



LUND UNIVERSITY

Konceptuell subitiserings som grund för förskoleklasslevers lärande om tals del-helhetsrelationer

Wästerlid, Catarina

2025

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Wästerlid, C. (2025). *Konceptuell subitiserings som grund för förskoleklasslevers lärande om tals del-helhetsrelationer*. [Doktorsavhandling (sammanläggning), Utbildningsvetenskap]. MediaTryck Lund.

Total number of authors:

1

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

Konceptuell subitisering som grund för förskoleklasslevers lärande om tals del-helhetsrelationer

CATARINA WÄSTERLID

INSTITUTIONEN FÖR UTBILDNINGSVETENSKAP | LUNDS UNIVERSITET



Konceptuell subitisering som grund för förskoleklasslevers lärande om tals del-helhetsrelationer

Catarina Wästerlid



LUNDS
UNIVERSITET

DOCTORAL DISSERTATION

Doctoral dissertation for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) at the Joint
Faculties of Humanities and Theology at Lund University to be publicly defended
on the 3 of October at 13.15 in LUX C126, Department of Educational Sciences,
Instrumentmakaregränden 1

Professor Nina Klang, Mälardalens universitet

Organization: LUND UNIVERSITY

Document name: Doctoral Dissertation

Date of issue: 20251003

Author(s): Catarina Wåsterlid

Titel and subtitle:

Konceptuell subitisering som grund för förskoleklasslevers lärande om tals del-helhetsrelationer

Conceptual subitizing as a basis for preschool-class pupils' learning of part-whole relationships of quantities and numbers

Abstract:

Syftet med avhandlingen är att bidra med kunskap om hur förskoleklasslevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal utvecklas över tid med och utan deltagande i specifikt utformade undervisningsinsatser, med fokus på lågpresterande elever. I avhandlingen undersöks särskilt hur denna förmåga kan stödjas med utgångspunkt i konceptuell subitisering, vilket definieras som en förmåga att direkt bestämma antalet objekt i en mängd (≥ 4), genom att mentalt strukturera och gruppera dessa i mindre antalsdelar. Arbetet tar sin utgångspunkt i forskning som visar att en förståelse för tals del-helhetsrelationer utgör en viktig grund för att utveckla grundläggande aritmetiska färdigheter och för senare prestationer i matematik. Avhandlingen är en sammanläggningsavhandling som består av en licentiatuppsatskappa och fyra delstudier (artikel I, II, III & IV). Den övergripande forskningsfråga som väglett syntesen av de fyra delstudiernas resultat är: Vilka aspekter av undervisningsdesign framstår som särskilt främjande för lågpresterande förskoleklasslevers utveckling av förmågan att uppfatta och flexibelt använda antal och tal? För att förstå sambandet mellan lärande och undervisning har variationsteori använts, då den riktar fokus mot *vad* som ska läras och *hur* undervisningens innehåll kan utformas och iscensättas för att möjliggöra lärande. Avhandlingens inriktning på de lågpresterande elevernas kunskapsutveckling har sin grund i specialdidaktikens förebyggande och innehållsmässigt inkluderande funktion inom ramen för den ordinarie matematikundervisningen. Data består av publicerade artiklar (litteraturoversikten), videoinspelade lektioner, observationer, för- och eftertester och en lärarenkät. Resultatet visar att undervisning som fokuserar på tals del-helhetsrelationer, stimulerar eleverns förmågan att direkt bestämma antal, möjliggör återkommande träningstillfällen med avgränsat matematiskt innehåll samt använder bedömningsverktyg för att identifiera och följa kunskapsutvecklingen är särskilt främjande för lågpresterande elevernas utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. Den största kunskapsutvecklingen skedde hos de lågpresterande eleverna, vilket överensstämmer med tidigare forskning som tyder på att strukturerad matematikundervisning med avgränsat innehåll kan vara särskilt gynnsam för denna elevgrupp.

Key words: förskoleklasslever, konceptuell subitisering, lågpresterande elever, undervisning och lärande

Language: Swedish

Number of pages: 121

ISBN: 978-91-90055-24-3 (print)

ISBN: 978-91-90055-25-0 (digital)

ISSN: 2002-6323

I, the undersigned, being the copyright owner of the abstract of the above-mentioned dissertation, hereby grant to all reference sources permission to publish and disseminate the abstract of the above-mentioned dissertation.

Signature



Date 2025-07-03

Konceptuell subitisering som grund för förskoleklasslevers lärande om tals del-helhetsrelationer

Catarina Wästerlid



LUNDS
UNIVERSITET

LUND STUDIES IN EDUCATIONAL SCIENCES NR 25

Copyright CC BY, Catarina Wästerlid

Licentiatuppsatskappa © Open Access (Malmö Studies in Educational Sciences: Licentiate Dissertation Series 2022:45)

Artikel I © Open Access (International Journal of Early Years Education)

Artikel II © Open Access (Accepted manuscript with minor revisions in Research in Mathematics Education)

Artikel III © Open Access (Problems of Education in the 21st Century)

Artikel IV © Open Access (International Journal for Lesson & Learning Studies)

Fakultet: Humanistiska och teologiska fakulteterna

Institutionen för utbildningsvetenskap

Avhandlingen är genomförd inom ramen för forskningsprojektet *Global bearbetning som en indikator på barns konceptuella subitiseringsförmåga i förskoleklass*, finansierat av Vetenskapsrådet (Dnr 2021–04147), huvudsökande Mona Holmqvist.

ISBN: 978-91-90055-24-3 (tryckt publikation)

ISBN: 978-91-90055-25-0 (digital publikation).

ISSN: 2002-6323

Tryckt i Sverige av Media-Tryck, Lunds universitet

Lund 2025



Media-Tryck is a Nordic Swan Ecolabel
certified provider of printed material.
Read more about our environmental
work at www.mediatryck.lu.se

MADE IN SWEDEN 

Innehållsförteckning

Förord.....	8
Avhandlingens ingående delar	10
Kapitel 1. Inledning	12
Problemområdet	13
Problemområdet i relation till undervisning och lärande	17
Problemområdet i relation till låga prestationer	17
Problemområdet i en svensk förskoleklasskontext.....	19
Syfte och frågeställningar.....	20
Avhandlingens positionering.....	21
Avhandlingens disposition	22
Kapitel 2. Tidigare forskning	24
Medfödda numeriska förmågor	24
ANS – ungefärlig antalsbestämning.....	24
OTS – exakt antalsbestämning	25
Konceptuell subitiserings.....	25
Groupitizing.....	27
(Upp)räkning	27
Antal och tal	29
Grundläggande aritmetiska basfärdigheter.....	31
Undervisningsinsatser i matematik	32
Learning study	33
Sammanfattning	35
Kapitel 3. Teoretisk utgångspunkt.....	36
Variationsteori	37
Lärandeobjektets nödvändiga och kritiska aspekter	38
Urskiljning, variation och simultanitet	40
Variationsmönster.....	40
Utmaningar.....	43
Kapitel 4. Metod	45
Metodologiska utgångspunkter	45

Analysmetod för syntes.....	48
Metod och genomförande.....	49
Delstudie I: Systematisk litteraturöversikt	49
Delstudie II: Korrelationsstudie mellan två bedömningsverktyg	50
Delstudie III: Pilotstudie – konceptuell subitisering	55
Delstudie IV: Undervisningsinsats med kontrollgrupp	57
Etiska aspekter.....	65
Kapitel 5. Resultat	68
Delstudie 1: Systematisk litteraturöversikt.....	68
Delstudie II: Korrelationsstudie mellan två bedömningsverktyg	71
Delstudie III: Pilotstudie – konceptuell subitisering	73
Delstudie IV: Undervisningsinsats med kontrollgrupp	75
Syntes av samtliga delstudiers resultat.....	80
Fokus på tals del-helhetsrelationer	80
Stimulering av förmågan att direkt bestämma antal.....	81
Bedömningsverktyg för att identifiera och följa elevernas kunskapsutveckling	82
Upprepade träningstillfällen med avgränsat innehåll	82
Kapitel 6. Diskussion	84
Resultatdiskussion.....	84
Fokus på tals del-helhetsrelationer	84
Stimulering av förmågan att direkt bestämma antal.....	86
Bedömningsverktyg för att identifiera och följa elevernas kunskapsutveckling	87
Upprepade träningstillfällen med avgränsat innehåll	89
Slutsatser och implikationer för praktiken	90
Studiens tillförlitlighet.....	91
Metoddiskussion.....	92
Begränsningar	95
Fortsatt forskning	96
Summary	98
Background	98
Aim and research questions.....	99
Theoretical framework	100
Method	101
Results.....	102
Emphasis on part-whole relationships.....	103

Stimulation of rapid quantity recognition.....	103
Effective use of assessment tools	103
Repeated, targeted practice.....	104
Conclusions	104
Limitations and further research	105
Referenser	106
Licentiatuppsatskappa	
Artikel I - IV	

Förord

Mitt intresse för elevers matematikutveckling, särskilt avseende antal och tal, har sin grund i alla de möten jag haft med elever under mina 19 år som matematiklärare och speciallärare i matematik i årskurs 1–6. Min erfarenhet är att de flesta elever utvecklar en god förtrogenhet med antal och tal, vilket gör att de kan hantera dem på ett flexibelt och effektivt sätt. Samtidigt har jag mött elever som inte når detta flyt, utan i stället fastnar i mödosamma och omständliga beräkningar. Dessa erfarenheter har väckt frågor hos mig: Vad behöver elever egentligen förstå och utveckla kunnande om för att flexibelt kunna hantera antal och tal? Hur kan matematikundervisningen utformas i de tidiga skolåren som möjliggöra delaktighet och lärande för alla elever avseende antal och tal? Genom detta avhandlingsarbete har jag fått möjlighet att fördjupa mig i dessa frågeställningar.

Jag vill framför allt rikta ett varmt och innerligt tack till mina handledare, huvudhandledare professor Mona Holmqvist och biträdande handledare professor Kristina Juter. Ni har varsamt och med trygg hand stöttat och guidat mig framåt i processen. Min forskarutbildning har varit både lång och krokig, med såväl ”urspårning” som ”återspårning”. Att jag hamnade i ”återspårning” efter licentiatuppsatsen har jag dig att tacka för Mona, som bjöd in mig att vara med i ett forskningsprojekt. Du har, som huvudhandledare och projektledare, följt mig både under min tid som doktorand inom forskarskolan *Special Education for Teacher Educators* (SET) vid Malmö universitet, och som externfinansierad doktorand på Lunds universitet inom ramen för forskningsprojektet *Global bearbetning som en indikator på barns konceptuella subitiseringsförmåga i förskoleklass*. Jag är djupt tacksam för din generositet, ditt stöd, den vägledning och det engagemang du har visat. Din klarsynthet och förmåga att se lösningar i stället för problem är något som jag särskilt kommer att bära med mig. Kristina, det har varit en ynnest att få diskutera avhandlingsarbetet med dig, både med tanke på dina gedigna kunskaper i matematikdidaktik och din ödmjuka hållning till såväl forskning som till dina medmänniskor.

Ett varmt tack vill jag även rikta till Sara Lenninger och Helena Roos, som generöst tog sig an min text och bidrog med värdefulla synpunkter och diskussioner vid mitt 75- respektive 90-procentsseminarium. Era insiktsfulla kommentarer och tankar, förankrade i olika teoretiska perspektiv och forskningssammanhang, har hjälpt mig att förstå och (förhoppningsvis) tydligare positionera arbetet i relation till de kunskapsområden som avhandlingen tar avstamp i. Jag hoppas att avhandlingens olika delar inte längre är ”all over the place”, utan att de nu hamnat i en mer logisk och följsam ordning.

Jag vill också uttrycka min tacksamhet till Lotta Leden och Ingemar Holgersson från Högskolan Kristianstad, som gav mig värdefull guidning och stöttning under

arbetet med min licentiatuppsats. Ett stort tack även till Lena Löfgren, som med stort engagemang stöttade mig i tolkningen av policydokument rörande externfinansierade doktorandanställningar.

Sist men inte minst vill jag tacka alla fantastiska och engagerade människor – nya, gamla och potentiella kollegor – som jag haft förmånen att möta under mina två omgångar som doktorand. Ingen nämnd och ingen glömd, ni har alla på ett eller annat sätt inspirerat mig både på ett vetenskapligt och personligt plan. Sist men inte minst vill jag tacka min familj och mina vänner för alla uppmuntrande tillrop under resans gång. Det har inte varit lätt att hålla reda på om jag är ”snart klar”, ”delklar” eller ”helklar”. Ni har alla, på olika sätt, bidragit till att jag lyckats hålla en någorlunda sund distans till avhandlingsarbetet.

Min älskade bästa familj; Stefan, Elin, Gustav och min trofasta skrivbordskompis Bella (voff, voff).

Tormestorp, juli 2025

Avhandlingens ingående delar

Avhandlingen är en sammanläggningsavhandling som förutom avhandlingens kappor består av licentiatuppsatsens kappor och fyra delstudier (artikel I, II, III & IV). Avhandlingen bygger vidare på författarens licentiatuppsats som genomfördes inom forskarskolan *Special Education for Teacher Educators* (SET) (Vetenskapsrådet Dnr: 2017–06039) vid Malmö universitet (examinerad den 1 juni 2022). I avhandlingen fördjupas resultatet av licentiatuppsatsen avseende hur lågpresterande förskoleklass elever grundläggande antals- och taluppfattning kan stödjas i undervisningen. Av de fyra inkluderade artiklarna i avhandlingen ingår artikel I och III (vilken benämns artikel II i licentiatuppsatsen) i licentiatuppsatsen. En del av innehållet i licentiatarbetets kappor har omarbetats, fördjupats och vidareutvecklats i avhandlingens kappor. Det gäller främst avhandlingens kapitel 1 där problemområdet i licentiatuppsatsen främst behandlades utifrån ett lärarperspektiv, medan perspektivet har förskjutits mot ett elevperspektiv i avhandlingen. Dessutom har, i avhandlingens kapitel 2, genomgången av den tidigare forskningen uppdaterats och fördjupats i jämförelse med licentiatuppsatsens kapitel 2. I kapitel 4 i avhandlingen presenteras metod och genomförande för artikel I och III mer översiktligt jämfört med den mer utförliga redogörelsen i licentiatuppsatsen. De tillkommande studierna i avhandlingen har godkänts av etikprövningsmyndigheten varför avsnittet om etiska aspekter i avhandlingen är reviderat. Den inledande resultatpresentationen av delstudierna I och III i kapitel 5 i avhandlingen är en sammanfattning baserad på den mer detaljerade redogörelsen i licentiatuppsatsen.

Licentiatuppsatsens kappor

Wästerlid, C. (2022). *Specialdidaktiska perspektiv på grundläggande antals- och taluppfattning*. [Licentiatavhandling, Malmö universitet]. Media-Tryck, Lunds universitet.

Artikel I

Wästerlid, C. (2020). Low-achieving grade K-3 children's early numeracy competences: a systematic literature review. *International Journal of Early Years Education*, 30(4), 748–765. <https://doi.org/10.1080/09669760.2020.1848524>

Artikel II

Holmqvist, M., Tutunjian, D. & Wästerlid, C. Comparing Screening Tools for Subitizing Abilities in 5–6-Year-Olds: Identifying Early Numeracy Challenges. (Accepterat manus med mindre revideringar i tidsskriften *Research in Mathematics Education*).

I denna artikel har jag varit delaktig i alla delar av studien och artikelskrivandet förutom den kvantitativa analysen.

Artikel III

Wästerlid, C. (2020). Conceptual subitizing and preschool class children's learning of the part-part-whole relations of number. *Problems of Education in the 21st Century*, 78(6):1038–1054. <http://dx.doi.org/10.33225/pec/20.78.1038>

Artikel IV

Wästerlid, C., Holmqvist, M., & Tutunjian, D. (2024). Preschool class pupils' enhanced subitizing abilities by learning study interventions. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 13(5), 61–75. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2024-0066>

Denna artikel har jag varit huvudansvarig för och även haft det övergripande ansvaret för den deskriptiva kvantitativa analysen.

Kapitel 1. Inledning

Det är väl känt att grundläggande kompetenser i matematik, det vill säga de kompetenser som krävs för att utföra enkla beräkningar och lösa vardagliga matematiska problem, är av central betydelse för individens möjligheter att aktivt delta i och engagera sig i samhällslivet och hantera olika vardagliga situationer som kräver matematiskt kunnande (Chetty m.fl., 2011; Parsons & Bynner, 2005). Bristande matematikkunskaper kan få konsekvenser för såväl elever i skolan som vuxna i allmänhet, inte bara i akademiska och praktiska sammanhang, utan även på ett personligt plan, exempelvis genom negativ påverkan på självkänsla och motivation (Dowker, 2019; Skaalvik m.fl., 2015). Denna avhandling utgår från antagandet att förbättrade studieresultat i matematik i grundskolan kan uppnås genom tidiga och förebyggande insatser under de första skolåren. Sådana insatser kan ses som ett första, viktigt steg i arbetet med att motverka den oroande utvecklingen att 11,7 procent av eleverna som lämnar den nioåriga obligatoriska grundskolan i Sverige inte uppnår godkänt betyg i matematik (Skolverket, 2023).

Även om resultatet av den senaste rapporten, *Trends in Mathematics and Science Study* (TIMSS) (Skolverket, 2024b), visar att svenska elever i årskurs 4 och 8 har förbättrat sina resultat sedan TIMSS-mätningen 2019, är andelen elever som inte når upp till den lägsta kunskapsnivån (betyget E) oförändrad. Detta innebär att skillnaderna mellan låg- och högpresterande elever i årskurs 4 och 8 inte bara kvarstår, utan de har till och med ökat. I förhållande till skollagens skrivning om skolans kompensatoriska uppdrag att ”uppväga skillnader i barnens och elevernas förutsättningar att tillgodogöra sig utbildningen” (SFS 2010:800, 1 kap. 4 §) kan dessa resultat ses som en utmaning för det svenska utbildningssystemet.

Tidigare forskning visar att elevers matematikkunskaper i början av den obligatoriska skolgången har ett tydligt samband med deras fortsatta prestationer inom ämnet (Jordan m.fl., 2009; Morgan m.fl., 2009). Morgan m.fl. (2009) har till exempel rapporterat att förskoleklass elever, som vid upprepade tillfällen låg inom den tionde lägsta percentilen avseende resultat i matematiktester i förskoleklassen, i stor utsträckning tenderade att prestera mer än två standardavvikelser under genomsnittet på matematiktest i årskurs 5. Detta tyder på att vissa elever riskerar att hamna i en negativ spiral av låga prestationer redan tidigt i utbildningen, vilket är oroväckande. Kunskapsutvecklingen under de tidiga skolåren (från förskoleklass till årskurs 2) tycks dessutom ske snabbare för elever med en initialt hög matematisk

kompetens i jämförelse med elever med en initial låg matematisk kompetens (Aunola m.fl., 2004).

En problematik, relaterat till lågpresterande elevers kunskapsutveckling, belyses även i Skolinspektionens slutredovisningsrapport om garantin för tidiga stödinsatser i förskoleklass och årskurs 1–3 (Skolinspektionen, 2024). I rapporten framkommer att 28,4 procent av lärarna som undervisar i matematik i de tidiga skolåren, och 44,8 procent av de lärare som har specialpedagogisk kompetens, uppger att de har behov av kompetensutveckling för att kunna stödja alla elevers matematikutveckling, särskilt de elever som identifierats vara i behov av extra stöd i de obligatoriska kartläggnings- och bedömningsverktygen. Detta är särskilt bekymmersamt i ljuset av skolans kompensatoriska uppdrag (SFS 2010:800), och det understryker vikten av forskning som kan bidra med kunskap om hur matematikundervisningen kan utformas för att främja alla elevers tidiga lärande i ämnet. Resultaten av licentiatuppsatsen (Wästerlid, 2022), belyser den specialdidaktiska kompetens som krävs av lärare för att undervisa lågpresterande elever. Denna kompetens innefattar fördjupad kunskap om centrala aspekter och vanliga trösklar i elevers kunskapsutveckling avseende grundläggande antal- och taluppfattning, kunskap om elevers individuella variationer när det gäller att förstå och hantera antal och tal, samt fördjupad förståelse för hur lågpresterande elevers kunskapsutveckling kan stödjas i undervisningen.

Sammanfattningsvis pekar detta på ett behov av forskning om hur elevers tidiga matematikutveckling kan främjas inom den ordinarie matematikundervisningen, med särskilt fokus på lågpresterande elever som inte utvecklas som förväntat, vilket denna avhandling adresserar.

Problemområdet

Ett centralt innehållsområde i den tidiga matematikutvecklingen är elevers förståelse för antal och tal (Anghileri, 2006; Dowker, 2019; Kilpatrick m.fl., 2001). I en omfattande forskningsöversikt om elevers matematikutveckling från förskoleklass till årskurs 8, framhåller Kilpatrick m.fl. (2001) att den tidiga matematikundervisningen bör lägga särskild vikt vid att utveckla elevers begreppsliga förståelse och flexibla användning av tal. Detta eftersom denna kompetens är avgörande för att eleverna ska kunna genomföra beräkningar med säkerhet och flyt inom matematikens olika delområden. Att främja denna typ av förståelse i ett tidigt skede utgör således en viktig grund för vidare matematisk utveckling och framgång. I den engelskspråkiga forskningslitteraturen används olika begrepp för att beskriva grundläggande kompetens i att förstå och använda antal och tal, såsom *number sense* (Anghileri, 2006; Dehaene, 2011), *early numeracy* (Aunio & Räsänen, 2015; Mononen m.fl., 2014), *numberness* (Sharma,

2015) och *number competence* (Jordan m.fl., 2009). Inom neurovetenskaplig och kognitionsvetenskaplig forskning används begreppet *number sense* ofta för att beskriva icke-symbolisk antalsförståelse, det vill säga förmågan att uppfatta, jämföra och manipulera antal (Dehaene, 2011). Inom matematikdidaktisk forskning har *number sense* en bredare innebörd och omfattar både icke-symbolisk och symbolisk (räkneord och siffror) talförståelse (Anghileri, 2006; Sharma, 2015). Även Aunio och Räsänen (2015) skiljer mellan icke-symbolisk och symbolisk talkänsla i en modell som, baserad på longitudinella forskningsstudier, tydliggör vilka grundläggande matematiska kompetenser elever i åldern 5 till 8 år bör ges möjlighet att utveckla i matematikundervisningen. Forskarna använder *early numeracy* som ett övergripande begrepp relaterat till följande kompetenser:

1. symbolisk och icke-symbolisk talkänsla
2. förståelse för matematiska relationer
3. räknefärdigheter
4. grundläggande färdigheter i aritmetik.

Sharma (2015) använder begreppet *numberness* för att beskriva relationen mellan symbolisk och icke-symbolisk talkänsla. Begreppet innefattar sambandet mellan olika representationer av antal och tal, såsom visuella (till exempel konkreta objekt), fonologiska (exempelvis räkneordet fem) och grafiska (till exempel talet 5). Forskaren argumenterar för att visuella antalsgrupperingar kan stödja barns förståelse av tals del-helhetsrelationer, det vill säga hur tal kan delas upp och sättas samman, och därigenom hjälpa dem att utveckla mentala bilder av talfakta (*sight facts*). Detta utgör i sin tur en viktig grund för utvecklingen av kunskaper i grundläggande aritmetik, såsom addition och subtraktion. Vikten av att tidigt utveckla denna känsla för antal och tal framkommer i forskning som visar på samband mellan tidig talförståelse och senare matematikprestationer. Jordan m.fl. (2009) har till exempel rapporterat att förskoleklasslevers talförståelse (*number competence*) – definierad som förståelse för talens innebörd, deras representationer och relationer – är en signifikant prediktor för matematiska prestationer i årskurs 3. Liknande resultat presenteras av Krajewski och Schneider (2009), vars studie visar att 6-åringars förståelse för sambandet mellan antal och tal (*quantity-number competencies*) förutspår deras prestationer i matematik i årskurs 4. Vikten av att utveckla en god förmåga att förstå och hantera antal och tal betonas även i forskning om matematiksvårigheter, där det framkommer att denna förmåga minskar risken för framtida svårigheter i ämnet (Jordan m.fl., 2009; Morgan m.fl., 2009; Zhang m.fl., 2020). En effektiv återkallelse av grundläggande talkombinationer underlättar lösningen av mer avancerade problem, medan bristande förmåga kan innebära ett hinder för vidare matematikutveckling (Andersson, 2008; Baroody m.fl., 2009; Jordan m.fl., 2003). En typisk identifierad utmaning för elever i matematiksvårigheter är att snabbt och korrekt återge grundläggande talfakta.

Baroody m.fl. (2009) menar att svårigheterna kan kopplas till att eleven inte utvecklat kunnande om de ensiffriga additionskombinationerna (summan ≤ 20) och dess omvända operation subtraktion (till exempel $9 + 3 = 12$ och $12 - 9 = 3$). Denna problematik har även belysts av Gray och Tall (1994) som har rapporterat om skillnader i aritmetiska tankemodeller mellan låg- och högpresterande elever. I en intervjustudie med 72 deltagande 7–12-åringar identifierade forskarna två skilda sätt som eleverna hanterade aritmetiska uppgifter på. Högpresterande elever visade förmåga att flexibelt sätta samman och dela upp tal, medan lågpresterande elever främst förlitade sig på räkneprocedurer, såsom uppåt- och nedåträkning. Liknade skillnader har rapporterats av Schindler m.fl. (2020) i en ögonrörelsemätningssstudie. Studien visar att elever med typisk matematikutveckling tenderar att simultant uppfatta antalet objekt (prickar), medan elever i matematiksvårigheter i större utsträckning räknar objekten en i taget.

Förskoleklass elever använder spontant uppräkningsstrategin ”uppräknig av alla föremål” (concrete counting all) för att lösa enkla additions- och subtraktionsproblem (Baroody, 1987). Strategin innebär uppräknig med en i taget med hjälp av konkreta objekt såsom fingrar eller kuber från det första talet (1, 2 och 1, 2, 3, 4 blir tillsammans 1, 2, 3, 4, 5, 6). Även om uppräkningsstrategier utgör ett viktigt steg i den tidiga matematikutvecklingen, framhåller Hopkins m.fl. (2020) att ett ensidigt användande av sådana strategier kan hindra elever från att känna igen och använda talrelationer. Forskarna betonar därför att elever också behöver stöd i att utveckla mer effektiva, icke uppräkningsbaserade strategier.

En icke uppräkningsbaserad strategi är subitisering som definieras som en förmåga att direkt och korrekt känna igen visuellt representerade antal utan att räkna dem ett i taget (Clements, 1999). Betydelsen av denna visuella förmåga för den tidiga matematikutvecklingen har varit föremål för omfattande forskning. Kroesbergen m.fl. (2009) fann till exempel att subitiseringsförmåga kunde förklara upp till 22 procent av variationen i 5–6-åringars räknefärdigheter. Även resultaten från Yun m.fl. (2011), baserade på 565 deltagande 5,5–7,5-åringar, visade ett positivt samband mellan subitiseringsomfång och matematiskt kunnande. Ytterligare stöd för subitiseringsförmågans betydelse har rapporterats av Penner-Wilger m.fl. (2007) som, i en studie med 146 elever i åldern 5–7 år, visade att förmågan att direkt avgöra antal upp till tre utan uppräknig korrelerar med flera aspekter av talförståelse – såsom taligenkänning, förståelse av $N+1$ (talet efter ett givet tal), kunskap om positionssystemet samt grundläggande aritmetiska färdigheter. Liknade resultat har rapporterats av Cruz m.fl. (2024), som visar att subitisering, tillsammans med räkning och antalsdiskriminering, är en av de förmågor i förskoleklass som uppvisar starkast samband med matematikprestationer i årskurs 1. Subitiseringsförmågans roll i den tidiga matematikutvecklingen bekräftas av Fischer m.fl. (2008a), som i en interventionsstudie med 7–12-åringar, även visat att denna kan stimuleras genom systematisk träning (Fischer m.fl., 2008b). Ytterligare stöd för subitiseringsförmågans betydelse i barns utveckling av taluppfattning lyfts fram i

flera andra studier, särskilt i relation till förståelse för tals värde (Butterworth, 2005; Paliwal & Baroody, 2020), antalskonservering (MacDonald, 2015; MacDonald m.fl., 2015), tals relationer (Jung m.fl., 2013; Sayers m.fl., 2016; Young-Loveridge, 2002) samt grundläggande aritmetiska färdigheter (Clements m.fl., 2019).

Trots att studier inom kognitionsvetenskap, utvecklingspsykologi och matematikdidaktik visar att subitiseringsförmåga är en central förmåga i den grundläggande matematikutvecklingen, hävdar Clements m.fl. (2019), att subitiseringsförmåga är en "neglected quantifier in educational practice" (s. 13). I linje med denna problematik lyfter Mononen m.fl. (2014) och Sterner m.fl. (2019) fram att få interventionsstudier har genomförts med 6-åringar, en åldersgrupp som kan antas kunna ha stöd av subitiseringsförmåga i utvecklingen av både icke-symbolisk som symboliska taluppfattningar samt förståelse för sambandet mellan dessa. Denna bakgrund utgör, tillsammans med forskning som visar att elever börjar skolan med varierande förkunskaper i matematik (Aunio m.fl., 2014; Purpura m.fl., 2013; Toll & Van Luit, 2014), ett motiv för att erbjuda förskoleklass elever en matematikundervisning som stimulerar och utvecklar deras subitiseringsförmåga. Valet av problemområde kan även relateras till skolans förebyggande uppdrag, samt till forskning som understryker vikten av att tidigt erbjuda stödinsatser till elever som riskerar att hamna i svårigheter inom matematikens grundläggande områden. Detta för att minska risken för att eventuella svårigheter i matematik fördjupas eller blir beständiga (Gersten m.fl., 2009; Mononen m.fl., 2014).

Inom matematikdidaktisk forskning görs en distinktion mellan perceptuell och konceptuell subitiseringsförmåga (se till exempel Clements, 1999). Medan perceptuell subitiseringsförmåga avser den omedelbara och direkta förmågan att uppfatta antal i små mängder (≤ 4), innefattar konceptuell subitiseringsförmåga numeriskt kunnande och en förmåga att medvetet gruppera ett större antal (≥ 4) i mindre perceptuellt subitiserbara antalsdelar (Clements m.fl., 2019). Mot denna bakgrund undersöker avhandlingen hur förskoleklass elevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal kan stödjas, med särskilt fokus på konceptuell subitiseringsförmåga. Denna övergripande förmåga omfattar såväl icke-symbolisk som symbolisk taluppfattning, vilket innefattar att kunna bestämma, uppskatta, sätta samman och dela upp antal, samt att förstå sambanden mellan icke-symboliska och symboliska representationer. I avhandlingen förstås konceptuell subitiseringsförmåga som en specifik aspekt av denna övergripande förmåga, med betoning på visuell och icke-symbolisk antalsförståelse. Sharma (2015) menar att elever kan utveckla mentala representationer av talfakta med hjälp av visuella grupperingar eller kluster i talområdet 1 till 10. Han argumenterar för att visuella grupperingar ger elever möjlighet att mentalt sätta samma och dela upp tal, vilket är en viktig grund för att utveckla förståelse för tals del-helhetsrelationer och grundläggande aritmetiska färdigheter, såsom att förstå att fyra kan uttryckas som tre och ett, ett och tre eller som två och två.

Sambandet mellan undervisning och lärande är i detta sammanhang centralt för att förstå på vilka sätt undervisning kan främja förskoleklasselevers möjligheter att utveckla sin förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal.

Problemområdet i relation till undervisning och lärande

Kullberg m.fl. (2024) och Kansanen och Meri (1999) understryker att undervisning inte nödvändigtvis leder till lärande, och de argumenterar för att undervisning därför bör ses som en handling som strävar efter att främja elevens lärande. Hiebert och Grouws (2007) för en liknande diskussion, när de beskriver undervisning som klassrumsinteraktioner mellan lärare och elever med syftet att främja elevers uppnående av specifika lärandemål relaterat till ett innehåll. Vidare menar Hiebert och Grouws (2007) att sambandet mellan undervisning och lärande är en central forskningsutmaning, eftersom sambandet är komplext och påverkas av många samverkande variabler. Detta har beaktats i avhandlingen genom att olika metoder och forskningsdesigner har använts i delstudierna. Kullberg och Ingerman (2022) skiljer mellan kunskap och lärande, där kunskap beskrivs som en relation mellan den som lär sig och det som ska läras vid en given tidpunkt, medan lärande beskrivs som en förändring i denna relation. I avhandlingen betraktas kunskap, i enighet med Kullberg och Ingerman (2022), inte endast som kunskap om ett innehåll, utan också som färdigheter och förmågor (capability). Givet Kullberg och Ingermans definition förstås kunskap som kunskap om innehåll eller fenomen, färdigheter och förmågor som, vid en given tidpunkt, kan värderas och bedömas i relation till det som ska läras. I avhandlingens klassrumsstudier genomförs denna bedömning med hjälp av olika bedömningsverktyg, där en ökning av resultaten mellan bedömningstillfällena tolkas som ett belägg för kunskapsutveckling och som ett tecken på lärande.

Problemområdet i relation till låga prestationer

Inom specialdidaktiken ligger ett särskilt fokus på att erbjuda lågpresterande elever innehållsinkluderande lärsituationer, oavsett de bakomliggande orsakerna till elevens låga prestationer (Holmqvist m.fl., 2024). I licentiatuppsatsens kapp (Wästerlid, 2022) presenterades en modell som tydliggör relationen mellan specialdidaktisk och generell matematisk kompetens, kallad *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball m.fl., 2008). Denna kompetens benämns *Specialdidactic Mathematical Knowledge for Teaching* (SMKT). I modellen förstås specialdidaktisk kompetens som ett komplement och en fördjupning av MKT, med särskilt fokus på hur elever som inte utvecklas i matematik som förväntat, kan stödjas i sin lärandeprocess. Föreliggande avhandlings specialdidaktiska kunskapsbidrag är att fördjupa förståelsen för hur undervisning kan bidra till att stärka lågpresterande elevers kunskapsutveckling avseende till antal och tal. Detta är särskilt angeläget då det finns begränsad forskning om hur denna elevgrupp

kunskapsutveckling ser ut, både inom detta innehållsområde och inom andra (Holmqvist m.fl., 2024). Holmqvist m.fl. (2024) definierar specialdidaktik som ett forskningsområde som förenar såväl specialpedagogiska som didaktiska frågor kopplat till vad, hur och varför (Holmqvist m.fl., 2024). I specialdidaktik förenas därmed Englunds (2004) definition av didaktik som en innehållsrelaterad pedagogisk forskning, och Ahlbergs (2014) syn på specialpedagogiken som förebyggande och stödjande med syftet att alla barn och elever ska ges möjlighet att utvecklas så långt som möjligt utifrån utbildningens mål och inom ramen för den ordinarie verksamheten. I specialdidaktiken ligger tonvikten på lågpresterande elever, det vill säga elever som inte utvecklas som förväntat inom ett specifikt innehållsområde enligt gällande styrdokument (Skolverket, 2022b). Det är dessa elever som utgör avhandlingens huvudsakliga intresseområde.

I avhandlingen används begreppet lågpresterande elever i enlighet med Dyson m.fl. (2015) och Engström (2015), som menar att det är ett neutralt och beskrivande begrepp för att definiera de elever som presterar lägst inom en given grupp i en given kontext. Precis som Engström (2015) understryker betyder det inte att de lägst presterande eleverna är i matematiksvårigheter, utan bara att de vid en viss tidpunkt och kontext presterar lågt.

Inom forskning om matematiksvårigheter definieras låga prestationer ofta som resultat under den 25:e percentilen på olika typer av matematiktester, i förhållande till övriga elever i den aktuella elevgruppen, medan prestationer under den 10:e percentilen klassificeras som extremt låga (Murphy m.fl., 2007; Tolar m.fl., 2016). Både Dowker (2005) och Tolar m.fl. (2016) framhåller att denna typ av klassificering oftast görs med avseende på aritmetiska färdigheter, och Dowker (2005) argumenterar därför för att termen aritmetiska svårigheter vore mer passande än matematiksvårigheter. Mazzocco (2007) använder begreppet *mathematical difficulties* (matematiksvårigheter) för att beskriva låga prestationer under den 35:e percentilen. För att beteckna de allra lägsta prestationerna, det vill säga under den 10:e percentilen, används i stället termerna *mathematics learning disability* eller *developmental dyscalculia* (matematiska inlärningssvårigheter eller dyskalkyli). Mazzocco (2007) understryker dock att majoriteten av de elever som presterar under den 35:e percentilen på matematiktester inte har matematiska inlärningssvårigheter, men att denna gräns kan användas för att identifiera elever som av någon anledning inte presterar som förväntat.

Användandet av olika begrepp kopplas ofta till hur svårigheterna förklaras, där matematiska inlärningssvårigheter antyder en biologiskt grundad problematik, medan begreppet matematiksvårigheter främst förklaras av externa faktorer såsom undervisning och utbildning, motivation, ångslan och sociokulturella faktorer (Mazzocco, 2007; Engström, 2015; Karlsson, 2019). Ett utmärkande kännetecken för matematiska inlärningssvårigheter är ihållande svårigheter i matematik, där problemen ofta har sin grund i brister i centrala kognitiva processer såsom arbetsminne, informationsåterkallning och uppmärksamhetsreglering (Morgan

m.fl., 2016). Morgan m.fl. (2016) menar att denna typ av svårigheter därför är svårare både att förebygga och överbygga än låga prestationer som är av en mer tillfällig och övergående karaktär. En problematik som både Dowker (2005) och Huijsmans m.fl. (2020) lyfter i samband med att särskilja olika typer av matematiksvårigheter, är att dessa svårigheter är heterogena och mångfasetterade, samt att det finns begränsat empiriskt stöd för att identifiera dem på ett tillförlitligt sätt. Eftersom syftet med denna avhandling inte är att undersöka orsakerna till elevers låga prestationer, används genomgående begreppet lågpresterande elever.

Problemområdet i en svensk förskoleklasskontext

Förskoleklassen är sedan 1998 en del av det obligatoriska skolsystemet (SFS 2010:800, 7 kap. 4 §). Skolplikten inträder höstterminen det kalenderår då barnet fyller sex år. Lärare i förskoleklass har, i likhet med övriga lärare inom skolsystemet, ett grunduppdrag och ett övergripande uppdrag. I grunduppdraget ingår, utöver att främja elevernas utveckling av demokratiska värderingar och normer, även att stimulera deras lärande och kunskapsutveckling. Det övergripande uppdraget handlar om att förbereda eleverna för fortsatt utbildning. Utifrån att förskoleklassen sedan 1998 är en del av det obligatoriska skolsystemet, ingår i en förskoleklasslärares uppdrag att skapa en bro mellan informell och formell matematik (SFS 2010:800). Ansvar för elevernas utveckling vilar på läraren, och i denna avhandling har klassrumsstudierna därför skett i samverkan med lärarna. Verksamheten har ofta betecknats som ett gränsland mellan förskola och skola (Ackesjö, 2014). I en lagrådsremiss om en tioårig grundskola (Lagrådsremiss, 2025) föreslås dock att förskoleklassen upphör som egen skolform och att grundskolan utökas med ett år, genom en ny första årskurs från det år eleverna fyller sex år. Förslaget syftar till att tidigt stärka förutsättningarna för en likvärdig utbildning av hög kvalitet. I utredningsförslaget föreslås att den garanterade undervisningstiden i lågstadiet utökas med 534 timmar och att dessa främst ska användas i den tidiga läs-, skriv- och matematikinläringen.

