Reglerteknik -- En elementär introduktion. Kapitel 2: Den enkla reglerkretsen

Åström, Karl Johan

1981

Document Version:
Förlagets slutgiltiga version

Link to publication

Citation for published version (APA):
Åström, K. J. (1981). *Reglerteknik -- En elementär introduktion. Kapitel 2: Den enkla reglerkretsen*. (Research Reports TFRT-3164). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

Total number of authors:
1

REGLERTEKNIK -

en elementär introduktion

Karl Johan Åström

INSTITUTIONEN FÖR REGLERTEKNIK
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA, JANUARI 1983

KAPITEL 2

DEN ENKLA REGLERKRETSEN

Återkopplingsprincipen är en av reglerteknikens huvudidéer. Principen belyses med ett enkelt exempel. Blockschema införs för att ge en kompakt beskrivning av återkoppling. Beskrivningens allmängiltighet belyses. Återkopplingens viktigaste egenskaper illustreras. Skillnaderna mellan negativ och positiv återkoppling diskuteras. Viktiga begrepp som statisk förstärkning och stabilitet belyses.

2.1 INLEDNING

I detta kapitel beskrivs den enkla reglerkretsen. Ett termostatreglerat vattenbad tas som utgångspunkt för diskussionen. Termostaten, som är ett typiskt exempel på ett återkopplat system, beskrivs i avsnitt 2.2. Exemplet abstraheras i avsnitt 2.3. Abstraktionen ger en mycket allmän beskrivning, som kan representera många olika reglersystem. Några viktiga begrepp införs med hjälp av den allmänna beskrivningen. Abstraktionen gör det också möjligt att enkelt förstå ett reglersystems funktion. Detta behandlas i avsnitt 2.4 och belyses med exempel. Matematiska modeller är också mycket användbara för att förstå hur ett reglersystem uppför sig. Detta belyses med några exempel i avsnitt 2.5. I avsnitt 2.6 används den allmänna beskrivningen för att visa några viktiga egenskaper hos system med negativ återkoppling. Resonemanget baseras på antagandet att systemet befinner sig i jämvikt. Avsnitt 2.7 behandlar positiv återkoppling. Det visas att positiv återkoppling kan leda till instabilitet. I avsnitt 2.8 behandlas stabilitetsbegreppet något utförligare.

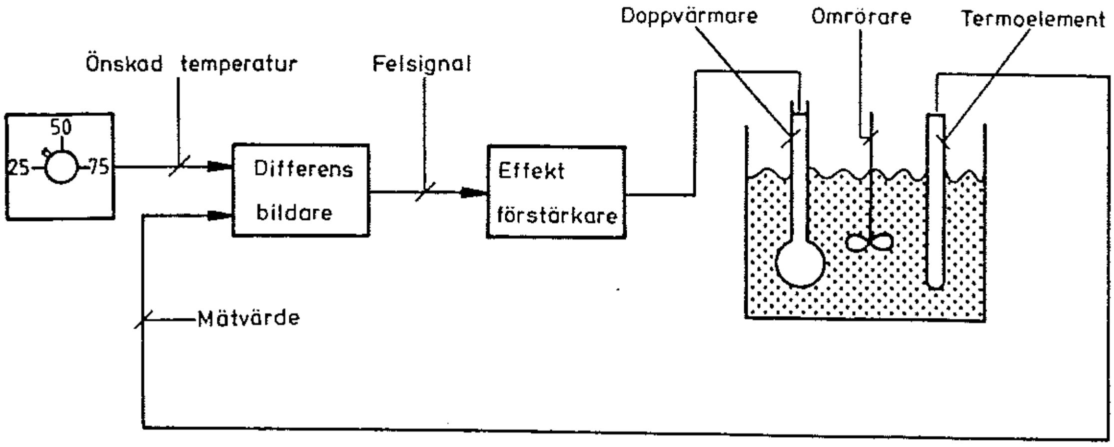


Fig. 2.1 - Förenklad bild av en termostat.

2.2 ETT EXEMPEL

En förenklad bild av en termostat visas i fig. 2.1. Termostatens funktion är att hålla vattenbadets temperatur konstant. Termostaten fungerar så här. Vattnets temperatur mätes med termometern. Om den mätta temperaturen är lägre än den önskade temperaturen så ökas effekten i värmaren. Om den mätta temperaturen är högre än den önskade så minskas effekten. Detta kan ordnas praktiskt på många olika sätt. En kvicksilvertermometer med flyttbar kontakt kan t.ex. användas för att koppla om effekten. Temperaturen kan mätas med ett termoelement, som ger en elektrisk signal. Skillnaden mellan den önskade och den mätta temperaturen bildas sedan elektriskt. Differensen som kallas felsignal kan styra ett relä eller en kontaktor. För att få bättre reglering kan tyristorer användas i stället för reläet. Det är då möjligt att få en kontinuerlig ändring av effekten. Omröraren blandar om så att vattnet får samma temperatur i hela badet.

Termostaten är ett exempel på ett återkopplat system, ty uppvärmningseffekten bestäms genom återföring eller återkoppling av differensen mellan den önskade temperaturen och badets temperatur. Återkopplingen sägs vara negativ eftersom en ökning av badets temperatur medför att den tillförda effekten minskar.

Trots att termostaten tekniskt sett är ett enkelt system så är fig. 2.1 relativt komplicerad. För mer komplexa system blir motsvarande figurer lätt oöverskådliga. För att enkelt kunna beskriva system användes i reglertekniken speciella förenklade bilder. Dessa bilder, som kallas blockschema, framhäver de egenskaper hos systemet som är viktiga ur reglerteknisk synpunkt. De döljer detaljer som är mindre väsentliga. I fig. 2.2 visas ett blockschema för termostaten

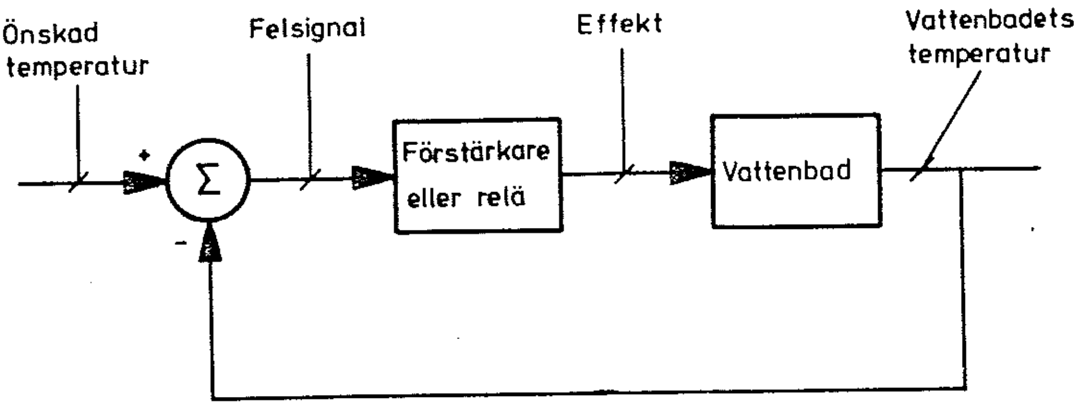


Fig. 2.2 - Blockschema för termostaten.

