjärt elastiskt material.
- Ange sambandet mellan kraft och förskjutning för en skjuvfjäder.
- Beräkna formfaktorn för en kubisk tryckfjäder.

### Avsnitt 2.5

- Vilka är de grundläggande momenten vid analys av gummikomponenter med finita elementmetoden?
- Vad kallas och hur definieras funktionsuttrycket som är grunden för den hyperelastiska materialteorin?
- Rita en principskiss av Mooney-Rivlin modellen i enaxligt spänningstillstånd och skjuvning.
- Hur många materialparametrar har Yeoh modellen?

### Avsnitt 3.1

- Hur definieras den statiska och dynamiska skjuvmodulen?
- Hur påverkas dynamiska skjuvmodulen av en ökning i frekvens respektive temperatur?
- Ange ett typiskt värde på dynamiska skjuvmodulen för ett ordinärt gummimaterial vid rumstemperatur.

- Hur påverkas dynamisk styvhet och fasvinkel för ett fyllt gummimaterial av amplituden?
- Vad är mekanismen bakom utmattning av gummimaterial?
- Hur definieras krypning och relaxation?

### **Avsnitt 3.3**

- Förklara innebörden av begreppen egenfrekvens, resonansfrekvens och transmissibilitet.

### **Avsnitt 3.4**

- Hur tolkar man den dynamiska modulen i mätbara storheter?
- Ange hur mycket mekanisk energi som omvandlas till värme för en cykel vid sinusformad påtvingad vibration av ett viskoelastiskt material.
- Hur kombineras fjädrar och dämpare i den reologiska modell som kallas Zenermodellen?

### **Avsnitt 3.5**

- Beskriv hur man tar fram den dynamiska styvheten för en skjuvfjäder. Vilka storheter kopplas av de dynamiska styvhetsuttrycken?

### **Avsnitt 3.6**

- Beskriv de två möjligheter man har med finita elementmetoden för viskoelastisk analys av gummikomponenter.

## Referenser

- [1] AUSTRELL P.-E. , (1997), *Modeling of Elasticity and Damping for Filled Elastomers* Thesis, Report TVSM-1009, Lund Institute of Technology, Division of Structural Mechanics, Lund, Sweden, 1997.
- [2] CHARLTON D.J., YANG J., AND TEH K.K., (1993), *A Review of Methods to Characterize Rubber Elastic Behaviour for use in Finite Element Analysis*, Rubber Chemistry and Technology, Vol. 67, pp. 481-503, 1993.
- [3] FRIBERG G., (1986), *Konstruera i gummi*, Sveriges Mekanförbund, Stockholm, 1986.
- [4] GENT A.N., (1992), *Engineering with Rubber*, Carl Hanser Verlag, Munich, 1992.
- [5] HARRIS J. AND STEVENSON A., (1986), *On the Role of Nonlinearity in the Dynamic Behavior of Rubber Components*, Rubber Chemistry and Technology, Vol. 59, pp.741-764, 1986.
- [6] LINDLEY P.B., (1974), *Engineering Design with Natural Rubber*, MRPRA 1974.
- [7] YEOH O.H., (1990), *Characterization of Elastic Properties of Carbon-black-filled Rubber Vulcanizates* , Rubber Chemistry and Technology, Vol. 63, pp. 792-805, 1990.