I grundskolan har tidiga insatser beaktats genom *Läsa-skriva-räkna-garantin* från 2019, som infördes med målet att fler elever ska fullfölja sin grundskoleutbildning (SFS 2018:1098). Garantin omfattar förskoleklass och grundskolans, specialskolans och sameskolans årskurs 1 till 3 och syftar till att tidigt identifiera elever som behöver extra stöd i sitt lärande i svenska, svenska som andraspråk och matematik. Om resultatet av bedömningsstöden (Skolverket, 2024a) visar indikation på att en elev är i behov av stöd i sitt lärande ska en fördjupad bedömning av elevens kunskapsutveckling, planering av stödinsatser och uppföljning av dessa genomföras i nära samarbete mellan undervisande lärare och personal med specialpedagogisk kompetens. Skolinspektionens granskning (2024) visar dock att omfattningen av specialpedagogiskt stöd, i förhållande till elevers matematiska utveckling, har varit begränsad. Den sammanlagda andelen elever som får stöd i matematik har inte

heller ökat efter att garantin infördes. I en tidigare granskning (Skolinspektionen, 2023) pekar granskarna på att en möjlig förklaring till att den förväntade effekten av *Läsa-skriva-räkna-garantin* uteblivit är att specialpedagogiska insatser sällan riktas specifikt mot matematik. De stödinsatser som ges är ofta av generell karaktär, såsom bildstöd och utskrivna scheman, snarare än ämnesdidaktiskt stöd och specialpedagogisk vägledning för att utveckla matematikundervisningen (Skolinspektionen, 2023). I delbetänkandet *Förbättrat stöd i skolan* (SOU 2025:44), som ingår i kommittédirektivet *Utredningen om en förbättrad elevhälsa* (Dir 2024:30), konstateras att garantin för tidiga stödinsatser inte har uppfyllts. Utredarna pekar på att behov av stöd identifieras för sent, att stödet dröjer och att de insatser som ges är otillräckliga eller inte anpassade till elevens individuella behov. Vidare slås fast att de nationella kartläggnings- och bedömningsmaterialen är tidskrävande och inte tillräckligt träffsäkra för att identifiera elever i behov av stödinsatser. I delbetänkandet föreslås därför att garantin för tidiga insatser tas bort. I stället betonas vikten av att alla elever ska ges den ledning och stimulans de behöver för att kunna delta i och tillgodogöra sig undervisningen, i enlighet med skollagen (SFS 2010:800, 3 kap. 2 §). Detta skulle möjligen kunna tolkas som ett uttryck för en ökad betoning på ett förebyggande förhållningssätt. Om elever tidigt ges en stabil matematisk grund att stå på, ökar troligtvis sannolikheten för en positiv kunskapsutveckling över tid.

I delbetänkandet betonas vidare att alla elever tidigt ges det stöd som krävs för att de ska utveckla grundläggande färdigheter i läsning, skrivning och matematik. Som stöd för tidig identifiering av stödbehov föreslår utredningen att nationellt standardiserade tester tas fram och att bedömning och planering av stödundervisning sker i samråd med speciallärare eller specialpedagog (SOU 2025:44). Med tanke på att nästan hälften (44,8 procent) av personalen med specialpedagogisk kompetens i förskoleklass till årskurs 3 uppger ett behov av kompetensutveckling för att kunna erbjuda stöd av hög kvalitet (Skolinspektionen, 2024), framstår detta som problematiskt i relation till specialpedagogikens förebyggande och stödjande roll (Ahlberg, 2014; Borgbjerg Hansen & Mårtensson, 2017; SFS 2017:1111) samt specialdidaktikens innehållsinkluderande undervisningsperspektiv (Holmqvist m.fl., 2024).

Syfte och frågeställningar

Avhandlingen syftar till att bidra med kunskap om hur förskoleklasslevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal utvecklas över tid med och utan deltagande i specifikt utformade undervisningsinsatser, med fokus på lågpresterande elever.

Termen undervisningsinsatser används i syftesformuleringen för att tydliggöra att det rör sig om de avgränsade undervisningsinsatser som genomfördes i matematik i förskoleklassgrupperna.

Avhandlingens övergripande forskningsfråga är:

Vilka aspekter i undervisningsdesign framstår som särskilt främjande för lågpresterande förskoleklasselevs utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal?

Den övergripande forskningsfrågan innefattar både elevers lärande av det specifika matematikinnehållet och sambandet mellan undervisning och elevers lärande. Begreppet undervisningsdesign innefattas av de tre delarna planering, genomförande och utvärdering i relation till matematikinnehållet. Den del av undervisningsdesignen som rör planering och genomförande fokuserar på hur innehållet behandlas i undervisningen för att stödja, främst lågpresterande, elevers lärande av det aktuella matematikinnehållet. Vad gäller utvärdering innefattar den såväl identifiering av lågpresterande elever, som analys av vilka delar i undervisningsdesignen som är särskilt gynnsamma för elevers kunskapsutveckling avseende att bestämma och flexibelt hantera antal och tal.

Avhandlingens syfte uppnås genom att den övergripande forskningsfrågan besvaras genom en syntes av resultaten från de fyra ingående delstudierna (artikel I till IV).

De frågor som guidat syntesen av delstudiernas resultat är:

1. Vilka matematiska kompetenser framträder som särskilt betydelsefulla i tidigare forskning för lågpresterande elevers förmåga att förstå och flexibelt hantera antal och tal i de tidiga skolåren? (Studie I)
2. Hur kan förskoleklasselevs förmåga, med fokus på lågpresterande elever, att bestämma och flexibelt hantera antal och tal identifieras och följas i klassrummet? (Studie II)
3. Vilka skillnader framkommer avseende förskoleklasselevs förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal? (Studie III)
4. Vad framstår som betydelsefullt för elevers utveckling av att flexibelt hantera antal och tal genom undervisning, med fokus på lågpresterande elever? (Studie IV)

Avhandlingens positionering

Avhandlingen är skriven i ämnet utbildningsvetenskap, vilket är en vetenskap som utforskar grundläggande frågor om kunskapsbildning och lärandets villkor i olika

utbildningssammanhang. För att stärka den vetenskapliga grunden för utbildning hämtas kunskap från en bredd av forskningsfält, och en variation av teorier, metoder och forskningsdesigner används för att belysa utbildningens komplexa villkor ur olika perspektiv (Vetenskapsrådet, 2023). Avhandlingen kan karaktäriseras som tvärvetenskaplig, då den tar avstamp i tidigare forskning från olika forskningsfält såsom matematikdidaktik, specialdidaktik och kognitionsvetenskap. Syftet med detta angreppssätt är att belysa problemområdet ur olika perspektiv, för att därigenom öka förståelsen för vilka aspekter i undervisningsdesign som främjar lågpresterande förskoleklasselärares utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal. Avhandlingens specialdidaktiska utgångspunkter relaterar dels till specialpedagogikens förebyggande roll (SFS 2017:1111), dels till specialdidaktikens fokus på innehållsinkluderande lärsituationer, särskilt för elever vars lärande skiljer sig från det förväntade (Holmqvist m.fl., 2024; Mårtensson, 2017). De innehållsliga aspekterna relaterat till antal och tal är hämtade både från kognitionsvetenskaplig och matematikdidaktisk forskning. Kognitionsvetenskap bidrar med kunskap om de kognitiva mekanismer som utgör grunden för lärandet och kan därigenom fördjupa förståelsen för hur eventuella hinder kan undvikas och överbryggas (Holmqvist m.fl., 2024). Matematikdidaktisk forskning om vad, hur, varför och för vem har tillsammans med variationsteoretiska antaganden använts för att förstå sambandet mellan undervisning och lärande, där både det innehåll som undervisas och det eleverna lär sig är centralt (Marton, 2015).

Avhandlingens disposition

Avhandlingen är en sammanläggningsavhandling som består av en licentiatuppsatskappa och fyra delstudier, vilka presenteras i fyra vetenskapliga artiklar. Respektive delstudie belyser olika aspekter av avhandlingens övergripande syfte. Artikel I och III ingår i licentiatuppsatsen Wästerlid (2022). Artikel II och artikel IV är författade inom ramen för forskningsprojektet *Global bearbetning som en indikator på barns konceptuella subitiseringsförmåga i förskoleklass*, finansierat av Vetenskapsrådet (Dnr 2021–04147).

Kappan består av sex kapitel. Det första kapitlet innehåller en bakgrundsbeskrivning med avhandlingens problemområde, kontext samt syfte och forskningsfrågor. I kapitel 2 presenteras tidigare forskning, medan studiens teoretiska utgångspunkt presenteras i kapitel 3. I kapitel 4 beskrivs avhandlingens övergripande forskningsdesign följt av metod för och genomförande av syntesen. I kapitlet redogörs även för respektive delstudies (artikel I till IV) forskningsdesign, urval, datainsamling och analys. Kapitlet avslutas med en reflektion av gjorda etiska ställningstaganden. I efterföljande kapitel 5 presenteras varje delstudies resultat, både utifrån delstudiernas ursprungliga syfte och specifika forskningsfrågor och respektive delstudies övergripande forskningsfråga. I slutet av kapitel 5 presenteras

resultatet av syntesen som guidat avhandlingens syntes, vilket besvarar avhandlingens övergripande forskningsfråga. I det avslutande kapitlet diskuteras resultatet av syntesen i förhållande till tidigare forskning. I kapitlet diskuteras också val av metod i relation till resultatens tillförlitlighet, avhandlingens kunskapsbidrag, praktiska implikationer och begränsningar samt förslag på fortsatt forskning. Kapitlet *Summary* avslutar kappan. Texten i det avslutande kapitlet har genererats med stöd av AI-verktyget ChatGPT-4.0, vilket har använts för att sammanfatta och översätta den svenska texten. Därefter har texten ytterligare bearbetats av mig, kommenterats av handledare och språkgranskats av extern expertis.

Kapitel 2. Tidigare forskning

I kapitlet redogörs för tidigare forskning som är av relevans för avhandlingens syfte och övergripande forskningsfråga. Utifrån avhandlingens tvärvetenskapliga ansats presenteras tidigare forskning från olika forskningsfält såsom kognitionsvetenskap och matematikdidaktik. Kapitlet avslutas med ett avsnitt som sammanfattar avhandlingens problemområde mot bakgrund av den presenterade forskningen.

Medfödda numeriska förmågor

Barns tidiga ickeverbala numeriska förmågor har sina rötter i två distinkta system som verkar över olika delar av talomfånget: *Approximate Number System* (ANS), som är ett system för ungefärlig antalsbestämning, och *Object Tracking System* (OTS eller subitiserings), som är ett system för exakt antalsbestämning (Agrillo, 2015; Feigenson m.fl., 2004; Dehaene, 2011).

ANS – ungefärlig antalsbestämning

ANS är kopplat till en approximativ antalsrepresentation och definieras som en snabb och intuitiv känsla för antal och en förmåga att uppfatta relationer mellan antal. Med grund i ANS kan barn avgöra i vilken mängd det finns flest utan att räkna eller använda räkneord. Det betyder att de kan resonera om antal, i termer av många, få, fler, färre, utan att kvantifiera dem (Nunes & Bryant, 2009; Thompson, 1993). Precisionen i att identifiera skillnader i antal mellan två mängder beror på förhållandet mellan antalen i mängderna snarare än den absoluta skillnaden (Dehaene, 2011; Xu & Spelke, 2000). Denna förmåga utvecklas tidigt, före språk och symbolisk räkning, och den förbättras gradvis under utvecklingen så till vida att vi blir känsligare för mindre antalsskillnader över tid. Xu och Spelke (2000) har till exempel rapporterat att sex månader gamla spädbarn kan skilja mellan 8 och 16 prickar (förhållandet 1:2), men inte mellan 8 och 12 prickar (förhållandet 2:3), något som äldre individer klarar av. Vilken roll ANS spelar i elevers matematikutveckling råder det delade meningar om i forskningslitteraturen. Schneider m.fl. (2016) har, baserat på resultat av en metaanalys, gett evidens för att det finns ett samband mellan ANS och kunnande i matematik, medan andra studier inte kunnat verifiera detta samband (se till exempel Iuculano m.fl., 2008). I en studie av Coolen m.fl. (2022)

med 174 barn i åldrarna 4 till 7 år ($M=70,34$ månader), framkom att ANS-skärpa inte hade någon signifikant prediktiv effekt på barnens resultat på ett matematiktest (Test of Early Mathematics Ability), när kognitiva förmågor såsom verbala förmågor och intelligens samt exekutiva funktioner såsom visuospatiskt arbetsminne kontrollerades för. Däremot identifierades ett samband mellan barnens ANS-skärpa, mätt i icke-symbolisk jämförelse mellan olika antalsgrupper (4–15 prickar), och deras verbala uppräkningsförmåga, förståelse för tals kardinala värde samt förmåga att lösa verbala problem med hjälp av fysiska objekt eller fingrar. Coolen m.fl. (2022) tolkar resultaten som att förmågan att approximativt kunna jämföra icke-symboliska mängder (ANS) kan utgöra en viktig grund för förmågan att förstå och använda tal.

OTS – exakt antalsbestämning

OTS är, till skillnad från ANS, ett system för exakt identifiering av ett mindre antal visuellt presenterade objekt. OTS antas stödja förmågan att subitiserar, det vill säga att snabbt och korrekt bestämma antal av mindre uppsättningar objekt (≤ 4) utan uppräkning med en i taget (Feigenson m.fl., 2004; Piazza m.fl., 2011). Gelman och Tucker (1975) visade i en studie att i princip alla femåringar (90 procent) kan subitiserar tre objekt, medan bara 69 procent av femåringarna kan subitiserar fyra objekt. Forskning om subitiserar har, precis som forskning om ANS, huvudsakligen bedrivits inom det psykologiska och kognitionsvetenskapliga forskningsfältet, inom vilket fenomenet betraktas som en perceptuell process. Termen subitiserar introducerades av Kaufman m.fl. (1949) som ett begrepp för att skilja exakt antalsbestämning från ungefärlig antalsbestämning. I ett experiment med vuxna visade forskarna att responstiden ökade och säkerheten minskade i takt med att antalet prickar ökade, där en snabb och korrekt antalsbestämning identifierades upp till och med fyra objekt. Liknande resultat framkom i en studie av Trick och Pylyshyn (1994), där tiden för att bestämma antalet objekt ökade när det rörde sig om fler än tre objekt, jämfört med när antalet var tre eller färre. Detta skulle kunna förklaras med att den kognitiva belastningen ökar i takt med att antalet objekt som ska subitiserar ökar (Railo m.fl., 2008).

Konceptuell subitiserar

Forskare inom det matematikdidaktiska forskningsfältet (se till exempel Clements, 1999; Clements m.fl., 2019; Conderman m.fl., 2014; MacDonald & Wilkins, 2016; Sayers m.fl., 2016) skiljer mellan perceptuell och konceptuell subitiserar, även då båda handlar om snabb bestämning av antal. Grundat i denna åtskillnad argumenterar de för att den intuitiva perceptuella subitiseringsförmågan utgör grunden för den matematiskt medvetna, konceptuella subitiseringsförmågan, vilken

i sin tur främjar förståelsen för tals del-helhetsrelationer och kunnande om hur tal kan delas upp och sättas samman. Clements (1999) definierar perceptuell subitiseringsförmåga som "recognizing a number without using other mathematical processes" (s. 401). Det är själva processen att fastställa antalet objekt i små mängder som relaterar till perceptuell subitiseringsförmåga, medan den medvetna processen att dela upp och sätta samman antal samt att benämna dem med korrekta räkneord relaterar till konceptuell subitiseringsförmåga (Clements m.fl., 2019). Exempel på perceptuell subitiseringsförmåga är, enligt MacDonald och Wilkins (2016), när ett barn bestämmer antal utifrån igenkännbara figurativa mönster, till exempel genom att säga "jag såg fem eftersom det ser ut som en blomma", eller när barnet inte sammanför de perceptuellt subitiserade delgrupperna till en helhet utan säger att "jag såg två och tre". Konceptuell subitisering kännetecknas, till skillnad från den perceptuella, av förmågan att mentalt strukturera och organisera en större mängd visuella objekt i mindre, igenkännbara delar, samt att sätta samman dessa delar till en helhet. Clements m.fl. (2019) beskriver konceptuell subitisering som en process där "conceptual subitizing provides a direct phenomenological experience with additive situations, as children conceptualize two parts and the whole" (s. 38). Om barn kan uppfatta denna typ av additiva relationer, får de möjlighet att utveckla en mental bild av antal, inte bara som en samling enskilda objekt, utan också som delar av en helhet. Till exempel kan fem objekt uppfattas som bestående av delmängderna tre och två, eller fyra och ett (Clements, 1999). Konceptuell subitisering representerar därmed en högre nivå av numerisk förståelse än perceptuell subitisering, eftersom det kräver förmågan att organisera ett större antal (helhet) i mindre antalsgrupper (Clements, 1999; Clements m.fl., 2019). För att direkt kunna uppfatta ett antal genom att gruppera och strukturera objekten krävs en simultan medvetenhet om både helheten och delarna (Clements, 1999; Clements m.fl., 2019). MacDonald och Wilkins (2016) definierar två olika typer av konceptuell subitiseringsförmåga: rigid och flexibel konceptuell subitiseringsförmåga. Rigid konceptuell subitiseringsförmåga kännetecknas av att barnet tenderar att fokusera på samma, fasta subgrupper (delar) när de ska bestämma antal (helhet) oavsett föremålets orientering och färg. Exempelvis uppfattas antalet 4 alltid som 2 och 2 eller som 1 och 3. Flexibel konceptuell subitiseringsförmåga kännetecknas i stället av att barnet uppfattar olika subgrupper när de bestämmer antal, exempelvis 5 som 3 och 2 eller som 2, 2 och 1.

Enligt Clements (1999) kan elever använda mönsterigenkänning baserad på dominomönster, tärningar, finger-mönster samt auditiva och rytmiska mönster för att upptäcka egenskaper hos tal. Denna förmåga kan ha sin grund i det samband som identifierats mellan subitiseringsförmåga och visuospatial arbetsminneskapacitet (Jansen m.fl., 2014; Piazza m.fl., 2011), liksom i forskningsresultat som visar att subitiseringsförmågan påverkas av objektens rumsliga organisering (Pincham & Szűcs, 2012). Betydelsen av att uppfatta mönster och strukturer stöds av resultat från matematikdidaktisk forskning, som visar att denna förmåga gynnar elevers tidig

antals- och talförståelse (Van Nes & de Lange, 2007). Förmågan ses även som avgörande för elevers generella lärande i matematik (se till exempel Gripton, 2022; Mason, 1996). Mulligan och Mitchelmore (2009) har till exempel rapporterat att elever i årskurs 1 med hög medvetenhet om matematiska mönster och strukturer presterade bättre på uppgifter kopplade till subitiserings, tals del-helhetsrelationer samt multiplikativa och proportionella samband, än elever som inte visade denna medvetenhet. Men trots att barn kan uppfatta strukturer i en visuellt presenterad antalsuppsättning visar resultat från analys av intervjuer och ögonrörelsemätning av 95 deltagande 5-åringar, att de inte alltid använder dessa strukturer för att bestämma antal (Sprenger & Benz, 2020). Författarna menar att en möjlig tolkning är att barnen uppfattar strukturen men att de ännu inte kan använda den för att bestämma antal.

Groupitizing

Inom forskningen används även begreppet *groupitizing* för att definiera förmågan att uppfatta ordnade antalsmängder. Groupitizing bygger på antagandet att det går snabbare att bestämma antal föremål som är ordnade i strukturerade, subitiserbara grupper än när föremålen är placerade på ett oorganiserat sätt (Starkey & McCandliss, 2014; Moscoso m.fl., 2020; Wege m.fl., 2021). Relaterat till yngre barn, fann Starkey och McCandliss (2014) att 6–9-åringar kunde bestämma det totala antalet prickar i en mängd snabbare när prickarna var organiserade i mindre antalsgrupper (maximalt tre prickar per grupp), än om antalen var slumpmässigt placerade. Resultaten visar dock att 6-åringarna inte var lika hjälpta av grupperingsstrukturen som 7–9 åringarna. Starkey och McCandliss (2014) tolkar resultaten som att förmågan till gruppering (groupitizing) inte enbart kan förklaras av perceptuella processer, utan även kräver en konceptuell förståelse av antal. Förutom ordnade grupperingsstrukturer tycks även färgkodning stödja förmågan att korrekt bestämma antal. I en studie med 16 unga vuxna rapporterar Anobile m.fl. (2020) att deltagarnas förmåga att bestämma antal ökade om antalsgrupperna färgmarkerades.

(Upp)räkning

Medan konceptuell subitiseringsförmåga innebär ett samtidigt fokus på både delarna och helheten, innebär uppräknings att de enskilda delarna fokuseras innan helheten (Frye m.fl., 2013). För att kunna bestämma antal genom uppräknings med ett i taget, där varje objekt kopplas samman med ett räkneord, krävs utöver kunskap om att räkneorden kommer i en stabil ordning (ordinalitet) även förståelse för att denna

uppräknning kan användas för att fastställa ett antal (kardinalitet) (Bruce & Threlfall, 2004).

Enligt Ashkenazi m.fl. (2022) och Desoete m.fl. (2009) visar observationer att responstiden för att fastställa antal ökar i takt med att antalet objekt ökar, vilket de menar beror på att subitisering och räkning utgör två olika kognitiva funktioner. Schleifer och Landerl (2011) rapporterade till exempel, baserat på resultat av ett ögonrörelseexperiment en diskontinuitet i svarstider, oberoende av deltagarnas ålder och aritmetiska färdigheter, mellan antalsbestämningar av 1 till 3 prickar och 4 till 7 prickar. Den längre svarstiden för antalsbestämningar av 4 till 7 prickar, tolkade forskarna som ett tecken på att en-till-en-korrespondens använts, snarare än subitisering. Liknande resultat framkom i en annan ögonrörelsemätningssstudie av Schindler m.fl. (2020), där det rapporterades att elever behövde längre tid för att bestämma antal i talområdet 5–9 jämfört med 1–4. Forskarna fann även att elever i matematiksvårigheter tenderade att räkna samtliga objekt, det vill säga att de fäste blicken på varje enskild prick, medan kontrollgruppen fastställde det totala antalet utan att visuellt registrera varje objekt. Detta tolkades som att kontrollgruppen använde sig av en strategi där de grupperade antalet prickar i mindre delmängder.

Om det finns ett samband mellan korrekt (upp)räkning och förståelse för räkningens innebörd har länge varit föremål för diskussion inom forskningen. Sarnecka m.fl. (2015) framhåller att små barns räknebeteenden ofta är svåra att tolka, och att deras handlingar inte alltid överensstämmer med deras faktiska förståelse. Detta står i kontrast till Gelman och Gallistel (1986), som menar att barns räknebeteenden kan användas för att bedöma deras förståelse av kardinalprincipen – det vill säga insikten om att det sist uppräknade räkneordet anger mängdens totala antal. När ett barn behärskar följande fem räkneprinciper är det, enligt Gelman och Gallistel (1986), ett tecken på att barnet har utvecklat grundläggande räknekompetens:

- *Abstraktionsprincipen* betyder att vilka föremål som helst i en avgränsad mängd kan räknas.
- *Ett-till-ett-principen* innebär en sammanparning av ett föremål från en mängd med ett föremål i en annan mängd.
- *Principen om godtycklig ordning* betyder att föremålen i en mängd kan räknas i vilken ordning som helst, men varje föremål får bara räknas en gång.
- *Principen om den stabila ordningen* betyder att barnet använder räkneorden i en bestämd ordning.
- *Kardinalprincipen* innebär en förståelse för att det sist uppräknade ordet anger det totala antalet föremål i en mängd.

Även forskare som Wynn (1997), Bruce och Threlfall (2004) och Dowker (2019) motsätter sig Gelman och Gallistels antagande med motiveringen att barn kan

behärska procedurräkning innan de har utvecklat en förståelse för tals kardinala innebörd. Wynn (1997) menar exempelvis att yngre barns förmåga att räkna korrekt, det vill säga att upprepa det sista ordet i ramsräkningen när de tillfrågas ”hur många”, kan vara en så kallad ”falskt positiv” prestation. Det innebär att barnet kan ge ett korrekt svar på frågan utan att egentligen förstå uppräkningsfunktionen. Bruce och Threlfall (2004) är av samma uppfattning, och de hävdar att förmågan att recitera en räkneramsa eller räkna upp en uppsättning objekt inte nödvändigtvis innebär en förståelse för att denna aktivitet kan användas för att ange hur många objekt som finns i en samling. Även Dowker (2019) argumenterar för att ett barn kan lära sig att räkna upp till tio utan att förstå att denna uppräkningsprocess ger information om antal. Hon menar att en upprepning av det sist uppräknade räkneordet i stället kan vara ett uttryck för ett socialt inlärt beteende snarare än en indikation på att barnet förstår att det sista räkneordet representerar det totala antalet. Å andra sidan finns det forskning som rapporterar om samband mellan räknekompetens (uppåt- och nedåträkning) och prestationer i matematik (Koponen m.fl., 2019; Martin m.fl., 2014). Koponen m.fl. (2019) har till exempel rapporterat att verbal räknekompetens i förskoleklass är en prediktor för grundläggande matematiska färdigheter i sjunde klass. I studien framkom att elevers verbala räknekompetens i förskoleklass förklarade mer än hälften (52 procent) av variationen i deras räknefärdigheter i årskurs 7, efter att socioekonomisk status, kopplat till moderns utbildning, kontrollerats för. Även Martin m.fl. (2014) har visat att räknekompetens (uppåt- och nedåträkning) i förskoleklass korrelerar med prestationer på matematiktester i årskurs 1.

Antal och tal

I forskningen görs en åtskillnad mellan icke-symbolisk och symbolisk representation av tal (Aunio & Räsänen, 2015; Nunes & Bryant, 2009). Icke-symbolisk representation är kopplad till visuella mängder, medan symbolisk representation handlar om räkneord och matematiska symboler såsom siffror. Det innebär att undervisningen redan i ett tidigt skede kan stimulera barns antalsuppfattning, innan de har utvecklat förmågan att använda språkliga eller symboliska uttryck för antal. Taluppfattning bygger däremot på en förståelse av symboliska representationers värde (till exempel 5, 16, fem och sexton) (Dowker, 2019). Sambandet mellan förståelse av icke-symboliska och symboliska representationer beskrivs av Griffin (2007) i en teoretisk modell, grundad i kognitiv neuropsykologi. I modellen tydliggörs hur matematisk kompetens avseende antal och tal, byggs upp av begreppsliga samband mellan de tre världarna: den verkliga världen (world of real quantities), världen med räkneord (world of counting numbers) och den symboliska världen (world of formal symbols). I modellen

framställs räkneorden som en överbryggande länk mellan den verkliga, icke-symboliska och den symboliska världen (Griffin, 2007).

I en forskningsöversikt över hur barn utvecklar förståelse för tal presenterar Nunes och Bryant (2009) tre centrala aspekter: (1) tals kardinala betydelse, (2) tals ordinala betydelse och (3) relationen mellan kardinalitet, addition och subtraktion. Dessa tre aspekter överensstämmer med indelningen i Sixtus m.fl. (2023) av talförståelse (number knowledge) i tre grundläggande begrepp: *magnitud*, *ordinalitet* och *kardinalitet*. Enligt författarna utgör dessa begrepp den teoretiska grunden för talförståelse (number knowledge), där magnitud avser en ungefärlig förståelse för antal (såsom vilken mängd innehåller flest objekt), ordinalitet handlar om talens inbördes ordning, och kardinalitet syftar på förståelsen av att det sista räknade talet representerar det totala antalet i en mängd. Nunes och Bryant (2009) hävdar att en fullständig förståelse av ordinalitet i relation till talens inbördes ordning förutsätter en förståelse för att ordningen i en talsekvens representerar en kvantitativ position inom en serie. Talen kommer i en stabil ordning, och denna ordning representerar en kvantitativ serie som är ordnad i en stigande skala där 2 är mer än 1, 3 är mer än 2 och så vidare. Enligt Sixtus m.fl. (2023) stöds dessa ovan nämnda numeriska begrepp av olika kognitiva system. Magnitud stöds av ANS-systemet, kardinalitet stöds av OTS-systemet via subitiserings (≤ 4) (se avsnittet Medfödda numeriska förmågor) och ordinalitet kopplas till spatial ordning i form av en mental tallinje. I likhet med Griffin (2007) argumenterar Sixtus m.fl. (2023) för att barns förståelse för tals underliggande innebörd är förankrad i sensomotoriska erfarenheter i vardagen kopplat till att uppskatta antal, storleksordna tal, representera tal med fingrarna och att direkt bestämma antal. Dessa erfarenheter menar författarna leder till överlappande representationer över tid, vilket bygger upp förståelsen av abstrakta tal.

Att förstå räkneordens kardinala innebörd är ett viktigt steg i barns matematiska utveckling och det ger en indikation på deras beredskap för att lära sig matematik när de börjar skolan (Geary m.fl., 2018). Resultat från en intervjustudie med uppgiftstyperna "Hur många" (How many-task) och "Ge ett specifikt antal" (Give-a-number-task), visar att de flesta barn behärskar de kardinala betydelseerna av de räkneord som de använder sig av i räkneramsan vid cirka 3,5 års ålder (Wynn, 1990). I en uppföljningsstudie med 213 barn (39 till 74 månader) där uppgiften "Ge ett specifikt antal" användes, fann Rousselle och Vossius (2021) att utvecklingen av förståelse av tals kardinala värde är en mer tidsutdragen process än vad Wynns resultat tidigare visat. Rousselle och Vossius (2021) visade att det fanns stora individuella variationer av kardinal förståelse hos barn. Av de totalt 213 barnen i studien hade 56 barn utvecklat kardinal förståelse (Cardinal Principle Knowers) i början av förskolan (3 år och 11 månader); 38 barn uppvisade kardinal förståelse vid 4 år och 3 månader, 58 barn vid 4 år och 9 månader, 27 barn vid 5 år och 1 månad, medan 18 barn inte uppnådde kardinal förståelse före 6 års ålder (74 månader). Med andra ord uppnådde majoriteten av 4–6-åringarna kardinal förståelse

kopplat till räkneorden ett till sju, medan ungefär en tredjedel av 5–6-åringarna ännu inte hade utvecklat full kardinal förståelse av samtliga räkneord mellan ett och sju. Frye m.fl. (2013) menar att förmågan att subitiserar möjliggör att barnet senare, när det räknar, förstår innebörden av det sist uppräknade räkneordet, det vill säga en förståelse för kardinalprincipen. Subitiseringsförmågans roll för utvecklingen av kardinalitet belyses till exempel av Paliwal och Baroody (2020), som, baserat på en studie med 2–5-åringar, rapporterar ett positivt och starkt samband mellan subitiseringsförmåga upp till och med antalet fyra och förståelse för kardinalprincipen. Baroody m.fl. (2009) beskriver i en teoretisk modell hur barn i tidig ålder successivt utvecklar en förståelse för de kardinala innebörderna av räkneorden för talen 1 till 3. Genom att härma och tillämpa en uppräkningsrutin på små mängder lär sig barn att associera räkneorden ”ett”, ”två” och ”tre” med visuellt igenkännbara antal. På så sätt kopplas räkneorden samman med sin kvantitativa innebörd. När barn hör räkneord samtidigt som de ser motsvarande mängder får de också möjlighet att erfara talet ”tre” exempelvis som ”en och en och en” eller som ”två och en”, vilket bidrar till att eleverna ges möjlighet att utveckla en flexibel förståelse av talets struktur och innebörd (Baroody m.fl., 2009). Detta antagande överensstämmer väl med Griffins (2007) teoretiska modell, enligt vilken den symboliska världen i form av tal, ges en innebörd först när den, med hjälp av räkneorden, kopplas till antal i den verkliga världen.

Grundläggande aritmetiska basfärdigheter

Forskningen tycks vara enig om att förståelse för tals del-helhetsrelationer utgör en central grund för utvecklingen av tidiga aritmetiska basfärdigheter (Anghileri, 2006; Baroody m.fl., 2009; Neuman, 1987; Nunes & Bryant, 2009; Resnick, 1983). Med referens till Piaget (Piaget, 1952) argumenterar Nunes och Bryant (2009) för att en förståelse av tals kardinala innebörd innefattar en förståelse för att två grupper av objekt har samma kardinala värde när objekten i den ena gruppen står i en-till-en-korrespondens med objekten i den andra gruppen. Vidare framhåller Nunes och Bryant (2009) att en förståelse för tals kardinala innebörd även innefattar kunnande om att tal kan delas upp i mindre delar och en simultan förmåga att betrakta varje tal både som summan av sammansatta delar och som en del av en helhet. Denna kompetens menar de i sin tur utgör grunden för kunnande om addition och subtraktion eftersom talet 4 måste kunna uppfattas både som summan av $3 + 1$ och $2 + 2$, och som en del av talet 7, där den återstående delen är 3.

Resnick (1983) sammanfattar denna förståelse för tals del-helhetsrelationer genom att konstatera att när barn kan uppfatta antal ur ett del-helhetsperspektiv, börjar de kunna se tal som sammansatta av andra tal. Även Baroody m.fl. (2009) framhåller att en förståelse för hur antal och tal kan delas upp och sättas samman på olika sätt är central för inläringen av grundläggande talkombinationer i addition och

subtraktion. Liknande argument förs av Nunes och Bryant (2009) som diskuterar vikten av kunskap om talens additiva sammansättningar, exempelvis $8 = 4 + 4$ eller $8 = 3 + 5$, för att kunna hantera och resonera kring addition och subtraktion. Neuman (1987) benämner de 25 olika sätt som heltalen upp till och med tio kan delas upp i två delar som "the ten basic concepts", och beskriver dem som aritmetikens grundstenar. I en intervjustudie med 105 sjuåringar fann hon att elever som använde dessa del-helhetsrelationer vid lösning av additionsuppgifter lyckades bättre än de som förlitade sig på en-till-en-räkning, med eller utan stöd av fingrarna. Enligt Neuman (1987) riskerar elever som inte utvecklar förståelse för dessa grundläggande talkombinationer att senare möta svårigheter inom aritmetiken.

Undervisningsinsatser i matematik

I forskning om hur undervisning påverkar elevers prestationer i matematik genomförs ofta interventioner (se till exempel Mononen m.fl., 2014). Kroesbergen och van Luit (2003) definierar intervention som en specifik undervisningsinsats, i en specifik åldersgrupp under en avgränsad tidsperiod för att undervisa ett särskilt (del)område i matematik. Interventioner i matematik har ofta en experimentell ansats och de genomförs framför allt med elever i behov av särskilt stöd med syfte att undersöka om en specifik undervisningsmetod eller insats har effekt på deras prestationer (Kroesbergen & van Luit, 2003; Mononen m.fl., 2014; Rojo m.fl., 2024). Interventionsstudier i de tidiga skolåren (4 till 9 år) visar att interventioner som behandlar grundläggande antals- och taluppfattning (early numeracy) gynnar lågpresterande elevers matematikutveckling (Holmes & Dowker, 2013; Mononen m.fl., 2014). Holmes och Dowker (2013) har rapporterat, inom ramen för undervisningsprogrammet "Catch-up numeracy", att lågintensiva interventioner (cirka 30 minuter/vecka) har en positiv påverkan på elevers prestationer på aritmetiktester om de utgår från elevernas individuella styrkor och svårigheter. Detta resultat tyder på vikten av att ta reda på elevernas förkunskaper gällande det innehåll som ska undervisas om. Även Mononen m.fl. (2014) har rapporterat att interventioner som fokuserar på numeracy, har en positiv effekt på kunskapsutvecklingen hos 4–7-åringar med identifierade matematiksvårigheter. I interventioner där explicita instruktioner (systematisk undervisning genom modellering av specifika procedurer inom avgränsat innehåll), CRA-modellen (användning av representationsnivåerna konkret–representativ–abstrakt representationsnivåer) och spel har använts, har en särskilt positiv inverkan på elevernas kunskapsutveckling identifierats.

I relation till interventionsstudier, där subitiseringsens roll i den tidiga numeriska utvecklingen har undersökts, visade Van Nes och Doorman (2011) att det var både enklare och mer effektivt för barn i åldrarna 4–6 år att använda spatiala strukturer

för att bestämma, jämföra och manipulera kvantiteter, jämfört med att räkna föremål ett i taget. Liknande resultat har rapporterats av Özdem och Olkun (2019), som genomförde en interventionsstudie med 373 elever i årskurs 2 och 3. Forskarna fann att interventionsgrupperna, som deltog i konceptuella subitiseringsaktiviteter, signifikant förbättrade sina resultat på ett efterföljande aritmetiskt matematiktest jämfört med kontrollgrupperna. Även Sayer m.fl. (2016) har, i en fallstudie med två elever i årskurs 1, bekräftat konceptuella subitiseringsaktiviteters (organisera och gruppera antal med hjälp av exempelvis dominobrickor och fem-ramar) gynnsamma roll för elevers förmåga att se tals del-helhetsrelationer och att utveckla grundläggande aritmetisk kompetens.

Inom den svenska kontexten har ett begränsat antal interventionsstudier, som fokuserar på antal och tal, genomförts med förskoleklasselever. Resultaten från en tio veckor lång interventionsstudie med kontrollgrupp visade till exempel att undervisningsinsatser som fokuserade på olika sätt att representera antal och tal, hade en signifikant och stark positiv effekt på förskoleklasselevers matematiska färdigheter (Sternner m.fl., 2019). I en replikationsstudie av ett tidigare interventionsprogram (Jordan m.fl., 2010 i Westerholm & Samuelsson, 2020) undersökte Westerholm och Samuelsson (2020) effekten av interventionen *TalUppFattningFörskoleklass* (TUFF) på elevers taluppfattningskompetens i förskoleklass. Studien genomfördes med elever från socioekonomiskt utsatta områden och syftade till att pröva om resultaten från den ursprungliga studien kunde generaliseras till en svensk kontext. Interventionen byggde bland annat på principerna att träning av nya färdigheter varvas med repetition av redan inlärd färdigheter, samt att eleverna görs medvetna om sina egna framsteg. Resultatet visade att skillnaderna i matematikresultat mellan eleverna i TUFF-gruppen (från en socioekonomiskt svag miljö) och kontrollgruppen (från en socioekonomiskt stark miljö) minskade efter att TUFF-gruppen deltagit i interventionen. Resultatet från en nyligen publicerad interventionsstudie i förskoleklass med 361 elever, som haft fokus på en strukturell ansats kring tals del- och helhetsrelationer, visade att de elever som deltagit i interventionen utvecklade en ökad förmåga att använda strukturer än eleverna i jämförelsegruppen (Björklund m.fl., 2024).

