ARNE — AnalysRäkning Numera Elektroniskt

Bernhardsson, Bo

Published in:
Ordo

1988

Document Version:
Förlagets slutgiltiga version

ARNE — AnalysRäkning Numera Elektroniskt

Av Bo Bernardsson, Inst för reglerteknik

Teknologens dröm är nu uppfylld. Mata in skrivningen i Analys 2 till programmet ARNE och vänta tio minuter. Ut på laserskrivaren kommer lösningar färdiga att lämna in på tentamen. Programmets prestanda är jämförbar med medelteknologens.

Datorer kan manipulera symboliska uttryck lika väl som numeriska. Sedan början på 1970-talet finns flera programpaket för detta. Bakom vart och ett av dessa paket ligger programmeringsinsatser på hundratals manår och de bästa systemen klarar av alla de manipulationer som behövs för att klara högskoletentamina i analys. Ett av de första programmen med idéen att lösa matematikproblem automatiskt är "The Algebra Student" från 1968 [Bobrow]. En trevlig beskrivning av detta finns i [Winston].

Som ett projekt i en kurs i artificiell intelligens, arrangerad av institutionen för reglerteknik, skrevs under hösten ett programskal, ARNE, för automatisk lösning av Analys 2 skrivningar. ARNE är skrivet i programspråket SCHEME, en dialekt av LISP, och använder det symbolmanipulerande programpaketet MAPLE. Programmet tar som indata en tentamen i analys 2 och producerar med hjälp av MAPLE helt automatiskt en fil med lösningar som skrivs ut på laserskrivare. Lösningarna kommer ut liggande i ett ifyllt tentamensomslag klara för inlämning. Hela proceduren tar knappt tio minuter.

ARNE har testats på 15 autentiska skrivningar i analys 2 mellan 1980 och 1987 och har i genomsnitt givit rätt svar på 3 tal av 6 per skrivning. (Gränsen för godkänt går som bekant vid 3.0). Andelen klarade tentor ligger på över 60 procent, alltså fullt jämförbart med medelteknologens.

Programmet ARNE

En tentamen i Analys 2 består till stor del av standardtal som skall kontrollera den mekaniska räkneförmågan. De flesta uppgifter börjar antingen "Lös differentialekva-

---

TEKNISKA HÖGSKOLAN I LUND
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

TENTAMEN
ENDIMENSIONELL ANALYS 2
1987-04-21 kl 8 - 13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Lös differentialekvationen

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{-3x}$$

2. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{(cos(x))^2 + 2\cos(x) + 3}} dx$$

3. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(2x-1)}{x^2} dx$$

4. Ett föremål med temperaturen T placeras i en omgivning med den konstanta temperaturen T_0. Antag att avsvalninghastigheten är proportionell mot $T - T_0$ (Newtons avsvalningslag).

   a. Ställ upp en ekvation som beskriver denna situation.

   b. Ett föremål i en omgivning med den konstanta temperaturen 20^o svalnar i enlighet med Newtons avsvalningslag från 100^o till 80^o på 10 minuter. Efter hur lång tid har det svalnat till 25^o?

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-2x)^{1/3} - e^{-2x/3}}{x^{2+x}}$$

6. Formulera (med fullständiga förutsättningar) och bevisa den s.k. insättningsformeln för integraler (satser som användes i beviset skall citeras fullständigt).

S L U T !

En typisk tentamen

1

Differentialekvationen beräknas enligt standardmetoder. Svaret blir

```
{y(x)

    = 5/4 exp(- 3 x) + 1/2 x exp(- 3 x) - 2 exp(- 2 x) - y(0) exp(- 2 x)

     - yp(0) exp(- 2 x) + 3/4 exp(- x) + 2 y(0) exp(- x) + yp(0) exp(- x)}
```

Här är $y(0), yp(0)$ begynnelsevärden

2

Integralen blir efter förenkling

```
              1/2           1/2
     - ln(2 2    ) + ln(2 6     + 4)
```

3

Integralen blir efter förenkling

```
                  2 ln(2)
```

4

En primitiv funktion kan beräknas med partialintegrationAnalysens huvudlemma ger efter gränsövergång att man kan ansätta en lösning med obekanta

$$\int_0^x f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow x \to 0$$

TIDSBRIST !