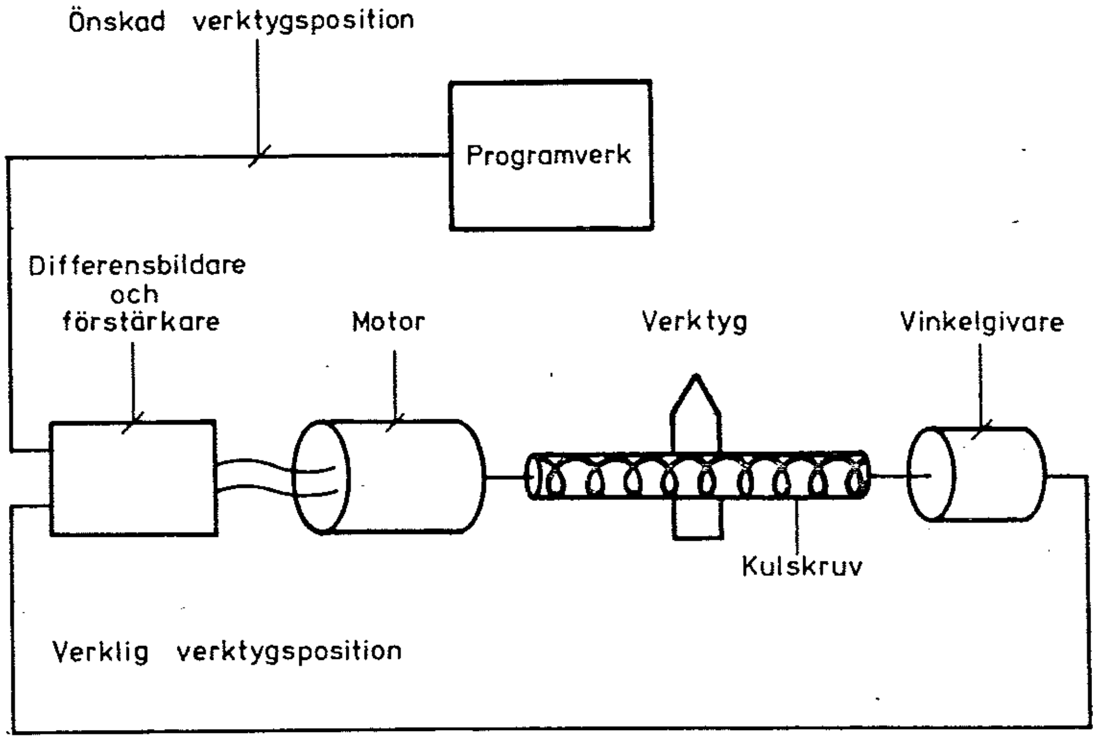
i fig. 2.1.

Blockschemat består av rektanglar och cirklar som är sammanbundna med linjer. Linjerna representerar signaler (t.ex. vattenbadets temperatur och värmarens effekt). Rektanglarna representerar hur signaler påverkar varandra. Pilar används för att ange orsak och verkan. Den rektangel i fig. 2.2 som märkts "vattenbad" anger således hur vattenbadets temperatur påverkas av den effekt som tillförs via doppvärmaren. Cirkeln med summationstecknet anger att felsignalen bildas som skillnaden mellan den önskade och den mätta temperaturen. Rutan märkt "Förstärkare eller relä" anger hur den effekt som tillförs doppvärmaren beror av reglerfelet. Observera att en symbol i blockschemat kan representera flera komponenter. Observera också att det finns ett stort mått av godtycke då systemet kan delas upp på många olika sätt.

Blockschema behandlas utförligare i kapitel 3. Låt oss avslutningsvis nöja oss med att betona att blockschemat ger en abstraherad bild av systemet som framhäver signal- eller informationsflödet i systemet.

2.3 GENERALISERING

Tack vare att blockschemat i fig. 2.2 ger en abstrakt bild av termostatens reglertekniska egenskaper och döljer många av dess speciella tekniska detaljer visar det sig att många reglersystem kan representeras med samma blockschema. Detta illustreras i fig. 2.3 och fig. 2.4 som visar förenklade bilder och motsvarande blockschema för en numeriskt styrd maskin och för en autopilot.



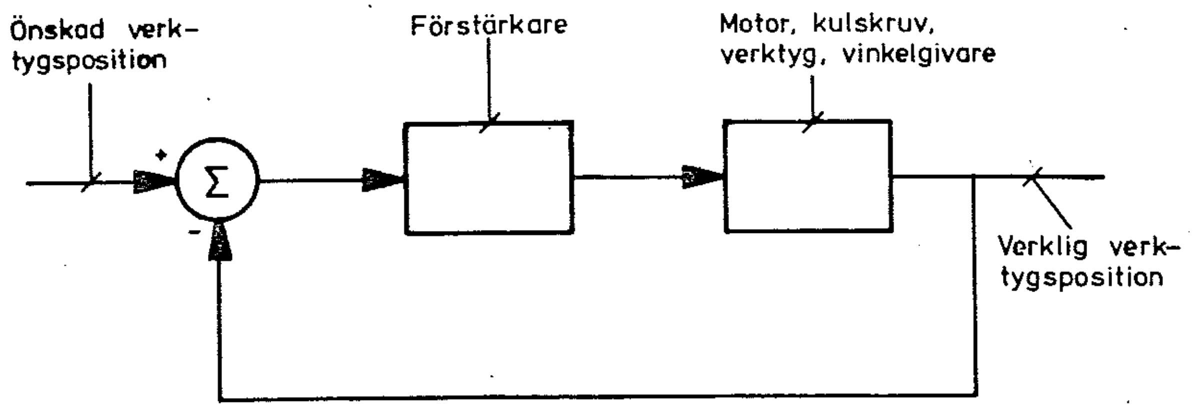


Fig. 2.3 - Förenklad bild av en numeriskt styrd svarv (en kanal) och motsvarande blockschema.