Learning study

Learning study kan enligt Holmqvist m.fl. (2008) ses som en typ av interventionsstudie med fokus på att förbättra undervisning och elevers lärande. Till skillnad från interventioner, som oftast syftar till att mäta effekten av en specifik undervisningsinsats (Kroesbergen & van Luit, 2003), syftar Learning study till att utforska vad som möjliggör elevers lärande av ett specifikt innehåll (Holmqvist m.fl., 2008). Learning study har inspirerats av japanska Lesson study, inom vilken lärare regelbundet och systematiskt analyserar genomförda lektioner, så kallade forskningslektioner (Lo & Marton, 2005). Gemensamt för dessa tillvägagångssätt

är att de präglas av interaktivitet, flexibilitet och iterativa processer, där forskare och lärare ofta samarbetar för att designa, testa och omforma undervisningen i syfte att fördjupa förståelsen för lärandets betingelser (Hanfstingl m.fl., 2019). Både Lesson och Learning study syftar till att studera hur lärande utvecklas genom undervisning, men till skillnad från Lesson study utgår Learning study från en teori med antaganden om hur lärande sker. Oftast används variationsteori (Elliott, 2019; Hanfstingl m.fl., 2019; Holmqvist m.fl., 2008; Marton, 2015). Andra liknande modeller är Design study, som skiljer sig från Learning study så till vida att Design study oftast drivs av forskarna själva, medan Learning study genomförs i samarbete med lärare i klassrumspraktik (Marton & Pang, 2006; Holmqvist m.fl., 2008). Design study syftar vidare främst till att utveckla innovativa och generella designprinciper och teorier som stödjer den lärandes stegvisa kunskapsutveckling inom ett specifikt ämnesområde (Brown, 1992). Fokus i en Learning study är i stället innehållets behandling i en undervisningsdesign för att identifiera kraftfulla sätt att undervisa detta lärandeobjekt under en eller några lektioner (Marton & Pang, 2006). Lo och Marton (2005) menar att en av de främsta fördelarna med Learning study är dess integration mellan teori och praktik, genom att forskningslektionerna utformas med stöd i tidigare forskning, samtidigt som lärares erfarenheter av undervisningsinnehållet beaktas. En annan fördel är att undervisningsaktiviteterna genomförs på skolan av skolans egna lärare, vilket gör att resultaten är ekologiskt valida och relevanta för en klassrumskontext (Dennis m.fl., 2022). Exempel på lärandeobjekt som studerats i förskole- och förskoleklasskontext och i de tidiga skolåren och som gett positiva läranderesultat är ”skillnaden mellan antal och storlek” (Holmqvist m.fl., 2011), ”talstrukturer” (Björklund m.fl., 2024), ”tals del-helhetsrelationer som grund för beräkningar” (Kullberg & Björklund, 2020; Kullberg m.fl., 2020), att ”halvera och dubblera heltal” (Holmqvist Olander & Nyberg, 2014) samt ”tals relationer vid lösning av en tresiffrig subtraktionsuppgift” (Kullberg m.fl., 2024). I ett treårigt forskningsprojekt (2000–2003) i Hongkongs grundskolor, där Learning study och variationsteori användes som grund för att planera, genomföra och utvärdera undervisningen i matematik, kinesiska, engelska samt natur- och samhällsorienterande ämnen, visade resultaten att 24 av 27 genomförda Learning studies hade en positiv påverkan på elevernas prestationer (Kwok & Chik, 2005; Lo m.fl., 2005). I samtliga studier jämfördes medelvärdet av elevernas testresultat på gruppnivå mellan för- och eftertest. Resultaten visade vidare att det framför allt var lågpresterande elever som gynnades av undervisning som utformats enligt variationsteoretiska principer (Kwok & Chik, 2005).

Sammanfattning

Den matematiska utvecklingen avseende att förstå och hantera antal och tal har enligt litteraturen sin grund i två medfödda kognitiva system: Approximate Number System (ANS) och Object Tracking System (OTS). ANS-systemet stödjer förmågan att uppskatta antal ungefärligt, vilket ger en känsla för antal och tal, medan OTS gör det möjligt att via subitisering bestämma exakt antal av 3–4 objekt. Exakt antalsbestämning av tre till fyra objekt kan göras via perceptuell subitisering, medan exakt och korrekt antalsbestämning av fyra eller fler objekt kräver antingen kompetens i uppräkningsmed en i taget, eller konceptuell subitiseringsförmåga. Vid uppräkningsmed en-till-en-korrespondens kopplas räkneorden till ett specifikt objekt i mängden där det sist uppräknade räkneordet indikerar det totala antalet i en mängd. Antalsbestämning via konceptuell subitisering sker via en mental grupperings- och struktureringsprocess i mindre perceptuellt subitiserbara delar som sätts samman till en helhet. Vid uppräkningsmed fokuseras en ”en-del” i taget, medan både delarna och helheten fokuseras samtidigt vid subitisering. Detta antas kunna bidra till en förståelse för tals del-helhetsrelationer, vilket i sin tur främjar utvecklingen av flexibla strategier för att hantera aritmetiska beräkningar. Betydelsen av att elever utvecklar sin förmåga att hantera antal och tal på ett flexibelt sätt har sin grund i forskning som visar att elever som inte utvecklar denna kompetens riskerar att hamna i framtida matematiksvårigheter. I relation till avhandlingens valda fokus på konceptuell subitiseringsförmåga framkommer i genomgången av tidigare forskning att förmågan innefattar flera centrala aspekter av tidig förståelse av antal och tal såsom kardinalitet, samband mellan icke-symbolisk och symbolisk representation, samt relationen mellan kardinalitet och addition. Även forskningens betoning på vikten av sensomotoriska erfarenheter i den omgivande miljön och kopplingar till de abstrakta symboliska representationerna av antal (räkneord och tal) beaktas när konceptuell subitisering tas som utgångspunkt i undervisningen. En begränsning med konceptuell subitisering är att den beror på både antalen som ska fastställas och hur dessa är spatialt ordnade, vilket inte är fallet för räkning, som kan tillämpas oavsett antal och arrangemang. Däremot är uppräkningsmed ett mer tidskrävande och icke flexibelt tillvägagångssätt för att bestämma antal i mindre mängder i jämförelse med subitisering. Båda kompetenserna fyller en viktig roll i den tidiga matematikutvecklingen, med tanke på deras kopplingar till senare prestationer i matematik. Tidiga undervisningsinsatser som fokuserar på grundläggande taluppfattning har visat sig främja matematikprestationer hos lågpresterande elever i förskoleklass och de tidiga skolåren. Insatser som behandlar olika representationer av tal samt strukturella talrelationer har visat sig vara särskilt gynnsamma. Vidare understryks vikten av att det matematiska innehållet avgränsas, att varierade representationsformer används och att undervisningsaktiviteterna är lek- och spelinspirerade.

Kapitel 3. Teoretisk utgångspunkt

I kapitlet som följer presenteras avhandlingens teoretiska utgångspunkter i förhållande till avhandlingens övergripande forskningsfråga: Vilka aspekter i undervisningsdesign framstår som särskilt främjande för lågpresterande förskoleklass elevernas utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal? Den forskning som är relevant för att förstå barns utveckling när det gäller att bestämma och flexibelt hantera antal och tal har hämtats från både matematikdidaktisk och kognitionsvetenskaplig forskning (se kapitlet Tidigare forskning). Matematikdidaktisk forskning har bidragit med kunskap om centrala aspekter av den tidiga matematikinläringen, i relation till de didaktiska frågorna: vad, varför och hur undervisningen kan utformas för att stödja elevers lärande, medan den kognitionsvetenskapliga forskningen har bidragit med kunskap om de kognitiva mekanismer som ligger till grund för lärandet av antal och tal. Tillsammans bidrar forskningsfälten till en fördjupad förståelse för hur undervisning kan utformas på ett sätt som gynnar alla elevers lärande, samt till ökad kunskap om vilka hinder som kan uppstå i undervisningssituationen och hur dessa kan förebyggas och/eller överbryggas. Sambandet mellan undervisning och gynnsamma förutsättningar för elevernas lärande har i avhandlingen utforskats inom ramen för en Learning study. Hiebert och Grouws (2007) framhåller att användning av teoretiska utgångspunkter är centralt inom alla vetenskapliga områden, inklusive forskning om undervisning och lärande, och de slår fast att "Making progress in any scientific field is difficult without explicit theories" (s. 373). Forskarna argumenterar för att teorier bidrar till att skapa strukturer för att organisera kunskap och möjliggöra en fördjupad och sammanhängande förståelse. I avhandlingen studeras relationen mellan lärande och undervisning utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv, en teori som utvecklats för att förklara och förstå lärande i relation till hur undervisningen är utformad och hur innehållet behandlas i undervisningssituationen (Marton, 2015). Teorin bygger på antagandet att innehållsliga aspekter, det vill säga både vilket matematiskt ämnesinnehåll som fokuseras och hur detta innehåll struktureras och behandlas i undervisningen, är avgörande för elevernas förståelse och kunskapsutveckling (Marton, 2015). Variationsteorin, som är utvecklad ur den fenomenografiska forskningstraditionen, bygger på antagandet att individer uppfattar samma fenomen på kvalitativt skilda sätt (Marton, 2015). Lo och Marton (2005) använder begreppet "catering for individual differences" (s. 145) för att betona vikten av att undervisningen utformas med hänsyn till elevers olika uppfattningar och förkunskaper om det specifika

kunnande eller den förmåga som undervisningen syftar till att utveckla. Detta innebär att läraren behöver undersöka variationen i elevernas förståelse och erfarenheter för att kunna stödja deras lärande, vilket är en aspekt som även betonas inom det specialdidaktiskt innehållsinkluderande undervisningsperspektivet (Holmqvist m.fl., 2024; Mårtensson, 2017; SFS 2017:1111).

Variationsteorins ontologiska antagande vilar på en icke-dualistisk syn på lärande, där relationen mellan människan (det inre) och världen (det yttre) ses som sammanflätade och omöjliga att separera (Marton & Booth, 1997). Med andra ord görs i klassrumsstudierna ingen åtskillnad mellan de lärandesituationer som eleverna deltar i och elevernas inre kognitiva processer. Kopplat till ontologiska aspekter kan synen på verkligheten relateras till en pragmatisk kunskapssyn som förenar inslag från både realism och relativism (Gillespie m.fl., 2024). En icke-dualistisk och pragmatisk kunskapssyn kombinerar antaganden från både realismen, som utgår från att verkligheten existerar oberoende av människan, och relativismen, som betraktar kunskap som subjektiv och kontextberoende. Inom detta perspektiv ses verkligheten inte som objektiv och åtskild från individens subjektiva upplevelse, utan som en sammansmältning av dessa två. Marton (2015) beskriver variationsteorins antaganden i termer av att den lärande både erfar och påverkas av den värld hen lever i, och att lärande förstås som förändringar i medvetenheten om olika företeelser, situationer och fenomen. Utifrån detta perspektiv kan lärande varken förstås som subjektiva, interna kognitiva processer eller som resultat av en yttre, objektiv påverkan, utan som ett samspel mellan individens tidigare erfarenheter och den specifika undervisningssituationens innehåll och struktur. Epistemologiskt överensstämmer detta med en pragmatisk kunskapssyn, där kunskap inte värderas utifrån huruvida den är objektivt sann eller helt subjektiv, utan snarare utifrån dess praktiska konsekvenser (Gillespie m.fl., 2024).

Variationsteori

Variationsteorin är en vetenskaplig teori om lärande som kan användas i studier av lärande och undervisningsutveckling för att förstå och stödja lärande (Holmqvist m.fl., 2008). Centralt i variationsteorin är både vad eleverna ska lära och hur lärande kan möjliggöras, där dessa delar ses som oskiljaktiga (Marton, 2015; Kullberg m.fl., 2024). Utgångspunkten är vidare pedagogiskt grundad, vilket skiljer den från många andra lärandeteorier (Lo & Marton, 2005). Variationsteorin har, som tidigare redogjorts för, sina rötter i fenomenografi, vilket är en forskningsansats som utvecklades av Marton och hans kollegor vid avdelningen för utbildning och pedagogik på Göteborgs universitet (Holmqvist m.fl., 2008; Kullberg m.fl., 2024). Fenomenografins fokus ligger på att urskilja hur olika individer uppfattar ett visst fenomen i världen samt att beskriva variationen i dessa uppfattningar (Marton, 1981). Genom att studera människors erfarende och uppfattningar, kan kvalitativt

skilda sätt att uppfatta samma fenomen identifieras och klassificeras. Enligt Marton (1981) finns det ett begränsat antal sådana kvalitativt olika uppfattningar. Till skillnad från fenomenografi, som utforskar de kvalitativt skilda sätt på vilka människor uppfattar olika fenomen, erbjuder variationsteorin ett teoretiskt ramverk för att förstå vad som krävs för att lära sig något (Rovio-Johansson & Ingeman, 2016). Variationsteorins fokus ligger på förändringar i sättet att uppfatta eller erfara fenomen, där dessa förändringar ses som en indikation på lärande (Kullberg & Ingeman, 2022). Enligt Marton och Booth (1997) går lärande från en odifferentierad och osammanhängande förståelse av helheten till en ökad differentiering och sammanhängande förståelse av helheten och dess ingående delar. Baserat på fenomenografiska antaganden om att individer uppfattar samma fenomen på kvalitativt olika sätt, är det av vikt att läraren identifierar dessa skillnader i kunnande och förståelse och tar hänsyn till dem vid planeringen av undervisningen (Lo & Marton, 2005).

Lärandeobjektets nödvändiga och kritiska aspekter

För att kunna tala om lärande måste det enligt Marton (2015) först klargöras vad som ska läras. Inom variationsteorin benämns det fenomen, den specifika kunskap eller den förmåga som eleverna ska ges möjlighet att utveckla kunnande om genom undervisningen som *lärandeobjekt* (Marton, 2015). Marton och Pang (2007), definierar lärandeobjekt som en ”specific insight, skill or capability that the students are expected to develop” (s. 2). Enligt Marton och Booth (1997) baseras vilken eller vilka kunskaper den lärande ska ges möjlighet att utveckla på de kunskapskrav som formuleras i utbildningssystemets läro- och kursplaner. Lärandeobjektet beskrivs ofta utifrån de två dimensionerna det direkta och det indirekta lärandeobjektet (Marton & Pang, 2006). I avhandlingens klassrumsstudier är det direkta lärandeobjektet konceptuell subitisering (talområdet 1–9) medan det indirekta lärandeobjektet relaterar till en förståelse av tals del-helhetsrelationer. Även om det finns skillnader mellan det direkta och indirekta lärandeobjektet menar Marton och Pang (2006) att ”The content (the direct object) can never be the aim or the outcome of learning in itself. It is the capability of using that content (the indirect object) that is the target or result” (s. 196).

Kopplat till varje lärandeobjekt, och till varje lärande, finns det nödvändiga aspekter och egenskaper (ingående delar) som den lärande behöver kunna urskilja för att få en fördjupad förståelse av lärandeobjektet (helheten) (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015). Ett exempel på nödvändiga aspekter av tal som elever behöver ges möjlighet att urskilja för att kunna utföra beräkningar är, enligt Neuman (1987 i Marton, 2015), de tre aspekterna: tals ordinala och kardinala innebörd samt att tal kan delas upp i mindre delar. Enligt variationsteoretiska antaganden uppstår lärande när den som lär sig urskiljer aspekter av lärandeobjektet som hen tidigare inte kunnat urskilja (Marton & Pang, 2006; Marton, 2015). Aspekter som den lärande ännu inte

urskilt men behöver urskilja för att utveckla sin förståelse av innehållet, benämns kritiska aspekter. Det är urskiljning av dessa aspekter som behöver erbjudas eleverna i undervisningen (Marton, 2015). Marton (2015) är noga med att framhålla att vad som är kritiska aspekter för en individ vid inlärningsstillfället är individuellt, eftersom de kritiska aspekterna är beroende av vilka aspekter som den lärande urskilt eller inte urskilt av ett fenomen. Identifiering av de kritiska aspekterna sker vanligtvis genom intervjuer med elever och förtester, där elevernas svar analyseras för att se vilken förståelse som eleverna behöver ges möjlighet att utveckla. Arbetet stöds även av forskningslitteratur och lärares tidigare erfarenheter av undervisning om lärandeobjektet (Kullberg m.fl., 2024). Det är lärarens ansvar att skapa förutsättningar för elevernas lärande vilket görs genom att undervisningsaktiviteterna organiseras på ett sätt som möjliggör för eleverna att tillägna sig det avsedda lärandeobjektet, med fokus på de aspekter av lärandeobjektet som eleverna ännu inte har urskilt, så kallade kritiska aspekter (Lo & Marton, 2005).

I undervisningen beaktas lärandeobjektet i tre olika faser, där det planerade lärandeobjektet analyseras och jämförs med det lärande som möjliggjordes i undervisningen och vad eleverna faktiskt utvecklade kunnande om (Kullberg m.fl., 2024). I den inledande fasen planerar läraren för det kunnande som eleverna ska ges möjlighet att utveckla i undervisningen, vilket benämns det avsedda lärandeobjektet (*intended object of learning*). Därefter genomförs lektionen, vilket benämns det iscensatta lärandeobjektet (*enacted object of learning*). För att utvärdera om eleverna lärt sig det avsedda lärandeobjektet (*lived object of learning*) kopplat till den undervisning som erbjudits (*enacted object of learning*) analyseras hur eleverna svarar på undervisningen både genom muntlig kommunikation och skriftliga för- och eftertester (Marton & Pang, 2006). Resultaten av dessa ses som stöd för att identifiera vilken kunskapsutveckling/lärande som har skett respektive inte har skett (Marton & Pang, 2006). Detta beskriver Marton och Pang som "the gains and the absence of gains can then be related to what has happened in the classroom." (s. 196). Kullberg m.fl. (2024) understryker dock att det inte är möjligt att dra definitiva slutsatser om vad eleverna faktiskt lärde sig under den specifika lektionen enbart baserat på testresultat. Däremot kan resultaten ge indikationer på huruvida eleverna lärde sig det förväntade lärandeobjektet som var i fokus under lektionen. I avhandlingens ingående klassrumsstudier identifierades de kritiska aspekterna av lärandeobjektet genom observationer, förtester, forskningslitteratur och lärares tidigare erfarenheter av undervisning om lärandeobjektet. Dessa resultat användes för att planera och genomföra undervisningen. För att utvärdera undervisningsinsatserna användes eftertester, vilka var desamma som förtesterna.

Urskiljning, variation och simultanitet

Utifrån variationsteorins antaganden förutsätter lärande att aspekter av ett fenomen som tidigare inte urskilts blir möjliga att urskilja, vilket i sin tur möjliggör en förändring i hur vi erfar fenomenet. Enligt teorin utgör detta definitionen av lärande (Marton, 2015). Nyckeln till lärande ligger i att skapa variation, eftersom variation gör de kritiska aspekterna av ett lärandeobjekt synliga för den lärande (Kullberg m.fl., 2024). De tre nyckelbegrepp som variationsteorin vilar på är: urskiljning, variation och simultanitet. Detta utifrån antaganden om att det inte kan finnas något urskiljande utan upplevd skillnad, och det kan inte finnas någon upplevd skillnad utan en simultan upplevelse av minst två saker som skiljer sig åt (Kullberg m.fl., 2017; Lo & Marton, 2012; Marton, 2015). Urskiljning är ett centralt begrepp som beskriver hur en kritisk aspekt blir möjlig att urskilja genom att den varierar mot en invariant bakgrund, vilket gör att den kritiska aspekten framträder i kontrast till sådant den lärande redan har erfarenhet och kunskap om (Marton, 2015). För att lärande ska utvecklas är det dessa aspekter som ska erbjudas eleverna i undervisningssituationen (Lo & Marton, 2012). Lärandeobjektet måste alltså behandlas på olika sätt så att lärande blir möjligt, det vill säga att innehållet varierar så att skillnader kan uppfattas och erfaras utifrån den lärandes förståelse (Holmqvist m.fl., 2008; Kullberg m.fl., 2024). Ett exempel med relevans för denna avhandling är att elever inte kan förstå begreppet fyra utan att samtidigt ha en uppfattning om vad tre och fem innebär, det vill säga en förståelse för att antal kan variera. Om alla antal vore lika många skulle det vara omöjligt att urskilja och förstå begreppet antal.

Variationsmönster

Variationsteorins antaganden kan användas som vägledning i undervisningen för att skapa möjligheter för elever att urskilja de aspekter av lärandeobjektet som är nödvändiga för lärandet, sett ur ett elevperspektiv (Holmqvist m.fl., 2008). Vilket lärande som möjliggörs beror på hur lärandeobjektet hanteras i undervisningen, det vill säga vilka aspekter som varierar och vilka som hålls invarianta (Holmqvist m.fl., 2008; Marton, 2015). Enligt Lo (2012) behöver läraren därför ha kunskap om vilka aspekter som bygger upp lärandeobjektet för att kunna iscensätta lärandesituationer. Detta innebär i sin tur att elevernas möjligheter till lärande i hög grad påverkas av lärarens förmåga att skapa och iscensätta denna variation. De variationsmönster som tillämpas i undervisningen för att möjliggöra den lärandes urskiljning av lärandeobjektets kritiska aspekter bygger på antagandet att skillnader måste erfaras innan likheter kan identifieras, vilket Lo och Marton (2012) beskriver som: "contrast helps the learner to discern a particular phenomenon, concept, or aspect and differentiate it from other phenomena, concepts, or aspects" (s. 11).

Utformandet av dessa variationsmönster delas in i tre olika nivåer: kontrast, generalisering och fusion (tabell 1), vilka kan anpassas efter elevernas förkunskaper. När enbart den kritiska aspekten varierar och övriga hålls invarianta (variationsmönster kontrast), blir det lättare för eleverna att urskilja just den aspekten, särskilt när innehållet är nytt för dem (Lo, 2012). Genom variationsmönstret generalisering hålls den kritiska aspekten invariant, medan andra aspekter varierar, vilket ger eleverna möjlighet att förstå generella principer kopplade till denna aspekt. När flera kritiska aspekter varierar samtidigt genom variationsmönstret fusion, ges eleverna möjlighet att särskilja dessa olika betydelser (Lo, 2012). En simultan medvetenhet av två eller flera aspekter kan dock bara utvecklas om dessa aspekter först är separat urskilda, innan de samvarierar (Marton & Pang, 2007). Förmågan att förstå och tillämpa kunskap bortom den specifika lärandesituationen i nya sammanhang, så kallat generativt lärande, påverkas av hur de kritiska aspekterna av lärandeobjektet behandlas i lärandesituationen (Holmqvist m.fl., 2007; Holmqvist, 2011). Holmqvist m.fl. (2007) argumenterar, med stöd i resultat från tre studier med nio Learning studies, för att användning av kontrast i undervisningen kan vara fördelaktigt på kort sikt, men inte nödvändigtvis leder till lärande på längre sikt. Forskarna menar att variationsmönstret kontrast är att föredra i situationer där nya lärandeobjekt introduceras. När eleverna redan har vissa förkunskaper om lärandeobjektet, kan det däremot vara mer gynnsamt att använda generalisering eller fusion. Detta eftersom den lärande troligtvis inte utmanas när enbart kontrast används, vilket kan leda till att en mer generell förståelse av lärandeobjektet inte utvecklas, frikopplat från de specifika exempel och uppgifter som används vid lärtillfället. I fusion behöver den lärande däremot se samband mellan olika aspekter, vilket är en förmåga som kan ta längre tid att utveckla, men som i gengäld leder till en mer flexibel förmåga att urskilja dessa samband i nya situationer även efter själva lärandetillfället.

Tabell 1
Olika nivåer av variationsmönster och varierade och invarianta aspekter.

Variationsmönster	Kritiska aspekter	Andra aspekter
Kontrast	varierar	invariant
Generalisering	invariant	varierar
Fusion	varierar	varierar

Kommentar: Med inspiration av tabell 3.1 i Kullberg m.fl. (2024).

Kontrast – initialt lärande

Det grundläggande variationsmönstret är kontrast, inom vilket principen om variation ryms. I detta variationsmönster lyfts de kritiska aspekterna av lärandeobjektet fram genom att de, en i taget, kontrasteras mot andra aspekter (Kullberg m.fl., 2017; Kullberg m.fl., 2024; Marton, 2015). Genom att visa vad

något är i förhållande till vad det inte är, kan den lärande urskilja den kritiska aspekten. Denna metod kan jämföras med motexempel, som är en vanligt förekommande metod i matematikundervisningen för att undersöka giltigheten i hypoteser och bevis (se till exempel Komatsu, 2010). Det minimala mönstret för att skapa kontrast utgörs av de två aspekterna variation och invariants (Marton, 2015). För att ge den lärande möjlighet att urskilja och uppmärksamma en kritisk aspekt, behöver denna aspekt varieras mot en invariant bakgrund. Den lärandes uppmärksamhet dras till de varierande aspekterna som hamnar i förgrunden, medan de invarianta aspekterna förblir i bakgrunden. Detta variationsmönster förhindrar att eleverna blir överväldigade av för många förändringar samtidigt och gör det möjligt för dem att koncentrera sig på de mest centrala delarna av fenomenet (Marton, 2015). Marton (2015) lyfter som exempel att färgen grön kan urskiljas först när den kontrasteras mot föremål i andra färger. I exemplet varieras aspekten färg, medan föremålen hålls invarianta. Ett annat exempel som Kullberg m.fl. (2024) ger är att för att kunna urskilja den geometriska formen triangel behöver triangeln kontrasteras mot andra geometriska former.

Generalisering – grundläggande lärande

Till skillnad från mönstret kontrast, där olika aspekter av ett fenomen kontrasteras för att visa skillnader dem emellan, används generalisering med syftet att eleverna kan se gemensamma mönster eller principer som gäller för flera exempel. Generalisering används för att elever, som redan har utvecklat en grundläggande förståelse för fenomenet, ska ges möjlighet att utveckla sin förståelse för överordnade allmängiltiga principer (Kullberg m.fl., 2017; Lo, 2012; Marton, 2015). För att kunna generalisera en kritisk aspekt måste likheter användas (sameness). Detta för att den lärande ska kunna urskilja de specifika kriterier som definierar fenomenet/lärandeobjektet. Kopplat till exemplet färg ovan hålls i mönstret generalisering aspekten färg invariant medan föremålen varieras. I exemplet trianglar kan triangelns specifika egenskaper urskiljas om dessa utforskas i olika typer av trianglar (likbent, liksidig, rätvinklig, trubbvinklig) med olika storlekar. Medan kontrast används för att kunna urskilja triangeln i relation till andra geometriska figurer, används generalisering för att se flera olika representationer av trianglar. Detta utifrån syftet att eleverna ska utveckla förståelse för den övergripande principen för vad som kännetecknar trianglar. I avhandlingens kontext kan detta förstås som att eleverna behöver urskilja att ett visst antal alltid representerar samma kvantitet, oavsett objekt och hur de är ordnade och grupperade. Till exempel är fyra fingrar lika många som en röd triangel, en gul stjärna och två blåa kuber.

Fusion – avancerat lärande

Efter att de kritiska aspekterna har varierats, en i taget, genom kontrast och generalisering, måste de erfaras tillsammans (Marton, 2015). I det avslutande steget används därför fusion eller sammansmältning, vilket innebär ett variationsmönster

där en simultan upplevelse av både kritiska och icke-kritiska aspekter erbjuds (Kullberg m.fl., 2024). Detta variationsmönster möjliggör en förståelse av lärandeobjektet i sin helhet, det vill säga en fullödig förståelse av lärandeobjektets både helhet och delar, en så kallad simultan förståelse för lärandeobjektets olika aspekter och relationer dem emellan (Holmqvist m.fl., 2008; Kullberg m.fl., 2017; Lo, 2012). Detta mönster används då elever har god kunskap såväl om det som skiljer ett fenomen från ett annat, som dess övergripande principer. Kopplat till exemplet färg krävs att den lärande kan urskilja grön bland andra färger och olika färgade objekt, och i exemplet med trianglar kan olika geometriska figurer och representationer av trianglar användas för att den lärande ska kunna identifiera trianglar oavsett deras representation eller relation till andra närliggande fenomen.

Utmaningar

I detta avsnitt redogörs för några av de utmaningar och kritiska röster som lyfts i tidigare forskning i relation till variationsteori. De utmaningar som identifierats i avhandlingens delstudier diskuteras i diskussionskapitlet. Mason (2017) betonar att variationsteorins fokus mot specifika fenomen och ambitionen att rikta den lärandes uppmärksamhet mot dessa är en grundläggande aspekt av allt lärande och all undervisning. Användandet av och kravet på en noggrann planering av variationsmönster kan dock vara en utmaning för lärare att praktiskt tillämpa i undervisningen. Pedagogiskt handlar det inte bara om att vara medveten om vad som behöver varieras, utan också när, hur mycket variation, inom vilket intervall och under vilken tidsperiod (Mason, 2017). Mason (2017) framhåller att i de faktiska lektionerna är det de pedagogiska valen som görs av läraren, angående hur länge man ska fokusera på varierade och invarianta aspekter, som är avgörande för elevers lärande. Den kritik som Mason därför riktar mot variationsteorins utgångspunkter är att en rad variationer av lärandeobjektet eller fenomenet i sig inte är tillräcklig för att garantera att lärande faktiskt sker. Den lärandes tidigare och nuvarande erfarenheter behöver också beaktas i lärandeprocessen, eftersom enskilda elever fokuserar på olika aspekter avhängigt av vad de urskiljer som överordnat respektive underordnat (Mason, 2017). Mason ställer vidare frågan ”Is it the aspects that are varied that are important or the aspects that remain invariant?” (Mason, 2017, s. 416), utifrån vilken han resonerar kring vad som ska varieras samt hur och när, för att de kritiska aspekterna ska bli så tydligt urskiljbara som möjligt. Enligt variationsteoretiska antaganden möjliggörs lärande först när den lärande ges möjlighet att urskilja kritiska aspekter, vilket sker genom variation (Marton, 2015). Lam (2012) ställer sig dock kritisk till detta antagande, då han hävdar att lärande kan uppstå även om variation inte explicit erbjuds i undervisningen. Variationsteorin är inte unik i sitt sätt att förklara sambandet mellan lärande och undervisning. En liknande teoretisk ansats är *Bianshi Jiaoxue* (Teaching for change)

(Pang m.fl., 2017). Metoden har sitt ursprung i Kina och har utvecklats specifikt kopplat till matematikämnet. I undervisningen skapar lärarna lärandesituationer genom att, precis som i variationsteorin, använda sig av skillnader (differences) och likheter (sameness) (Pang m.fl., 2017). I ansatserna läggs dock olika tonvikt på likheter och skillnader. I variationsteori betonas skillnad mer än likhet: "contrast helps the learner to discern a particular phenomenon, concept, or aspect and differentiate it from other phenomena, concepts, or aspects" (Lo & Marton, 2012, s.11). Det är först i nästa steg som den lärande behöver se likheter för att kunna generalisera de specifika kriterier som definierar fenomenet (Marton, 2015). I Bianshi Jiaoxue läggs däremot större vikt vid likhet, och i undervisningen lyfts främst samband och likheter mellan olika exempel (Pang m.fl., 2017). Skillnaden mellan variationsteori och andra lärandeteorier sammanfattar Kullberg och Ingerman (2022) i citatet "while most other learning theories point out induction (sameness) as being key, variation theory instead points out contrast" (s. 6).

En annan utmaning som lyfts av Mason (2017) är att utforma en lektionsdesign som både bevarar fenomenets komplexitet och samband med andra fenomen, samtidigt som den möjliggör meningsfullt lärande för alla elever oavsett bakgrund och förkunskaper. Mason (2017) argumenterar för att denna typ av didaktiska dilemman kan leda till svårigheter att konsekvent tillämpa teorins principer på ett sätt som genererar förbättrade läranderesultat.

Kapitel 4. Metod

Inledningsvis redogörs för avhandlingens metodologiska utgångspunkter relaterat till ontologiska och epistemologiska antaganden samt val av forskningsansats. I en översiktstabell presenteras de ingående delstudiernas design, urval, datainsamling och analys. Därefter presenteras metod för och genomförande av syntesen, följt av en redogörelse av respektive studies (artikel I till IV) forskningsdesign, urval, datainsamling och analys. Eftersom denna avhandlings delstudie I och III (som presenteras som Delstudie II i licentiatuppsatsen) är utförligt presenterade i licentiatuppsatsens bifogade kapp (s. 38–40 respektive s. 40–43) presenteras de bara översiktligt här. Kapitlet avslutas med etiska aspekter kopplat till den genomförda forskningen.

Metodologiska utgångspunkter

Med utgångspunkt i avhandlingens syfte och övergripande forskningsfråga, planerades och genomfördes klassrumsstudierna i relation till vad som var ändamålsenligt och även praktiskt genomförbart i de specifika kontexterna. Även etiska aspekter beaktades utan att ge avkall på forskningens kvalitet (se rubriken Etiska aspekter).

Valet av forskningsansats utgår från ett pragmatiskt kunskapsperspektiv. Inom detta perspektiv styrs val av metod av forskningsfrågornas natur, där både kvantitativa och kvalitativa kunskapsformer betraktas som värdefulla och ömsesidigt kompletterande för att undersöka och förstå fenomen (Gillespie m.fl., 2024). Utifrån detta kunskapsperspektiv är det betydelsefullt att generera ändamålsenlig (effective), insiktsfull (insightful) och användbar kunskap som stärker individens möjligheter att påverka och skapa förändring (emancipatory) i praktiken (Gillespie m.fl., 2024).

Enligt Bryman (2018) påverkas valet av forskningsdesign dels av synen på kunskap (epistemologi), dels av uppfattningen om vad som existerar och hur verkligheten förstås (ontologi). Även om vissa mönster kan urskiljas avseende sambandet mellan forskningsmetod och dess ontologiska och epistemologiska antaganden, framhåller Bryman (2018) att dessa inte är statiska eller absoluta. En kvantitativ ansats vilar främst på en ontologiskt objektiv syn på att fenomen existerar oberoende av sociala

aktörer (realism), medan den kvalitativa ansatsen i stället vilar på ett subjektivt synsätt, där verkligheten är något som kontinuerligt konstrueras och förändras genom de interaktioner och sociala samspel som vi människor är en del av (relativismen) (Gillespie m.fl. (2024). Variationsteorin, som vilar på en icke-dualistisk kunskapssyn, passar väl ihop med det pragmatiska synsättet som präglas av en öppenhet för att integrera olika metoder och perspektiv. Enligt variationsteorin uppstår lärande i mötet mellan eleven (subjektet) och de undervisningsaktiviteter (objektet) som eleven engageras i. I avhandlingens klassrumsstudier undersöks det komplexa sambandet mellan undervisningens utformning och elevernas lärande, vilket motiverar användningen av flermetodsforskning (Mixed Methods Research) som innebär att både kvantitativa och kvalitativa data samlas in och integreras (Creswell & Creswell, 2018; Hirose & Creswell, 2023). Enligt Merriam och Tisdell (2016) vilar flermetodsforskning på en öppen och pragmatisk syn på verkligheten, vilket möjliggör användning av flera metoder, datatyper och analysstrategier, vilket i sin tur kan bidra till en mer nyanserad och mångfasetterad förståelse av fenomenet än vad en enskild metod kan erbjuda. Även Szklarski (2002) framhåller att kunskap och verklighet inte kan reduceras till en åtskillnad mellan objektiva fakta och subjektiva uppfattningar, utan dessa perspektiv bör snarare betraktas som komplementära för att skapa en helhetsbild. Avhandlingens val av forskningsansats tar även stöd i Hart m.fl. (2009), som argumenterar för att en pragmatisk ansats är särskilt lämpad för utbildningsfrågor, vilka ofta präglas av komplexitet och därför kräver användning av flera metoder. Som framgår av översiktstabellen (tabell 2) har olika forskningsansatser och forskningsmetoder använts i avhandlingens ingående delstudier. I den systematiska litteraturöversikten användes en kvalitativ ansats i form av narrativ syntes. I de andra studierna har både kvalitativa och kvantitativa ansatser använts med lite olika tonvikt. Versaler indikerar att det är studiens primära ansats medan gemener indikerar att ansatsen är av underordnad karaktär.

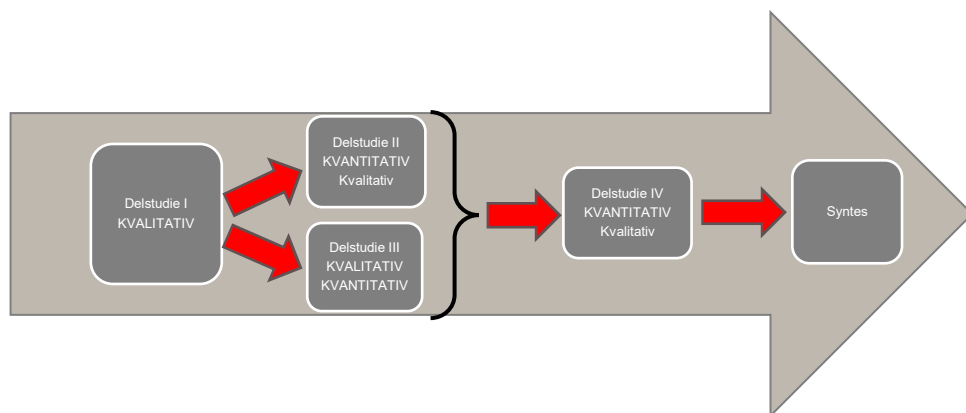
Tabell 2

Översikt över de ingående delstudiernas design, urval, datainsamling och analys.

	Delstudie I	Delstudie II	Delstudie III	Delstudie IV
Design	Systematisk litteraturöversikt	Korrelationsstudie mellan två bedömningsverktyg	Pilotstudie. Konceptuell subitiserings	Undervisningsinsats med kontrollgrupp. Slumpmässig fördelning mellan olika grupper
	KVALITATIV	KVANTITATIV Kvalitativ	KVALITATIV KVANTITATIV	KVANTITATIV Kvalitativ
Urval	18 artiklar baserat på exklusions- och inklusionskriterier och kvalitetsbedömning	74 förskoleklass-elever	24 förskoleklass-elever och två förskoleklass-lärare	74 förskoleklass-elever
Datainsamling	Databassökning i ERIC, PsycINFO och Web of Science	Resultat från två olika tester (NST och FSSM)	Direkta observationer och frågor via e-post till lärarna För- och eftertest	För- och eftertest Videoinspelade lektioner
Analys	Narrativ syntes	Korrelationsanalys Jämförande kvalitativ analys	Deskriptiv statistik. Innehållsanalys och tematisk analys	Upprepad ANOVA Variationsteoretisk analys

Kommentar: I de fall ansatserna har haft samma tyngd i studien används versaler.