Men det borde framgå av ovanstående att jag använt rätt princip

---

5

Gränsvärdet blir efter Taylor-utveckling av alla termer

```
             1          2    - 4/9 + 2/3 ln(x)   3
(- 2/3 --------------) x  + ------------------- x
        exp(2 ln(x))            exp(2 ln(x))

                             2
     - 2/3 + 1/3 ln(x)  - (- 4/9 + 2/3 ln(x)) ln(x)    4      5
   + ------------------------------------------------ x  + O(x )
                         exp(2 ln(x))
```

varur gränsvärdet fås som första koeffecienten

6

SATS (Insättningsformeln.) Om f är kontinuerlig i (a,b) och F är en primitiv funktion till f, så är

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

BEVIS. Enligt analysens huvudsats är

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

en primitiv funktion till f. Men två primitiva funktioner till en och samma funktion skiljer sig bara på en konstant. Alltså

$$S(x) = F(x) + C$$

Men denna konstant kan beräknas. Ty det är klart att $S(a) = 0$, vilket ger $C = -F(a)$. Alltså har vi fått $S(x) = F(x) - F(a)$, och sätter vi speciellt $x = b$ så följer satsen.

ARNEs lösning till tentan på föregående sida.

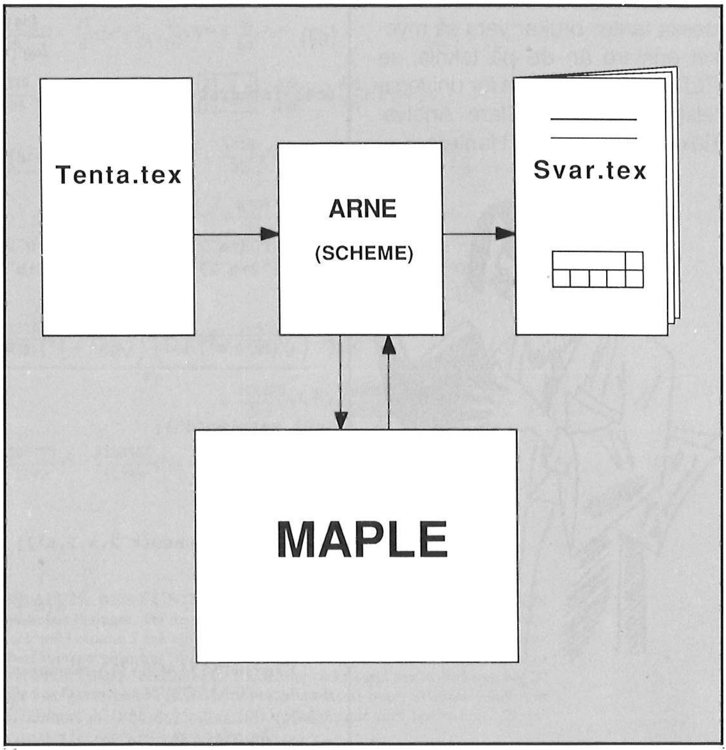
tionen..." "Beräkna integralen..." eller "Beräkna gränsvärdet...". På ungefär varannan skrivning förekommer dessutom en "bevis"-uppgift som testar att man lyckats memorera en av bokens satser. Allt detta går naturligtvis att göra mekaniskt eller rättare sagt elektroniskt. (Detta är inte menat som en anmärkning på nuvarande tentor.)

Numera produceras tentor med hjälp av ordbehandlingsprogrammet TEX på matematiska institutionen. TEX är skrivet av matematikern och programmeraren D.E. Knuth vid Stanford University. Det är specialkonstruerat för att producera matematisk text med hjälp av dator. Alla skrivningar som görs idag finns alltså i en elektronisk variant. Det är en sådan datorfil som matas in i programmet ARNE.

Det första programmet gör är en enkel mönsterigenkänning på nyckelord typ "integral", "differentialekvation", "lim" för att bestämma vilken typ av uppgift det är. De matematiska uttrycken, det vill säga det mellan $..$ eller $$..$$ i TEX, skalas ut och konverteras till MAPLE-format. Lämpliga kommandon läggs i en fil som sedan skickas vidare till MAPLE. Utresultaten från MAPLE läses slutligen in och en lösningsfil (i TEX) producers samt skrives ut på skrivaren.

Tyvärr förekommer ibland uppgifter som inte är av standartyp, så kallade läsetal. Sådana frågor tycker programmet lika illa om som teknologen och måste då ge upp. I stället produceras en osammanhängande textmassa som avslutas med orden: "TIDSBRIST! Men det borde framgå av ovanstående att jag använt rätt metod" (enligt lärare på matematiska institutionen simulerar detta ganska väl teknologens beteende).

Bevisen är naturligtvis enklast av alla uppgifter för en maskin med gott minne. När lämpliga nyckelord, t ex "analysens huvudsats", upptäcks anropas en kunskapsbas innehållande de vanligaste satserna på kursen. Programmet har alltså inte någon egentlig förståelse för bevisen (jämför ovanstående kommentar).