Observera att de blockschema som visas i fig. 2.3 och i fig. 2.4 bortsett från beteckningarna är identiska med blockschemat för termostaten. I själva verket är blockschemat i fig. 2.2 en generell beskrivning av en stor klass av reglersystem som bygger på negativ återkoppling. Detta är naturligtvis av stor betydelse. Om vi kan förstå hur ett system som representeras av blockschemat i fig. 2.2 fungerar så kan den kunskapen överföras till många andra reglersystem. Detta illustrerar

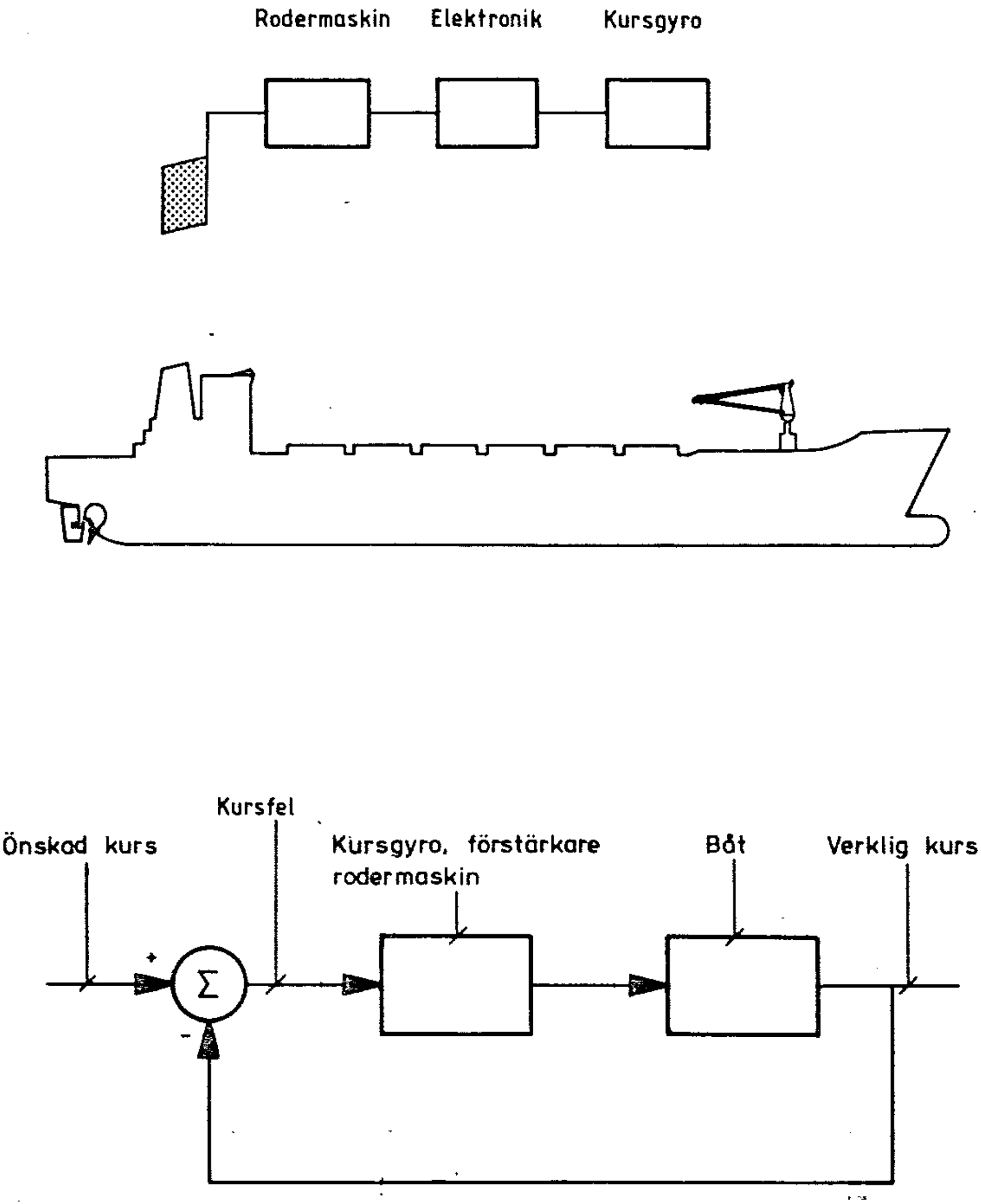


Fig. 2.4 - Förenklad bild på en båt med autopilot och motsvarande blockschema.

reglerteknikens allmängiltighet, som vi skall återkomma till många gånger. Grundidén är således att finna allmänna sätt att beskriva många olika typer av system, och att finna metoder att förstå den allmänna beskrivningen. För att kunna lösa speciella problem måste vi dessutom utveckla förmågan att visa hur de speciella problemen kan återföras till de allmänna beskrivningarna.

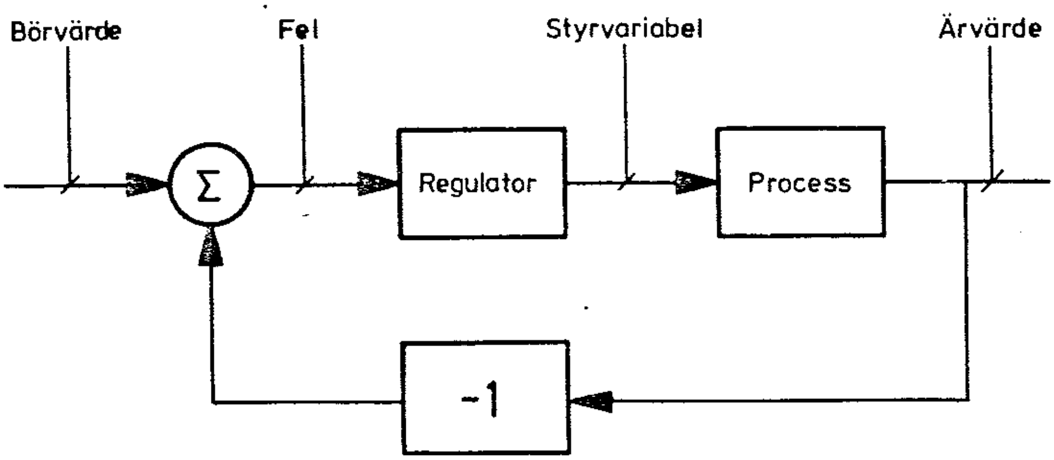


Fig. 2.5 - Generellt blockschema för system med negativ återkoppling.

Som ett första steg i strävan att finna allmänna beskrivningar av reglersystem skall vi utgå från system vars blockschema visas i figurerna 2.2, 2.3 och 2.4. Generella beteckningar som ej anknyter till den speciella tillämpningen skall införas. Den variabel som skall regleras kallas i det allmänna fallet ärvärde, mätvärde eller utsignal. Signalens önskade värde kallas börvärde eller referensvärde. För termostaten är mätvärdet den temperatur som mäts med termoelementet och börvärdet är den önskade temperaturen som ställes in med ratten i fig. 2.1. För att övergå från fysikaliska variabler till signaler som representerar variablerna användes mätinstrument och mätvärdesomvandlare. Det system som skall regleras kallas processen. Den primära variabel genom vilken processen påverkas kallas styrvariabel, pådrag eller insignal. För att fysiskt verkställa övergången från signaler till verkliga fysikaliska variabler används styrdon. För termostaten är styrdonet en kontaktor eller ett tyristorsteg. För svarven är styrdonet också förstärkare och för autopiloten är styrdonet rodermaskinen. Observera att det finns ett visst godtycke. I vissa fall är det praktiskt att betrakta signalen till styrdonet som styrvariabel, i andra fall är det bekvämt att betrakta den fysikaliska variabeln som styrvariabel. Skillnaden mellan börvärde och ärvärde kallas reglerfelet, eller enbart felet.