Avhandlingens forskningsdesign är enligt Creswells (2014) beskrivning *multiphase mixed methods-design*. Modellen kännetecknas av att olika forskningsmetoder tillämpas i flera faser, i syfte att på ett systematiskt och integrerat sätt belysa och besvara en övergripande forskningsfråga. Creswell (2014) definierar en forskningsdesign som avancerad när flera delstudier genomförs över tid med varierande forskningsmetoder, och när datainsamlingen synkroniseras antingen sekventiellt eller konvergent. Designen i denna avhandling kan, enligt Creswell (2014), betraktas som avancerad (figur 1) med en sekventiell ansats. Denna tillämpades genom att resultaten från den systematiska litteraturöversikten låg till grund för val av bedömningsverktyg i delstudie II, där sambandet mellan hur väl resultaten från de två bedömningsverktygen korrelerade med varandra, undersöktes. Delstudie I låg även till grund för val av forskningsmetod och innehåll i pilotstudien (delstudie III), vilken i sin tur informerade designen av undervisningsinsatsen i delstudie IV. I ett avslutande steg syntetiserades resultaten från samtliga delstudier för att besvara avhandlingens huvudsyfte och övergripande forskningsfråga.



Figur 1

Avhandlingens övergripande forskningsdesign.

Kommentar: Versaler indikerar att det är studiens primära ansats medan gemener indikerar att ansatsen är av underordnad karaktär. I de fall ansatserna haft samma tyngd i studien används versaler.

Analysmetod för syntes

Syntesen i denna avhandling syftar till att bidra med ny kunskap om sambandet mellan undervisning och förskoleklasslevers lärande av antal och tal. Den kvalitativa metod som har använts för att sammanföra och integrera resultaten från de ingående delstudierna är en empiriskt grundad narrativ syntes. Enligt Popay m.fl. (2006) innebär denna process att resultat från olika studier integreras för att möjliggöra slutsatser baserade på den samlade evidensen. Metoden är textbaserad och tolkande, och bygger på en narrativ förklaring av de mönster som framträder i materialet. Narrativ syntes har huvudsakligen utvecklats som en metod för systematiska översikter, men enligt Popay m.fl. (2006) lämpar sig metoden även för översikter där forskningsfrågan kräver integration av studier med olika forskningsdesigner och metodologiska ansatser. Eftersom metoden möjliggör syntes av såväl kvalitativa som kvantitativa och mixade studier, har narrativ syntes bedömts som en lämplig metod för att integrera resultaten från de fyra delstudierna. För att besvara avhandlingens övergripande forskningsfråga, gällande vilka aspekter i undervisningsdesign som framstår som särskilt främjande för lågpresterande förskoleklasslevers utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal, har en kvalitativ reanalys genomförts. I denna har resultaten från delstudierna satts i relation till varandra och syntetiserats. Med reanalys avses i detta sammanhang en nytolkning av respektive delstudies resultat, inte en ny analys av ursprungliga primärdata. Reanalysen har vägletts av fyra nya övergripande forskningsfrågor, en för varje delstudie, vilka är relaterade till olika aspekter av avhandlingens övergripande syfte och forskningsfråga. Den första

forskningsfrågan, kopplat till delstudie I, utgår från ett forskningsöversiktligt perspektiv med fokus på vad tidigare forskning lyfter fram som betydelsefullt för att förstå och kunna hantera antal och tal i tidig ålder. Den andra forskningsfrågan ställs, i delstudie II, utifrån ett bedömningsperspektiv och undersöker hur lågpresterande elevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal kan identifieras och följas i klassrumspraktiken. I den tredje forskningsfrågan i delstudie III riktas fokus mot variationer i denna förmåga, medan den fjärde forskningsfrågan i delstudie IV utgår från ett undervisningsperspektiv där sambandet mellan undervisning och lärande står i centrum. Analysen har genomförts på två nivåer. På den första nivån utgjordes analysenheten av de empiriska primärdata som samlats in inom respektive delstudie. På den andra nivån var analysenheten de rapporterade resultaten från varje delstudie, som syntetiserades genom reanalys för att besvara den övergripande forskningsfrågan. I denna reanalys låg fokus på att identifiera, jämföra och integrera likheter och skillnader mellan studiernas resultat. Samstämmiga resultat, som återkommit i mer än en delstudie och som är relaterade till undervisningsdesign samt lågpresterande elevers utveckling av förmågan att hantera och bestämma antal och tal, har utgjort analysenheter. Genom att lyfta fram samstämmigheter i resultat mellan studierna synliggörs generella drag som kan antas vara gynnsamma för förskoleklasslevers lärande av tal och antal.

Metod och genomförande

I följande avsnitt presenteras de forskningsmetoder som tillämpats i avhandlingens respektive delstudier med fokus på urval, datainsamling och analysmetoder.

Delstudie I: Systematisk litteraturöversikt

Den första studien i avhandlingen är en systematisk forskningsöversikt där sökstrategier, litteratururval, relevansbedömning och utvärdering av artiklar från olika databaser systematiserats. Studien syftar till att syntetisera forskningsresultat av lågpresterande årskurs F–3-elevers antals- och taluppfattningskompetenser avseende metodologiska tillvägagångssätt, definitioner av lågpresterande elever och rapporterade antals- och taluppfattningskompetenser.

Urval

Problemområdet avgränsades genom användandet av PICOC-modellen avseende *Population, Intervention, Kontrollgrupp, Resultat* och *Kontext* (Eriksson Barajas m.fl., 2013). De tre sökblock som användes i databassökningarna i ERIC, PsycINFO och Web of Science var *numeracy*, *early education* och *low achievers*. Inklusionskriterierna omfattade vetenskapligt granskade artiklar och empiriska studier inom det ordinarie skolsystemet med lågpresterande 5–9-åringar i vilka

dessas elevers antals- och taluppfattning var i fokus. Exklusionskriterierna var studier utan definierade lågpresterande elever, översiktsartiklar och teoretiska studier, studier med fokus på generella kognitiva förmågor, samt studier som inte fokuserade på elevers antals- och taluppfattningskompetenser.

Data

18 refereegranskade engelskspråkiga artiklar, publicerade mellan 2007 och 2017, identifierades i sökningen baserat på fördefinierade exklusions- och inklusionskriterier.

Analys

En integrerad flermetodsforskning (Integrated mixed methods research synthesis for literature reviews – MMRS) (Heyvaert m.fl., 2017) användes för att syntetisera evidens från artiklar med kvalitativa och kvantitativa forskningsmetoder, samt flermetodsforskning om fenomenet. I enlighet med indelningen i olika tillvägagångssätt som Heyvaert m.fl. (2017) gör för att syntetisera MMRS användes narrativ syntes, vilket innebär att empiriska data från primärstudier beskrivs och summeras. Analysprocessen tog avstamp i de rekommendationer som ges i Popay m.fl. (2006). Efter en noggrann genomläsning av de inkluderade artiklarna extraherades relevanta data med utgångspunkt i studiens forskningsfrågor. Detta gjordes genom identifiering av meningsbärande enheter kopplat till syfte, forskningsansats, urval, definitioner och beskrivningar av lågpresterande elever, bedömda numeriska kompetenser samt slutsatser. Resultaten sammanställdes i en tabell för att möjliggöra jämförelser. Därefter grupperades liknande artiklar genom att söka efter mönster inom och mellan grupperna, för att slutligen sammanföra evidensen och narrativt besvara forskningsfrågorna. Robson (2011) respektive Dowker (2001) användes som teoretiska ramverk vid granskningen av studiernas forskningsansats och studierna beskrivningar av numeriska kompetenser.

Delstudie II: Korrelationsstudie mellan två bedömningsverktyg

Syftet med studien var att jämföra i vilken utsträckning resultaten från de två bedömningsverktyg som användes i klassrumsstudierna, bedömda med två olika metoder för poängsättning och med olika komplexitet, korrelerar med varandra. Bedömningsverktygen som användes för att bedöma förskoleklass elevernas förmåga att bestämma och flexibelt hantera tal och antal var *Förmåga att snabbt se mängd* (FSSM) (Adler, 2022a) och *Number Sets Test* (NST) (Geary m.fl., 2009). Bedömningsverktygen är från början framtagna för att identifiera elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter, men i denna studie används de enbart för att bedöma elevernas förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. I studien fokuseras inte heller på de enskilda bedömningsverktygens validitet och reliabilitet, utan på hur resultaten från verktygen förhåller sig till varandra. Valet att

använda två bedömningsverktyg motiveras med att de prövar olika aspekter av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal (se rubriken Bedömningsverktyg). De valdes även på grund av att de är enkla att använda och administrera i en klassrumskontext. I forskningen framhålls detta som viktigt så att de kan användas av lärare i undervisningen för att tidigt identifiera och följa lågpresterande elever som riskerar att hamna i framtida svårigheter i matematik (Aunio, 2019; Zhang m.fl., 2020). Gersten m.fl. (2011) skiljer mellan bedömningsverktyg som används för att bedöma enstaka förmågor eller färdigheter och bedömningsverktyg som används för att bedöma multipla kompetenser i matematik. Bedömningsverktyg som används för att bedöma enstaka kompetenser ger, till skillnad från bedömningsverktyg som används för att bedöma multipla kompetenser, inte en fullständig diagnostisk profil av elevens förmåga att uppfatta och hantera antal och tal. Däremot fyller de en viktig funktion för att bedöma specifika matematiska kompetenser (Gersten m.fl., 2011; Kilday m.fl., 2012) vilket Purpura och Lonigan (2015) menar är avgörande för att elever ska kunna erbjudas riktade insatser. En problematik som lyfts av Salvia m.fl. (2016) i relation till bedömningsverktyg är att många enbart ger information om en elev klarar eller inte klarar en specifik uppgift. Sådana verktyg ger begränsad information om i vilken grad eleven behärskar den färdighet eller förmåga som respektive uppgift avser att pröva. Med utgångspunkt i avhandlingens innehållsliga fokus på konceptuell subitiseringsförmåga och tals del-helhetsrelationer valdes bedömningsverktyg som prövar dessa kompetenser, samtidigt som de möjliggör identifiering av prestationer på olika nivåer.

Urval

Data samlades in från 59 av de totalt 74 förskoleklass eleverna som deltog i forskningsprojektet *Global bearbetning som en indikator på barns konceptuella subitiseringsförmåga i förskoleklass*, och vars vårdnadshavarna gett informerat samtycke till deltagande (se rubriken Urval under avsnittet Delstudie IV).

Data

Det insamlade datamaterialet utgjordes av fullständiga resultat från både FSSM och NST.

Bedömningsverktyg

I FSSM prövas elevernas subitiseringsförmåga, det vill säga deras förmåga att direkt och korrekt identifiera vilken av antalsgrupperna (tre, fyra eller fem prickar) som består av fyra prickar (figur 2) – antingen genom perceptuell eller konceptuell subitisering. Antalet fyra rapporteras vara det högsta antal som vi människor kan subitiserat perceptuellt (Feigenson m.fl., 2004; Trick & Pylyshyn, 1994). Gelman och Tucker (1975) har dock rapporterat att bara 69 procent av femåringar klarar av att subitiserat fyra objekt. Bestämning av fyra eller fler objekt, särskilt när dessa

presenteras i icke-kanoniska mönster, antas i stället ske antingen genom uppräkningsmedel eller genom användning av konceptuell subitiseringsförmåga (Clements, 1999; Schleifer & Landerl, 2011; Trick & Pylyshyn, 1994). Eftersom vissa av studiens deltagande förskoleklass elever är fem år vid höstterminens början, och eftersom antalen presenteras i varierande antalsmönster, bedöms dessa utgöra ett rimligt urval för att undersöka elevernas konceptuella subitiseringsförmåga.

I NST fokuseras främst på elevernas förståelse av tals del-helhetsrelationer (antalet fem). Skälet att pröva elevers kunskaper avseende talet fem och dess del-helhetsrelationer grundar sig dels i förskoleklasslärares erfarenheter av att ha undervisat elever i matematik i förskoleklass, dels i att alla elever har erfarenhet av femstrukturen genom ena handens fingrar. De båda bedömningsverktygen uppvisar strukturella likheter genom sin användning av icke-symboliska representationer av kvantiteter. Detta gör att alla elever kan delta oavsett språklig förmåga. Vidare genomförs de under en kort tidsperiod på en respektive två minuter och eleverna behöver inte själva formulera sina svar, utan de markerar de korrekta antalen genom att dra streck eller ringa in rätt alternativ (svar).

Förmåga att snabbt se mängd (FSSM)

FSSM är ett standardiserat test baserat på resultat från 4 861 svenska elever i åldrarna 6–18 år, varav 449 sexåringar. Testet har utvecklats för att bedöma individens förmåga att snabbt och direkt identifiera antalet fyra. Resultaten på FSSM bedöms utifrån en normbaserad Stanine-skala som delar upp prestationerna i nio nivåer, där 1 representerar den lägsta nivån och 9 den högsta. Stanine är en skala som används för att klassificera och jämföra resultat i psykometriska tester och prestationstester. I föreliggande studie används Stanine-värde som ett mått på elevens förmåga att snabbt identifiera ett litet antal objekt, vilket är en färdighet som Adler (2022a) identifierat som särskilt utmanande för elever med matematiksvårigheter. Varje Stanine-värde motsvaras av ett specifikt poängintervall, där Stanine-värde 1 motsvarar 0 till 3 poäng och Stanine-värde 9 motsvarar 28 till 70 poäng. Drygt hälften (54 procent) av de 4 861 eleverna presterade inom Stanine-värde 4–6, vilket motsvarar en totalpoäng mellan 10 och 18.

Testet har utvecklats av Adler (2022a) för att möta ett pedagogiskt behov av att systematisera observationer i den dagliga undervisningen. Det består av ett blad med övningsuppgifter på framsidan och testuppgifter på baksidan. Totalt innehåller testet 210 uppgifter, bestående av olika antalsmönster (kanoniska och icke-kanoniska) med tre till fem prickar (figur 2). Instruktionen till eleverna är att markera alla antalsgrupper som består av fyra prickar genom att dra ett streck över dem. Innan testet påbörjas genomförs tre övningsuppgifter gemensamt med testledaren för att säkerställa att eleverna förstått uppgiften. Bedömningen av FSSM baseras på en totalpoäng, som beräknas genom att subtrahera antalet felaktiga och överhoppade svar från antalet rätta svar (Adler, 2022a).



Figur 2

Exempel på övningsuppgifter i FSSM.

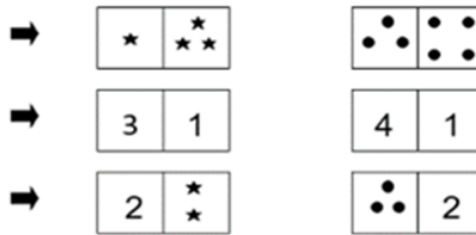
Kommentar: Konstruerad av författaren med utgångspunkt i testmaterialet FSSM (Adler, 2022a).

Number Sets Test (NST)

NST är ett deltest från ett större testbatteri utvecklat av Geary m.fl., (2009). Testbatteriet är framtaget för att bedöma elevers förmåga att snabbt och korrekt identifiera och bearbeta antalen 5 och 9, representerade både genom arabiska siffror och visuellt representerade antalsuppsättningar. I relation till studiens fokus på konceptuell subitiseringsförmåga användes enbart deltestet som bedömer förmågan att bestämma vilka visuellt representerade antalsuppsättningar som tillsammans blir fem. Det valda deltestet består av 36 uppgifter med dominolikhande rektanglar som är uppdelade i två till tre sektioner där varje sektion innehåller ett varierande antal objekt (0–9) i olika spatiala mönster. Eleverna instrueras att så snabbt och korrekt som möjligt (inom en minut) identifiera vilka sektioner som tillsammans bildar summan 5 (totalt 18 sektioner bildar summan 5), vilket relaterar till kunskande avseende tals del-helhetsrelationer. Förutom att NST prövar elevernas kunskande att snabbt avgöra vilka sektioner som tillsammans blir fem, prövas även elevernas förmåga att ungefärligt uppskatta antal och bortse från antal som är betydligt fler än 5. För att eleverna ska förstå vad som förväntas av dem tränar de på uppgifter där de ska markera sektioner som tillsammans bildar summorna 3 och 4 (figur 3).

Circle all of the groups that add up to 4.
Work as quickly as you can.

4



Figur 3.

Övningsexempel i NST-testet.

Kommentar: Hämtad från Geary m.fl. (2018). Används med tillstånd av författaren 2019-12-17.

Uppgifterna i testet som används i studien består till skillnad från övningsexemplet ovan bara av dominobrickor med objekt, liknande de i den översta raden i figuren. I den ordinarie testversionen ombeds eleverna att ringa in alla dominobrickor vars sammanlagda antal blir fem.

Testet har validerats i en longitudinell studie om framtida matematiska inlärningssvårigheter (*Mathematical Learning Disabilities*, MLD) med 311 förskoleklass elever. I studien definieras MLD-elever som de som presterade under den 15:e percentilen på NST i både årskurs 2 och 3. Resultatet av den longitudinella studien visade att NST korrekt identifierade två av tre förskoleklass elever (Kindergarten) som i årskurs 3 diagnostiserades med MLD, samt nio av tio förskoleklass elever som inte var i riskzonen för MLD. Testets bedömningsmetod grundar sig på d' (d' -prime), ett statistiskt mått inom signal detection theory (Macmillan & Creelman, 2005), som beaktar individens förmåga att särskilja rätt svar från felaktiga svar, så kallade distraktorer. Totalpoängen beräknas som skillnaden mellan träffkvoten och falsk-alarm-kvoten, där båda omvandlas till standardiserade z -värden. Träffkvoten beräknas som antalet rätta svar dividerat med det totala antalet möjliga rätta svar, medan falsk-alarm-kvoten beräknas som antalet felaktiga svar dividerat med det totala antalet möjliga felaktiga svar. Ett högre d' -värde indikerar en bättre förmåga att skilja rätt svar (signaler) från icke rätta svar (falska signaler). Ett d' nära noll indikerar att individen har svårt för att skilja på korrekta och felaktiga svar (Macmillan & Creelman, 2005).

Testerna genomfördes enskilt av eleverna utan stöd från lärare eller kamrater. Enligt testutvecklarna kan testerna administreras antingen på grupp- eller individnivå. I denna delstudie (Delstudie II) genomfördes FSSM på grupp nivå och NST på individnivå. En central skillnad mellan testerna är att i FSSM bedöms elevernas förmåga att identifiera alla visuellt representerade antalsgrupper om fyra (prickar), medan NST bedömer elevernas förmåga att avgöra vilka visuellt representerade par eller triader (prickar, stjärnor, kvadrater) som tillsammans blir fem. I FSSM får

eleverna själva strukturera och gruppera antal, vilket de inte gör i NST där antalen redan är förindelade. En annan skillnad är att antalen i FSSM varierar mellan 3 och 5, medan de i NST varierar mellan 0 och 9.

Analys

Poängen (scores) för både FSSM och NST beräknades med hjälp av två olika metoder: d' (d-prime, enligt NST:s bedömningsmetod) och totalpoäng (enligt FSSM:s bedömningsmetod). Till skillnad från d' tar totalpoängsmetoden inte hänsyn till antalet genomförda uppgifter, vilket är en viktig aspekt då testet är tidsbegränsat. Det finns därför en risk att totalpoängsmetoden skulle kunna resultera i svarsbias eftersom en elev kan markera alla antalsmönster som rätt (3, 4 och 5). För att undersöka om insamlade data var normalfördelade genomfördes en Q-Q-plot och ett Shapiro-Wilk-test (Field, 2018). Resultaten visade att de inte var normalfördelade, vilket är ett villkor för att använda ett Pearson-korrelationstest. För att hantera detta normaliserades data genom rankit-transformation, vilket innebär att alla värden (poäng) rangordnas i stigande ordning.

För att besvara forskningsfrågorna om i vilken utsträckning testresultaten från FSSM och NST korrelerar, användes Pearson-korrelation. Pearson-korrelation möjliggör en kvantitativ analys av hur väl prestationer på det ena testet samvarierar med prestationer på det andra (Field, 2018). Metoden används för att mäta både styrkan och riktningen på sambandet mellan två variabler – i detta fall resultaten (poängen) från NST och FSSM.

Därefter genomfördes en kvalitativ komparativ analys (Cilesiz & Greckhamer, 2020) vilket är en analysmetod som kan användas för att jämföra mönster i data. I analysen undersöktes i vilken utsträckning de båda testerna identifierar samma elever som lågpresterande. Analysen fokuserade på de tio elever som uppvisade de lägsta resultaten på både NST och FSSM. Elevernas prestationer på testen jämfördes och kodades binärt: ja (1) om eleven presterade lågt på både NST och FSSM och nej (0) om eleven endast presterade lågt på ett av dem.

Delstudie III: Pilotstudie – konceptuell subitiserings

En undervisningsinsats i form av en pilotstudie genomfördes i en förskoleklass med syftet att utforska vilket kunnande avseende tals del-helhetsrelationer förskoleklass elever utvecklar när konceptuella subitiseringsaktiviteter används i undervisningen. Studien kan betraktas som en fallstudie där både kvalitativa och kvantitativa metoder för datainsamling och analys användes. Undervisningsinsatsen genomfördes i samarbete med elevernas två lärare (förskoleklasslärare) i form av en Lesson study, som är en iterativ och kollaborativ process där undervisningsinsatsen planeras, genomförs, analyseras och revideras gemensamt av forskaren och lärarna (Holmqvist, 2017). Undervisningsinsatsen bestod av två undervisningsblock med

olika mål. Målet i lektionsblock 1 var, utifrån elevgruppens förkunskaper, att erbjuda eleverna möjlighet att erfara att mindre antalsmängder kan bestämmas direkt, utan uppräknings med en i taget. Baserat på utfallet av lektionsblock 1 var målet med lektionsblock 2 att eleverna skulle ges möjlighet att utveckla sin förståelse för att antal (4 till 7) kan delas upp och sättas samman på olika sätt. Eleverna var engagerade i aktiviteterna i respektive undervisningsblock i totalt cirka 60–80 minuter. Number Sets Test (NST) (Geary m.fl. 2009) användes som för- och eftertest för att utvärdera undervisningsinsatsernas påverkan på elevernas kunskande avseende att snabbt och korrekt avgöra vilka par eller triader av dominolikande sektioner som tillsammans är fem (se Number Sets Test under rubriken Delstudie II).

Urval

Studien utfördes i en förskoleklass med 24 förskoleklass elever och två förskoleklasslärare där data från 18 elever, vars vårdnadshavare gett informerat samtycke till deltagande, samlades in. Skolverkets socioekonomiska indexlista (Skolverket, 2025), som används vid fördelning av statsbidrag till skolhuvudmän, indikerar att elevgruppen har låga akademiska förutsättningar. Indexet baseras bland annat på vårdnadshavarnas utbildningsnivå och inkomst, bostadsområde samt språkliga och migrationsrelaterade bakgrundsfaktorer, och används som ett mått på elevernas förutsättningar att nå grundskolans kunskapskrav. I enlighet med Brymans (2018) definition kan urvalet betraktas som ett bekvämlighetsurval, då deltagarna valts ut baserat på tillgänglighet och närhet till forskaren. En handfull rektorer för förskoleklasser i forskarens närområde kontaktades via e-post och telefon med en förfrågan om att delta i studien. Efter att en av rektorerna uttryckt intresse för skolans deltagande i studien, kontaktades förskoleklasslärarna för att planera insatsen.

Data

Data bestod av elevresultat från för- och eftertester på NST, lärarnas observationsanteckningar från direkta observationer av elevernas tillvägagångssätt när de genomförde testen, samt enkätsvar från de två förskoleklasslärarna rörande deras uppfattningar om undervisningsinsatsen relevans för elevernas kunskapsutveckling.

Analys

För- och eftertesterna analyserades kvantitativt både på grupp- och individnivå. I den kvantitativa analysen av elevernas testresultat användes medelvärde som lägesmått och standardavvikelse som mått på spridningen. För att analysera lärarnas observationsanteckningar av elevernas tillvägagångssätt vid arbetet med NST-testet användes en deduktiv innehållsanalys i den initiala kategoriseringsfasen, med syftet att särskilja mellan räkning och subitiserings. I nästa steg användes en induktiv

tematisk analys (Robson & McCartan, 2016) för att identifiera kvalitativt skilda tillvägagångssätt för att bestämma och hantera antal och tal inom respektive kategori (räkning och subitiserings). Lärarnas svar på enkätfrågorna användes för att validera undervisningsinsatsens relevans och dess påverkan på elevernas kunskapsutveckling.

Delstudie IV: Undervisningsinsats med kontrollgrupp

En Learning study (LS) med experimentell design användes som forskningsansats. I delstudien undersöktes två olika undervisningsinsatser (mixad design och variationsteoretisk design) påverkan på elevernas kunskapsutveckling avseende konceptuell subitiserings i förhållande till en kontrollgrupp som deltog i den ordinarie matematikundervisningen. Elevernas kunskapsutveckling analyserades genom att den procentuella skillnaden i resultat mellan för- och eftertest på FSSM och NST beräknades. Eleverna, som kom från fyra parallella förskoleklasser på samma skola, fördelades slumpmässigt till en av de tre undervisningsgrupperna – mixad design, variationsteoretisk design och kontrollgrupp – med hjälp av datorgenererade slumpetal i Excel. Detta tillvägagångssätt kan enligt Shadish m.fl. (2002) stärka den interna validiteten i förhållande till urval (selection) och naturlig mognad (maturation). Eleverna i undervisningsinsatsgrupperna undervisades inte av de ordinarie matematiklärarna, utan av forskarna och förstelärarna. Det innebär att eventuella skillnader i resultat kan tolkas som ett resultat av undervisningsinsatserna, eftersom det var den enda variabel som manipulerades i studien. Vidare reducerades risken för urvalsbias genom att eleverna tillhörde samma population, med avseende på både åldersgrupp och skolans upptagningsområde, vilket ytterligare stärker studiens interna validitet.

Urval

Deltagarna i LS-studien utgjordes av de lärare och elever, från en skola med knappt 100 förskoleklasser, som deltog i forskningsprojektet *Global bearbetning som en indikator på barns konceptuella subitiseringsförmåga i förskoleklass*. Utöver de tio klasslärarna (varav två var skolans förstelärare) deltog 74 förskoleklasser (medelålder 6 år och 2 månader) i studien. Valet av just denna skola motiveras av att den hade fyra parallella förskoleklasser. Skolan med cirka 550 elever ligger i en stad med cirka 300 000 invånare. Elevernas akademiska förutsättningar att nå grundskolans kunskapskrav bedöms som goda utifrån Skolverkets klassifikationssystem för stödresurser (Skolverket, 2025). Urvalet kan beskrivas som ett bekvämlighetsurval (Bryman, 2018), då skolans förstelärare som tidigare haft samarbete med forskningsprojektets projektledare, kontaktades.

Efter att lärarna muntligt samtyckt till att delta i projektet gav skolans rektor sitt godkännande för att genomföra projektet på skolan. För att minimera risken för bias relaterad till variation i undervisningen, beslutades att samtliga

undervisningslektioner skulle genomföras av forskarna (Holmqvist & Wästerlid) och förstelärarna. Forskarna är båda legitimerade matematiklärare i grundskolan med mer än tio års erfarenhet av undervisning. Beslutet att involvera förstelärarna i planering och genomförande av den mixade designen fattades dels utifrån deras tidigare erfarenheter av att ha deltagit i och designat lektioner baserat på variationsteoretiska principer i Learning study-projekt, dels utifrån att de inte undervisade förskoleklass eleverna i matematik. Elever vars vårdnadshavare inte samtyckt till deltagande i forskningsprojektet deltog som vanligt i den ordinarie matematikundervisningen i klassrummet tillsammans med eleverna som slumpmässigt tilldelats att ingå i kontrollgruppen. Kontrollgruppen deltog således inte i undervisningsinsatserna, men genomförde både för- och eftertester (FSSM och NST) i anslutning till undervisningsinsatsperiodens början och slut (oktober respektive februari/mars).

Studiens lärandeobjekt

Efter dialog med förstelärarna, som har ett övergripande ansvar för att utveckla skolans matematikundervisning, beslutades att innehållet i undervisningsinsatserna skulle fokusera på antal och tal. Valet baserades dels på att det är ett centralt innehåll i förskoleklassens styrdokument "Naturliga tal och deras egenskaper och hur de kan användas för att ange antal och ordning" (Skolverket, 2022b), dels på lärarnas erfarenhetsbaserade kunskap av att ha undervisat om antal och tal. Det direkta lärandeobjektet var att utveckla elevernas konceptuella subitiseringsförmåga, det vill säga förmågan att mentalt kunna organisera en större mängd visuella objekt i mindre igenkännbara delmängder och därefter sammanfoga dessa till en helhet, utifrån det indirekta lärandeobjektet att utveckla kunnande om tals del-helhetsrelationer. Resultat från FSSM-förtestet som prövar elevers konceptuella subitiseringsförmåga, visade att 37,3 procent av eleverna uppnådde en totalpoäng mellan 0 och 6 poäng på FSSM, vilket motsvarar Stanine-värdena 1 och 2 – det vill säga de lägsta prestationsnivåerna på testet. Detta tyder på att flera av eleverna ännu inte utvecklat sin förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. Detta resultat guidade, tillsammans med tidigare forskning och lärarnas erfarenheter, planeringen av undervisningsinsatserna. De aspekter av lärandeobjektet som framstår som nödvändiga för elevers lärande av konceptuell subitisering och tals del-helhetsrelationer och som identifierades som kritiska i relation till de lågpresterande elevernas förkunskaper, redovisas i kursiv text i punkterna a till e. Inom parenteserna görs kopplingar till de begrepp som används i forskningslitteraturen avseende numeriska kompetenser som redogörs för i kapitel 2.

- a) Att förstå att antal 1–3 (4) kan bestämmas direkt utan en-till-en-korrespondens (*perceptuell subitisering/OTS*)
- b) Att samma antal/tal kan representeras på olika sätt (*kardinalitet*)

- c) Att kunna uppskatta antal för att avgöra om det är fler eller färre än ett specifikt antal (*ANS*)
- d) Att tal kan delas upp och sättas samman på olika sätt (*tals del-helhetsrelationer*)
- e) Att $\text{antal} \geq 3$ kan organiseras och struktureras (mentalt) i mindre subitiserbara delar (*perceptuell subitisering/OTS, konceptuell subitisering/groupitizing, tals del-helhetsrelationer*)

Data

Förutom fullständiga resultat från för- och eftertester av FSSM samlades även data in från NST för samma grupp om 59 elever. Skälet till att två tester användes är att de kompletterar varandra genom att pröva olika aspekter av elevers förmåga att flexibelt uppfatta och hantera antal och tal. FSSM prövar i huvudsak elevernas subitiseringsförmåga medan NST främst prövar elevernas förståelse av tals del-helhetsrelationer. För både FSSM- och NST-testerna användes samma testformulär vid för- och eftertesterna. FSSM genomfördes på gruppnivå och NST på individnivå.

Samtliga forskningslektioner videofilmades och all muntlig och hörbar kommunikation i videoinspelningarna transkriberades ordagrant utifrån syftet att analysera lektionens faktiska utformning (enacted object of learning) i förhållande till det planerade lärandet (intended object of learning). Videoinspelning används ofta inom Learning study (Kullberg m.fl., 2024) och är även en frekvent metod inom matematikdidaktisk forskning. En av fördelarna med denna metod är att den möjliggör detaljerade analyser ur olika perspektiv, där både verbal och visuell interaktion kan dokumenteras och granskas. Dessutom kan videomaterialet spelas upp flera gånger, vilket skapar förutsättningar för en mer tillförlitlig och noggrann analys (Powell m.fl., 2003). I föreliggande studie låg fokus primärt på läraren och hur lärandeobjektet hanterades i undervisningen, snarare än på interaktionen mellan läraren och elevgruppen eller eleverna sinsemellan. Heikkilä och Sahlström (2003) framhåller att de val som görs i samband med videoinspelning, såsom kamerans placering, ljudupptagningskvalitet och vilken typ av interaktion som studeras, bör styras av studiens syfte. I studien användes två videokameror, båda placerade på golvstativ, vilket enligt Heikkilä och Sahlström (2003) är en fördelaktig metod, då inspelningen sker automatiskt och bildkvaliteten ofta blir god. Samma forskare framhåller även att användningen av fasta stativ minskar risken för att kameran drar till sig uppmärksamhet, vilket i sin tur kan påverka deltagarnas beteende. En begränsning med denna metod är att den inte möjliggör att följa eleverna i olika aktiviteter runt om i klassrummet, vilket dock inte behövdes utifrån studiens syfte. Den ena kameran placerades längst bak i rummet med syfte att fånga hela elevgruppen, men med särskilt fokus på lärarna. Den andra kameran placerades längst fram i klassrummet och riktades mot lärarna från ett sidoperspektiv. Lärarnas

aktiviteter och tal var möjliga att följa både från den bakre och främre kameran. Däremot var det emellanåt svårt att höra elevernas tal, särskilt när de hade ryggen vänd mot kameran eller när de arbetade i par. Eftersom fokus i analysen var på hur innehållet behandlades i undervisningen, bedömdes ljudupptagnings kvaliteten som tillräcklig i relation till studiens syfte.

Genomförande

De deltagande eleverna i undervisningsinsatserna ($n = 59$) fördelades slumpmässigt till en av de tre undervisningsgrupperna: variationsteoretisk (VT) design ($n = 19$), mixad (M) design ($n = 21$) (mix av traditionellt undervisningsmaterial och variationsteoretisk design) och kontrollgrupp ($n = 19$). Varje grupp delades in i två lika stora undervisningsgrupper, vilka undervisades så identiskt som möjligt utifrån den design de slumpats till att delta i. M- och VT-insatsen bestod av två cykler, innehållande en respektive två lektioner. Lektionen inom cykel 1 genomfördes i slutet av höstterminen 2022, medan de två lektionerna inom cykel 2 genomfördes i början av vårterminen 2023. Forskarna undervisade både den mixade och variationsteoretiska gruppen hösten 2022. Under den följande cykeln (våren 2023) undervisade forskarna enbart VT-gruppen, medan förstelärarna ansvarade för undervisningen i den mixade designgruppen. Enligt Shadish m.fl. (2002) skapar randomisering goda förutsättningar för att grupperna, sannolikhetsmässigt, ska vara likvärdiga i genomsnitt. Detta var en viktig aspekt då syftet med studien var att jämföra de olika insatsgruppernas resultat med varandra och med kontrollgruppen. Den slumpmässiga gruppindelningen syftade till att minska risken för att andra faktorer än själva forskningslektionerna skulle påverka elevernas resultat på eftertesterna. LS-modellens olika steg (se till exempel Holmqvist m.fl., 2007) följdes huvudsakligen, men i stället för att de reviderade lektionerna genomfördes i nya grupper genomfördes de i samma grupper (se till exempel Ryberg, 2018). I det första steget valdes lärandeobjektet och dess nödvändiga aspekter identifierades. I nästa steg kartlades elevernas förståelse av lärandeobjektet med hjälp av bedömningsverktygen FSSM och NST. Under rubriken ”Studiens lärandeobjekt” redogörs mer detaljerat för hur detta genomfördes. I enlighet med LS-modellen genomfördes även ett eftertest efter forskningslektionerna, i syfte att analysera elevernas kunskapsutveckling. En utvärderande reflektion av cykel 1 låg till grund för planeringen av lektionerna i cykel 2. De aspekter av lärandeobjektet som eleverna behöver ges möjlighet att urskilja för att kunna förstå det avsedda lärandeobjektet på djupet, finns presenterade i punkterna a till e under rubriken ”Studiens lärandeobjekt”. Dessa punkter låg till grund för planeringen och genomförandet av undervisningsinsatserna.

Analys

Variationsteorin användes som ett verktyg för att systematiskt och strukturerat planera undervisningen (intended object of learning) samt för att analysera vilka möjligheter till lärande som erbjöds i lektionerna (enacted object of learning). Det

erfarna lärandeobjektet analyserades genom resultat på för- och eftertester. Dessa nivåer fungerade som analytiska verktyg för att belysa och förstå relationen mellan undervisning och elevers lärande. De kritiska aspekterna av lärandeobjektet, det vill säga de aspekter som den lärande ännu inte urskilt av det som de förväntas lära, identifierades genom en kombination av förtester, observationer, forskningslitteratur samt lärarnas tidigare erfarenheter. Undervisningsinsatsen strukturerades utifrån principen att variation i relation till invariants är en förutsättning för urskiljning, där vilka aspekter som varierar respektive hålls invariants i hög grad påverkar vilket lärande som möjliggörs (tabell 1). De videospelade forskningslektionerna analyserades utifrån vilka variationsmönster som användes (enacted object of learning). Analysen fokuserade på variationsmönstren kontrast, generalisering och fusion och hur de kritiska aspekterna antingen varierades eller hölls invariants i undervisningsaktiviteterna. Genom kontrast varierades en kritisk aspekt av lärandeobjektet, medan övriga aspekter hölls invariants, vilket synliggjorde det som skulle uppmärksammas. Variationsmönstret generalisering, där den kritiska aspekten hölls invariant samtidigt som andra aspekter varierades, användes för att eleverna skulle ges möjlighet att urskilja hur en och samma aspekt tar sig uttryck i olika sammanhang och därigenom utveckla en mer abstrakt och generell förståelse. Även variationsmönstret fusion användes med syftet att eleverna skulle utveckla en simultan medvetenhet om sambandet mellan dessa aspekter, vilket främjar en mer flexibel och fördjupad förståelse. I den variationsteoretiskt grundade analysen av de inspelade forskningslektionerna var fokus på vilka variationsmönster som användes och i vilken utsträckning de olika aspekterna kontrast, generalisering och fusion användes i respektive undervisningsinsats. Ett exempel på att aspekten kontrast användes var när eleverna fick avgöra vilket av två prickmönster – ett med fem prickar och ett med sex – som innehöll exakt fem prickar. Genom att endast antalet prickar varierade medan presentationsformen hölls invariant, gavs eleverna möjlighet att urskilja antalsaspekten. Variationsmönstret generalisering användes till exempel i aktiviteter där eleverna fick visa ett specifikt antal på olika sätt, exempelvis med fingrar, streck och prickar. Genom att antalet hölls invariant samtidigt som representationsformerna varierades, fick eleverna möjlighet att urskilja den gemensamma innebörden – alltså talets innebörd oberoende av representationsform. Fusion användes till exempel i en aktivitet där flera aspekter kombinerades samtidigt, såsom antal, del-helhetsrelationer (där helheten representerades med röda och vita markörer), samt olika representationsformer (fingrar och markörer) och spatiala mönster (eleverna fick bygga olika mönster av vita och röda markörer). I fusion ges eleverna möjlighet att simultant urskilja flera aspekter, vilket skapar förutsättningar för att förstå lärandeobjektets olika dimensioner och relationerna dem emellan. En mer detaljerad beskrivning av undervisningsaktiviteterna i den mixade undervisningsinsatsen finns beskrivna i en outgiven studie (Holmqvist m.fl., 2025) medan en beskrivning av

lektionsaktiviteterna i den variationsteoretiska undervisningsinsatsen är publicerade i Wästerlid och Holmqvist (2024).