Symbolmanipulerande programpaket

Idén att låta en maskin sköta inte bara de numeriska uträkningarna utan även den formella symboliska hanteringen av matematiska uttryck är gammal. Redan 1844 nämns detta av lady Augusta Ada Byron (som ibland benämns "den första programmeraren"). Idag finns flera färdiga programpaket. Gemensamt är att de alla kräver ganska stor datorkapacitet även om väldigt primitiva varianter finns på moderna fickräknare (HP-28). Ett av de mest omfattande programpaketen är MACSYMA, som började utvecklas vid Massachusetts Institute of Technology i slutet på 1960-talet, och som anses vara ett av de bästa för närvarande [Pavelle], [Sci Am.].

MACSYMA har under ett antal år använts i forskningen och doktorandutbildningen på institutionen för reglerteknik [Nielsen-Sparr]. Erfarenheter från detta visar att MACSYMA är bra om man redan utfört beräningarna och vill kontrollera eller om man vet hur räkningarna skall gå till men inte orkar utföra dem. Att däremot chansa och mata in t ex ett system av flera olineära ekvationer och "hoppas på det bästa" brukar inte ge något resultat.

Ett av de största problemen brukar vidare vara att få resultatet på den form man vill ha. Det är inte ovanligt med ett svar som sträcker över flera sidor och som går att förenkla betydligt genom införande av några nya variabler. Det är väldigt svårt att automatiskt välja presentationsform och utföra dessa förenklingar. Det är därför viktigt att ha en god man-maskinkommunikation. En annan svårighet är att manualen är på flera hundra sidor. De grundläggande operationerna, som att derivera, integrera eller substituera uttryck, lär man sig på ett par minuter men när man ställs inför lite svårare problem tar det tid att hitta rätt kommando.

I projektet användes programpaketet MAPLE som är utvecklat vid universitetet i Waterloo, Kanada under 1980-talet. MAPLE är skrivet i C och betydligt snabbare än MACSYMA. Det är dock inte lika genomtestat som MACSYMA. Under projetkets utförande upptäcktes faktiskt en del felräkningar.

Framtiden

En PERSONdatorvariant av programmet har planerats. Den kommer naturligtvis att kallas ARNE PERSON.

Testkörningar på universitetets tentor visar att det är möjligt att modifiera ARNE så att även dessa klaras. Dagens variant gav rätt svar på 3 uppgifter av 8 på senaste tentamen 1988-01-12. Eftersom dessa tentor brukar vara så mycket enklare än de på teknis, se [TLTH], har versionen för universitetsbruk kallats "Lättare AnalysRäkning Symboliskt Hanterad".

Artikelförfattaren vid kombinerad in och utmatningsenhet

```
(c1) x^x^x;
```

(d1) $$x^{x^x}$$

```
(c2) diff(d1,x);
```

(d2) $$x^{x^x}\left(x^x \log(x)\left(\log(x)+1\right)+x^{x-1}\right)$$

```
(c3) (log(x)-1)/(log(x)^2-x^2);
```

(d3) $$\frac{\log(x)-1}{\log(x)^2-x^2}$$

```
(c4) integrate(d3,x);
```

(d4) $$\frac{\log(\log(x)+x)}{2}-\frac{\log(\log(x)-x)}{2}$$

```
(c5)
(sqrt(r^2+a^2)+a)*(sqrt(r^2+b^2)+b)/r^2-(sqrt(r^2+b^2)+
sqrt(r^2+a^2)+b+a)/(sqrt(r^2+b^2)+sqrt(r^2+a^2)-b-a);
```

(d5) $$\frac{\left(\sqrt{(r^2+a^2)}+a\right)\left(\sqrt{(r^2+b^2)}+b\right)}{r^2}-\frac{\sqrt{(r^2+b^2)}+\sqrt{(r^2+a^2)}+b+a}{\sqrt{(r^2+b^2)}+\sqrt{(r^2+a^2)}-b-a}$$