I fig. 2.5 har blockschemat i fig. 2.2 ritats om. De generella beteckningarna har också införts i figuren. Det framgår klart av figuren att systemet är återkopplat, ty det finns en sluten slinga. För att betona att systemet har negativ återkoppling har symbolen för differensbildaren i fig. 2.2, 2.3 och 2.4 ersatts med en ren summationssymbol och en ruta märkt "-1", som vänder tecknet på signalen. Minustecknet i fig. 2.5 symboliserar således negativ återkoppling.

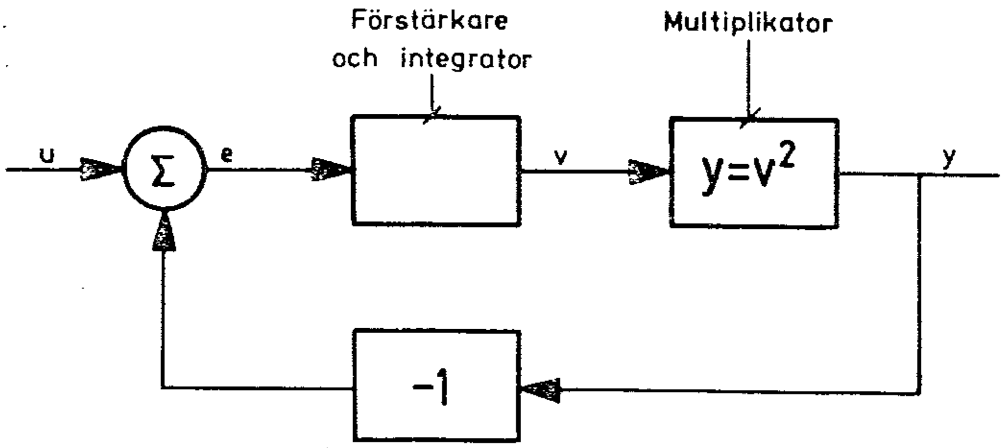


Fig. 2.6 - Blockschema för beräkningsenhet.

Den enkla reglerkretsen fungerar så här. Felet bildas som differensen mellan börvärde och ärvärde. Felet förstärks och signalbehandlas i regulatorn. Den förstärkta felsignalen påverkar styrdonet som ställer in processens styrvariabel så att reglerfelet drivs mot noll. Reglerteknikens huvudproblem är att välja signalbehandlingen i regulatorn så att det önskade resultatet erhålles.

2.4 HUR FÖRSTÅ SYSTEMETS FUNKTION

Det har nämnts flera gånger att ett reglersystem kan vara komplicerat. Det kan innehålla många olika apparater. Dess komponenter kan representera olika typer av teknik. Vid arbete med reglersystem är det ofta väsentligt att enkelt kunna få en överblick av hur systemet fungerar. För detta ändamål kan man använda följande enkla recept: Lokalisera reglerfelet och utgå från att reglerfelet skall vara noll. Skälet till att man kan resonera på detta sätt är att det återkopplade systemet alltid strävar efter att göra felet litet. Det genomförda resonemanget visar då situationen i idealfallet då felet är noll. Vi illustrerar principen med några enkla exempel.

E x e m p e l 2.1 (Kvadratrotsenhet)
I fig. 2.6 visas blockschema för ett system som används som beräkningsenhet. Multiplikatorn fungerar så att dess utsignal är produkten av de båda insignalerna. Med figurens beteckningar gäller således att

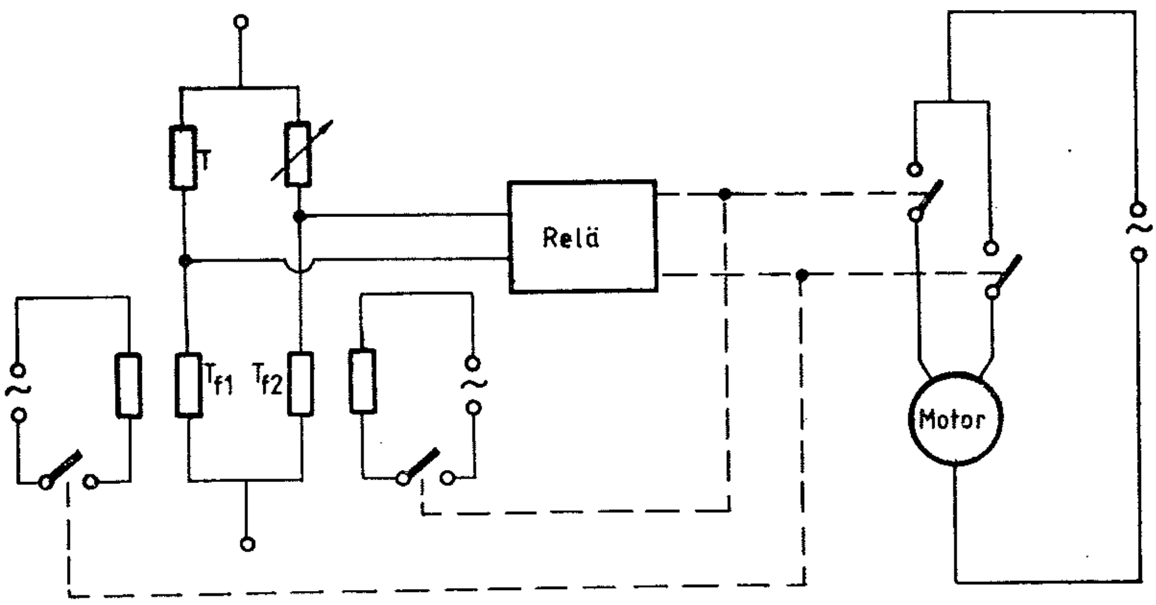


Fig. 2.7 - Schematisk bild på regulator baserad på termisk återföring.

$$y = v^2.$$

Om reglerkretsen förmår att göra reglerfelet noll gäller att

$$u = y = v^2.$$

Vi finner således direkt att signalen v är kvadratroten ur insignalen u. Beräkningsenheten är således en kvadratrotsutdragare. En analog beräkningsenhet av detta slag används ofta för att beräkna ett flöde från en mätning av en tryckdifferens.

□

E x e m p e l 2.2 (Termisk återföring)
I många tidiga reglersystem var det vanligt att mätgivare, regulator och styrdon byggdes ihop. Genom att göra fiffiga konstruktioner var det möjligt att få goda prestanda till rimliga kostnader.

En regulatorkonstruktion som länge har använts för temperaturreglering visas i fig. 2.7. Regulatorn består av en termistorbrygga, ett relä och en motor som driver en reglerventil.

Termistorbryggans undre del består också av två termistorer R1 och R2. Dessa kan värmas separat med hjälp av två uppvärmningsmotstånd. Den temperatur T som skall regleras mätes med en termistor. Den önskade temperaturen ställs in med ett variabelt motstånd. Detta är märkt T_{ref} i fig. 2.7. Temperaturerna jämförs i en bryggkoppling där felsignaler bildas. Felsignalen kopplas till ett relä som driver en motor.