För den kvantitativa analysen användes statistikprogrammet SPSS version 29 (IBM Corp, 2022) och upprepad ANOVA samt Microsoft Excel-kalkylblad. Elevernas resultat på eftertesten, det vill säga efter insatsens slut, fungerade som beroende variabler, medan deras resultat på förtesterna samt undervisningsinsatsernas design fungerade som oberoende variabler. En deskriptiv analys av insamlade data genomfördes, där totalpoäng, medelvärde och standardavvikelse redovisas. De olika insatsernas påverkan på elevernas kunskapsutveckling analyserades på gruppnivå och resultatet, det vill säga ökningen av poäng mellan för- och eftertest, redovisas i procentform. Därefter delades elevernas resultat på förtesterna (FSSM och NST) in i tre kvartiler: den nedre kvartilen omfattade de 25 procent lägsta resultaten, den övre kvartilen de 25 procent högsta resultaten, och den mellersta kvartilen resultaten däremellan.

Mixad design

Cykel 1

I cykel 1 användes uppgifter från Adlers (2022b) undervisningsmaterial *Kognitiv träning i matematik*. Undervisningsmaterialet valdes dels utifrån att det är framtaget som stöd- och idématerial för undervisning av den/de förmåga/or som provas i FSSM (Adler, 2022b), dels för att undvika att samma material skulle användas i den ordinarie undervisningen där kontrollgruppen deltog. Innehållet i undervisningsmaterialet utgörs av områden som enligt Adler (2022b) är av betydelse för lärande i matematik såsom tal och siffror, talbegrepp, antalsuppfattning och generella förmågor som arbetsminne, perception och spatial förmåga. I cykel 1 användes fyra uppgifter från den lägsta nivån inom delområdet antalsuppfattning vilket relaterar till lärandeobjektet. Uppgifterna innehöll bilder på föremål såsom apelsiner, myror, siffror och dockor i varierande antal (mellan 3 och 25). I uppgifterna behandlas begreppen flest (aspekt c), lägg ihop (aspekt d), lika många (aspekt b) och gruppera (aspekt d) föremål i lika stora antalsgrupper (antal 3, 12 och 25). Läraren läste upp uppgiftsinstruktionerna och eleverna redovisade sina svar och lösningar enskilt i materialet genom att ringa in rätt bild eller rita lika många objekt som på bilden. När alla elever hade slutfört den första uppgiften påbörjades nästa uppgift, och så vidare.

I den efterföljande lektionsutvärderingen konstaterades att många elevers fokus riktades mot att rita av objekten, vilket medförde att det avsedda lärandeobjektet hamnade i bakgrunden och förmågan att avbilda objekt i förgrunden. En stor del av lektionstiden gick även åt till att eleverna skulle förstå instruktionerna och de hade många frågor om hur uppgifterna skulle lösas. Därtill användes tal upp till och med 25, vilket sannolikt låg utanför det talomfång som flertalet elever var förtrogna med. Uppgift 4, i vilken eleverna skulle ringa in föremålen (9, 12 och 25) i tregrupper

respektive femgrupper och dokumentera sina lösningar, upplevdes som särskilt utmanande och alla elever fullföljde inte den. En identifierad svårighet för eleverna var att skilja mellan antalet föremål i varje grupp och det totala antalet grupper. Sammanfattningsvis konstaterades att undervisningsmaterialet inte i tillräcklig utsträckning stödde elevernas lärande i relation till det avsedda lärandeobjektet. Mot denna bakgrund bedömde vi forskare att det inte var etiskt försvarbart att fullfölja den ursprungliga undervisningsplanen – där en grupp skulle undervisas med aktiviteter utformade enligt variationsteoretiska principer (VT-design), och en annan med aktiviteter hämtade från undervisningsmaterialet *Kognitiv träning i matematik*. För att säkerställa att den tid som avsatts för träning av lärandeobjektet inte skulle bli en avgörande variabel som i högre grad än den didaktiska behandlingen av innehållet särskilde grupperna, ändrades upplägget inför cykel 2. Eftersom de två förstelärare som ansvarade för undervisningen i cykel 2, hade tidigare erfarenhet av att utforma undervisning baserad på variationsteoretiska principer planerades de två efterföljande lektionerna med utgångspunkt i variationsteoretiska antaganden. För att separera denna ansats från den renodlade variationsteoretiskt designade undervisningsinsatsen, benämns designen ”Mixad design”.

Cykel 2

Aktiviteter och uppgifterna i lektion 2 och 3 planerades utifrån de variationsteoretiska principerna varians och invarians i förhållande till aspekterna a till e, där aspekter som eleverna skulle ges möjlighet att urskilja varierades, medan andra aspekter hölls invarianta.

I de inledande helklassaktiviteterna under lektion 2 och 3 ombads eleverna att snabbt avgöra antalet tavelmagneter som visades, vilka avtäcktes under en kort tidsperiod på 2–3 sekunder. I lektion 2 visades fem som 2 och 3 samt som tärningsfemman och i lektion 3 visades antalet sju som tärningsfemman och 2 samt som en hexagon med en magnet i mitten. I aktiviteterna användes generalisering då helheten hölls invariant medan delarna varierades. I en uppföljande aktivitet fick eleverna kort tid på sig att bestämma vilken av antalsgrupperna som bestod av fem tavelmagneter (2 och 3 eller 2 och 4) respektive vilken som var sju (5 och 2 eller 5 och 3). I aktiviteten kontrasterades därmed olika antal mot varandra (5 och 6 respektive 7 och 8). Den ena antalsdelen i respektive exempel (2 och 5) hölls invariant medan den andra varierades. Därefter diskuterades i helklass vilka spatiala antalsformationer som var lättast att uppfatta direkt. Eleverna fick beskriva hur de direkt kunde se vilka antalsdelar som tillsammans blev fem respektive sju. Dessa aktiviteter gav eleverna möjlighet att urskilja aspekterna a och e. Efter helklassaktiviteterna arbetade eleverna i par, där de fick i uppgift att dela upp fem respektive sju kuber på två tallrikar på så många olika sätt som möjligt (aspekt d), vilket är exempel på principen kontrast eftersom delarna varierade medan helheten hölls invariant.

Uppdelningarna dokumenterade eleverna på ett papper genom att rita och/eller använda siffror och streck (aspekt b).

Variationsteoretisk design

I VT-designen utformades samtliga aktiviteter enligt de variationsteoretiska principerna varians och invariants.

Cykel 1

I lektion 1 kontrasterades olika antal mot varandra (2 till 7) och generalisering användes för att ge eleverna möjlighet att erfara att samma antal kan visas med olika representationer och spatiala grupperingar (aspekt b). I andra aktiviteter hölls helheten invariant (antalen 5, 6 och 7) medan delarna varierade (till exempel 6 som $4+2$, $5+1$, $3+3$). I några övningar hölls tiden invariant medan antalen varierade, vilket gav eleverna möjlighet att erfara att antal kan bestämmas direkt (aspekt a och e). Variationsmönstret fusion användes i par-aktiviteten i vilken en i paret snabbt visade antal med sina fingrar (en eller två händer) medan den andra i paret skulle visa samma antal med hjälp av prickkort (antal 2 till 6). I denna aktivitet varierades flera aspekter (antal, representationer och delar av antal samtidigt), så kallad fusion. Eftersom detta mer komplexa variationsmönster skulle kunna begränsa elevernas möjligheter att i en initial lärandefas urskilja tals del-helhetsrelationer (aspekt d) och att antal kan struktureras i mindre subitiserbara antalsdelar (aspekt e), beaktades detta i planeringen av lektion 2 och 3.

Cykel 2

I lektion 2 kontrasterades olika antal mot varandra (3 till 7) och även del-helhet genom att helheten hölls invariant och delarna varierade. Detta för att tydliggöra att antal kan delas upp och sättas samman på olika sätt. Generalisering användes för att visa att olika representationer och spatiala formationer kan ha samma kardinala värde. I den inledande helklassdiskussionen i lektion 2, visades under 2–3 sekunder olika antal prickar i en Powerpointpresentation. Genom att hålla tiden invariant och variera antalen kan eleverna ges möjlighet att erfara att färre antal (1 till 3 eller 4) kan bestämmas direkt (aspekt a) utan uppräknings med en i taget. I de första bilderna var prickarna blåa och röda, för att tydliggöra delarna i helheten, vilket innebar att eleverna gavs möjlighet att simultant urskilja del-helhetsaspekten av (hel)talet (aspekt d och e). Även i aktiviteten där eleverna ombads att visa antal (mellan 3 och 7) med båda händerna erbjöds eleverna att simultant erfara del-helhetsrelationen av tal (aspekt b och d). Därefter arbetade eleverna parvis, där den ena i paret byggde ett antalsmönster med vita och röda markörer (antal 1 till 5), medan den andra tittade bort. När antalsmönstret var klart, fick den som tittade bort snabbt titta på mönstret och bestämma antalet genom att visa samma antal med fingrarna. Även i denna aktivitet gavs eleverna möjlighet att simultant erfara del-helhet och att direkt bestämma antal (e). I lektionens avslutande aktivitet spelade eleverna memory i par.

Memory-spelet gick ut på att hitta par med samma antal, presenterade i olika spatiala formationer, vilket är ett exempel på fusionsmönster eftersom flera aspekter varierade samtidigt. Även i lektion 3 var fokus på att ge eleverna möjlighet att urskilja tals del-helhetsrelationer genom att delarna varierade medan helheten hölls invariant. Eleverna arbetade till exempel individuellt med att organisera (genom att ringa in) samma helhet (3 till 6) på olika sätt, såsom 1 och 2, 2 och 1 samt 3 och 0. De dokumenterade sina lösningar genom att, utifrån samma helhet, ringa in olika antalsgrupper och redovisa resultaten med siffror, streck och kryss. I denna aktivitet gavs eleverna möjlighet att erfara att antalet förblir samma oavsett hur det delas upp i grupper, representeras eller arrangeras spatialt (aspekt b & d). Eleverna arbetade även i par där en i paret fick gissa, utifrån ett givet antal pärlor, hur många pärlor som kamraten dolde i sin hand. Genom att variera antalet medan helheten hölls invariant, erbjöds eleverna möjlighet att även i denna aktivitet urskilja att tal kan delas upp och sättas samman på olika sätt (aspekt d).

Etiska aspekter

Delstudie II och IV i avhandlingen ingår i Vetenskapsrådets finansierade forskningsprojekt *Global processing as an indicator of children's conceptual subitizing ability in pre-school classes* (Dnr: 2021–04147). Enligt 4 § (SFS 2003:460) ska lagen om etikprövning av forskning som avser människor tillämpas på forskning som ”utförs enligt en metod som syftar till att påverka forskningspersonen fysiskt eller psykiskt eller som innebär en uppenbar risk att skada forskningspersonen fysiskt eller psykiskt”. Eftersom forskningen bedrivs med en metod, i form av undervisningsinsatser, som syftar till att påverka forskningsdeltagaren psykiskt (Etikprövningsmyndigheten, 2023), har en etikprövning gjorts (Dnr: 2020–01175). Etikprövningen baseras på antagandet att all undervisning kan ses som en medveten handling som syftar till att påverka elevers lärande och kunskapsutveckling på ett psykiskt plan. En alternativ tolkning av lagens tillämpbarhet skulle kunna vara att etikprövning inte krävs i detta specifika fall eftersom undervisningsinsatserna, i likhet med skolans uppdrag, avser att främja förskoleklasslevers lärande gällande det centrala innehållet ”Naturliga tal och deras egenskaper och hur de kan användas för att ange antal och ordning” (Skolverket, 2022b).

En grundläggande forskningsetisk princip är att forskningsdeltagarna ska informeras och samtycka till deltagande (Vetenskapsrådet, 2024). När rektor samtyckt till forskningsprojektet, bjöds förskoleklasslärarna in till ett möte där de blev informerade om projektet både muntligt och skriftligt. Efter att lärarna gett sitt skriftliga informerade samtycke informerades vårdnadshavarna muntligt om projektet och dess syfte på ett föräldramöte. Vid dessa tillfällen betonades att deltagande var frivilligt och att respondenterna hade möjlighet att återkalla sitt

samtycke. De gavs också information om att data som samlats in dessförinnan kan användas i forskningen. På föräldramötet gavs vårdnadshavarna också möjlighet att ställa frågor till forskarna. Eftersom eleverna är under 15 år krävs skriftligt samtycke från båda vårdnadshavarna (SFS 2003:460). Ett kuvert med skriftlig information om projektet och en samtyckesblankett skickades därför hem till vårdnadshavarna via elevernas skolväska. Förskoleklasslärarna konsulterades för att avgöra om det fanns behov av att översätta informations- och samtyckesformuläret till andra språk, vilket de bedömde inte var nödvändigt. Informationsbrevet utformades däremot på olika språkliga nivåer, där ett anpassades till vårdnadshavarna och ett till eleverna. Detta för att säkerställa att forskningsdeltagarna säkert skulle förstå innebörden av samtycket, särskilt eftersom inte alla vårdnadshavarna deltog på informationsmötet.

I brevet som skickades hem via skolväskedagen uppmanades vårdnadshavarna att läsa igenom elevversionen med sitt barn så att även de skulle förstå innebörden av projektet. Detta var viktigt eftersom eleverna har rätt att avstå deltagande, även då vårdnadshavarna gett sitt samtycke. Vid insamling av data var vi särskilt uppmärksamma på eventuella tecken på att en elev inte önskade delta, såsom att eleven visade tecken på oro eller om kroppsspråket indikerade motvilja mot att delta. Undervisningsinsatserna som eleverna deltog i videofilmades och vissa elever kan ha känt sig obekväma eller blyga trots att de valde att delta. Även genomförandet av testerna, både i grupp och individuellt, kan ha medfört en viss anspänning, särskilt inledningsvis då testsituationen var ny för dem. Själva bedömningsituationerna kan vidare ha lett till att eleverna fick en ökad medvetenhet om sina egna matematiska förmågor och kompetenser, vilket kan ha påverkat deras självkänsla både positivt och negativt beroende på deras upplevda prestationsnivå.

Kopplat till god forskningsetik och allmänna etiska normer enligt *The European Code of Conduct for research Integrity*, även kallad ALLEA-kodexen (ALLEA, 2023), beaktades särskilt principen om respekt för forskningspersonerna, vilket i detta fall var förskoleklass eleverna och förskoleklasslärarna. I delstudie IV, där forskningspersonerna är förskoleklass eleverna, gjordes en slumpmässig fördelning av samtliga förskoleklass elever till en av tre möjliga grupper (två undervisningsinsatser och en kontrollgrupp). Detta innebar att eleverna placerades i nya gruppkonstellationer, vilket skulle kunna föranleda stress och oro. Ytterligare obehagskänslor skulle kunna uppstå kopplat till att eleverna inte undervisades av sina ordinarie lärare, utan av skolans förstelärare och av oss forskare. Dessa potentiella risker ansågs dock ha uppvägs av att flertalet elever redan var bekanta med varandra genom fritidshemsverksamheten och att förstelärarna (tillika klasslärare för årskurs 3) var välkända på skolan. För att vi forskare skulle bli igenkända och skapa en relation med förskoleklass eleverna, besökte vi samtliga deltagande förskoleklasser, där vi introducerade oss själva och projektet. Under projektperioden vistades vi dessutom regelbundet på skolan.

I all forskning som involverar människor föreligger en risk för instrumentalisering, vilket innebär att forskningen inte främst genomförs för de enskilda forskningspersonernas skull, utan för att generera kunskap som kan vara till nytta för en större grupp, i detta fall förskoleklass elever och lärare som undervisar elevers tidiga antals- och taluppfattning. Vårdnadshavarna i forskningsprojektet informerades om de potentiella fördelarna med att delta i undervisningsinsatserna, men också om att barnet, i det fall det slumpmässigt skulle bli placerat i kontrollgruppen, fortfarande skulle undervisas av sina ordinarie lärare i det vanliga klassrummet. Eftersom vi vid denna inledande tidpunkt inte visste om någon av undervisningsinsatserna skulle leda till ökad kunskapsutveckling, informerades vårdnadshavarna, med klasslärarnas medgivande, om att samtliga elever skulle få ta del av identifierade gynnsamma lektionsdesigner, i linje med Vetenskapsrådets principer för god forskningssed (Vetenskapsrådet, 2024).

Andra etiska dilemman uppstod i relation till förskoleklasslärarna, eftersom det var skolans rektor som gav klartecken för att skolan skulle delta i forskningsprojektet. Detta kan ha lett till att vissa lärare kände sig pressade eller förpliktade att delta, vilket i så fall utgör ett hot mot samtyckeskrauet kopplat till frivillighet, då det fanns en risk för beroendeförhållanden mellan arbetsgivaren (rektorn) och lärarna. En annan identifierad potentiell etisk risk skulle kunna vara att lärarna upplevde att samarbetet med forskare innebar en extra arbetsbelastning, med tanke på att de behöver sätta sig in i projektet och anpassa sina scheman efter forskningsprojektets tidsplan och design. Dessa potentiella nackdelar skulle dock kunna vägas upp av de fördelar som deltagandet innebar. Lärarna har fått ta del av forskning kopplat till lärandeobjektet och tillgång till instruktionsmaterial, vilket kan fördjupa lärarnas ämnesdidaktiska kompetens och gynna framtida elevers lärande.

Allt insamlat material har behandlats i enlighet med EU:s dataskyddsförordning, General Data Protection Regulation (GDPR) (SFS 2018:218) angående att processa personliga data. Deltagarnas personnamn har ersatts med koder för att så långt som möjligt undvika identifiering, och dokument som kopplar namn till koder förvaras på en lösenordsskyddad hårddisk som är placerad i ett brandsäkert och väggfast skåp vid lärosätet. Allt insamlat material har sparats på en extern krypterad hårddisk innan det raderats från inspelningsutrustningen. Lösenordet till hårddisken skapades av projektledaren. Datamaterialet har vid behov delgetts övriga forskare i projektet, vilket innebär att endast dessa har haft tillgång till materialet. Videoinspelningarna har genomförts med en kamera som inte varit ansluten till internet, för att säkerställa att obehöriga inte kan få tillgång till det inspelade materialet, via applikationer som automatiskt kan överföra data till molntjänster.

Kapitel 5. Resultat

Avhandlingen består av fyra delstudier som belyser olika aspekter av det övergripande syftet. Dessa återfinns tillsammans med licentiatuppsatsens kapp i sin helhet efter avhandlingens kapp. I resultatkapitlets inledande del redovisas resultaten från varje delstudie, dels utifrån respektive delstudies syfte och forskningsfrågor, dels i relation till de fyra övergripande forskningsfrågor som formulerats - en för varje delstudie. Kapitlet avslutas med en syntes av resultaten, genom vilken avhandlingens övergripande forskningsfråga besvaras.

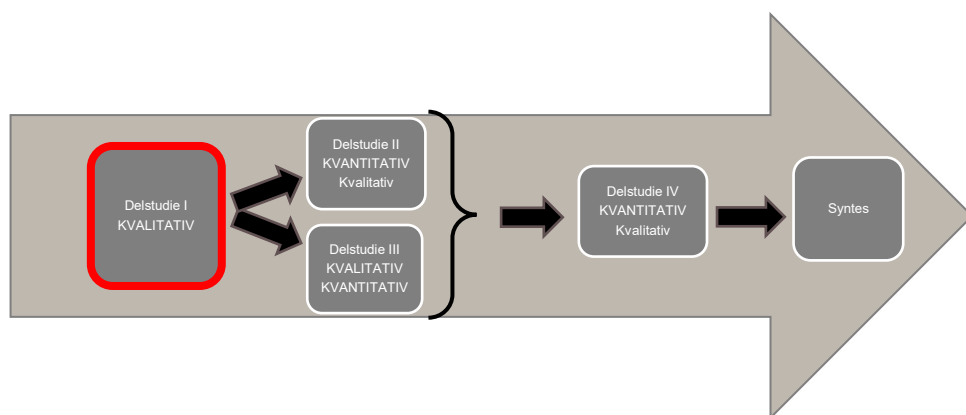
Delstudie 1: Systematisk litteraturöversikt

Wästerlid, C. (2020). Low-achieving grade K-3 children's early numeracy competences: a systematic literature review.

Delstudiens syfte (figur 4) var att syntetisera forskningsresultat av lågpresterande årskurs F–3-elevs antals- och taluppfattningskompetenser avseende metodologiska tillvägagångssätt, definitioner av lågpresterande elever och rapporterade antals- och taluppfattningskompetenser.

Forskningsfrågorna som besvarades var:

1. Vilka forskningsmetoder är dominerande i pedagogisk forskning gällande lågpresterande F–3-elevs antals- och taluppfattning?
2. Hur identifieras och definieras lågpresterande elever?
3. Hur beskrivs lågpresterande elevs antals- och taluppfattningskompetenser?



Figur 4

Delstudie I: Identifiering av forskningsfältet.

Resultaten från den systematiska översikten visar att den dominerande forskningsansatsen inom studier av lågpresterande elevers antals- och taluppfattning under perioden 2007–2017 var kvantitativ forskningsdesign, där studiernas resultat presenterats på gruppnivå. Identifieringen av lågpresterande elever har i huvudsak baserats på prestationer på normerade eller standardiserade tester, men även på icke-normerade bedömningar såsom enskilda lärares utvärderingar och lokala matematiktester. De matematiska områden som genomgående användes för att identifiera lågpresterande elever var i huvudsak relaterade till procedurer och principer gällande räkning (till exempel uppåt- och nedåträkning, ett-till-ett-principen, antalskonservering) och talfakta/aritmetiska basfärdigheter i addition och subtraktion, främst inom talområdet 0–20. I studierna som genomfördes med de yngre eleverna (förskoleklass och årskurs 1) fanns i huvudsak inslag av bedömning kopplat till procedur-relaterade räknekompetenser. Samtliga studier som genomfördes i årskurs 2 och 3 prövade elevernas aritmetiska färdigheter inom addition och subtraktion (0 till 20). I drygt hälften av studierna (lika många i förskoleklass och årskurs 1 som i årskurs 2 och 3) testades elevernas förmåga att jämföra och storleksordna tal. Förståelse av matematiska begrepp i vardagliga kontexter bedömdes i hälften av studierna, medan samband mellan symboliska och icke-symboliska representationer av tal, uppskattning av antal (estimation) och subitiserings endast undersöktes i ett fåtal studier. En av de slutsatser som dras utifrån resultaten av den systematiska litteraturoversikten är att det finns ett behov av kvalitativa ansatser som kan komplettera de kvantitativa forskningsresultaten för att ge en djupare förståelse för elevers tidiga antals- och taluppfattning. Ett annan slutsats som dras är att elevers icke-symboliska talkänsla är en förbisedd förmåga som sällan provas för att identifiera lågpresterande elever. I den efterföljande klassrumsstudien (delstudie III) användes därför både kvalitativ och kvantitativ ansats för att utforska vilket kunnande gällande tals del-helhetsrelationer som

förskoleklass elever utvecklar, både på grupp- och individnivå när konceptuella subitiseringsaktiviteter används i undervisningen.

Flera av de inkluderande studierna rapporterar att lågpresterande elever har svårigheter med beräkningar, särskilt inom räknesättet subtraktion. Resultaten visar att lågpresterande förskoleklass elever (5–6 år) har svårt både med räknearmsan och att räkna synkront, det vill säga att benämna rätt räkneord samtidigt som de pekar på föremål. Resultaten gällande ramsräkning varierar dock mellan studierna; vissa rapporterar att elever har svårigheter redan inom talområdet 1–20, medan andra studier rapporterar att eleverna behärskar uppräknings till 20 eller 30. En färdighet som identifierades som problematisk oavsett årskurs var förmågan att jämföra tal genom att avgöra vilket av två tal som är störst, exempelvis 69 eller 71 och att placera tal på en tallinje (förståelse för relationen mellan tal). En annan studie visar dock att en majoritet av de lågpresterande eleverna presterar bättre vid muntlig jämförelse av tal (till exempel femtiotre jämfört med trettiofem) än vid jämförelse av tal i symbolisk representation (53 jämfört med 35). Även ineffektiva strategier, såsom att räkna alla samt och uppåt- och nedåträkning med en i taget på fingrarna (finger tapping), har rapporterats som karakteristiskt för lågpresterande elever.

Avhandlingens forskningsfråga kopplat till delstudie I är:

- Vilka matematiska kompetenser framträder som särskilt betydelsefulla i tidigare forskning för lågpresterande elevers förmåga att förstå och flexibelt hantera antal och tal i de tidiga skolåren?

De resultat som framkom i delstudien pekar på att det finns vissa matematiska kompetenser som lågpresterande elever behöver ges möjlighet att utveckla kunnande om i de tidiga skolåren:

- Räknearmsan – att kunna räknearmsan uppåt/nedåt inom olika talområden.
- Synkron räkning – att kunna benämna räkneorden i rätt ordning samtidigt som föremål hanteras.
- Storleksordna och jämföra tal – att avgöra vilket av två tal som är störst, särskilt i symbolisk representation.
- Förståelse för tals relationer – att kunna placera tal på en tallinje.
- Grundläggande aritmetiska operationer i addition och subtraktion – att kunna förstå och utföra enkla aritmetiska operationer inom talområdet 0–20.
- Använda effektiva strategier vid beräkningar – att kunna använda härledda strategier eller talfakta i stället för ineffektiva strategier som att räkna alla eller räkna upp och ner med ett i taget med eller utan konkret stöd såsom fingerräkning.

Dessa kompetenser ses i den tidigare forskningen som viktiga i den tidiga matematikutvecklingen gällande att förstå och hantera antal och tal.

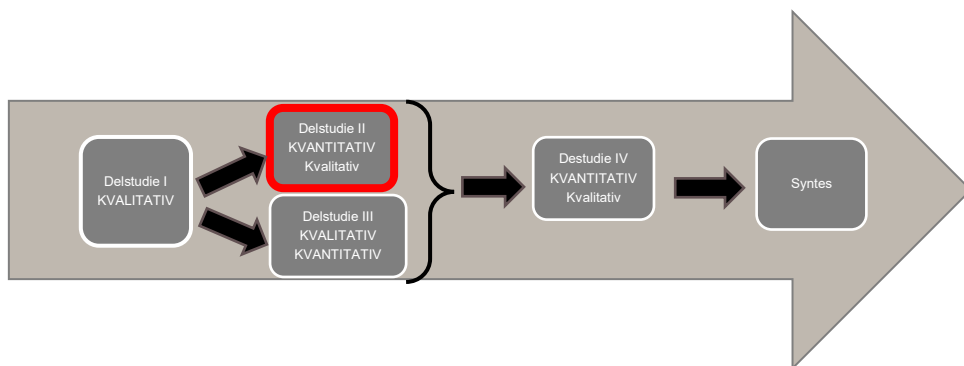
Delstudie II: Korrelationsstudie mellan två bedömningsverktyg

Holmqvist, M., Tutunjian, D. & Wästerlid, C. Screening tools for conceptual subitizing abilities in 5–6-year-olds.

Delstudiens syfte (figur 5) var att undersöka korrelationen mellan resultaten från två olika bedömningsverktyg, Number Sets Test (NST, Geary m.fl., 2009) och Förmåga att snabbt se mängd (FSSM, Adler, 2022a), bedömda med två olika bedömningsmetoder. Båda testerna används för att bedöma aspekter av elevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. I FSSM är fokus på elevernas konceptuella subitiseringsförmåga och i NST elevernas kunnande avseende tals del-helhetsrelationer.

Forskningsfrågorna som besvarades var:

1. Hur korrelerar resultaten från de två screeninginstrumenten, FSSM och NST?
2. Vilka skillnader, om några, kan observeras i resultaten från FSSM och NST mellan olika prestationsnivåer?



Figur 5

Delstudie II: Korrelationsstudie mellan två bedömningsverktyg.

I studien analyseras hur väl prestationer på det ena testet samvarierar med prestationer på det andra, där två olika bedömningsmetoder används: d'-poäng (d-prime) och totalpoäng. Resultaten visar en stark korrelation mellan de två bedömningsmetoderna när de tillämpas inom samma test: FSSM ($r = 0,83$) och NST ($r = 0,86$). Vid jämförelse mellan de olika testerna framkom en måttlig signifikant positiv korrelation när d'-poäng användes ($r = 0,54$, $p < 0,001$) och en svag signifikant positiv korrelation när totalpoäng användes ($r = 0,33$, $p < 0,05$). Resultatet indikerar att det finns ett visst samband oavsett val av bedömningsmetod.

Den största graden av överlappning mellan prestationer identifierades för elever som presterade i den första kvartilen (de 25 procent lägst presterande), där 64 procent av eleverna i den första kvartilen på NST även återfanns i den första kvartilen på FSSM. Överlappningen minskade bland de högstpresterande eleverna i kvartil 4 (de 25 procent högst presterande), där endast 33 procent av eleverna i den fjärde kvartilen på NST även presterade i den fjärde kvartilen på FSSM. Vid en jämförelse mellan de lägsta (under medianvärdet) och högsta (över medianvärdet) prestationerna visar resultaten att 85 procent av de elever som presterade i kvartil 1 på NST även återfanns i kvartil 1 eller 2 (under medianvärdet) på FSSM. På motsvarande sätt återfanns 77 procent av de elever som presterade i kvartil 3 på NST i kvartil 3 eller 4 (över medianvärdet) på FSSM.

I en kvalitativ analys av de tio lägst presterande eleverna i FSSM och NST identifierades fyra elever som presterade på den lägsta nivån i båda testerna. De övriga sex eleverna presterade på den lägsta nivån i endast en av testerna. En svag prestation på både testerna skulle därav kunna tolkas som en indikation på svårigheter med att flexibelt hantera antal och tal.

Resultatet tyder på att prestationer på det ena testet samvarierar med prestationer på det andra testet, oavsett vilken poängsättningsmetod som valts. NST och FSSM kan därför användas för att skilja elevers olika prestationer åt och särskilt för att identifiera de lägst presterande eleverna. Gällande högstpresterande elever är resultaten av testutfallen på NST respektive FSSM mindre överlappande och mer inkonsekventa.

Avhandlingens forskningsfråga kopplat till delstudie II är:

- Hur kan förskoleklasselevers förmåga, med fokus på lågpresterande elever, att bestämma och flexibelt hantera antal och tal identifieras och följas i klassrummet?

Resultaten tyder på att bedömningsverktygen kan användas med relativt hög tillförlitlighet både för att identifiera lågpresterande förskoleklasselever och för att följa deras utveckling över tid. Detta stöds av att 64 procent av de elever som presterade lägst på NST-testet även presterade lägst på FSSM-testet. Överlappningen minskade dock bland de högst presterande eleverna. En trolig förklaring till att samstämmigheten mellan prestationerna på de olika testerna inte var helt överensstämmande kan vara att testerna delvis bedömer olika aspekter av kunnande när det gäller att flexibelt hantera antal och tal. Fokus i FSSM ligger på konceptuell subitiserings, medan NST fokuserar på tals del-helhetsrelationer. Resultatet tyder också på att den något enklare poängsättningsmetoden totalpoäng kan användas som ett tillförlitligt alternativ vid analys av elevernas prestationer då en stark korrelation mellan de två poängsättningsmetoderna d'-poäng (d-prime) och totalpoäng uppmättes när de tillämpades inom samma test. En annan iakttagelse som gjordes var att samtliga elever genomförde NST- och FSSM-testerna, oavsett förkunskaper.

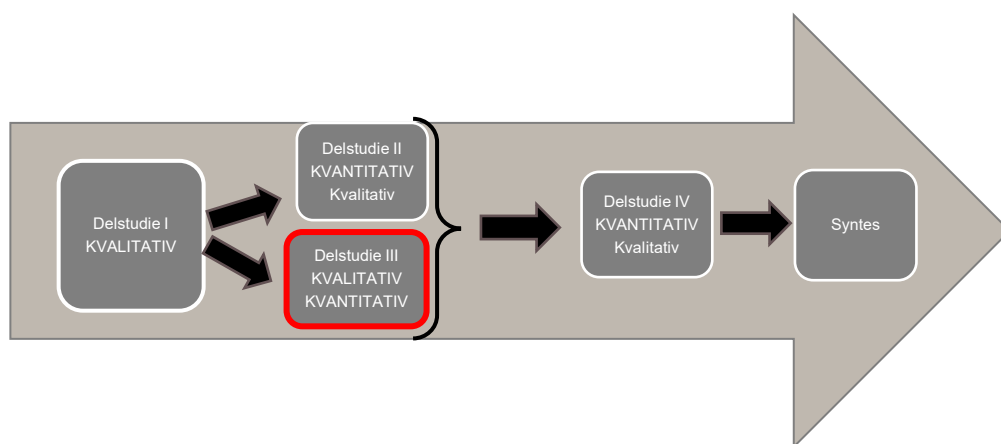
Delstudie III: Pilotstudie – konceptuell subitiserings

Wästerlid, C. (2020). *Conceptual subitizing and preschool class children's learning of the part-part-whole relations of number.*

Delstudiens syfte (figur 6) var att empiriskt utforska konceptuella subitiseringsaktiviteters roll för att möjliggöra förskoleklasselevers lärande av tals del-helhetsrelationer.

Forskningsfrågorna som besvarades var:

1. Vilket kunnande gällande tals del-helhetsrelationer utvecklade eleverna?
2. Vilka samband kan hittas mellan elevers kunskapsutveckling och utformningen av de konceptuella subitiseringsaktiviteterna?



Figur 6

Delstudie III: Pilotstudie – konceptuell subitiserings.

Med utgångspunkt i resultatet av den systematiska litteraturoversikten (delstudie I) användes både kvalitativ och kvantitativ ansats i den efterföljande pilotstudien (delstudie III) för att utforska vilket kunnande gällande tals del-helhetsrelationer som förskoleklasselever utvecklar när konceptuella subitiseringsaktiviteter används i undervisningen. Elevernas resultat analyserades både kvantitativt och kvalitativt, på såväl grupp- som individnivå. Undervisningsinsatsen i delstudie III var indelad i två block (se tabell 2, delstudie III för detaljerad information). Test genomfördes före (T1), mellan (T2) och efter båda undervisningsblocken (T3). Aktiviteterna i block 1 syftade till att eleverna skulle ges möjlighet att erfara att små antal (1–4 objekt) kan bestämmas direkt utan uppräknings, oberoende av objekt och hur de är organiserade spatialt. Aktiviteterna i block två fokuserade i stället på att antal kan sättas samman och delas upp på olika sätt. Den kvantitativa analysen av resultaten på grupp-nivå visade att elevernas kunskapsutveckling, ökade med 18,1

procentenheter mellan för- och eftertest. Det tyder på att eleverna på gruppnivå utvecklade sin förmåga avgöra vilka par eller triader som tillsammans är fem. En kvalitativ analys av de enskilda elevernas tillvägagångssätt för att bestämma vilka par eller triader som tillsammans blir fem, resulterade i fem kvalitativt olika tillvägagångssätt. Kategorierna 1 och 2 karakteriseras av uppräkningsmedan kategorierna 3 till 5 karakteriseras av förmågan att direkt bestämma vilka antal som tillsammans utgör antalet fem, vilket kan kopplas till kunnande avseende talsdelhelhetsrelationer. Resultatet av den kvalitativa analysen, i relation till de identifierade kategorierna visade att en många av eleverna ändrade sitt tillvägagångssätt för att bestämma vilka sektioner som tillsammans blev fem efter att de deltagit i insatsen– från uppräkningsmedan en i taget till att direkt ringa in en eller flera kombinationer.

Den största ökningen i resultat uppmättes efter block 1, i vilket eleverna gavs möjlighet att erfara att antalen 1 till 4 kan bestämmas direkt. Den mindre ökningen i resultat efter block 2 kan bero på att antalet objekt som användes i aktiviteterna varierade mycket (4–7) vilket kan ha bidragit till att det var svårt för eleverna att urskilja relationen mellan helheten, antalen 4 till 7, och dess delar. Förskoleklasslärarna uttryckte i en enkät att de upplevt att undervisningen främjade lärande, där de särskilt lyfte fram värdet av gemensamma diskussioner om olika sätt att gruppera antal. En jämförelse av resultatet av den kvalitativa analysen (tillvägagångssätt i förhållande till de fem olika nivåerna) och den kvantitativa analysen (poäng på NST) på individnivå, indikerar att det finns ett samband mellan resultat på NST och tillvägagångssätt. Elever som räknade en i taget fick lägre resultat på NST än elever som använde sig av talsdelhelhetsrelationer. Förutom att ha förståelse för räkneordets (fem) kardinala innebörd indikerar resultatet att kunnande avseende talsdelhelhetsrelationer kräver urskiljande av följande nödvändiga aspekter:

- antal 1 till 3 kan bestämmas direkt utan uppräkningsmedan en i taget
- antal kan sättas samman och delas upp/grupperas på olika sätt
- uppskattning av antal, vilket i denna studie handlade om att kunna uppskatta om det finns fler eller färre än fem.

Avhandlingens forskningsfråga kopplat till delstudie III är:

- Vilka skillnader framkommer avseende förskoleklasselevs förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal?

Förskoleklasselevs förmåga att bestämma och hantera antal och tal varierar beroende på hur de uppfattar och bearbetar numerisk information. En tydlig skillnad mellan elever är huruvida de kan känna igen och bestämma antal direkt eller om de behöver använda uppräkningsmedan. Vissa elever kan snabbt identifiera små antalsmängder (1–3) utan att räkna, medan andra förlitar sig på att räkna ett i taget, vilket gör processen långsammare och mindre effektiv. De elever som direkt

uppfattade antalen i de olika dominosektionerna och som kunde sätta samman dessa presterade bättre på NST än elever som fokuserade på uppräknings med ett objekt i taget. Vissa elever kunde också direkt avgöra om ett antal var större eller mindre än ett referensantal (i NST antalet 5), medan andra elever räknade objekten oavsett antalet. Denna förmåga att approximativt kunna uppfatta antal indikerar en grundläggande känsla för antal och den hjälper elever att bedöma antal och kvantiteter utan att de behöver fastställa det exakta antalet objekt. Dessa identifierade skillnader kan ge vägledning för hur undervisningen kan utformas för att möta förskoleklasslevers varierande kunskapsnivå när det gäller att bestämma och flexibelt hantera antal och tal.