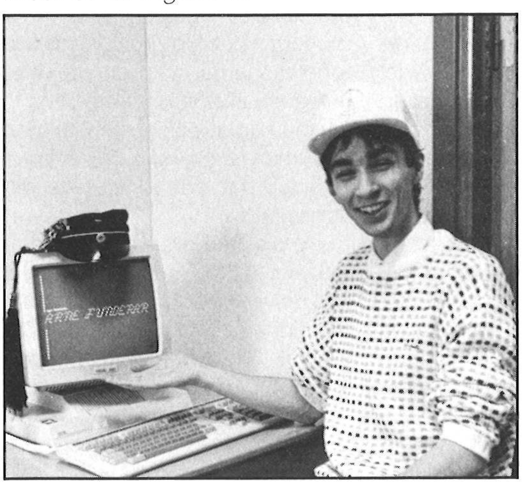
```
(c6) ratsimp(d5);
```

(d6) $$0$$

```
(c7) factor(nusum(k^2,k,1,n));
```

(d7) $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exempel på MACSYMA-räkningar. c-raderna är det som skrivs in på terminalen, d-raderna är MACSYMAs svar. Ovan visas exempel på derivering (c1-d2), integrering (c3-d4), förenkling (c5-d6) och summation $\sum_1^n k^2$ (c7,d7). **Utmaning:** Testa dig själv på att förenkla (d5). En bra tid ligger på 10 minuter (MACSYMA behövde 0.14 sekunder)



MACSYMA	MIT
REDUCE	Stanford, Univ of Utah, Rand Corp
Scratchpad	IBM
SMP	California Inst of Technology
Maple	University of Waterloo
muMATH	Soft Warehouse, Honolulu

Kommersiella system för symbolisk manipulering. Det enda system som är allmänt tillgängligt vid LNTH är SMP. Prata med Lunds Datacentral.

234 THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

la fonction R ne contient plus aucun terme périodique; elle se trouve donc réduite à son terme non périodique seul, terme qui, en tenant compte des parties fournies par les opérations 129, 260, 349 et 415, a pour valeur

$$
\begin{aligned}
R = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 - \frac{33}{2}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{45}{16}\gamma^2 e'^4 + \frac{45}{64}e^2 e'^4 \\
& \qquad + \Big(\frac{9}{16}\gamma^2 + \frac{225}{64}e^2 - \frac{27}{16}\gamma^4 - \frac{387}{32}\gamma^2 e^2 + \boxed{\frac{23}{16}\gamma^2 e'^2} - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2 e'^2 + \frac{9}{8}\gamma^6 \\
& \qquad\quad + \frac{3897}{64}\gamma^4 e^2 - \frac{99}{16}\gamma^4 e'^2 - \frac{1431}{256}\gamma^2 e'^4 - \frac{1419}{32}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{225}{512}e^6 - \frac{825}{128}e^4 e'^2 \Big) \frac{n'}{n} \\
& \qquad - \Big(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{273}{64}\gamma^4 + \frac{5709}{64}\gamma^2 e^2 - \frac{117}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{4989}{256}e^4 \\
& \qquad\qquad - \frac{1905}{8}e^2 e'^2 + \frac{3255}{128}e'^4 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \Big(\frac{255}{32} - \frac{31515}{1024}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2 + \frac{20511}{512}\gamma^4 + \frac{927831}{2048}\gamma^2 e^2 \\
& \qquad\qquad - \frac{218115}{512}\gamma^2 e'^2 + \frac{1622985}{16384}e^4 - \frac{4069635}{2048}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \Big(\frac{5515}{192} - \frac{296779}{3072}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

OMFATTANDE ALGEBRAISKA BERÄKNINGAR utförda för hand 1867 kontrollerades 1970 med ett program för symboliska beräkningar. De ursprungliga räkningarna gjordes av den franska astronomen Charles Delauney och publicerades i två volymer; en del av en sida i den andra volymen finns återgiven ovan. Delauney's beräkningar, vilka tog 10 år att utföra och 10 år att kontrollera, gav månens position med en precision överlägsen tidigare beräkningar. Tre fel upptäcktes vid kontrollen som tog 20 timmar. Det allvarligaste felet som gav upphov till de andra två är markerat ovan; uttrycket skall vara $33/16\gamma^2 e'^2$. Numera används Delauney's förbluffande noggranna beräkningar som testexempel för att kontrollera nyskrivna datorprogram för symbolisk manipulation!

Referenser

[Bobrow] Natural Language Input for a Computer Problem-Solving System, Semantic Inf. Processing, MIT Press, 1968.

[Knuth] The TEXbook, Addison Wesley, 1984.

[Nielsen-Sparr] Invariants based on areas and volumes in projective spaces, institutionen för Reglerteknik, 1987.

[Pavelle] Macsyma: Capabilities and applications to problem in engineering and the sciences, Symbolics Inc., 1985.

[Sci Am] Computer Algebra, Scientific American Dec., 1981.

[TLTH] Sångbok, Mat-Nat-Fack-Attack.

[Winston] Artificial Intelligence, Addison Wesley, 1977.