Reläet är ett s.k. polariserat relä. Det har tre lägen, ett mittläge och två ytterlägen. Om drivspänningen är liten står reläet i mittläget. Om drivspänningens storlek överstiger ett kritiskt värde går reläet till något av ytterlägena. Vilket av lägena som antas bestäms av drivspänningens polaritet. Detta förklarar namnet polariserat relä. Motorn är en vanlig synkron växelströmsmotor. Dess rotationsriktning bestäms av hur polerna kopplas. Reläkontakterna kopplas så att motorn står stilla i mittläget. I ytterlägena är spänningskällan ansluten till motorn. Spänningen polvändes vid omkoppling mellan ytterlägena så att rotationsriktningen omkastas.

Uppvärmningsmotstånden kopplas in till spänningshållaren med hjälp av reläet. Reläets utgång är således återkopplad till bryggan. Kretsen har kallats termisk återföring eftersom återkopplingen går via uppvärmning av termistorerna. Återkopplingsmotstånden kopplas så att negativ återkoppling erhålles.

Den krets som visas i fig. 2.7 består alltså av mätgivare, regulator och styrdon. Kretsen är billig att tillverka. Mätgivaren i form av en termistorbrygga är enkel. Förstärkaren består endast av ett relä. Ställdonet består av en enkel växelströmsmotor, som är enkel och billig.

Vi skall nu undersöka hur systemet fungerar. Temperaturerna T och T_{ref} betraktas som insignaler. Motorns vridningsvinkel är utsignalen.

För att förenkla resonemanget undersöker vi små störningar kring ett jämnviktsläge. Vi utgår från att alla motstånd har samma temperaturer och samma nominella resistans. För små ändringar i temperaturen erhålles små motståndsändringar som är proportionella mot temperaturändringarna. Proportionalitetsfaktorn är negativ, eftersom motståndet minskar då temperaturen ökar.

För måttliga temperaturändringar ges bryggans felspänning av

$$v = k(T_{ref} - T - T_{f1} + T_{f2})$$

där T är den temperatur som skall regleras och T_{ref} den temperatur som motsvarar potentiometerns inställning. Variablerna T_{f1} och T_{f2} anger återkopplingsmotståndens temperaturer.

För att förklara hur systemet fungerar använder vi den vanliga principen. Vi utgår således från att bryggans felspänning är liten dvs.

$$T_{f1} - T_{f2} = T_{ref} - T = e$$

där e på vanligt sätt betecknar reglerfelet.

För att få en beskrivning av systemet återstår nu att visa hur motorns vridningsvinkel är relaterad till reglerfelet.

Reläet kan endast stå i tre lägen, nolläget och de båda ytterlägena. Reläet kommer att kunna växla ganska snabbt mellan dessa tre lägen. Motorns hastighet kommer då också att skifta mellan tre värden: framåt, bakåt och stopp. Med denna förfiningsgrad blir det ganska komplicerat att beskriva systemet. Vi kan emellertid beskriva vad som händer i genomsnitt på ett enkelt sätt. Låt t_1 beteckna medelvärdet av den tid då reläet befinner sig i det läge vi valt som positiv rörelseriktning och låt t_2 beteckna medeltiden i andra läget.

$$y = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2} .$$

Motorns medelhastighet blir

$$\omega = \omega_0 y$$

där ω_0 är motorns nominella hastighet.

Återkopplingsmotståndens temperatur bestäms av uppvärmningsmotstånden som är kopplade till reläet. En energibalans ger

$$C \frac{dT_{f1}}{dt} = P_0\, y - kT_{f1}$$

där C är totala värmekapaciteten hos termistor och uppvärmningsmotstånd, P_0 den effekt som erhålles då motståndet anslutes till spänningskällan och k ett värmeövergångstal. På samma sätt erhålles en liknande ekvation för T_{f2}, för $y < 0$.

Sammanfattningsvis finner vi, att temperaturdifferensen

$$T_f = T_{f1} - T_{f2} = e$$

ges av

$$C \frac{dT_f}{dt} = P_0\, y - kT_f.$$

Om vi löser y ur denna ekvation och eleminerar T_f finner vi följande samband mellan motorns medelhastighet och reglerfelet e.

$$y = \frac{c}{P_0} \frac{de}{dt} + \frac{k}{P_0}\, e.$$

Motorns vridningsvinkel ges av

$$\varphi = \int \omega \, dt = \omega_0 \int y \, dt = \frac{\omega_0 C}{P_0}\, e + \frac{\omega_0 k}{P_0} \int^{t} e(s)\, ds.$$

Vi finner således att motorns vridningsvinkel är en summa av två termer. Den ena är proportionell mot reglerfelet e. Den andra är proportionell mot reglerfelets tidsintegral. Systemet kallas därför för en PI-regulator, där P står för proportionell och I för integrerande.

Regulatorns parametrar kan ändras genom att välja hastighet ω_0, effekten P_0 till uppvärmningsmotstånden och den termiska återkopplingens tidskonstant c/k.

Regulatorer baserade på termisk återföring har länge använts i enkla system för temperaturreglering, villor och fastigheter. Motorn är ansluten till den ventil som bestämmer temperaturen hos värmeelementen. I nyare utförande har det polariserade reläet bytts ut mot en operationsförstärkare med dioder som styr vanliga tungreläer för omkoppling av motorns vridningsvinkel. Den termiska återkopplingen tas ofta direkt från operationsförstärkarens utgång. I vissa fall har den termiska återkopplingen ersatts med en elektrisk återkoppling av opertionsförstärkaren. Detta diskuteras i kapitel 10.

□

2.5 ANVÄNDNING AV MATEMATISKA MODELLER

Man kan också använda matematiska modeller och analys för att få en överblick av hur ett system fungerar. För att illustrera principen utgår vi från att läsaren är bekant med egenskaperna hos följande differentialekvation.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + d \frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{2.1}$$

I ekvationen beskriver x t.ex. läget hos en massa som hänger i en fjäder med fjäderkonstanten k. Vidare finns en viskös dämpning som ger en kraft, motriktad rörelsen, vars storlek är proportionell mot hastigheten.

För $d^2 < 4$ mk ges lösningen av

$$x = e^{-\zeta\omega t}(A \cos \omega \sqrt{[1-\zeta^2]}t + B \sin \omega \sqrt{[1-\zeta^2]}t)$$

där

$$\omega = \sqrt{[k/m]}$$

$$\zeta = \frac{d}{2\sqrt{[mk]}}$$

och A och B beror på begynnelsevärdena.

Det går också bra att verifiera att ovanstående tidsfunktion är en lösning till differentialekvationen.

I matematiska termer är lösningarna alltså dämpade svängningar. Periodtiden för svängningarna är

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{[1-\zeta^2]}}$$

över en period reduceras svängningens amplitud med dämpningsfaktorn

$$d_f = e^{-\frac{2\pi\varsigma}{\sqrt{[1-\varsigma^2]}}}$$

Lösningen till ekvationen representerar en svängning om $d^2 < 4$ mk. Om k/m ökar så blir svängningen snabbare och sämre dämpad. Om d/m ökar så ökas dämpningen. Använd gärna gummisnoddar och stenar för att friska upp minnet.