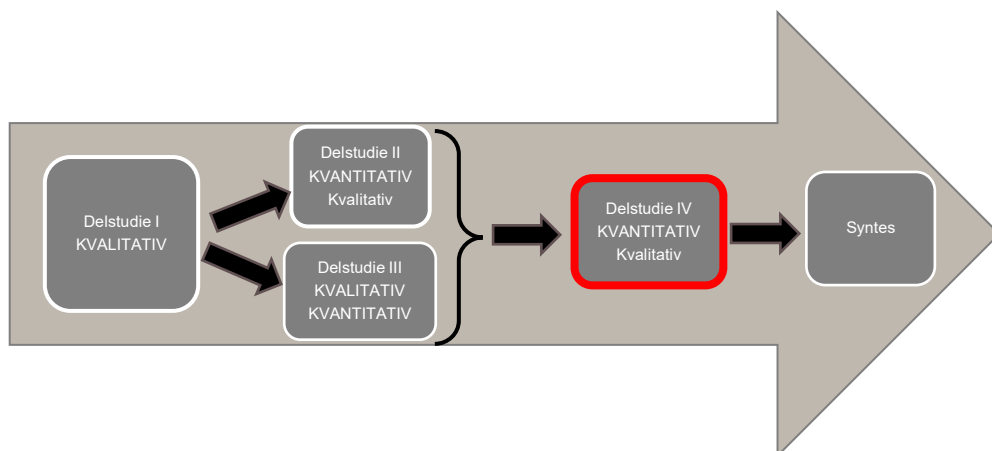
Delstudie IV: Undervisningsinsats med kontrollgrupp

Wästerlid, C., Holmqvist, M., & Tutunjan, D. (2024). Preschool class pupils' enhanced subitizing abilities by learning study interventions.

Delstudiens syfte (figur 7) var att undersöka vilken påverkan olika undervisningsinsatser har på elevers kunskapsutveckling avseende konceptuell subitiseringsförmåga.

Forskningsfrågorna som besvarades var:

1. Vilka skillnader kan identifieras i elevernas utveckling av subitiseringsförmåga mellan för- och eftertest, mätta med två olika tester: Förmåga att snabbt se mängd (FSSM) och Number Sets Test (NST)?
2. Vilka skillnader identifierades mellan låg- och högpresterande elevers kunskapsutveckling?
3. Om det fanns förändringar i elevernas utveckling, hur är dessa relaterade till lektionsstrukturen i undervisningsinsatserna (mixad design och variationsteori)?



Figur 7

Delstudie IV: Undervisningsinsats med kontrollgrupp

Resultaten från den kvantitativa analysen, baserat på skillnader i resultat mellan för- och eftertest på FSSM och NST, visar att samtliga grupper – mixad design (M), variationsteoretisk design (VT) och kontrollgrupp – förbättrade sina resultat. Denna ökning i poäng var signifikant för samtliga grupper ($p < 0,001$).

Däremot påvisades inga signifikanta skillnader mellan undervisningsinsatsgruppernas (M & VT) och kontrollgruppens resultat ($p = 0,401$), även om resultaten indikerar att grupperna som deltog i undervisningsinsatserna förbättrade sina resultat i större utsträckning än kontrollgruppen. Jämfört med kontrollgruppen visade undervisningsinsatsgrupperna 24 till 28 procentenheters större ökning på NST i förhållande till kontrollgruppen och 11 till 15 procentenheters större ökning på FSSM. Den grupp som deltog i VT-designen förbättrade sina resultat på NST-testet med 4 procentenheter mer än eleverna i M-designen, och med 14 procentenheter mer än M-designen på FSSM-testet.

Givet forskningsfrågorna kategoriserades elevers prestationer i relation till varandra, där testpoängen från för- och eftertester på FSSM och NST delades in tre kvartiler (nedre, mellersta och övre). Detta för att belysa spridningen av resultat runt medianvärdet. Den nedre kvartilen representerar de 25 procent lägsta prestationerna, den övre de 25 procent högsta prestationerna och den mellersta kvartilen omfattar prestationer däremellan.

Resultaten visar att elever som, baserat på förtestets resultat, presterade i den nedre kvartilen gynnades mer av undervisningsinsatserna, oavsett design, jämfört med elever i den övre kvartilen. Detta baserades främst på att skillnader i resultat mellan grupperna minskade och att poängökningen i procent var större för elever i den nedre kvartilen än för elever i den övre kvartilen. Ingen av grupperna nådde full poäng, vilket tyder på att de minskade skillnaderna i resultat inte kan förklaras med

en uppnådd takeffekt. Den variationsteoretiskt baserade analysen av vilka variationsmönster som användes i forskningslektionerna, visar att det fanns skillnader mellan i vilken utsträckning de olika variationsmönstren användes. Kontrast användes mer frekvent i M-designen än i VT-designen (tolv respektive nio gånger), medan generalisering användes fler gånger i VT-designen än i M-designen (nio respektive fem gånger). Fusion, en designprincip som tillämpas när eleverna har utvecklat god kunskap om lärandeobjektet, användes inte i M-designen, men tillämpades tre gånger i VT-designen.

Av de totalt 17 identifierade variationsmönstren i M-designen utgjorde tolv kontraster, där olika antal samt delar och helheter av antalen 5 och 7 kontrasterades mot varandra. Generalisering användes i M-designen för att ge eleverna möjlighet att erfara att olika representationer (såsom fingrar, tal, prickar) och spatial organisering av objekten kan användas för att presentera samma antal. I VT-designen användes totalt 21 olika variationsmönster. Kontrast och generalisering användes i lika stor utsträckning, det vill säga i nio aktiviteter vardera, medan fusion användes totalt i tre aktiviteter, eller en aktivitet per lektion. I de nio aktiviteterna som använde kontrast, kontrasterades olika antal och del-helhet av antal (2–7). Precis som i M-designen användes generalisering för att möjliggöra urskiljning av att samma antal kan representeras med olika objekt och i olika spatiala formationer. Ett exempel på användande av fusion, vilket innebär en simultan förståelse för flera aspekter av lärandeobjektet, framkom i memory-aktiviteten, där både antal och deras spatiala formationer varierades samtidigt. Ett annat exempel på fusion var i par-aktiviteten, där den ena eleven i paret visade ett antal med sina fingrar och den andra eleven i paret skulle visa samma antal med två olika prickkort. I denna aktivitet varierades antal, representationer och del-helhet samtidigt. I relation till de identifierade centrala aspekterna av lärandeobjektet (se aspekterna a–e under rubriken Studiens lärandeobjekt) fick eleverna möjlighet att erfara att samma antal kan representeras på olika sätt (aspekt b) samt att tal kan delas upp och sättas samman på olika sätt (aspekt d) på ett systematiskt sätt i både VT- och M-designen. Tidsaspekten användes frekvent i VT-designens lektion 1 och 2, medan tidsaspekten endast användes i uppgifterna kopplat till inträdesbiljetterna i M-designen. Detta indikerar att eleverna troligtvis gavs större möjlighet att urskilja aspekterna a och e, relaterat till subitisering, i VT-designen jämfört med M-designen. Detta återspeglas möjligen i resultatet som visar att den största skillnaden i elevers kunskapsutveckling på grupp-nivå mellan de två undervisningsinsatserna återfanns i FSSM-testet, där ökningen var 14 procentenheter större för VT-designen jämfört med M-designen. Det är också det test som framför allt prövar konceptuell subitiseringsförmåga.

När enbart de lågpresterande eleverna i kvartil 1 beaktas, visar resultaten att eleverna i VT-designen förbättrade sina resultat mer än de lågpresterande eleverna i M-designen både på NST och FSSM. Resultatet kan möjligen förklaras av att eleverna i VT-designen gavs möjlighet att erfara del-helhetsrelationer för tal i

relation till fler antal (2–7), till skillnad från M-designen som enbart använde antalen 5 och 7. I VT-designen gavs eleverna vidare möjlighet att simultant urskilja delar av en helhet genom att antalsgrupperna/delarna färgkodades eller markerades genom att de ringades in. Avslutningsvis visar resultaten från lektionsanalyserna att eleverna inte erbjöds någon systematisk undervisning i någon av designerna vad gäller att uppskatta antal för att avgöra om det är fler eller färre än ett specifikt antal (aspekt c).

Som redogjorts för i inledningen har delstudie II och IV genomförts inom ramen för projektet *Global processing as an indicator of children's conceptual subitizing ability in pre-school classes* (Vetenskapsrådet, Dnr: 2021–04147). I VR-projektet har ett ögonrörelsemätningsexperiment genomförts, parallellt med undervisningsinsatserna, med samtliga deltagande elever (kontrollgrupp, mixad design och variationsteoretisk design). I ögonrörelsemätningsexperimentet fick eleverna bestämma antalet prickar (2 till 5) som visades på en datorskärm kopplad till en eyetracker, vilken registrerade ögonrörelser och blickpunkter. Eleverna instruerades att, så snart de bestämt antalet prickar, direkt uppges det muntligt, varefter nästa bild visades. Totalt användes 32 PowerPoint-bilder med prickar i varierande antal, storlek och spatial placering. Experimentet genomfördes vid tre tillfällen under perioden mitten av oktober 2022 till början på mars 2023, vilket innebär att samtliga elever, inklusive kontrollgruppen, utöver deltagande i olika undervisningsgrupper, också tränat på att bestämma och hantera antal och tal i NST och FSSM samt i ögonrörelsemätningsexperimentet.

Genom att använda FSSM som ett uppföljande test i samtliga förskoleklasser studerades skillnader i subitiseringsförmåga mellan förskoleklasser, från samma skola, som deltagit i VR-projektet (läsåret 2022/2023) och förskoleklasser som inte deltagit i VR-projektet (läsåret 2023/2024). Resultaten för de elever som inte ingick i studien anonymiserades och endast resultaten på testet har delgetts forskarna. Inga personuppgifter samlades in. Testet genomfördes under samma tidsperiod i samtliga förskoleklasserna, det vill säga i slutet av vårterminen i förskoleklass, 24/4 2023 respektive 22/4 2024. Resultatet visade att eleverna som deltog i VR-projektet hade ett medelvärde som var 3,9 poäng högre på FSSM-testet jämfört med eleverna som inte deltog, vilket framgår av tabell 3.

Tabell 3

Jämförelse av medelvärde av testresultat på FSSM mellan förskoleklass elever från samma skola som deltagit i VR-projektet respektive inte deltagit i projektet.

	Antal elever	Medelvärde poäng
Deltagande i VR-projektet 22/23	64	21,1
Ikke deltagande i VR-projektet 23/24	96	17,2

Avhandlingens forskningsfråga kopplat till delstudie IV:

- Vad framstår som betydelsefullt för elevers utveckling av att flexibelt hantera antal och tal genom undervisning, med fokus på lågpresterande elever?

Studien visar att samtliga grupper – både undervisningsinsatsgrupperna och kontrollgruppen – förbättrade sina resultat signifikant, vilket tyder på att träning genom undervisningsaktiviteter, testsituationer (NST och FSSM) och experiment (ögonrörelseexperimentet), haft en positiv inverkan. Resultatet stöds av data som visar att elever som deltog i forskningsprojektet uppvisade ett högre medelvärde på testresultaten jämfört med elever som inte deltagit i projektet (tabell 3). Resultaten tyder på att variationsteoretiskt grundade undervisningsaktiviteter kan vara gynnsamma för elevers utveckling av att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. Ökningen var större i undervisningsinsatsgrupperna, särskilt för de elever som presterade i den nedre kvartilen vid förtestet, vilket indikerar att undervisningsinsatserna var särskilt gynnsamma för elever med initialt svagare förmågor, jämfört med mellan- och högpresterande elever. Skillnaden i resultat mellan de två undervisningsdesignerna visade att den variationsteoretiska designen (VT) var något mer gynnsam för elevernas kunskapsutveckling än den mixade designen (M). Detta framkom särskilt i FSSM-testet, där elever som undervisades enligt VT-designen förbättrade sina resultat med 14 procentenheter mer än de elever som deltog i undervisning enligt M-designen. Om man enbart tittar på resultatet för de lägsta kvartilerna framgår det att de lågpresterande elevernas kunskapsutveckling var högre i VT-designen än i M-designen. Det är dock viktigt att understryka att resultaten är baserade på en liten elevgrupp om fem elever, vilket gör dem känsliga för enstaka individers prestationer. Utfallet antyder däremot en möjlig trend i riktning mot en mer gynnsam kunskapsutveckling för de lågpresterande eleverna i VT-designen än i M-designen. Förutom att fler variationsmönster användes i VT-designen användes även de mer komplexa variationsmönstren, generalisering och fusion, oftare i VT-designen (9 respektive 3) än i M-designen (5 respektive 0). Detta tyder på att en variation av flera aspekter erbjöds samtidigt i VT-designen. Till exempel gavs eleverna möjlighet att erfara del-helhetsrelationer för olika antal (2 till 7) i lektionerna, till skillnad från M-designen som fokuserade på del-helhetsrelationerna för talen fem i lektion 2 och sju i lektion 3. I VT-designen gavs eleverna vidare stöd för att simultant urskilja tals del-helhetsrelationer genom att

antalsgrupperna färgkodades eller ringades in. En annan aspekt som skiljde sig åt mellan designerna var att tidsaspekten hölls invariant i flera av aktiviteterna i VT, men bara i inträdesuppgifterna i M-designen. För lågpresterande elevers utveckling gällande att bestämma och flexibelt hantera antal och tal framstår det som att träning i att identifiera antal snabbt påverkade särskilt lågpresterande elevers förmåga. Resultaten visar att följande undervisningsstrategier var särskilt betydelsefulla:

- Eleverna ges möjlighet att simultant urskilja tals helhet och delar, utifrån en variation av helheter.
- Eleverna stimuleras till att snabbt bestämma antal.

Syntes av samtliga delstudiers resultat

Resultaten från delstudierna har reanalyserats och syntetiserats i relation till varandra för att skapa en ny helhet och förståelsegrund och för att besvara avhandlingens övergripande syfte och forskningsfråga.

Avhandlingens övergripande forskningsfråga är:

Vilka aspekter i undervisningsdesign framstår som särskilt främjande för lågpresterande förskoleklasslevers utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal?

De aspekter av undervisningsdesignen där det fanns samstämmighet mellan delstudiernas resultat tolkas som särskilt gynnsamma för att främja lågpresterande förskoleklasslevers utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal.

De aspekter som identifierades, och som presenteras mer utförligt nedan, var följande:

- fokus på tals del-helhetsrelationer
- stimulering av förmågan att direkt bestämma antal
- bedömningsverktyg för att identifiera och följa elevernas kunskapsutveckling
- upprepade träningstillfällen med avgränsat innehåll.

Fokus på tals del-helhetsrelationer

Resultatet av den systematiska litteraturöversikten (Delstudie I) visar på vikten av att elever utvecklar förståelse för tals värde och relationer mellan tal och att de kan använda sig av effektiva strategier, såsom härledning och talfakta, vid aritmetiska beräkningar i addition och subtraktion i talområdet 0–20. Detta för att de inte ska

fastna i ineffektiv uppfåt- och nedåträkning med en i taget. Resultatet av den kvalitativa analysen i delstudie III visade att elever som presterade lågt på NST oftare använde sig av uppräkningsmed en i taget, i jämförelse med eleverna som presterade högt på NST. Elever med högre resultat tenderade i stället att direkt ringa in antal som tillsammans blev fem och de hoppade över sektioner som de uppfattade var fler än fem, vilket kan tolkas som ett mer effektivt tillvägagångssätt i jämförelse med uppräkningsmed en i taget. Resultaten av den kvantitativa analysen i delstudie II visade vidare att det fanns en överlappning mellan elevers kunskande avseende talsdel-helhetsrelationer (NST) och deras konceptuella subitiseringsförmåga (FSSM). Elever som presterade i den lägsta kvartilen på NST presterade även i de lägsta kvartilerna på FSSM, vilket indikerar att de ännu inte utvecklat kunskande om att antal 1–3 (maximalt 4) kan bestämmas direkt eller att antal kan organiseras och struktureras i mindre antalsdelar. Resultatet av de olika undervisningsdesignernas påverkan på elevernas kunskapsutveckling indikerade att den variationsteoretiska designen (VT) var något mer gynnsam än den mixade designen (M), särskilt för lågpresterande elever (Delstudie IV). En skillnad mellan designerna var att eleverna i VT-designen gavs möjlighet att simultant urskilja helheten och antalsgrupperna genom att delarna i helheten färgmarkerades i två olika färger eller att delarna tydliggjordes genom att de ringades in. I M-designen fördelades helheten i två separata delar (på olika tallrikar), vilket gjorde att eleverna inte gavs samma möjlighet att erfara helheten och delarna simultant. En annan identifierad skillnad mellan VT- och M-designen var att eleverna gavs möjlighet att erfara del-helhetsrelationer för olika antal (2–7) i VT-designen, till skillnad från M-designen som fokuserade på del-helhetsrelationer för talen fem och sju.

Stimulering av förmågan att direkt bestämma antal

Elever som direkt kunde uppfatta antal och talsdel-helhetsrelationer presterade bättre på NST än elever som använde sig av uppräkningsmed en i taget (Delstudie III). Att de lägst presterande elevernas kunskapsutveckling var större i VT-designen än i M-designen kan även förstås i relation till skillnader i hur lärandeobjektet hanterades i de båda undervisningsinsatserna (Delstudie IV). I VT-designen fick eleverna vid upprepade tillfällen möjlighet att erfara att ett mindre antal kan bestämmas direkt, utan att räkna upp ett i taget, eftersom tidsbegränsning användes i flera av aktiviteterna. I M-designen användes tidsbegränsning däremot endast i inträdesuppgifterna. Utöver att förmågan att direkt bestämma antal stimulerades i undervisningsinsatserna, fick eleverna, även kontrollgruppen, övning i att direkt bestämma antal i testerna (FSSM & NST). I dessa uppmanades eleverna att under två respektive en minut så snabbt och korrekt som möjligt markera vilken antalsgrupp som bestod av fyra prickar (FSSM) respektive vilka antalsgrupper som tillsammans blev fem (NST).

Bedömningsverktyg för att identifiera och följa elevernas kunskapsutveckling

Resultaten av klassrumsstudierna (Delstudie III och IV) indikerar att NST och FSSM kan användas i en klassrumskontext för att differentiera elevers prestationer avseende att bestämma och flexibelt hantera antal och tal, särskilt för att identifiera de lägst presterande eleverna. Detta grundas på att 64 procent av eleverna som presterade på den lägsta nivån (kvartil 1) på NST även presterade på den lägsta nivån (kvartil 1) på FSSM och att 85 procent av eleverna som presterade under medianen på NST (kvartil 1) även presterade i de lägsta kvartilerna på FSSM (kvartil 1 eller 2). Skillnader i elevresultat vid olika testtillfällen tyder även på att testerna kan användas för att följa elevernas utveckling över tid. Ingen elev hann slutföra alla uppgifterna i testerna inom den givna tidsramen, vilket tyder på att testerna kan användas för att bedöma olika prestationsnivåer. Testerna möjliggör även alla elevers deltagande, då instruktionerna är enkla att förstå och inte ställer höga krav på språklig förståelse. Vidare behöver eleverna inte formulera egna svar, eftersom de markerar korrekta svar. Den korta tid som eleverna ges för att genomföra testerna tycks bidra till att eleverna klarar av att hålla kvar uppmärksamheten på uppgiften vilket är betydelsefullt både i relation till en innehållsinkluderande undervisning och för att på ett tillförlitligt sätt kunna identifiera och följa alla elevers kunskapsutveckling. Testerna kan användas både på grupp- och individnivå, vilket möjliggör för lärarna att själva fatta beslut om testningens utformning. Resultatet visar också att den mindre komplexa bedömningsmetoden "totalpoäng" – där antalet felaktiga och överhoppade svar subtraheras från antalet rätta – kan användas för att bedöma elevernas prestationer. Detta gör testerna användarvänliga som bedömningsverktyg för lärare i praktiken.

Upprepade träningstillfällen med avgränsat innehåll

I delstudie IV framkom att samtliga grupper, även kontrollgruppen som deltog i den ordinarie klassrumsundervisningen, förbättrade sina resultat, även om resultatökningen var större för de elever som deltog i undervisningsinsatserna (VT- och M-design). Givet att andra variabler, i den mån det är möjligt i en undervisningskontext, kontrollerades för genom randomisering, indikerar resultaten att upprepade träningstillfällen med fokuserat innehåll (systematisk undervisning, NST- och FSSM-testerna och ögonrörelseexperimentet) gynnade elevernas kunskapsutveckling. Antagandet stärks av resultat som visar att elever som deltog i forskningsprojektet läsåret 22/23 hade ett högre genomsnittligt testresultat på FSSM-testet (+ 3,9 poäng) än elever som inte deltog i projektet, det vill säga förskoleklass eleverna läsåret 23/24 från samma skola. Förutom att träning i att bestämma och hantera antal och tal var ett återkommande inslag under läsåret 22/23, varierades även träningsformaten, vilket bidrog till att eleverna erbjöds upprepade och varierande träningsmöjligheter.

Resultatet från delstudie III visade vidare att denna typ av insatser kan vara gynnsamma, även när de genomförs under en kort tidsperiod.

Kapitel 6. Diskussion

I detta kapitel diskuteras resultatet av syntesen i förhållande till tidigare forskning och till avhandlingens övergripande forskningsfråga. Kapitlet inleds med en resultatdiskussion, baserad på syntesen av de fyra ingående delstudiernas resultat där samstämmighet i resultat förstås som främjande aspekter för förskoleklasselevers utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. Därefter följer slutsatser och implikationer för praktiken, en reflektion över studiens tillförlitlighet, metoddiskussion samt studiens begränsningar. Avslutningsvis ges förslag på fortsatt forskning.

Resultatdiskussion

I följande avsnitt diskuteras resultatet av syntesen gällande vilka aspekter i undervisningsdesign som särskilt främjar lågpresterande förskoleklasselevers utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal.

Fokus på tals del-helhetsrelationer

Ett resultat som framkom i delstudie III var att elever som presterade lågt på NST, som prövar elevernas kunskande avseende tals del-helhetsrelationer, i större utsträckning använde sig av uppräkningsmetoden i taget i jämförelse med elever som presterade högt på NST-testet. De högre resultaten tyder på att dessa elever använde sig av ett snabbare och mer effektivt tillvägagångssätt. Dessa resultat kan tolkas i relation till forskning som visar att uppräkningsmetoden är en mer tidskrävande metod för att bestämma och hantera antal jämfört med subitiseringsmetoden, som är en snabb och omedelbar process (Clements m.fl., 2019; Desoete m.fl., 2009; Mandler & Shebo, 1982; Schleifer & Landerl, 2011). Baserat på definitionen av konceptuell subitiseringsmetoden som förmågan att mentalt strukturera och organisera en större mängd visuella objekt i mindre, igenkännbara delar och att sammanfoga dessa till en helhet (Clements m.fl., 2019), kan ett högre resultat tolkas som användning av konceptuell subitiseringsmetoden. Elever som hann markera många korrekta svar och som visade förståelse för att talet fem kan delas upp i olika antalsdelar, kan enligt MacDonald och Wilkins (2016) anses uppvisa en flexibel konceptuell subitiseringsförmåga. I kontrast visade de elever som endast kunde identifiera en enskild antalskombination

som fem, till exempel fyra och ett, tecken på en rigid konceptuell subitiseringsförmåga. Antagandet att det finns en nära koppling mellan konceptuell subitiseringsförmåga och kunnande om tals del-helhetsrelationer styrks av det samband som framkom mellan de två använda bedömningsverktygen i delstudie II. Vikten av att elever ges möjlighet att utveckla kunnande om tals del-helhetsrelationer stöds av forskning som visar att användning av uppåt- och nedåträkningsstrategier med en i taget, i kombination med svaga kunskaper om talfakta, utgör begränsande faktorer för både beräkningar och lösning av mer avancerade matematiska uppgifter (Baroody m.fl., 2009; Neuman, 1987). Dessa resultat överensstämmer med forskning som visar att en vanlig utmaning för elever med matematiksvårigheter är att snabbt och säkert kunna hantera grundläggande talkombinationer (Baroody m.fl., 2009; Jordan m.fl., 2003).

Betydelsen av explicit undervisning i konceptuell subitisering för att stimulera elevers förmåga att flexibelt och medvetet tillämpa talstrukturer vid antalbestämning stärks av Sprenger och Benz (2020), som visar att även om femåringar kan uppfatta talstrukturer i visuellt presenterade antalsuppsättningar, använder de inte alltid denna förmåga för att bestämma antal. Även om resultaten inte visade några statistiskt signifikanta skillnader mellan undervisningsinsatsgrupperna (M och VT) och kontrollgruppen, indikerar de att eleverna som deltog i undervisningsinsatserna utvecklade sitt kunnande avseende konceptuell subitisering och tals del-helhetsrelationer i större utsträckning än kontrollgruppen. Utifrån variationsteoretiska antaganden kan skillnader i kunskapsutveckling förstås i relation till den undervisning som eleverna erbjuds (Marton, 2015), vilket kan tolkas som att undervisningsinsatserna möjliggjorde för eleverna att urskilja kritiska aspekter av lärandeobjektet. Resultatet överensstämmer med variationsteoretiska antaganden om att undervisningsaktiviteter som systematiskt utformas med utgångspunkt i variationsteori, genom användning av kontrast, generalisering och fusion (Lo & Marton, 2012; Marton, 2015; Kullberg m.fl., 2024), kan stödja elevers lärandeprocess och kunskapsutveckling. Som redogjorts för i resultatdelen för delstudie IV förbättrades även kontrollgruppen sina resultat signifikant under insatsperioden, om än i mindre omfattning än undervisningsinsatsgrupperna. Eleverna i kontrollgruppen deltog i den ordinarie matematikundervisningen, och det är sannolikt att de därigenom gavs möjlighet att erfara vissa aspekter av lärandeobjektet, då innehållet "Naturliga tal och deras egenskaper och hur de kan användas för att ange antal och ordning" (Skolverket, 2022b) ingår i förskoleklassens läroplan. Om den ordinarie undervisningen har utgått från den variationsteoretiska principen att skillnader behöver erfaras innan likheter har inte kontrollerats eftersom kontrollgruppen utgjordes av elever från samtliga fyra förskoleklasser med olika lärare och olika undervisningspraktiker. Även om skillnaderna i resultat mellan elevernas för- och eftertester kopplat till de olika undervisningsinsatsgrupperna inte var statistiskt signifikanta, framträdde ändå en skillnad till förmån för den variationsteoretiska designen. VT-gruppens högre resultat på de fördröjda eftertesterna skulle, i enlighet med det antagande som

Holmqvist m.fl. (2007) gör om att generativt lärande påverkas av vilka variationsmönster som används, möjligen kunna förklaras med att fler komplexa variationsmönster, generalisering och fusion användes i den variationsteoretiska designen i jämförelse med den mixade designen, som framför allt använde kontrast. Analysen av de inspelade forskningslektionerna visade att en skillnad mellan VT- och M-designen var att eleverna i VT-designen fick möjlighet att erfara del-helhetsrelationer för fler antal (2–7), medan M-designen främst fokuserade på talen 5 och 7. I VT-designen gavs eleverna vidare möjlighet att simultant erfara tals helhet och delar genom antingen färgkodade eller inringade antalsdelar. Dessutom användes tidsbegränsningar frekvent i VT, medan det endast användes i inträdesuppgifterna i M-designen. Dessa aspekter kan därmed tolkas som kritiska aspekter för lågpresterande elever att urskilja i undervisningen relaterat till att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. Lågpresterande elever behöver ges möjlighet att simultant urskilja delar och helheten av olika antal, samt möjlighet att urskilja att antal kan fastställas direkt utan uppräkningsmedel. Ökningen i resultat mellan för- och eftertester i undervisningsinsatsgrupperna var särskilt stor bland de lägst presterande eleverna. Detta tyder på att undervisningsinsatserna i större utsträckning gynnade elever med initialt svagare förmågor än elever med medelhöga eller höga förkunskaper, vilket överensstämmer med tidigare forskningsresultat (Kwok & Chik, 2005). Resultatet tyder vidare på att de lågpresterande elever som deltog i VT utvecklade sitt kunnande mer än eleverna som deltog i M-designen.

Stimulering av förmågan att direkt bestämma antal

Den identifierade överlappningen i resultat mellan FSSM och NST i delstudie II indikerar att det finns ett samband mellan elevers konceptuella subitiseringsförmåga och kunnande avseende tals del-helhetsrelationer, vilket även framkommit i tidigare studier (Sayers m.fl., 2016; Conderman m.fl., 2014; Young-Loveridge, 2002; Özdem & Olkun, 2019). Resultatet av delstudie III visade att vissa elever använde uppräkningsmedel med en i taget oavsett antal (1 till 9) och hur dessa var ordnade. Detta kan ses som motsägelsefullt i förhållande till antagandena om att både subitisering (≤ 4) (via OTS) och ungefärlig antalsuppskattning (ANS) är medfödda förmågor (Agrillo, 2015; Dehaene, 2011; Feigenson m.fl., 2004). Resultat av en kvalitativ analys av elevernas tillvägagångssätt visade vidare att elever med höga resultat på NST direkt hoppade över dominobrickor i testet där en (av två eller tre) sektion var betydligt fler än fem, vilket resulterade i att de hann markera många korrekta svar. Denna typ av tillvägagångssätt tyder på ANS-förmåga (Dehaene, 2011; Xu & Spelke 2000), det vill säga att ungefärligt kunna uppskatta antal, vilket krävdes i NST för att snabbt kunna avgöra om antalsgrupper består av fler eller färre än fem objekt. I analysen av lektionerna identifierades dock att ANS inte systematiskt undervisats om i undervisningsinsatserna. Detta hade kunnat göras genom att kontrastera subitiserbara antal (1 till 3) mot icke-subitiserbara antal (fler än 5 antal

ordnade i randomiserade mönster). I bedömningsverktygen förekommer olika typer av prickmönster, såväl kanoniska som icke kanoniska. Trots forskning som visar att elever ofta använder mönsterigenkänning såsom, tärningsbilder för att bestämma antal (Clements, 1999; MacDonald & Wilkins, 2016), använde några elever konsekvent uppräkningsobjekten med ett i taget. Ett tillvägagångssätt där eleverna pekar och räknar objekten en i taget, även antal om 1 till 3, tyder på att eleverna inte använde sin medfödda perceptuella subitiseringsförmåga. Huruvida detta kan förstås som individuella kognitiva skillnader i uppmärksamhet (Railo m.fl., 2008), spatiala förmågor (Pincham & Szűcs, 2012) eller om det beror på att eleverna inte urskiljt denna aspekt är en fråga som denna avhandling inte kan besvara. Sett ur det perspektiv som Clements m.fl. (2019) antar, skulle en förklaring kunna vara att subitisering inte behandlats tidigare i undervisningen, då de menar att subitisering är en förbisedd kvantifieringsprocess i undervisningen. Barns (upp)räkningsprocedurer är oftast en synlig aktivitet och det verkar därför rimligt att anta att det är ett tillvägagångssätt som barn och elever tenderar att härma (Dowker, 2019). Subitisering är i stället en osynlig, mental förmåga, vilket gör att den särskilt behöver synliggöras och uppmärksammas i den tidiga matematikundervisningen. Det är dock viktigt att betona att forskningen framhåller både subitisering (Clements m.fl., 2019) och räkning (Koponen m.fl., 2019; Martin m.fl., 2014) som centrala numeriska kompetenser i den tidiga matematikutvecklingen, vilket betyder att båda behöver behandlas i undervisningen. Sammantaget indikerar klassrumsstudiernas resultat att kompetenser kopplade till att bestämma och med flyt hantera antal och tal har sin grund i subitisering, förståelse av tals kardinala värde, kunnande avseende att tal kan delas upp och sättas samman på olika sätt och ungefärlig antalsuppfattning. Resultaten är därmed i linje med tidigare forskning som visar att förståelse för tal och deras användning byggs upp av de numeriska förmågorna: magnitud, ordinalitet och kardinalitet (Nunes & Bryant, 2009; Sixtus m.fl., 2023).

Bedömningsverktyg för att identifiera och följa elevernas kunskapsutveckling

För att kunna identifiera elever som inte utvecklas som förväntat i enlighet med styrdokumentens mål och syften i matematik (Skolverket, 2022b) krävs tillförlitliga bedömnings- och kartläggningsverktyg (Gersten m.fl., 2011; Kilday m.fl., 2012). Resultaten av de kvantitativa analyserna på gruppnivå visade på skillnader i prestationer när bedömningsverktygen (FSSM och NST) användes, där vissa elever erhöll höga totalpoäng medan andra fick låga totalpoäng. Detta tyder på att både NST och FSSM kan användas i klassrumspraktiken för att differentiera prestationer gällande att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. I delstudierna användes inte bedömningsverktygen för att identifiera elever i matematiksvårigheter, utan för att identifiera elever med lägst prestationer som löper en risk att halka efter sina

kamrater i kunskapsutvecklingen. Ett tecken på att NST och FSSM var lämpliga bedömningsverktyg att använda i en förskoleklasskontext var att samtliga elever genomförde och fullföljde testerna, vilket tyder på att uppgifternas utformning var anpassad efter elevernas kognitiva och språkliga förutsättningar. Utformningen av uppgifterna i bedömningsverktygen var tydliga och instruktionerna var enkla att förstå. Både uppgifterna och instruktionerna ställde begränsade krav på språklig förståelse och krävde enbart att eleverna markerade sina lösningar, utan att behöva formulera egna svar. Detta är en viktig, specialdidaktisk aspekt att beakta vid planering och utvärdering av undervisning, för att säkerställa att alla elever ges möjlighet att visa både sina förkunskaper och sitt utvecklade kunnande. Det kunnande som prövas i FSSM och NST, överensstämmer med vad som lyfts fram som centralt i den tidiga matematikutvecklingen: subitiseringsförmåga (Clements m.fl., 2019, Starkey & McCandliss, 2014) och kunnande avseende tals del-helhetsrelationer (Baroody m.fl., 2009; Neuman, 1987; Nunes & Bryant, 2009). Resultaten av delstudie II visade en stark korrelation mellan de två poängsättningsmetoderna d'-poäng (d-prime) och totalpoäng när de tillämpas inom samma test. Vid jämförelse mellan de olika testerna framkom en måttlig till svag signifikant positiv korrelation mellan bedömningsverktygen, vilket indikerar att testerna både prövar samma och olika matematiska kompetenser. I NST bedöms främst kunnande avseende tals del-helhetsrelationer av antalet fem. För att snabbt kunna identifiera alla par eller triader som tillsammans bildar talet fem krävs, förutom kunnande om den kardinala innebörden av talet fem (Geary m.fl., 2018; Sixtus m.fl., 2023), även en välutvecklad perceptuell subitiseringsförmåga (för 1 till 3 objekt) (Agrillo, 2015; Piazza m.fl., 2011). Då varje del av dominobrickan kan innehålla upp till nio objekt, prövas även elevernas ANS-förmåga (Xu & Spelke, 2000), det vill säga förmåga att avgöra om antalet är många fler än fem. Testernas tidsbegränsning bidrar till att det är elevernas förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal som står i fokus för bedömningen. I FSSM består uppgiften i att identifiera vilket av flera prickmönster – bestående av tre till fem prickar i olika grupperingar – som innehåller exakt fyra prickar. Till skillnad från NST, där antalen redan är förindelade och ordnade i par eller triader, kräver FSSM att eleverna själva strukturerar och organiserar antalen på det sätt som de känner sig förtrogna med. Ifall testerna ska användas som komplement till varandra, eller var för sig, är upp till läraren att avgöra, eftersom valet av test beror på vilket kunnande som fokuseras. Identifierade skillnader i elevresultat mellan för- och eftertest över olika tidsintervall indikerar att testerna kan vara användbara också för att följa elevernas utveckling, både på grupp- och individnivå. Ingen förskoleklasselev hann slutföra testerna inom respektive tests tidsram, vilket tyder på att testerna kan användas i ett brett prestationsspann.

Baserat på de tio lägsta testresultaten i både NST och FSSM identifierades fyra elever som presterade på den lägsta nivån i båda testerna, vilket kan ses som en

indikation på att deras kunskapsutveckling kräver särskild uppmärksamhet. Detta kan ses i relation till resultat som visar att subitiseringsförmåga förklarar 22 procent av variationen i 5–6-åringars räknefärdigheter (Kroesbergen m.fl., 2009), samt till resultat som pekar på en positiv korrelation mellan subitiseringsomfång och matematiskt kunnande hos 5,5–7,5-åringar ($n = 562$) (Yun m.fl., 2011). Det kan även kopplas till forskning som visar att resultat i de tidiga skolåren korrelerar med senare prestationer (Jordan m.fl., 2009; Morgan m.fl., 2009). Mot denna bakgrund är det därför av största vikt att tidigt identifiera elever med svaga resultat för att kunna erbjuda riktade stödinsatser (Gersten m.fl., 2009; Mononen m.fl., 2014). I enlighet med svensk lagstiftning ska en fördjupad bedömning av en elevs kunskapsutveckling genomföras för elever som visar indikation på svårigheter i matematik. Denna bedömning och tillika planering och utvärdering av stödinsatser ska ske i samarbete mellan den undervisande läraren och personal med specialpedagogisk kompetens (SFS 2018:750; SFS 2018:1098). Frågor som rör matematikundervisning i relation till förväntad utveckling bör enligt modellen *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball m.fl., 2008) kunna hanteras av alla matematiklärare, medan frågor som rör elever som inte svarar på undervisningen som förväntat i enlighet med styrdokumentens mål och syften i matematik, kan behöva hanteras av lärare med specialdidaktisk kompetens i matematik (SFS 2018:1098).

Upprepade träningstillfällen med avgränsat innehåll

Resultaten från undervisningsinsatserna visar att eleverna, på gruppnivå, utvecklade sin konceptuella subitiseringsförmåga och sitt kunnande avseende tals del-helhetsrelationer. Även eleverna i kontrollgruppen förbättrade sina resultat mellan för- och eftertesterna, även om skillnaden mellan undervisningsinsatsgruppernas och kontrollgruppens resultat inte var signifikant. En trolig förklaring är att även andra faktorer än undervisningsinsatserna påverkade elevernas lärande (även om ökningen var större i undervisningsinsatsgrupperna). Denna problematik med att urskilja förklarande variabler i interventionsstudier lyfts fram av Hiebert och Grouws (2007) som menar att det är svårt att studera sambandet mellan undervisning och lärande, eftersom lärande påverkas av många variabler. För att så långt som möjligt minimera denna bias användes både kontrollgrupper och vägledande teori (variationsteorin). En faktor som troligtvis påverkade utfallet gällande undervisningsinsatsernas påverkan, var att samtliga elever (M, VT och kontroll) deltog både i FSSM- och NST-testerna samt i ett parallellt ögonrörelsemätningsexperiment, där de snabbt skulle bestämma antalet visuellt presenterade prickar (2 till 5) på en skärm. Oavsett grupptillhörighet (M, VT eller kontroll) tränades alltså alla eleverna i att snabbt och korrekt bestämma antal vid andra tillfällen än i forskningslektionerna. Att upprepade träningstillfällen med avgränsat innehåll avgränsad kan vara gynnsamt för elevers kunskapsutveckling

bekräftas i ett uppföljningstest där testresultaten på FSSM jämfördes mellan förskoleklass elever som deltog i projektet under läsåret 2022/23 och förskoleklass elever som inte deltog i någon matematikundervisningsinsats under läsåret 2023/24. Resultatet visade att eleverna som deltagit i projektet, oavsett grupptilldelning, visade en högre grad av konceptuell subitiseringsförmåga i årskurs 1 i jämförelse med elever som inte deltagit i projektet. Undervisningsinsatser som fokuserar på specifika procedurer och ett avgränsat innehåll kopplat till tidig antals- och taluppfattning har även i tidigare studier visat positiva läranderesultat (Holmes & Dowker, 2013; Mononen m.fl., 2014), även om insatserna varit tidsmässigt begränsade (Holmes & Dowker, 2013). Resultatet av delstudie IV överensstämmer även med tidigare forskning som indikerar att denna typ av innehållsspecifika undervisningsinsatser är särskilt gynnsamma för elever med initialt svagare kompetenser/förmågor/kunskaper (Holmes & Dowker, 2013; Kwok & Chik, 2005; Westerholm & Samuelsson, 2020).