Vi skall nu visa hur kunskapen om lösningarna till ekvation (2.1) kan användas för att förstå hur enkla reglersystem fungerar.

Vi illustrerar med två exempel:

E x e m p e l 2.3 (Autopilot för en båt)
Betrakta en båt med autopilot. Se fig. 2.4. Båten kan approximativt beskrivas med ekvationen

$$J\frac{dr}{dt} + Dr = k_0\delta, \tag{2.2}$$

där r är girhastigheten och δ roderutslaget, J är båtens tröghetsmoment kring giraxeln, D är en dämpningskoefficient och k_0 är en proportionalitetsfaktor. Funktionen hos en enkel autopilot kan beskrivas med ekvationen

$$\delta = - k_\psi\psi - k_r r. \tag{2.3}$$

Autopiloten genererar således ett roderutslag som är sammansatt av två termer. Den ena termen är proportionell mot kursfelet ψ den andra är proportionell mot girhastigheten

$$r = d\psi/dt.$$

Elimineras roderutslaget δ mellan ekvationerna (2.2) och (2.3) erhålles följande ekvation:

$$J\frac{d^2\psi}{dt^2} + (D + k_r k_0)\frac{d\psi}{dt} + k_0 k_\psi \psi = 0. \tag{2.4}$$

Båten med autopilot beskrivs således av en ekvation som har samma form som ekvationen för en massa som hänger i en fjäder. Vi kan utnyttja kunskapen om egenskaperna till svängningsekvationen (2.1) för att förstå hur reglersystemet påverkas av regulatorns parametrar. Talet $k_0 k_\psi/J$ i ekvation (2.4) motsvarar således k/m i ekvation (2.1) . En ökning av talet k_ψ medför således att frekvensen ökar. På samma sätt ser vi att att dämpningskoefficienten för båten med autopilot ges av $(D + k_0 k_r)/J$. Dämpningen kan alltså direkt påverkas genom att justera parametern k_r i autopiloten. Lägg märke till att dämptermen i ekvation (2.1) fysikaliskt motsvarar en viskös dämpning som naturligtvis är knuten till en energiförlust. I ekvation (2.4) är dämptermen $D + k_r k_0$ sammansatt av två termer. Den ena termen D beror på ren hydrodynamisk dämpning vilken är förenad med energiförlust. Den andra termen $k_r k_0$ beror på regulatorns inställning. Denna term beror endast av informationsbehandlingen i systemet. Om man gör experiment på båten genom yttre påverkan kan verkan av de båda termerna ej skiljas åt. Genom återkopplingen kan man således få det att se ut som om den hydrodynamiska dämpningen vore mycket stor. Observera att den artificiella dämpning som införs genom återkopplingen <u>ej</u> medför någon energiförlust.

□

Användningen av matematiska modeller illustreras med ett ytterligare exempel.

E x e m p e l 2.4 (Varvtalsreglering med PI-regulator)
En elektrisk motor kan approximativt beskrivas av ekvationen

$$J \frac{d\omega}{dt} + D\omega = Mi \tag{2.5}$$

där i betecknar strömmen genom motorns ankarlindning och ω är motorns varvtal. J är tröghetsmomentet hos motor och last, D är en dämpterm och M en konstant som anger hur stort momentet blir vid en given ström. För att hålla varvtalet konstant är det vanligt att använda en s.k. PI regulator som beskrivs av

$$i = k_R \left[e + \frac{1}{T} \int e(s)\, ds\right] \tag{2.6}$$

där e är reglerfelet, dvs.

$$e = \omega_{ref} - \omega. \tag{2.7}$$

Talet k_R är regulatorns förstärkning och T är integraltiden.

Strömmen är alltså sammansatt av två termer. Den ena är proportionell mot reglerfelet och den andra är proportionell mot reglerfelets tidsintegral. Detta förklarar namnet PI regulator.

Om varvtalets referensvärde ω_{ref} är konstant så erhålles efter derivation av (2.7)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{de}{dt}.$$

Om ekvation (2.5) deriveras en gång kan derivator av ω bytas mot derivator av e. Använd sedan ekvation (2.6) för att eleminera i, så erhålles

$$J\frac{d^2e}{dt^2} + (D + k_RM)\frac{de}{dt} + \frac{k_RM}{T}\;e = 0.$$

Vi finner således att reglerfelet för motorn med PI regulatorn uppfyller svängningsekvationen (2.1). Kunskapen om svängningsekvationen kan då utnyttjas till att förstå hur den varvtalsreglerade motorn fungerar. I det speciella fallet finner vi att reglerfelet e är noll i stationärt tillstånd. Vi ser också att dämpningskoefficienten i svängningsekvationen (2.1) motsvaras av talet $D + k_RM$. Dämpningen kan alltså påverkas genom att ändra regulatorns förstärkning. Fjäderkonstanten i svängningsekvationen (2.1) motsvaras av talet k_RM/T. Den kan alltså påverkas genom att ändra förhållandet mellan regulatorns förstärkning k_R och dess integraltid T. Observera att det ej är helt trivialt att ställa in regulatorns parametrar så att önskad dämpningskoefficient och egenfrekvens erhålles.

□

Sammanfattning

Vi har med hjälp av två exempel visat hur man kan gå tillväga för att förstå hur ett reglersystem fungerar. Man kan i princip göra likadant i mer komplicerade fall. Den enda skillnaden är att det kan vara svårt att ställa upp de ekvationer som beskriver systemet. Det kan också vara svårt att få en överblick av egenskaperna hos ekvationernas lösningar. Hur det går till får man lära sig i reglerteorin.

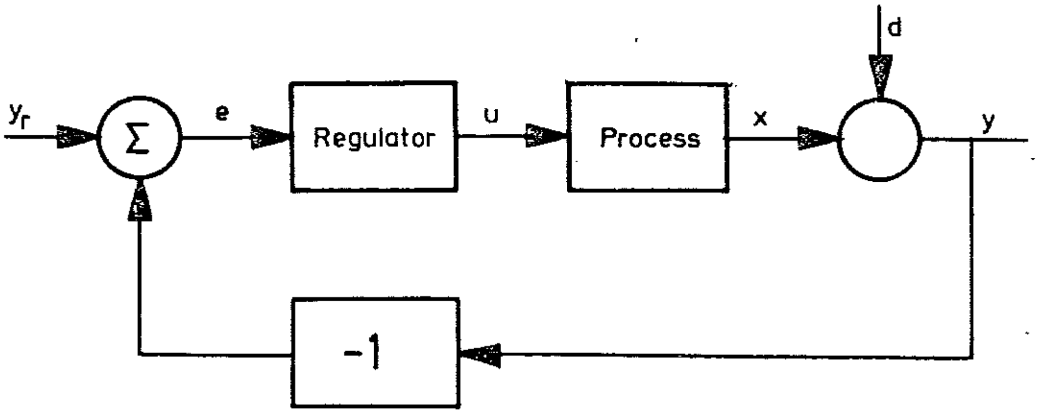


Fig. 2.8 - Blockschema för enkel reglerkrets med negativ återkoppling.

2.6 ÅTERKOPPLINGENS FANTASTISKA EGENSKAPER

Reglersystemets primära funktion är att se till att ärvärdet överensstämmer med börvärdet. Det är i allmänhet ej svårt att trimma in en process så att är- och börvärden är lika vid ett speciellt tillfälle. Det finns tre typer av förändringar som gör att det kan bli avvikelser. Börvärde och process kan förändras och störningar kan förekomma i processen. Genom att bygga ett reglersystem som baseras på negativ återkoppling erhålles ett system med anmärkningsvärda egenskaper vad avser störningskänslighet. Även om idén med negativ återkoppling kan synas nästan självklar så har återkopplingsprincipen återuppfunnits många gånger inom många olika tillämpningsområden. Återuppfinningarna har ofta betraktats som banbrytande, eftersom de system som erhållits har haft så bra egenskaper.

I detta avsnitt skall några av återkopplingsprincipens attraktiva egenskaper belysas med hjälp av enkel analys. Vi skall utgå från ett system vars blockschema visas i fig. 2.8. Under starkt förenklade antaganden skall vi visa att skillnaden mellan ärvärde och börvärde är liten trots att processen utsätts för störningar och trots att dess egenskaper förändras. Det starkt förenklade antagande som skall göras är att processen kan beskrivas med det linjära statiska sambandet

$$x = k_p u. \tag{2.8}$$

Detta samband säger att om styrvariabeln u ändras så ändras processvariabeln x momentant. Ändringen i processvariabeln är proportionell mot ändringen i styrvariabeln. Proportionalitetsfaktorn k_p kallas processens förstärkning. På samma sätt antas att regulatorn kan beskrivas med

$$u = k_R e \tag{2.9}$$

där proportionalitetsfaktorn k_R är <u>regulatorns förstärkning</u>. Detta innebär att proportionell reglering används. Vidare gäller enligt fig. 2.8 att

$$y = d + x \tag{2.10}$$

$$e = y_r - y. \tag{2.11}$$

Om variablerna e, u och x elimineras mellan ekvationerna (2.8), (2.9), (2.10) och (2.11) erhålles

$$y = \frac{k_P k_R}{1 + k_P k_R} y_r + \frac{1}{1 + k_P k_R} d. \tag{2.12}$$

Reglerfelet ges av

$$e = y_r - y = \frac{1}{1 + k_P k_R} y_r - \frac{1}{1 + k_P k_R} d . \tag{2.13}$$

Med hjälp av uttrycken (2.12) och (2.13) är det lätt att se vad som händer då börvärdet ändras då det finns störningar i processen eller då processens egenskaper ändras. Antag först att det inte finns några störningar (d=0) och att börvärdet ändras. Enligt ekvation (2.13) gäller då

$$\Delta e = \frac{1}{1 + k_P k_R} \Delta y_r .$$

Felet blir således proportionellt mot börvärdesförändringen Δy_r. Vidare är felet omvänt proportionellt mot storheten

$$k_d = 1 + k_P k_R .$$

Innan vi går vidare skall några begrepp införas. Produkten

$$k_o = k_P k_R$$

av regulatorns förstärkning och processens förstärkning kallas <u>kretsförstärkningen</u> (eng. loop gain) eller <u>återföringskvoten</u> (eng. return ratio).

Talet

$$k_d = 1 + k_P k_R$$

kallas återföringsskillnaden (eng. return difference) eller återföringsdifferensen. Kretsförstärkningen kan tolkas på följande sätt. Antag att kretsen skärs upp i en godtycklig punkt (systemet öppnas) och att en signal s injiceras vid snittet. Den signal som återkommer då signalen passerat runt kretsen är då

$$s_1 = -k_P k_R s = -k_0 s.$$

Signalen förstärks alltså med kretsförstärkningen då den går runt i kretsen. Vidare byter signalen tecken, eftersom återkopplingen är negativ. Skillnaden mellan signalerna s_1 och s är

$$s - s_1 = (1 + k_P k_R)s = k_d s$$

Detta förklarar att talet

$$k_d = 1 + k_P k_R$$

kallas återföringsdifferensen.

Felet vid en börvärdesändring blir alltså omvänt proportionellt mot återföringsskillnaden. På samma sätt ser vi att reglerfelet vid en processtörning blir proportionellt mot störningens storlek och omvänt proportionellt mot återföringsskillnaden.

Vi kan nu kvantifiera det tidigare resonemanget att ett system med negativ återkoppling strävar efter att göra reglerfelet litet. Det följer av ekvation (2.13) att reglerfelet är referensvärdet dividerat med återföringsdifferensen. Återföringsdifferensen talar således om precis hur litet felet blir vid ett givet referensvärde.

Observera att den slutna kretsens (= det återkopplade systemets) förstärkning ges av

$$k_s = \frac{k_P k_R}{1 + k_P k_R} = 1 - \frac{1}{1 + k_P k_R} \tag{2.14}$$

medan det öppna systemets förstärkning är lika med kretsförstärkningen. I normala fall är kretsförstärkningen stor, vilket innebär att det slutna systemets förstärkning är liten. Återkopplingen medför alltså en kraftig sänkning av förstärkningen. Det är reduktionen av förstärkningsöverskottet som medför att det blir små reglerfel vid börvärdesändringar och vid belastningsstörningar.

Den negativa återkopplingen medför också att det slutna systemet blir okänsligt för parametervariationer. Antag att processens förstärkning ändras med Δk_P, som antas vara liten i förhållande till k_P. Enkla räkningar ger då

$$\Delta k_s = - \frac{k_R \Delta k_P}{(1 + k_P k_R)^2} \approx - \frac{\Delta k_P}{k_P} \cdot \frac{1}{k_P k_R} . \tag{2.15}$$

Antag t.ex. att kretsförstärkningen är 100. Det följer då av (2.14) att en ändring av processens förstärkning på 10 % endast ger en ändring i det slutna systemets förstärkning på 0.1 %.

Sammanfattningsvis finner vi att användning av negativ återkoppling ger ett slutet system som är okänsligt för störningar och ändringar i processens egenskaper, men följsamt för börvärdesförändringar. Som regel reduceras störningar omvänt proportionellt mot återföringsskillnaden som är approximativt lika med kretsförstärkningen. Kretsförstärkningen ger alltså ett kvantitativt mått på graden av störningsreduktion. Kretsförstärkningen är bildligt talat reglerteknikens hårdvaluta som kan växlas mot okänslighet. Av det genomförda resonemanget vore det lätt att dra slutsatsen att kretsförstärkningen skall vara så stor som möjligt. Vi skall senare se att systemen kan bli <u>instabila</u> om kretsförstärkningen blir alltför stor.

<u>Anmärkning</u>. De modeller (2.8) och (2.9) som legat till grund för räkningar är naturligtvis starkt förenklade. I verkligheten råder sällan ett så enkelt samband mellan insignal och utsignal. Återkopplingen har emellertid kvalitativt samma egenskaper även då processerna beskrivs av mer komplicerade samband.