Slutsatser och implikationer för praktiken

Avhandlingsarbetets viktigaste kunskapsbidrag är en fördjupad förståelse för vilka undervisningsrelaterade förutsättningar som särskilt främjar lågpresterande förskoleklass elevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal.

- Resultaten visar att stimulering av förmågan att direkt bestämma antal (subitisering) framstår som gynnsamt för lågpresterande elevers utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal. Elever som snabbt och direkt bestämde antal, presterade bättre på både på NST och FSSM, än elever som använde sig av uppräkningsmetod med en i taget. Resultatet visar vidare att det finns ett samband mellan förskoleklass elevers konceptuella subitiseringsförmåga och deras förståelse av tals del-helhetsrelationer.
- Samtliga elever utvecklade sin konceptuella subitiseringsförmåga och kunskande avseende tals del-helhetsrelationer, vilket tyder på att upprepade träning (undervisning, test och ögonrörelseexperiment) av ett avgränsat matematiskt innehåll har en positiv påverkan på elevers kunskapsutveckling, särskilt för lågpresterande elever.
- För att kunna bedöma specifika matematiska kompetenser behöver lärare ha tillgång till tillförlitliga och lättanvända bedömningsverktyg. När det gäller identifiering av elevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal, visar resultaten från bedömningsverktygen att de samvarierar, särskilt avseende de lägsta prestationerna. Bedömningsverktygen skulle därför kunna vara lämpliga att använda i en klassrumskontext för att

bedöma elevers konceptuella subitiseringsförmåga och förståelse av tals del-helhetsrelationer, och för att följa deras kunskapsutveckling över tid. Detta gör det möjligt att planera den fortsatta undervisningen och sätta in riktade stödsatser för de elever som eventuellt behöver det.

- Även om skillnader i resultat mellan de olika undervisnings-designerna var små, visar studien att lärandesituationer som på ett systematiskt sätt utformas med stöd av variationsteoretiska principer bidrar till elevers lärande. Användandet av de variationsteoretiska principerna kontrast och generalisering möjliggjorde för eleverna att erfara de nödvändiga aspekterna av lärandeobjektet, vilket blev särskilt tydligt för de lågpresterande eleverna. Undervisningsaktiviteter som möjliggör för eleverna att simultant urskilja både talets helhet och dess delar, samt aktiviteter som stimulerar till snabb uppskattning av antal, visade sig vara särskilt gynnsamma för lågpresterande elevers utveckling av förmågan att bestämma och flexibelt hantera antal och tal.

Eftersom undervisningsinsatserna genomfördes med förskoleklass elever i autentiska klassrumskontexter kan resultaten användas som en utgångspunkt vid planering, genomförande och utvärdering av undervisning i liknande kontexter. Genom att synliggöra de aspekter av lärandeobjektet som är kritiska för elevernas lärande, kan undervisningen utformas och anpassas efter elevgruppens behov och förutsättningar. Denna kunskap är viktig för förskoleklasslärare och lärare i de tidiga skolåren att beakta när de planerar matematikundervisning som syftar till att möjliggöra lärande för alla elever. Resultaten är särskilt betydelsefulla ur ett specialdidaktiskt och innehållsinkluderande undervisningsperspektiv relaterat till de elever som inte utvecklas i enlighet med styrdokumentens mål och förväntningar. Modellen *Specialized Mathematical Knowledge for Teaching* (SMKT), som presenteras i licentiatuppsatsens kapp (Wästerlid, 2022), tydliggör relationen mellan specialdidaktisk kompetens och generell matematisk kompetens, *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball m.fl., 2008). Modellen kan användas som en utgångspunkt vid planering av förebyggande och stödjande insatser inom den ordinarie undervisningen, samt för att klargöra specialdidaktikens funktion i matematikundervisningen.

Studiens tillförlitlighet

Baserat på den kvalitativa syntesmetod som använts i avhandlingen diskuteras här studiens tillförlitlighet med stöd av Tracys (2010) kvalitetskriterier (kursiverade) i kvalitativ forskning. De etiska aspekterna, som utgör ett av dessa kriterier, har redan behandlats under rubriken "Etiska aspekter". Kvaliteten i en studie handlar bland annat om att det valda problemområdet ska vara relevant och värt att studera (*worthy*

topic). Med tanke på att många elever går ut grundskolan utan godkända betyg i matematik, är avhandlingens syfte gällande hur elevers tidiga matematikutveckling kan främjas och stödjas i den ordinarie matematikundervisningen relevant. Även studiens avgränsning mot förskoleklass elever, särskilt lågpresterande förskoleklass elever, kan ses som en adekvat avgränsning utifrån forskning som understryker vikten av tidiga insatser. Det matematiska innehållet konceptuell subitiserings undersöks baserat på tidigare forskning som visar på ett samband mellan subitiseringsförmåga och förståelse för antal och tal. Konceptuell subitiserings och dess roll i sexåringars matematiska utveckling har mig veterligen inte tidigare studerats empiriskt. I avhandlingens delstudier har en kombination av kvalitativa och kvantitativa datainsamlingsmetoder tillämpats, med syftet att samla in och integrera resultatet av dessa för att ge en nyanserad bild av fenomenet. Med flermetodsforskning kan de mer detaljerade perspektiven från kvalitativa data och de bredare och mer generaliserbara perspektiven från kvantitativa data kombineras (Hirose & Creswell, 2023), vilket bidrar till att kriteriet *rich rigor* kan uppnås. Enligt Tracy (2010) är denna mix av datainsamlingsmetoder och analysmodeller önskvärd, eftersom det ger en fördjupad bild av det undersökta fenomenet, vilket är centralt för att uppnå hög trovärdighet, vilket Tracy (2010) benämner *credibility*. En annan faktor som bidrar till studiens trovärdighet är att klassrumsstudierna genomfördes i nära samarbete mellan lärarna och forskarna, vilket stärker studiens ekologiska validitet. Genom att involvera klasslärarna i forskningen har resultatens relevans och giltighet stärkts, samtidigt som validiteten och trovärdigheten i studiens genomförande har ökat. Avhandlingens resultat gällande vilka aspekter i undervisningsdesign som bidrar till att utveckla lågpresterande förskoleklass elevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal kan förhoppningsvis vara ett stöd för både lärare som undervisar i matematik och speciallärare med inriktning matematikutveckling vid planering, genomförande och uppföljning av matematikundervisning. Detta är en aspekt som Tracy (2010) benämner *resonance*. För att uppnå aspekten *meaningful coherence*, det vill säga att studiens delar samverkar på ett logiskt och sammanhängande sätt för att besvara syfte och frågeställningar, har diskussioner kring studiernas genomförande, val av metod, teoretiska ramverk och analyser förts i olika forskningsforum, till exempel forskargrupper och vid internationella konferenser, och med handledarna. Detta har förhoppningsvis bidragit till att delarna i studien uppfattas som sammanhängande och som viktiga bidrag för att besvara avhandlingens övergripande forskningsfråga.

Metoddiskussion

Avhandlingens övergripande forskningsdesign är flermetodsforskning, vilket innebär att olika metodansatser har kombinerats, både inom och mellan de olika delstudierna. Detta kan ses som en styrka då resultaten kompletterar och stärker

varandra, vilket Creswell och Creswell (2018) menar är särskilt betydelsefullt när komplexa och mångfasetterade fenomen studeras. En potentiell risk med att använda olika metoder för datainsamling skulle kunna vara att forskaren saknar fördjupad kunskap inom både kvantitativa och kvalitativa forskningsmetoder. I denna avhandling har delstudie II och IV genomförts i samarbete med erfarna forskare från olika forskningsfält och med skilda metodkompetenser, vilket stärker validiteten i tillvägagångssättet och motiverar valet av flermetodsforskning.

En systematisk sökning efter forskningsstudier om lågpresterande elevers taluppfattningskompetenser i årskurs F–3 genomfördes i databaserna *ERIC*, *PsycINFO* och *Web of Science* med syftet att syntetisera dessa. Valet att endast använda tre databaser kan ses som en begränsning, då det finns en risk att relevanta studier inte fångades upp i sökningarna. Urvalskriterierna, som var kopplade till utgivningsår, empiriska studier och beskrivningar av lågpresterande elevers kunnande, kan också uppfattas som snäva, eftersom de endast resulterade i 18 artiklar. Sökningar med ett av sökblocken åt gången gav tiotusentals träffar, men när sökblocken (*numeracy*, *early education* och *low achievers*) kombinerades minskade antalet artiklar markant, vilket tyder på att det finns många studier inom de enskilda forskningsområdena, men ett begränsat antal som behandlar dessa områden samtidigt.

Undervisningsinsatserna i delstudie III och IV genomfördes tillsammans med lärare, och vi som forskare var noga med att informera om projektets syfte och genomförande genom regelbundna kontakter både via e-post och i fysiska möten. Eftersom vi strävade efter att störa den ordinarie undervisningen så lite som möjligt, planerade vi tillsammans med lärarna när det var mest lämpligt att genomföra undervisningsinsatserna och bedömningstesterna. En av fördelarna med att genomföra studier i en klassrumskontext är att den autentiska miljön bidrar till att resultaten blir ekologiskt valida och speglar faktiska förhållanden (Dennis m.fl., 2022). En experimentell forskningsansats användes i delstudie IV för att besvara forskningsfrågan om undervisningsinsatsernas påverkan på elevernas kunskapsutveckling. Valet att använda en experimentell design med slumpmässig grupp tilldelning gjordes med utgångspunkt i Shadish m.fl. (2002), som menar att eventuella skillnader i resultat mellan deltagarna i de olika undervisningsgrupperna då kan tillskrivas undervisningsinsatsen snarare än andra faktorer. I delstudie IV var detta en central aspekt för att kunna besvara forskningsfrågan om hur eventuella förändringar i kunskapsutveckling kan relateras till undervisningsdesignen. Kvantitativ forskning kännetecknas av mätning, generaliserbarhet och ett fokus på kausala samband där tonvikten ligger på att kvantifiera (Bryman, 2018). I förhållande till generaliserbarhet tolkas resultaten av avhandlingens klassrumsstudier som en möjlig utgångspunkt för planering av undervisning i andra, liknande populationer snarare än som en objektiv och allmängiltig undervisningsmodell. Kvantitativ ansats kan däremot inte användas för att besvara frågor om hur och varför vissa elever till exempel inte utvecklade det avsedda

kunnandet, i förhållande till undervisningens mål och innehåll. Vid denna typ av frågor lämpar sig en kvalitativ ansats vars huvudsakliga fokus är att ”se världen med de andras ögon” (Bryman, 2018, s. 477). Avsaknaden av kvalitativ ansats i delstudie IV skulle kunna ses som en begränsning, särskilt i relation till lågpresterande elever, eftersom frågor om varför vissa elever inte utvecklade sitt kunnande som förväntat inte kunde besvaras.

Valet att använda tre forskningslektioner i delstudie IV överensstämmer med hur en Learning study kan utformas. Resultatet visade att undervisningsinsatserna (M-design och VT-design) påverkade elevernas kunskapsutveckling positivt. På grund av praktiska omständigheter genomfördes de två LS-cyklerna inte i nära anslutning till varandra. Förtestet och cykel 1 (lektion 1) genomfördes med ett lägre tidsintervall till cykel 2 (lektion 2 & 3). Eftertestet genomfördes mellan två och sex veckor efter cykel 2 och det mätte därmed inte den omedelbara effekten av undervisningen. Eftertesterna efter cykel 2 kan därför betraktas som fördröjda kunskapsmätningar då de genomfördes mellan två och sex veckor efter lektion 3. Enligt Shadish m.fl. (2002) skulle förändringar i resultaten på ett fördröjt eftertest därför kunna bero på andra faktorer utöver den genomförda undervisningsinsatsen. Å andra sidan indikerar forskning baserad på kognitiv belastningsteori att resultat på eftertest direkt efter en undervisningsinsats kan vara svagare än resultat från ett fördröjt eftertest, vilket förklaras med att arbetsminnesresurserna kan vara uttömda vid ett omedelbart eftertest (Leahy & Sweller, 2019).

I delstudierna (II–IV) har de två bedömningsverktygen NST (Geary m.fl., 2009) och FSSM (Adler, 2022a) använts. Testerna är framtagna för att identifiera elever som riskerar att möta svårigheter i matematik och inte för att följa elevers kunskapsutveckling över tid. Resultatet visade att testerna var relativt tillförlitliga för att identifiera lågpresterande elever och att de även var användbara för att följa elevers kunskapsutveckling över tid i en klassrumskontext. En nackdel är att testerna inte är tillgängliga via nätet. NST har använts i projektet med tillåtelse av forskaren David Geary. FSSM är ett kommersiellt screeningmaterial som köpts in via en privat aktör. I delstudie II utvärderas inte testernas validitet i relation till konceptuell subitisering som avhandlingen fokuserar på, något som hade varit nödvändigt för att kunna använda testerna i en bredare utbildningskontext. I studierna belyses dock denna typ av lättanvända bedömningsverktygs roll och potential för att identifiera elever som visar indikation på att inte kunna hantera antal och tal på ett flexibelt sätt. NST genomfördes individuellt, medan FSSM genomfördes i helklass, vilket kan ha påverkat i vilken grad testerna identifierade samma elever. Eftersom båda testerna var tidsbegränsade kan resultatet även ha påverkats av elevernas förmåga att vara uppmärksamma och koncentrerade. I NST, som genomfördes i en-till-en-situation, hade testledaren möjlighet att stötta eleven att rikta sin uppmärksamhet mot uppgiften, vilket var svårare i helklassituationen. Det är däremot rimligt att anta att elevernas kunskapsutveckling över tid inte

påverkades av huruvida testerna genomfördes individuellt eller i grupp, eftersom samma förfaringssätt tillämpades inom respektive test.

Begränsningar

Samma FSSM- och NST-tester användes vid samtliga tre testtillfällen, vilket kan ha lett till bias i form av testeffekt (Shadish, 2002). Denna risk är särskilt hög kopplat till NST som endast består av 36 uppgifter, eftersom eleverna kan ha kommit ihåg vilka par och triader som tillsammans blir fem. Detta motsägs dock av det faktum att eleverna inte fick tillbaka testerna efter bedömningen, vilket innebär att de inte delgavs vilka svarsalternativ som var de rätta i de fall de varit osäkra. Tidsintervallet mellan testernas genomförande kan också ha bidragit till att minska risken för bias. Denna risk bedöms som mindre i FSSM-testet, då det innehåller betydligt fler uppgifter ($n = 210$). Undervisningsinsatserna genomfördes på grund av praktiska omständigheter och skäl under en period om tre månader, där lektion 1 ägde rum i slutet av november och lektion 2 och 3 genomfördes i slutet av februari och början på mars. I lektion 1 i M-designen användes färdigproducerat undervisningsmaterial, medan variationsteoretiska principer tillämpades vid planeringen av lektion 2 och 3, det vill säga liknande designprinciper användes i både M- och VT-insatsen. Dessa förhållanden kan utgöra en möjlig förklaring till varför skillnaderna i elevresultat mellan de två undervisningsinsatsgrupperna var marginella. Utifrån både forsknings- och utbildningspraktiska intressen av att undersöka sambandet mellan undervisning och lärande (se till exempel Marton & Booth, 1997; Hiebert & Grouws, 2007) finns ett behov av att identifiera de aspekter av lärandeobjektet som är avgörande för elevers utveckling av det specifika innehållet. Detta gör det möjligt att planera undervisningen så att dessa aspekter kan beaktas vid genomförandet. Resultaten från de båda klassrumsstudierna kan, på grund av studiernas specifika kontexter och det begränsade antalet elever, inte oreserverat generaliseras till andra utbildningskontexter. Däremot kan resultaten fungera som en utgångspunkt för planering av liknande undervisning. Trots att varje individ har unika förutsättningar för lärande, är det rimligt att anta att dessa inte skiljer sig väsentligt i en liknande skolkontext med elever i ungefär samma ålder, som undervisas i samma matematiska innehåll.

Även om variationsteoretiska principer har använts för att undersöka sambandet mellan undervisning och lärande, är det sannolikt att andra variabler än undervisningsinsatserna påverkade elevernas kunskapsutveckling. Påverkan från andra variabler minimerades dock genom randomiserad tilldelning av eleverna till de olika grupperna (M-design, VT-design och kontrollgrupp). Undervisningens påverkan på elevers kunskapsutveckling prövades genom att samma för- och eftertester användes. För att få en mer fördjupad förståelse av de lågpresterande

elevernas lärande hade till exempel kompletterande intervjuer kunnat ge mer nyanserad och detaljerad information om vad eleverna faktiskt lärde sig.

En annan aspekt som behöver beaktas vid tolkningen av resultaten från klassrumsstudierna är Hawthorne-effekten (McCambridge m.fl., 2014). Hawthorne-effekten är ett fenomen där individer förändrar sitt beteende eller sina prestationer när de vet att de är under observation eller får uppmärksamhet. Inom forskning innebär detta att det kan vara svårt att avgöra om den observerade förändringen beror på undervisningsinsatsen eller den ökade uppmärksamhet som eleverna får. Eventuell påverkan av Hawthorne-effekten på elevernas kunskapsutveckling bedöms i delstudie IV som minimal, då projektet genomfördes under nästan ett helt läsår inom ramen för elevernas ordinarie undervisningskontext. Resultaten av delstudie III bedöms sannolikt inte heller ha påverkats av Hawthorne-effekten eftersom elevernas ordinarie lärare genomförde undervisningsinsatsen.

Fortsatt forskning

För att få en fördjupad förståelse för subitiseringsförmågens roll i lågpresterande elevers utveckling av grundläggande aritmetiska färdigheter, hade det varit intressant att longitudinellt följa en elevgrupp som undervisats med utgångspunkt i förmågan att subitiserar. Mot bakgrund av att den experimentella undervisningsinsatsen genomfördes på en skola som, enligt Skolverkets socioekonomiska index (Skolverket, 2025), bedöms ha goda förutsättningar att nå grundskolans kunskapskrav, hade det varit av värde att genomföra en motsvarande studie med förskoleklasselever i en kontext där förutsättningarna att nå dessa krav bedöms som svagare. En sådan jämförelse skulle kunna generera kunskap om hur undervisningen kan differentieras och anpassas utifrån elevers varierande förutsättningar och behov.

Inom Learning study (LS) används ofta för- och eftertester som verktyg för att utvärdera undervisningens påverkan på elevernas kunskapsutveckling, där resultaten presenteras på gruppnivå. Mot bakgrund av resultaten i avhandlingens delstudie III, som visar att inte alla förskoleklasselever utvecklade sin subitiseringsförmåga, hade det varit intressant att följa dessa elevers individuella kunskapsutveckling genom en case-study. En sådan ansats skulle kunna bidra med fördjupad förståelse för variationer i elevers utveckling och därigenom bidra med kunskap om hur dessa variationer skulle kunna mötas i undervisningen.

En annan forskningsinriktning hade varit att undersöka i vilken grad NST och FSSM identifierar samma elever som lågpresterande och i behov av stödinsatser, i jämförelse med andra standardiserade och mer omfattande testbatterier såsom *Hitta matematiken* (Skolverket, 2022a). Detta är av betydelse eftersom FSSM och NST är mindre tidskrävande och enklare att administrera än exempelvis *Hitta*

matematiken. De tar bara några minuter att genomföra och kan dessutom utföras i helklass. Detta möjliggör tidig identifiering av elever som riskerar att halka efter i sin utveckling av grundläggande antals- och taluppfattning, vilket i sin tur skapar förutsättningar för att sätta in adekvata stödinsatser i ett tidigt skede.

Summary

Background

Mathematics plays a central role in equipping pupils with the competencies needed to navigate everyday life and participate meaningfully in society (Chetty et al., 2011; Parsons & Bynner, 2005). Despite this, a concerning 11.7% of pupils in Sweden leave compulsory school without achieving a passing grade in mathematics (Swedish National Agency for Education, 2023). This statistic represents more than a performance issue; it points to systemic equity challenges that persist despite national efforts to raise achievement in mathematics. For instance, although Swedish pupils have demonstrated improved average results in recent international assessments like TIMSS, the proportion of those failing to reach the minimum proficiency level remains largely unchanged (Swedish National Agency for Education, 2024c). This has resulted in a widening performance gap between high- and low-achieving pupils, contradicting the principle of equal educational opportunity outlined in national education policy (School Act, 2010:800, Chapter 1, § 4).

International and national research emphasizes that early mathematical proficiency is a powerful predictor of pupils' later performance in the subject (Jordan et al., 2009; Morgan et al., 2009). Worryingly, pupils who begin school with weak mathematical skills are more likely to remain low performers over time (Aunola et al., 2004; Morgan et al., 2009; Krajewski & Schneider, 2009). This entrenched disadvantage signals a need for more targeted, evidence-based instructional practices early in pupils' schooling.

One particularly important area of early mathematics is the development of number sense. This includes both symbolic and non-symbolic understanding of quantity, and the ability to recognize number relationships, perform basic arithmetic operations, and manipulate numerical information with flexibility (Anghileri, 2006; Aunio & Räsänen, 2015; Sharma, 2015). A critical foundational skill within number sense is subitizing, the ability to instantly recognize the number of items in a small set without counting (Clements, 1999). While this ability is known to support early foundational mathematical competencies, such as cardinality (Butterworth, 2005), number relations (Sayers et al., 2016; Young-Loveridge, 2002), and basic arithmetic skills (Fischer et al., 2008b), it remains underemphasized in typical classroom instruction (Clements et al., 2019). Research indicates that structured instruction

focusing on subitizing supports the development of other mathematical competencies, such as number sense, counting, and basic arithmetic skills (Fischer et al., 2008b; Sayers et al., 2016; Özdem & Olkun, 2019). However, how preschool class pupils' ability to identify and work flexibly with quantities and numbers can be supported in a whole class setting through conceptual subitizing has not yet been explored, which is an issue this thesis aims to address.

Aim and research questions

The primary aim of this thesis is to explore how preschool-class pupils, especially those who initially perform at a low level, develop their ability to determine and flexibly handle numbers and quantities over time. Of particular interest is the role of conceptual subitizing in this development, and how specific instructional interventions might influence learning outcomes. The dissertation is anchored by one overarching research question:

What aspects of instructional design contribute to the development of low-performing preschool-class pupils' ability to determine and flexibly handle numbers and quantities?

The research is guided by an interdisciplinary approach, integrating theories and insights from mathematics education, cognitive science, and special education. The approach recognizes the diversity of learners and emphasizes the design of instruction that enables the participation of all pupils, offering content-rich teaching, especially for those who do not progress as expected. This overarching question is explored through four research questions, each linked to one of the four studies, addressing different perspectives of the overall research question.

1. What does existing research identify as essential for low-performing pupils' understanding and ability to operate with numbers and quantities in early childhood? (Study I)
2. How can preschool-class pupils' ability—particularly that of low-performing pupils—to determine and flexibly handle numbers and quantities be identified and monitored in the classroom? (Study II)
3. What differences are evident in how preschool-class pupils understand and handle numbers and quantities? (Study III)
4. What appears to be important for pupils' development of the ability to flexibly handle numbers and quantities through instruction, with a focus on low-performing pupils? (Study IV)

Together, these four studies aim to generate both conceptual and practical knowledge on how instruction can support young learners in building foundational understanding of numbers.

Theoretical framework

The theory chosen to examine the relationship between teaching and pupils learning is Variation Theory, a learning theory developed from phenomenographic research by Marton and colleagues (Marton, 1981; Marton & Booth, 1997; Marton, 2015). Variation Theory was used to systematically and structurally plan instruction and to explore the relationship between teaching and learning by analyzing the learning opportunities offered to pupils in the classroom. Central to Variation Theory is both what pupils are to learn, i.e. the object of learning, and how it is to be handled in teaching to make learning possible. Connected to each object of learning there are aspects that the learner needs to discern to gain an understanding of the object of learning (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015). Aspects that the learner has not yet discerned but needs to discern to develop their understanding of the object of learning are referred to as critical aspects (Marton & Pang, 2006; Holmqvist et al., 2008). The object of learning is often discussed in terms of both direct (content-specific) and indirect (transferable) learning objectives (Marton & Pang, 2006). In the classroom studies, included in this thesis, the direct object of learning was conceptual subitizing within the number range 1 to 9, while the indirect object was pupils' understanding of part-whole number relationships. Variation Theory stresses that learning is a relational process between the learner and the content. The way the object of learning is presented and handled sets the boundaries for what learning becomes possible (Kullberg & Ingeman, 2022). In teaching, the object of learning is considered in three different phases, where the intended object of learning is analyzed and compared with the learning that was made possible during instruction (enacted object of learning) and the knowledge that pupils developed (lived object of learning) (Kullberg et al., 2024). The key to making learning possible lies in creating variation, as variation makes the critical aspects of the object of learning visible to the learner (Kullberg et al., 2024). The use of patterns of variation – contrast, generalization, and fusion – enables learners to discern the critical aspects of the object of learning, based on the assumption that differences must be experienced before similarities can be identified (Lo & Marton, 2012). According to Holmqvist et al. (2007), contrast may be most effective when dealing with unfamiliar concepts, whereas generalization and fusion are better suited for learners with a more developed understanding.

- Contrast highlights differences by varying one aspect while keeping others constant.
- Generalization is a general understanding of the phenomenon separated from its example or representation. Generalization supports understanding across diverse contexts by keeping the critical aspect stable while other features change.
- Fusion integrates multiple aspects simultaneously to deepen understanding.

It is the teacher's task to design variations that enable pupils to discern the critical aspect(s) during instruction (Kullberg et al., 2024). The teaching instructions in the classroom studies in this thesis were developed iteratively in collaboration with the preschool class teachers following the Learning Study model, which is an iterative model for developing instructional practice (Holmqvist et al., 2008). Applying Variation Theory, the lessons were planned, conducted and evaluated in relation to the variation-theoretical concepts of intended, enacted, and lived learning objects (Marton & Pang, 2006; Kullberg & Ingerman, 2022). The critical aspects, which are central to Variation Theory, were identified through literature review, pre-tests, classroom observations, and teachers' prior experiences of teaching the object of learning.

Method

The research adopts a pragmatic mixed methods approach, reflecting the complexity of educational phenomena and the value of integrating both qualitative and quantitative data, in accordance with the assumptions outlined by Bryman (2018) and Gillespie et al. (2024). Rather than committing to a single philosophical stance, the methodology was chosen to best suit the research questions and context. This aligns with the non-dualistic epistemology of Variation Theory, which sees the learner and content as inseparable and learning as situated in authentic experiences (Marton, 2015).

The thesis consists of a thesis summary, a licentiate summary and four studies, each using a distinct yet complementary methodological design. The licentiate summary contributes knowledge about how special educational expertise can complement the general competencies needed for teaching mathematics, also referred to as *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball et al., 2008), in relation to teaching children who do not develop mathematical competences in early numeracy as expected. A systematic literature review served as the basis for selecting the content of the instructional intervention in the pilot study (study III) and for choosing the assessment tools (study II). The results of the instructional intervention regarding pupils' knowledge development in study III, in turn, formed the basis for the scaled-

up study (study IV), which followed an experimental design and was conducted as a Learning Study. The pilot study (n=24) and the scaled-up study (n=74) were conducted at two different schools with preschool class children. The school where study III was conducted is a rural school with approximately 150 pupils, while study IV was carried out at an urban school with approximately 550 pupils.

Study I is a systematic literature review synthesizing empirical studies focused on number sense in low-performing pupils aged 5–9. Using the PICOC model (Eriksson Barajas et al., 2013) and a narrative synthesis method (Popay et al., 2006), the study identifies conceptual themes, methodological approaches, and knowledge gaps in the field.

Study II is a correlational study examining how two assessment tools, Ability to Quickly See Quantities (AQSQ) (Adler, 2022a) and the Number Sets Test (NST) (Geary et al., 2009), relate to one another in assessing pupils' ability to determine and flexibly handle numbers and quantities, using different scoring methods. The study uses both descriptive statistics and Pearson correlations to determine whether the tools measure overlapping or distinct aspects of number competence.

Study III is a pilot intervention using a Lesson Study model (Holmqvist et al., 2008) to explore how activities targeting conceptual subitizing influence pupils' understanding of the part-whole relationship of numbers. The study combines pre- and post-testing with qualitative data from teacher observations and pupil task performance.

Study IV is a randomized experimental (Shadish, 2002) Learning Study comparing the impact of two instructional designs (variation-theoretical versus mixed) on pupil learning, with a control group receiving standard instruction. Data include assessments, classroom videos, and structured lesson analyses based on Variation Theory principles (Marton, 2015).

Collectively, these methods provide a robust empirical foundation for understanding how instructional design affects the development of number sense in young learners.

Results

The synthesis of findings across all studies revealed the following four key instructional elements that contribute to the development of low-performing preschool-class pupils' ability to determine and flexibly handle numbers and quantities:

Emphasis on part-whole relationships

The systematic literature review (Study I) emphasized that low-performing pupils need to move beyond inefficient one-by-one counting acquiring derived fact strategies and number knowledge. Study II identified an overlap between conceptual subitizing skills and part-whole number understanding, with low-performing pupils scoring in the lowest quartiles on both measures. Study III showed that high-performing pupils used more efficient strategies, such as instantly identifying combinations that sum to five, while low-performing pupils relied on slower counting methods. Study IV revealed that instruction based on Variation Theory supported learning more effectively than the mixed design (M), particularly for low-achieving pupils. The Variation Theory design enabled pupils to perceive parts and wholes simultaneously through structured visual cues, such as color and grouping, and provided opportunities to explore part-whole relationships across a wider range of numbers.

Stimulation of rapid quantity recognition

Pupils who quickly and directly identified quantities outperformed those who relied on one-by-one counting in both the NST and AQSQ, suggesting that such counting is a less efficient strategy, particularly for smaller quantities. Low-performing pupils showed greater improvement in the Variation Theory design, likely due to repeated opportunities to experience immediate quantity recognition through time-limited tasks. By contrast, the mixed design (M) only included timed activities at the beginning. All pupils, including the control group, practiced rapid quantity recognition in the timed assessments (AQSQ and NST).

Effective use of assessment tools

Early identification of support needs is crucial for timely interventions that enhance pupils' foundational math skills. Results from Study II suggest that the Number Sets Test (NST) and the Ability to Quickly See Quantities (AQSQ) are effective tools for differentiating pupils' abilities to determine and flexibly handle quantities and numbers, especially when identifying low performers. The tests show measurable performance differences over time, allowing tracking of development. Simple instructions and non-verbal responses enable all pupils to participate, while the short duration maintains attention. The total score system facilitates practical use, making these tests valuable and user-friendly assessment tools for teachers.

Repeated, targeted practice

Repeated focused training sessions positively influenced pupils' knowledge development, as shown in Study IV. Although control group pupils in regular classroom teaching also improved, those who participated in targeted instructional interventions showed greater gains. Randomization controlled other variables, suggesting that the design of instruction impacted learning outcomes. Pupils engaged in systematic teaching together with NST and AQSQ testing demonstrated enhanced performance. Notably, pupils involved in the 2022/23 research project scored on average 3.9 points higher in the AQSQ test than non-participating peers in the following year. Varied training formats provided repeated learning opportunities throughout the year.

Conclusions

The main contribution of the dissertation is a deepened understanding of which instructional conditions particularly support low-performing preschool-class pupils' ability to determine and flexibly handle numbers and quantities. The results show that:

- Results indicate that low-performing pupils tend to rely on one-by-one counting, whereas higher-performing pupils employ more efficient grouping strategies. The development of pupils' understanding of number values and part-whole relationships is therefore crucial to help them move beyond inefficient counting methods.
- Understanding that small quantities can be determined instantly benefits pupils' ability to manage numbers flexibly. Pupils who quickly identified amounts performed better than those who counted individually. Focused, repeated training improved conceptual subitizing and the understanding of part-whole relationship of numbers, especially aiding low-performing pupils, highlighting subitizing as foundational for numerical flexibility.
- Reliable and user-friendly assessment tools are crucial for evaluating mathematical competencies. Results show that NST and AQSQ tests correlate, especially among low-performing pupils. These tools are suitable for classroom use to assess conceptual subitizing ability and understanding of part-whole relationship of numbers, enabling early identification and monitoring of struggling pupils to inform targeted instructional support.
- Higher post-test results indicate that pupils improved their ability to determine and flexibly manage numbers after repeated training through instruction, NST tests, and AQSQ tests. Systematic learning designs based

on Variation Theory particularly benefited low-performing pupils by helping them grasp number wholes and parts simultaneously.

Limitations and further research

The classroom studies (Studies III & IV) evaluated different teaching methods by giving pupils the same AQSQ and NST tests several times. This repeated testing might have caused some test effects, especially for the shorter NST test, but risks were lowered by spacing out the tests and not giving pupils their results. The teaching lasted three months. The first lessons in one of the intervention groups used ready-made materials, while the other lessons were planned using Variation Theory principles, which could explain why pupils' results between groups only showed small differences. The research highlights the importance of identifying key aspects of what pupils need to learn to support their development in math. Although the findings cannot be fully applied to all situations due to the small sample and the specific context, they provide useful knowledge about early math learning. Randomly assigning pupils to groups helped reduce outside influences. Potential changes in behavior because pupils knew they were being observed due to the Hawthorne effect (McCambridge et al., 2014) were considered minimal due to the study's long and natural classroom setting.

To deepen understanding of subitizing's role in low-performing pupils' arithmetic development, a longitudinal study focusing on subitizing-based instruction is warranted. Since the initial intervention occurred at a school with favorable socioeconomic conditions according to the Swedish National Agency for Education (Skolverket, 2025), replicating the study with pupils facing greater challenges would provide valuable insights into adapting instruction to diverse learner needs. It would also be of interest to follow the individual learning development of low-performing pupils through a qualitative approach. Such a design could contribute to a deeper understanding of variations in pupils' conceptual understanding and help identify the need for adapted instructional strategies for these learners. Another research direction is to investigate how effectively the NST and AQSQ identify low-performing pupils in need of support, compared to more comprehensive assessment tools. Due to their brevity and suitability for whole-class administration, these tools may facilitate earlier interventions for pupils at risk of falling behind in number sense development.

Referenser

- Ackesjö, H. (2014). *Barns övergångar till och från förskoleklass. Gränser, identiteter och (dis-)kontinuiteter* [Doktorsavhandling, Linnéuniversitetet] Linnæus University Press. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:738484/FULLTEXT01.pdf>
- Adler, B. (2022a). *Förmåga att snabbt se mängd* [Instrument]. Kognitivt Centrum. <https://www.dyskalkyli.nu/produktinfo.pdf>
- Adler, B. (2022b). *Kognitiv träning matematik* [Arbetsmaterial]. Kognitivt Centrum. <https://www.dyskalkyli.nu/arbetsparmmatematik.pdf>
- Agrillo, C. (2015). Numerical and arithmetic abilities in non-primate species. I R.C. Kadosh, & A. Dowker (Red.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (s. 214-236). Oxford University Press. <http://dx.doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.002>
- Ahlberg, A. (2014). *Specialpedagogisk forskning: en mångfasetterad utmaning*. Studentlitteratur.
- ALLEA. (2023). *The European Code of Conduct for Research Integrity – Revised Edition 2023*. Berlin. Hämtad 2024-10-09 från <https://allea.org/wp-content/uploads/2023/06/European-Code-of-Conduct-Revised-Edition-2023.pdf>
- Andersson, U. (2008). Mathematical competencies in children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 100(1), 48–66. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.100.1.48>
- Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense* (2 uppl.). Continuum International Publishing Group Ltd.
- Anobile, G., Castaldi, E., Moscoso, P. A. M., Burr, D. C., & Arrighi, R. (2020). “Groupitizing”: a strategy for numerosity estimation. *Scientific reports*, 10:13436. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-68111-1>
- Ashkenazi, S., Haber, H., Shemesh, V., & Silverman, S. (2022). Early subitizing development: the role of visuospatial working memory. *European Journal of Education and Pedagogy*, 3(2), 79–85. <http://dx.doi.org/10.24018/ejedu.2022.3.2.274>
- Aunio, P. (2019). Early numeracy skills learning and learning difficulties—Evidence-based assessment and interventions. I D. C. Geary, D. B. Berch & K. M. Koepke (Red.), *Cognitive foundations for improving mathematical learning* (s. 195–214). Elsevier Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815952-1.00008-6>
- Aunio, P., Heiskari, P., Van Luit, J. E., & Vuorio, J.-M. (2014). The development of early numeracy skills in kindergarten in low-, average- and high-performance groups. *Journal of Early Childhood Research*, 13(1), 3–16. <https://doi.org/10.1177/1476718X14538722>

- Aunio, P., & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal* 24(5), 1-21.
<http://dx.doi.org/10.1080/1350293X.2014.996424>
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699–713. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0022-0663.96.4.699>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
<http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(2), 141–157.
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.18.2.0141>.
- Baroody, A. J., Bajwa, N. P., & Eiland, M. (2009). Why can't Johnny remember the basic facts? *Developmental Disabilities Research Reviews*, 15(1), 69–79.
<https://doi.org/10.1002/ddrr.45>
- Björklund, C., Alkhede, M., Kullberg, A., Reis, M., Marton, F., Ekdahl, A.-L., & Runesson Kempe, U. (2018). Teaching finger patterns for arithmetic development to preschoolers. I Proceedings of MADIF 11 – The eleventh research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education Karlstad, January 23-24, 2018 (s. 111–120). http://matematikdidaktik.org/wp-content/uploads/2019/01/Madif11_webb-002.pdf
- Björklund, C., Elofsson, J., Kullberg, A., Ekdahl, A.-L., Runesson Kempe, U., & Alkhede, M. (2024). Förskoleklasslevers användning av talstrukturer. I C. Björklund & H. Palmér (Red.), *Forskul Forskning om undervisning och lärande. Tema: Matematikinterventioner i förskola och förskoleklass*, 12(2) (s. 31–45). Lärarstiftelsen.
- Borgbjerg Hansen, H., & Mårtensson, B. D. (2017). *Specialdidaktik i teori og praksis: undervisning på specialskoler og i specialklasser*. Hans Reitzel Forlag.
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The journal of the learning sciences*, 2(2), 141–178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2
- Bruce, R., & Threlfall, J. (2004). One, two, three and counting. *Educational studies in mathematics*, 55, 3–26. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017676.79430.dc>
- Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder* (3 uppl.). Liber.
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46(1), 3–18. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x>
- Chetty, R., Friedman, J. N., Hilger, N., Saez, E., Schanzenbach, D. W., & Yagan, D. (2011). How does your kindergarten classroom affect your earnings? Evidence from Project STAR. *The Quarterly journal of economics*, 126(4), 1593–1660.
<https://doi.org/10.1093/qje/qjr041>

- Cilesiz, S., & Greckhamer, T. (2020). Qualitative comparative analysis in education research: Its current status and future potential. *Review of Research in Education*, 44(1), 332-369. <http://dx.doi.org/10.3102/0091732X20907347>
- Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching children mathematics*, 5(7), 400–405. <http://dx.doi.org/10.5951/TCM.5.7.0400>
- Clements, D. H., Sarama, J., & MacDonald, B. L. (2019). Subitizing: The neglected quantifier. I A. Norton & M. W. Alibali (Red.), *Constructing Number. Research in Mathematics Education* (s. 13–45). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2
- Conderman, G., Jung, M., & Hartman, P. (2014). Subitizing and early mathematics standards: A winning combination. *Kappa Delta Pi Record*, 50(1), 18–23. <http://dx.doi.org/10.1080/00228958.2014.871686>
- Coolen, I. E. J. I., Riggs, K. J., Bugler, M., & Castronovo, J. (2022). The approximate number system and mathematics achievement: it's complicated. A thorough investigation of different ANS measures and executive functions in mathematics achievement in children. *Journal of Cognitive Psychology*, 34(6), 796–818. <https://doi.org/10.1080/20445911.2022.2044338>
- Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4 uppl.) SAGE publications.
- Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (5 uppl.). SAGE publications.
- Cruz, J., Alves, D., Carvalho, M., Mendes, S. A., Rodrigues, B., & Cadime, I. (2024). Assessment of math abilities before school entry: a tool development. *Frontiers in Education*, 8, 1–13. <https://doi.org/10.3389/educ.2023.1347143>
- Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.
- Dennis, M. S., Sorrells, A. M., Chovanes, J., & Kiru, E. W. (2022). Ecological and population validity of mathematics interventions for diverse students with low mathematics achievement: a meta-analysis. *Learning Disability Quarterly*, 45(1), 32–45. <https://doi.org/10.1177/07319487211010342>
- Desoete, A., Ceulemans, A., Roeyers, H., & Huylebroeck, A. (2009). Subitizing or counting as possible screening variables for learning disabilities in mathematics education or learning? *Educational Research Review*, 4 (1), 55–66. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2008.11.003>
- Dir. 2024:30. *En förbättrad elevhälsa*. <https://www.regeringen.se/rattsliga-dokument/kommitteredirektiv/2024/03/dir.-202430>
- Dowker, A. (2001). Numeracy Recovery: A pilot scheme for early intervention with young children with numeracy difficulties. *Support for Learning* 16 (1), 6–10. <https://doi.org/10.1111/1467-9604.00178>
- Dowker, A. (2005). Early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 324–332. <https://doi.org/10.1177/00222194050380040801>
- Dowker, A. (2019). *Individual differences in arithmetic: implications for psychology, neuroscience and education* (2 uppl.) Routledge.

- Dyson, N., Jordan, N. C., Beliakoff, A., & Hassinger-Das, B. (2015). A kindergarten number-sense intervention with contrasting practice conditions for low-achieving children. *Journal for Research in Mathematics Education* 46 (3), 331–370. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.3.0331>
- Elliott, J. (2019). What Is Lesson Study? *European Journal of Education* 54(2), 175–188. <https://doi.org/10.1111/ejed.12339>
- Englund, T. (2004). Nya tendenser inom pedagogikdisciplinen under de tre senaste decennierna. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, 9 (1), 37–49.
- Engström, A. (2015). *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik*. Forskningsrapport, Karlstad universitet. Karlstad University Studies. <https://kau.diva-portal.org/smash/get/diva2:845486/FULLTEXT01.pdf>
- Eriksson Barajas, K., Forsberg, C. & Wengström, Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap: Vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar*. Natur & Kultur.
- Etikprövningsmyndigheten (2023). *Vägledning om etikprövning av forskning på människor*. https://etikprovning.se/wp-content/uploads/2023/12/Vagledning-om-etikprovning-EPM.pdf?_gl=1*dehs8i*_up*MQ..*_ga*MjA2Njk1ODQ2NC4xNzUxMzEzMTkx*_ga_YV8742F5HE*cze3NTEzMTMxOTAkbzEkZzEkdDE3NTEzMTMyMDAkaJUwJGwwJGgw*_ga_RC04XC506Q*cze3NTEzMTMxOTAkbzEkZzEkdDE3NTEzMTMyMDAkaJUwJGwwJGgw
- Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in cognitive Sciences*, 8 (7), 307–314. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002>
- Field, A.P. (2018). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics* (5 uppl.). SAGE publications.
- Fischer, B., Gebhardt, C., & Hartnegg, K. (2008a). Subitizing and visual counting in children with problems acquiring basic arithmetic skills. *Optometry & Vision Development* 39(1), 24-29. <https://cdn.ymaws.com/www.covd.org/resource/resmgr/ovd39-1/24-29subitizingvisualcountin.pdf>
- Fischer, B., Köngeter, A., & Hartnegg, K. (2008b). Effects of Daily Practice on Subitizing, Visual Counting, and Basic Arithmetic Skills. *Optometry & Vision Development* 39(1), 30–34. <https://cdn.ymaws.com/www.covd.org/resource/resmgr/ovd39-1/30-34effectsofdailypractice.pdf>
- Frye, D., Baroody, A. J., Burchinal, M., Carver, S. M., Jordan, N. C., & McDowell, J. (2013). *Teaching Math to Young Children: A Practice Guide*. Washington, DC: U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED544376.pdf>
- Geary, D. C., Bailey, D. H., & Hoard, M. K. (2009). Predicting mathematical achievement and mathematical learning disability with a simple screening tool: The number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27(3), 265–279. <https://doi.org/10.1177/0734282908330592>

- Geary, D. C., vanMarle, K., Chu, F. W., Rouder, J., Hoard, M. K., & Nugent, L. (2018). Early conceptual understanding of cardinality predicts superior school-entry number system knowledge. *Psychological Science*, 29(2), 191–205.
<https://doi.org/10.1177/0956797617729817>
- Gelman R., & Gallistel C. R. (1986). *The child's understanding of number* [Elektronisk resurs]. Harvard University Press.
- Gelman, R., & Tucker, M. F. (1975). Further investigations of the young child's conception of number. *Child Development*, 46(1), 167–175.
<https://psycnet.apa.org/doi/10.2307/1128845>
- Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R., & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to Intervention (RTI) for elementary and middle schools*, NCEE 2009-4060, U.S. Department of Education. Institute of Education Sciences, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance.
https://ies.ed.gov/ncee/wwc/docs/practiceguide/rti_math_pg_042109.pdf
- Gersten, R., Clarke, B. S., Haymond, K., & Jordan, N. C. (2011). *Screening for mathematics difficulties in K–3 students*. Center on Instruction at RMC Research Corporation. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED524577.pdf>
- Gillespie, A., Glăveanu, V. P., & de Saint Laurent C. D. (2024). *Pragmatism and Methodology: Doing Research That Matters with Mixed Methods* [Elektronisk resurs]. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781009031066>
- Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116–140.
<https://doi.org/10.2307/749505>
- Griffin, S. (2007). Early intervention for children at risk of developing mathematical learning difficulties. I D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Red.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (s. 373–395). Paul H. Brookes Pub. Co.
- Gripton, C. (2022). Pattern in early years mathematics curriculum: a 25-year review of the status, positioning and conception of pattern in England. *Research in Mathematics Education*, 25(1), 3–23. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.2010237>
- Hanfstingl, B., Rauch, F., & Zehetmeier, S. (2019). Lesson study, learning study and action research: Are there more differences than a discussion about terms and schools? *Educational Action Research*, 27(4), 455–459.
<https://doi.org/10.1080/09650792.2019.1652450>
- Hart, L. C., Smith, S. Z., Swars, S. L., & Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3(1), 26–41. <https://doi.org/10.1177/1558689808325771>
- Heikkilä, M., & Sahlström, F. (2003). Om användning av videoinspelning i fältarbete. *Pedagogisk forskning*, 8(1–2), 24–42.
- Heyvaert, M., Hannes, K., & Onghena, P. (2016). *Using mixed methods research synthesis for literature reviews*. SAGE Publications, Inc.
<https://doi.org/10.4135/9781506333243>

- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371–404). National Council of Teachers of Mathematics.
- Hirose, M., & Creswell, J. W. (2023). Applying core quality criteria of Mixed Methods Research to an empirical study. *Journal of Mixed Methods Research*, 17(1), 12–28. <https://doi.org/10.1177/15586898221086346>
- Holmes, W., & Dowker, A. (2013). Catch Up Numeracy: a targeted intervention for children who are low-attaining in mathematics. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 249–265. <https://doi.org/10.1080/14794802.2013.803779>
- Holmqvist, M. (2011). Teachers' learning in a learning study. *Instructional Science*, 39, 497–511. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11251-010-9138-1>
- Holmqvist, M. (2017). Models for collaborative professional development for teachers in mathematics. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 6(3), 190–201. <http://dx.doi.org/10.1108/IJLLS-12-2016-0051>
- Holmqvist, M., Aspelin, J., & Bölte, S. (2024). Specialdidaktik: ett innehållsinkluderande undervisningsperspektiv. I M. Holmqvist (Red.), *Specialdidaktik: för innehållsinkluderande undervisning* (s. 11–16). Gleerups.
- Holmqvist, M., Gustavsson, L., & Wernberg, A. (2007). Generative learning: learning beyond the learning situation. *Educational Action Research*, 15(2), 181–208. <https://doi.org/10.1080/09650790701314684>
- Holmqvist, M., Gustavsson, L., & Wernberg, A. (2008). Variation theory: an organizing principle to guide design research in education. I A. E. Kelly, R. Lesh & J. Baek (Red.), *Handbook of design research methods in education* (s.111–130). Routledge.
- Holmqvist, M., Tullgren, C., & Brante, G. (2011). The object of learning - before, during and after a learning situation. *Journal of Systemics, Cybernetics and informatics* 9(2), 61–73. <https://www.iiisci.org/journal/pdv/sci/pdfs/OL133KQ.pdf>
- Holmqvist, M., Wästerlid, C., Borgström, A., & Jönsson, B. (2025). *Development of students' conceptual subitizing skills in preschool class*. [Manuscript submitted for publication]
- Holmqvist Olander, M., & Nyberg, E. (2014). Learning Study Guided by Variation Theory: Exemplified by Children Learning to Halve and Double Whole Numbers. *Journal of Research in Childhood Education*, 28(2), 238–260. <https://doi.org/10.1080/02568543.2014.884030>
- Hopkins, S., Russo, J., & Siegler, R. (2020). Is counting hindering learning? An investigation into children's proficiency with simple addition and their flexibility with mental computation strategies. *Mathematical Thinking and Learning*, 24(1), 52–69. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1842968>
- Huijsmans M. D. E., Kleemans T., van der Ven, S. H. G., & Kroesbergen, E. H. (2020). The relevance of subtyping children with mathematical learning disabilities. *Research in Developmental Disabilities*, 104, 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.ridd.2020.103704>
- IBM Corp. (2022). *IBM SPSS Statistics for Windows* (Version 29). IBM Corp., Armonk.

- Iuculano, T., Tang, J., Hall, C., Butterworth, B. (2008). Core information processing deficits in developmental dyscalculia and low numeracy. *Developmental Science*, 11(5), 669–680. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00716.x>
- Jansen, B. R. J., Hofman, A. D., Straatemeier, M., van Bers, B. M. C. W., Raijmakers, M. E. J., & van der Maas, H. L. J. (2014). The role of pattern recognition in children's exact enumeration of small numbers. *The British Journal of Developmental Psychology*, 32(2), 178–194. <http://dx.doi.org/10.1111/bjdp.12032>
- Jordan, N. C., Hanich, L. B., & Kaplan, D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children: A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85(2), 103–119. [https://doi.org/10.1016/s0022-0965\(03\)00032-8](https://doi.org/10.1016/s0022-0965(03)00032-8)
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, 45(3), 850–867. <https://doi.org/10.1037/a0014939>
- Jung, M., Hartman, P., Smith, T., & Wallace, S. (2013). The effectiveness of teaching number relationships in preschool. *International Journal of Instruction*, 6(1), 165–178. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED539908.pdf>
- Kansanen, P., & Meri, M. (1999). The didactic relation in the teaching-studying-learning process. I B. Hudson, F. Buchberger, P. Kansanen, & H. Seel (Red.), *Didaktik/Fachdidaktik as the Science(-s) of the Teaching Profession?* 2(1), 107–116. TNTEE Umeå. <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.1.2646.4726>
- Karlsson, I. (2019). *Elever i matematiksvårigheter. Lärare och elever om låga prestationer i matematik*. [Doktorsavhandling, Lund Universitet]. Institutionen för utbildningsvetenskap, Lunds universitet. https://lucris.lub.lu.se/ws/portalfiles/portal/66260850/Ingemar_Karlsson_komplett_1_.pdf
- Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., & Volkman, J. (1949). The discrimination of visual number. *The American Journal of Psychology*, 62(4), 498–525. <https://psycnet.apa.org/doi/10.2307/1418556>
- Kilday, C. R., Kinzie, M. B., Mashburn, A. J., & Whittaker, J. V. (2012). Accuracy of Teacher Judgments of Preschoolers' Math Skills. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 30(2), 148–159. <https://doi.org/10.1177/0734282911412722>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Red.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.01.003>
- Koponen, T., Aunola, K., & Nurmi, J.-E. (2019). Verbal counting skill predicts later math performance and difficulties in middle school. *Contemporary Educational Psychology*, 59, Artikel 101803. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.cedpsych.2019.101803>
- Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, 19(6), 513–526. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.10.002>

- Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs: A meta-analysis. *Remedial and special education, 24*(2), 97-114. <https://doi.org/10.1177/07419325030240020501>
- Kroesbergen, E. H., Van Luit, J. E. H., Van Lieshout, E. C. D. M., Van Loosbroek, E., & Van de Rijt B. A. M. (2009). Individual differences in early numeracy: The role of executive functions and subitizing. *Journal of Psychoeducational Assessment, 27*(3), 226–236. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1177/0734282908330586>
- Kullberg, A., & Björklund, C. (2020). Preschoolers' different ways of structuring part-part-whole relations with finger patterns when solving an arithmetic task. *ZDM Mathematics Education 52*, 767–778 <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01119-8>
- Kullberg, A., Björklund, C., Brkovic, I., & Runesson Kempe, U. (2020). Effects of learning addition and subtraction in preschool by making the first ten numbers and their relations visible with finger patterns. *Educational Studies in Mathematics, 103*(2), 157–172. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-019-09927-1>
- Kullberg, A., Björklund, C., & Runesson Kempe, U. (2024). Seeing number relations when solving a three-digit subtraction task. *Educational Studies in Mathematics, 115*(2), 271–287. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10287-0>
- Kullberg, A., & Ingeman, Å. (2022). Researching Conditions of Learning—Phenomenography and Variation Theory. *Oxford Research Encyclopedia of Education*.
<https://oxfordre.com/education/display/10.1093/acrefore/9780190264093.001.0001/acrefore-9780190264093-e-1708>
- Kullberg, A., Ingeman, Å., & Marton, F. (2024). *Planning and analyzing teaching: using the variation theory of learning*. Routledge.
- Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education, 49*(4), 559–569. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4>
- Kwok, W. Y., & Chik, P. M. (2005). The effect of learning studies on student learning outcomes. I M. L. Lo, W. Y. Pong & P. M. P. Chik (Red.), *For each and everyone: catering for individual differences through learning studies* (s. 117–132). Hong Kong University Press.
- Lagrådsremiss. (2025). *En tioårig grundskola*. Lagrådsremiss från Utbildningsdepartementet. <https://www.regeringen.se/rattsliga-dokument/lagradsremiss/2025/01/en-tioarig-grundskola/>
- Lam, H. C. (2012). On Generalization and Variation Theory. *Scandinavian Journal of Educational Research, 57*(4), 343–356.
<https://doi.org/10.1080/00313831.2012.656277>
- Leahy, W., & Sweller, J. (2019). Cognitive Load Theory, Resource Depletion and the Delayed Testing Effect. *Educational Psychology Review, 31*(2), 457–478.
<https://psycnet.apa.org/doi/10.1007/s10648-019-09476-2>
- Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet]. Gothenburg University Publications.

- Lo, M. L., & Marton, F. (2005). Conclusion: For each and everyone, I M. L. Lo, W. Y. Pong & P. M. Chik (Red.). *For each and everyone: catering for individual differences through learning studies* (s. 145–150). Hong Kong University Press.
- Lo, M. L., & Marton, F. (2012). Towards a science of the art of teaching: Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), 7–22.
<https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/20468251211179678/full/pdf>
- Lo, M. L., Lo-Fu, Y. W., Chik, P. M., & Pang, M. F. (2005). Two learning studies. I M. L. Lo, W. Y. Pong & P. M. Chik (Red.), *For each and everyone: catering for individual differences through learning studies* (s. 75–116). Hong Kong University Press.
- MacDonald, B. L. (2015). Ben's perception of space and subitizing activity: A constructivist teaching experiment. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 563–584. <http://dx.doi.org/10.1007/s13394-015-0152-0>
- MacDonald, B., Boyce, S. T., Xu, C. Z., & Wilkins, J. L. (2015). Frank's perceptual subitizing activity relative to number understanding and orientation: A teaching experiment. I T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield & H. Dominguez (Red.), *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education in East Lansing* (s. 149–156). Michigan State university.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED584205.pdf>
- MacDonald, B. L., & Wilkins, J. L. M. (2016). Seven types of subitizing activity characterizing young children's mental activity. I S. Marx (Red.), *Qualitative research in STEM* (s. 256–286). Routledge.
- Macmillan, N. A., & Creelman, C. D. (2005). *Detection theory: A user's guide*. Lawrence Erlbaum. <http://dx.doi.org/10.4324/9781003203636>
- Mandler, G., & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, 111(1), 1–22.
<https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0096-3445.111.1.1>
- Martin, R. B., Cirino, P. T., Sharp, C., & Barnes, M. (2014). Number and counting skills in kindergarten as predictors of grade 1 mathematical skills. *Learning and individual differences*, 34, 12–23. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.lindif.2014.05.006>
- Marton, F. (1981). Phenomenography – Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, 10, 177–200. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1007/BF00132516>
- Marton, F. (2015). *Necessary Conditions of Learning*. Routledge.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The journal of the Learning Sciences*, 15(2), 193–220.
https://doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2
- Marton, F., & Pang, M. F. (2007). *Connecting student learning and classroom teaching through the variation framework*. The 12th Biennial Conference for Research on Learning and Instruction: Developing Potentials for Learning, Budapest, Hungary (s 1–12).
https://www.researchgate.net/publication/277168642_Connecting_student_learning_and_classroom_teaching_through_the_variation_framework

- Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Mathematics Education Library, volym 18* (s. 65–86). Springer.
- Mason, J. (2017). Issues in Variation Theory and How it Could Inform Pedagogical Choices. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories. Mathematics Teaching and Learning*. SensePublishers.
- Mazzocco, M. M. M. (2007). Defining and differentiating mathematical learning disabilities and difficulties. I D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Red.), *Why Is Math So Hard for Some Children? The Nature and Origins of Mathematical Learning Difficulties and Disabilities* (s. 29–47). Paul H. Brookes.
- McCambridge, J., Witton, J., & Elbourne, D. R. (2014). Systematic review of the Hawthorne effect: New concepts are needed to study research participation effects. *Journal of Clinical Epidemiology*, 67(3), 267–277. <https://doi.org/10.1016/j.jclinepi.2013.08.015>
- Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research: a guide to design and implementation*. (4 uppl.). Jossey-Bass.
- Mononen, R., Aunio, P., Koponen, T., & Aro, M. (2014). A review of early numeracy interventions for children at risk in mathematics. *International Journal of Early Childhood Special Education*, 6(1), 25–54. <http://dx.doi.org/10.20489/intjecse.14355>
- Morgan, P. L., Farkas, G., Hillemeier, M. M., & Maczuga, S. (2016). Who is at risk for persistent mathematics difficulties in the United States? *Journal of Learning Disabilities*, 49(3), 305–19. <https://doi.org/10.1177/0022219414553849>
- Morgan, P. L., Farkas, G., & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 42(4), 306–321. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1177/0022219408331037>
- Moscato, P. A. M., Castaldi, E., Burr, D. C., Arrighi, R., & Anobile, G. (2020). Grouping strategies in number estimation extend the subitizing range. *Scientific Reports*, 10, 14979, 1–10. <https://www.nature.com/articles/s41598-020-71871-5>
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49. <http://dx.doi.org/10.1007/BF03217544>
- Murphy, M. M., Mazzocco, M. M. M., Hanich, L. B., & Early, M. C. (2007). Cognitive characteristics of children with mathematics learning disability (MLD) vary as a function of the cutoff criterion used to define MLD. *Journal of Learning Disabilities*, 40(5), 458–478. <https://doi.org/10.1177/00222194070400050901>
- Mårtensson, B. D. (2017). Pædagogik, didaktik og det specielle. I H. Borgbjerg Hansen, & B. D. Mårtensson, (Red.), *Specialdidaktik i teori og praksis: undervisning på specialschooler og i specialklasser* (s. 49–71). Hans Reitzel Forlag.
- Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills: a phenomenographic approach*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet]. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis, 1987.

- Nunes, T., & Bryant, P. (2009). Paper 2: Understanding extensive quantities and whole numbers. I T, Nunes, P. Bryant, & A. Watson (Red.), *Key understandings in mathematics learning* (s. 1–37). Nuffield Foundation.
<http://www.nuffieldfoundation.org/key-understandings-mathematics-learning>.
- Paliwal, V., & Baroody, A. J. (2020). Fostering the learning of subtraction concepts and the subtraction-as-addition reasoning strategy. *Early Childhood Research Quarterly*, 51, 403–415. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.ecresq.2019.05.008>
- Pang, M. F., Bao, J., & Ki, W. W. (2017). ‘Bianshi’ and the Variation Theory of Learning. I R. Huang & Y. Li (Red.), *Teaching and Learning Mathematics through Variation: Confucian Heritage Meets Western Theories. Mathematics Teaching and Learning* (s. 43–67). SensePublishers.
- Parsons, S., & Bynner, J. (2005). *Does numeracy matter more*. National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy, Institute of Education. Bradell.
https://www.researchgate.net/publication/245969683_Does_Numeracy_Matter_More
- Penner-Wilger, M., Fast, L., LeFevre, J. A., Smith-Chant, B. L., Skwarchuk, S. L., Kamawar, D., & Bisanz, J. (2007). The foundations of numeracy: subitizing, finger gnosis, and fine motor ability. *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 29, 1385–1390.
<https://cloudfront.escholarship.org/dist/prd/content/qt8vb45554/qt8vb45554.pdf>
- Piaget, J. (1952/1997). *The Child’s Conception of Number*. Routledge.
- Piazza, M., Fumarola, A., Chinello, A., & Melcher, D. (2011). Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition*, 121(1), 147–153.
<https://doi.org/10.1016/j.cognition.2011.05.007>
- Pincham, H. L., & Szűcs, D. (2012). Intentional subitizing: Exploring the role of automaticity in enumeration. *Cognition*, 124(2), 107–116.
<https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.cognition.2012.05.010>
- Popay, J., Roberts, H., Sowden, A., Petticrew, M., Arai, L., Rodgers, M., Britten, N., Roen, K., & Duffy, S. (2006). *Guidance on the Conduct of Narrative Synthesis in Systematic Reviews. A product from the ESRC Methods Programme*.
<http://dx.doi.org/10.13140/2.1.1018.4643>
<http://dx.doi.org/10.13140/2.1.1018.4643>
- Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. (2003). An analytical model for studying the development of learners’ mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, 22(4), 405–435.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002>
- Purpura, D. J., Baroody, A. J., & Lonigan, C. J. (2013). The transition from informal to formal mathematical knowledge: Mediation by numeral knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 453–464. <https://doi.org/10.1037/a0031753>
- Purpura, D. J., & Lonigan, C. J. (2015). Early numeracy assessment: The development of the preschool early numeracy scales. *Early Education and Development*, 26(2), 286–313. <https://doi.org/10.1080/10409289.2015.991084>
- Railo, H., Koivisto, M., Revonsuo, A., & Hannula, M. M. (2008). The role of attention in subitizing. *Cognition*, 107(1), 82–104.
<https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.cognition.2007.08.004>

- Resnick, L. (1983). A developmental theory of number understanding. I H. Ginsburg (Red.), *The Development of Mathematical Thinking* (s. 109–151). Academic Press.
- Robson, C. (2011). *Real world research: A resource for users of social research methods in applied settings*. (3 uppl.). Wiley.
- Robson, C., & McCartan, K. (2016). *Real world research: a resource for users of social research methods in applied settings*. (4 uppl.). Wiley.
- Rojo, M., Gersib, J., Powell, S. R., Shen, Z., King, S. G., Akther, S. S., Arsenault, T. L., Bos, S. E., Lariviere, D. O., & Lin, X. (2024). A meta-analysis of mathematics interventions: Examining the impacts of intervention characteristics. *Educational Psychology Review* 36:9, 1–34. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1007/s10648-023-09843-0>
- Rousselle, L., & Vossius, L. (2021). Acquiring the cardinal knowledge of number words: A conceptual replication. *Journal of Numerical Cognition*, 7(3), 411–434. <https://doi.org/10.5964/jnc.7029>
- Rovio-Johansson, A., & Ingeman, Å. (2016). Continuity and development in the phenomenography and Variation theory tradition. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 257–271. <https://doi.org/10.1080/00313831.2016.1148074>
- Ryberg, U. (2018). Generating different lesson designs and analyzing their effects: The impact of representations when discerning aspects of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 1–14.
- Salvia, J., Ysseldyke, J. E., & Witmer, S. (2016). *Assessment in special and inclusive education*. (13 uppl.). Cengage Learning.
- Sarnecka, B. W., Goldman, M. C., & Slusser, E. B. (2015). How counting leads to children's first representation of exact, large numbers. I R. C. Kadosh & A. Dowker (Red.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (s. 292–309). Oxford University Press.
- Sayers, J., Andrews, P., & Björklund Boistrup, L. (2016). The Role of Conceptual Subitizing in the Development of Foundational Number Sense. I T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg. (Red.), *Mathematics Education in the Early Years Results from the POEM2 Conference, 2014*. (s. 371–394). Springer International Publishing.
- Schindler, M., Schovenberg, V., & Schabmann, A. (2020). Enumeration Processes of Children with Mathematical Difficulties: An Explorative Eye-Tracking Study on Subitizing, Groupitizing, Counting, and Pattern Recognition. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 18(2), 193–211. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1281060.pdf>
- Schleifer, P., & Landerl, K. (2011). Subitizing and counting in typical and atypical development. *Developmental Science*, 14(2), 280–291. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2010.00976.x>
- Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Susan Schmidt, S., Stricker, J., & De Smedt, B. (2016). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: A meta-analysis. *Developmental Science*, 20(3), 1–16. <https://doi.org/10.1111/desc.12372>

- SFS 2003:460. *Lag om etikprovning av forskning som avser människor*.
https://www.riksdagen.se/sv/dokument-och-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/lag-2003460-om-etikprovning-av-forskning-som_sfs-2003-460/
- SFS 2010:800. *Skollag*. https://www.riksdagen.se/sv/dokument-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/skollag-2010800_sfs-2010-800
- SFS 2017:111. *Förordning om ändring i högskoleförordningen (1993:100). Examensordning*. <https://rkrattsdb.gov.se/SFSdoc/17/171111.PDF>
- SFS 2018:218. *Lag med kompletterande bestämmelser till EU:s dataskyddsförordning*.
https://www.riksdagen.se/sv/dokument-och-lagar/dokument/svensk-forfattningssamling/lag-2018218-med-kompletterande-bestammelser_sfs-2018-218/
- SFS 2018:750. *Förordning om ändring i skolförordningen (2011:185)*.
https://www.lagboken.se/Lagboken/start/skoljuridik/skolforordning-2011185/d_3269152-sfs-2018_750-forordning-om-andring-i-skolforordningen-2011_185
- SFS 2018:1098. *Lag om ändring i skollagen (2010:800)*.
https://www.lagboken.se/Lagboken/start/skoljuridik/skollag-2010800/d_3276543-sfs-2018_1098-lag-om-andring-i-skollagen-2010_800
- Shadish, W. R., Cook, T. D., & Campbell, D. T. (2002). *Experimental and quasi-experimental designs for generalized causal inference*. Houghton Mifflin.
- Sharma, M. C. (2015). Numbersense. A window into dyscalculia and other mathematics difficulties. I S. Chinn (Red.), *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties* (s. 277–291). Routledge.
- Sixtus, E., Krause, F., Lindemann, O., & Fischer, M. H. (2023). A sensorimotor perspective on numerical cognition. *Trends in Cognitive Sciences*, 27(4), 367–378.
<https://doi.org/10.1016/j.tics.2023.01.002>
- Skaalvik, E. M., Federici, R. A., & Klassen, R. M. (2015). Mathematics achievement and self-efficacy: Relations with motivation for mathematics. *International Journal of Educational Research*, 72, 129–136. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.06.008>
- Skolinspektionen. (2023). *Det specialpedagogiska arbetet för att stödja lärare inom garantin för tidiga stödinsatser*. Tematisk kvalitetsgranskning. Diarienummer: 2022:8799. <https://www.skolinspektionen.se/globalassets/02-beslut-rapporter-stat/granskningsrapporter/tkg/2023/specialpedagoger-och-garantin/det-specialpedagogiska-arbetet-for-att-stodja-larare-inom-garantin-for-tidiga-stodinsatser.pdf>
- Skolinspektionen. (2024). *Garantin för tidiga stödinsatser. Slutredovisning av regeringsuppdrag om att följa upp och utvärdera Läsa, skriva, räkna, en garanti för tidiga stödinsatser*. Rapport 2024:18. <https://www.skolinspektionen.se/beslut-rapporter/publikationer/regeringsrapporter/2024/garantin/>
- Skolverket. (2022a). *Hitta matematiken. Nationellt kartläggningsmaterial i matematiskt tänkande i förskoleklass*.
<https://www.skolverket.se/undervisning/forskoleklassen/kartlaggning-i-forskoleklassen>

- Skolverket. (2022b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet. Lgr22*. <https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr22-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet>
- Skolverket. (2023). *Slutbetyg i grundskolan, våren 2023*. https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=https%3A%2F%2Fsisir.skolverket.se%2Fsisir%2Fsitevision_doc.getFile%3Fp_id%3D553220&wdOrigin=BROWSELINK
- Skolverket. (2024a). *Bedömningsstöd i matematik*. Bedömningsstöd för undervisning matematik grundskolan - Skolverket.
- Skolverket. (2024b). *TIMSS 2023. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. <https://www.skolverket.se/sok-publikationer/publikationsserier/rapporter/2024/timss-2023>
- Skolverket. (2025). *Statsbidrag för stärkt kunskapsutveckling 2025*. <https://www.skolverket.se/download/18.4f445405193dec056fbf502/1736778477244/Bidragssamar%20f%C3%B6r%20Statsbidrag%20f%C3%B6r%20st%C3%A4rkt%20kunskapsutveckling%20bidrag%20f%C3%A5r%202025%20efter%20%C3%B6kat%20anslag.pdf>
- SOU 2025:44. *Förbättrat stöd i skolan. Delbetänkande av Utredningen om En förbättrad elevhälsa*. <https://regeringen.se/contentassets/2cd8d2f5eb0544f3ba50d5f93087dee9/forbattrat-stod-i-skolan-sou-202544.pdf>
- Sprenger, P., & Benz, C. (2020). Children's perception of structures when determining cardinality of sets—results of an eye-tracking study with 5-year-old children. *ZDM Mathematics Education*, 52, 753–765. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01137-x>
- Starkey, G., & McCandliss, B. (2014). The emergence of “groupitizing” in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 125, 120–137. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.03.006>
- Sterner, G., Wolff, U., & Helenius, O. (2019). Reasoning about representations: Effects of an early math intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 64(5), 782–800. <https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579>
- Szklarski, A. (2002). *Den kvalitativa metodens mångfald. Skilda ansatser – skilda tolkningsintentioner*. Högskolan Borås, Institutionen för pedagogik. Rapport nr 15.
- Thompson, P. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 165–208. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01273861>
- Tolar, T. D., Fuchs, L., Fletcher, J. M., Fuchs, D., & Hamlett, C. L. (2016). Cognitive profiles of mathematical problem solving learning disability for different definitions of disability. *Journal of Learning Disabilities*, 49(3), 240–256. <https://doi.org/10.1177/0022219414538520>
- Toll, S. W. M., & Van Luit, J. E. H. (2014). Explaining numeracy development in weak performing kindergartners. *Journal of Experimental Child Psychology*, 124, 97–111. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2014.02.001>

- Tracy, S. J. (2010). Qualitative Quality: Eight "Big-Tent" criteria for excellent qualitative research. *Qualitative inquiry*, 16(10), 837–851.
<https://doi.org/10.1177/1077800410383121>
- Trick, L. M., & Pylyshyn, Z. W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, 101(1), 80–102. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0033-295X.101.1.80>
- Van Nes, F., & Doorman, M. (2011). Fostering Young Children's Spatial Structuring Ability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(1), 27–39.
<http://dx.doi.org/10.29333/iejme/259>
- Van Nes, F., & de Lange, J. (2007). Mathematics education and neurosciences: Relating spatial structures to the development of spatial sense and number sense. *The Mathematics Enthusiast*, 4(2), 210–229.
<https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1072&context=tme>
- Vetenskapsrådet. (2023). *Forskningsöversikt 2023: Utbildningsvetenskap*. Vetenskapsrådet. <https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2023-01-31-forskningsoversikt-2023-utbildningsvetenskap.html>
- Vetenskapsrådet. (2024). *God forskningssed*. Vetenskapsrådet.
<https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2024-10-02-god-forskningssed-2024.html>
- Wege, T. E., Trezise, K., & Inglis, M. (2021). Finding the subitizing in groupitizing: Evidence for parallel subitizing of dots and groups in grouped arrays. *Psychonomic Bulletin & Review*, 29(2), 476–484. <https://psycnet.apa.org/doi/10.3758/s13423-021-02015-7>
- Westerholm, K., & Samuelsson, J. (2020). Att utveckla god taluppfattning hos alla elever i förskoleklass – en interventionsstudie i matematik. *Forskning om undervisning och lärande*, 2(8), 48–70. <https://publicera.kb.se/forskul/article/view/27172>
- Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, 36(2), 155–193.
[https://doi.org/10.1016/0010-0277\(90\)90003-3](https://doi.org/10.1016/0010-0277(90)90003-3)
- Wynn, K. (1997). Competence Models of Numerical Development. *Cognitive development*, 12(3), 333–339. [https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/S0885-2014\(97\)90005-8](https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/S0885-2014(97)90005-8)
- Wästerlid, C. (2022). *Specialdidaktiska perspektiv på grundläggande antals- och taluppfattning*. [Licentiatavhandling, Malmö universitet]. Media Tryck, Lunds universitet. <https://diva-portal.org/smash/get/diva2:1686811/FULLTEXT02.pdf>
- Wästerlid, C., & Holmqvist, M. (2024). Tidiga proaktiva insatser för att minimera framtida matematiksvårigheter. I M. Holmqvist (Red.), *Specialdidaktik: för innehållsinkluderande undervisning* (s. 61–74). Gleerups.
- Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74(1), B1–B11. [https://doi.org/10.1016/S0010-0277\(99\)00066-9](https://doi.org/10.1016/S0010-0277(99)00066-9)
- Young-Loveridge, J. (2002). Early childhood numeracy: Building an understanding of part-whole relationships. *Australasian Journal of Early Childhood*, 27(4), 36–40.
<http://dx.doi.org/10.1177/183693910202700408>

- Yun, C., Havard, A., Farran, D., Lipsey, M., Bilbrey, C., & Hofer, K. (2011). Subitizing and mathematics performance in early childhood. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 33(33), 680–684. <https://escholarship.org/uc/item/8hs5h4f2>
- Zhang, X., Räsänen, P., Koponen, T., Aunola, K., Lerkkanen, M. K., & Nurmi, J. E. (2020). Early cognitive precursors of children's mathematics learning disability and persistent low achievement: A 5-year longitudinal study. *Child development*, 91(1), 7–27. <https://doi.org/10.1111/cdev.13123>
- Özdem, Ş., & Olkun, S. (2019). Improving mathematics achievement via conceptual subitizing skill training. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(4), 565–579. <http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2019.1694710>

Om författaren

Denna avhandling undersöker hur förskoleklasslevers förmåga att bestämma och flexibelt hantera antal och tal utvecklas över tid – med särskilt fokus på lågpresterande elever. I centrum står konceptuell subitiserings – förmågan att snabbt och direkt uppfatta antalet objekt i en liten mängd, utan att räkna. Forskning visar att denna förmåga utgör en viktig grund för tidig förståelse av antal och tal och därmed den fortsatta matematikutvecklingen.

Med hjälp av fyra delstudier – en litteraturoversikt, två klassrumsstudier med undervisningsinsatser i matematik och en korrelationsstudie av bedömningsverktyg – undersöks vilka aspekter av undervisningsdesign som framstår som särskilt främjande för att utveckla lågpresterande elevers lärande av antal och tal. Variationsteori har använts för att planera undervisningsinsatserna och för att undersöka sambandet mellan elevernas lärande och undervisningens utformning. Resultaten visar att undervisning som fokuserar på tals del-hetsrelationer, stimulering i att snabbt uppfatta antal, återkommande och riktade träningstillfällen samt kontinuerlig uppföljning av elevers utveckling är särskilt främjande för lågpresterande elevers utveckling.

I avhandlingens inkluderade licentiatuppsatskappa presenteras vidare en modell för hur specialdidaktisk kompetens kan komplettera lärares generella matematikdidaktiska kunskaper, och därigenom stödja en innehållsinkluderande undervisning i matematik.



Catarina Wästerlid är utbildad grundskollärare och speciallärare i matematik och har en licentiatexamen i utbildningsvetenskap. Hon är verksam vid Högskolan Kristianstad, där hon undervisar i matematikdidaktik inom lärar- och speciallärarutbildningarna. Hennes forskningsintresse rör elevers tidiga utveckling av antals- och taluppfattning.



LUND
UNIVERSITY

Institutionen för utbildningsvetenskap
Humanistiska och teologiska fakulteterna

ISBN 978-91-90055-24-3
ISSN 2002-6323