□

Antagandet att processen kan beskrivas med det statiska sambandet som ges av ekvation (2.18) är en grov förenkling. Processerna är som regel <u>dynamiska system</u>. Detta innebär att det tar viss tid innan en ändring i insignalen märks i utsignalen. Den analys som genomförts skulle dock fortfarande vara giltig om man

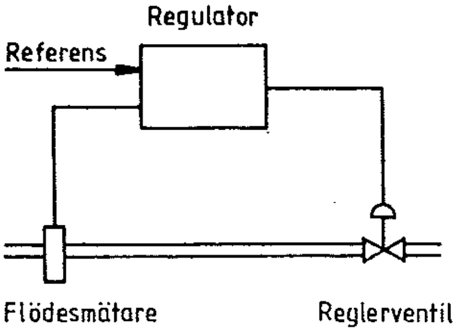


Fig. 2.9 - Enkel krets för flödesreglering.

begränsade sig till att undersöka hur systemet uppför sig i stationärt tillstånd sedan eventuella dynamiska förlopp svängt in sig. Detta resonemang förutsätter dock att systemet verkligen svänger in sig i ett jämviktsläge. Villkoren för detta skall kortfattat beröras i avsnitt 2.9).

Låt oss bara avslutningsvis belysa att det är lätt att dra helt felaktiga slutsatser genom att grunda ett resonemang på en felaktig premiss.

Filosofen Perron formulerade följande paradox: "Antag att det finns ett största heltal N. Eftersom N är ett heltal, så är också N·N ett heltal. Om $N \neq 1$ så gäller uppenbarligen

$$N^2 > N,$$

vilket motsäger att N är det största heltalet. Således måste talet 1 vara det största heltalet."

2.7 FÖRENKLING AV PROCESSAMBAND GENOM LOKAL ÅTERKOPPLING

Som en illustration till återkopplingens trevliga egenskaper skall vi nu visa hur återkoppling kan användas för att förenkla processamband. Flöden styrs som regel med hjälp av ventiler. Sambandet mellan flöde och ventilläge är emellertid ofta olinjärt, vilket leder till svårigheter vid regleringen. Dessutom påverkas flödet naturligtvis av tryckvariationer i ledningen. För att få ett system där det råder ett väldefinierat linjärt samband mellan flöde och styrvariabel kan man använda den enkla återkopplingen som visas i fig. 2.9.

Flödet mätes således. Skillnaden mellan det önskade flödet och det mätta flödet matas till en förstärkare som får påverka ventilen. Antag att sambandet mellan flöde q och ventilläge u ges av

$$q = g(u)$$

och att förstärkaren är linjär, dvs.

$$u = ke.$$

Vidare gäller

$$e = q_r - q.$$

Vi finner då att följande samband gäller mellan det önskade och det verkliga flödet

$$q = g[k(q_r - q)].$$

Om ventilkarakteristikan är kvadratisk, dvs.

$$g(u) = u^2 \qquad 0 \leq u \leq 1$$

finner vi

$$q = k^2(q_r - q)^2,$$

dvs.

$$q = q_r + \frac{1}{k}\sqrt{q}.$$

Om flödet q kan variera mellan 0 och 1 blir alltså avvikelsen i linjäritet högst $1/k$, där k är förstärkningen.

I fig. 2.10 visas sambandet mellan ärvärde och börvärde för olika värden på förstärkningen k. Vi ser alltså att en avsevärd förbättring i linjäritet erhålles redan vid måttliga förstärkningar. Det är mycket vanligt att enkla reglerkretsar används på detta sätt för att förenkla processamband genom lokal återkoppling.

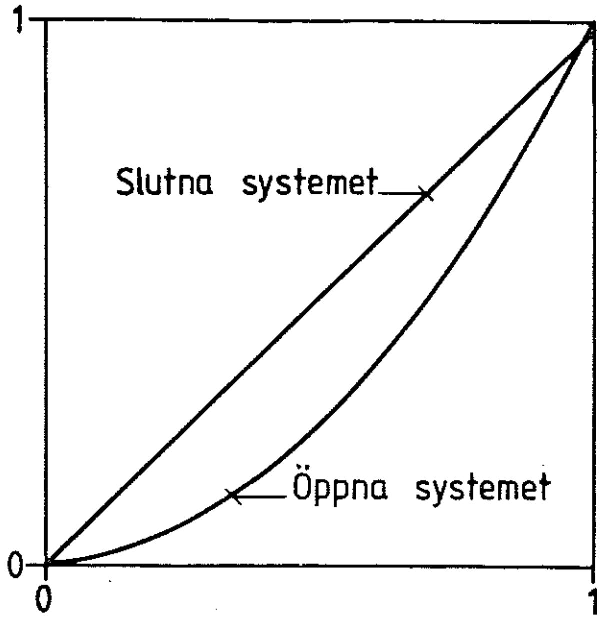


Fig. 2.10 - Ventilkarakteristik för det slutna systemet vid olika förstärkningar.

2.8 POSITIV ÅTERKOPPLING

Den negativa återkopplingens trevliga egenskaper belystes i avsnitt 2.6 och i avsnitt 2.7. Det är naturligt att fråga vad som händer om återkopplingen är positiv. Om vi utgår från samma resonemang som i avsnitt 2.6 och förutsätter att processen är ett statiskt system så finner vi att ekvation (2.12) ersätts med ekvationen

$$e = y_r - y = \frac{1}{1 - k_P k_R} y_r + \frac{1}{1 - k_P k_R} d \tag{2.16}$$

Betrakta t.ex. det fel som orsakas av en konstant störning d. Med växande positiv återkoppling så ökar felet. Det blir oändligt stort om kretsöverföringen $k_P k_R$ blir ett.

Ekvation (2.16) visar också att felet skulle kunna minskas vid positiv återkoppling om kretsöverföringen väljs mycket stor. Om den process som regleras är dynamisk så gäller dock ej detta resonemang, ty jämviktstillståndet kommer ej att uppnås. Vi illustrerar vad som händer med ett enkelt exempel. Eftersom positiv återkoppling ej har så bra egenskaper, förekommer det ej så ofta i tekniska system. Positiv återkoppling är däremot vanlig i biologiska system och vi väljer därför ett välkänt exempel från biologin.

E x e m p e l 2.3 (Befolkningsexplosionen)

Betrakta en population av n individer. Det antal individer som föds och dör under en tidsperiod antas vara proportionella mot populationens storlek vid periodens början. Populationens utveckling kan då beskrivas av ekvationen

$$n(t+1) = n(t) + fn(t) - dn(t) \qquad (2.17)$$

där f och d anger födelse- respektive dödstalen.

Ekvation (2.17) kan tolkas som en ekvation som beskriver ett enkelt återkopplat system. Inför

$$u(t) = fn(t) - dn(t) = (f-d)\, n(t) \qquad (2.18)$$

ändringen i antalet i individer. Ekvation (2.18) kan då skrivas

$$n(t+1) = n(t) + u(t).$$

Denna ekvation kan tolkas som en ekvation som beskriver en process. Styrvariabeln är u och utsignalen är n. Ekvationen (2.17) kan tolkas som en ekvation som beskriver återkopplingen. Återkopplingen är positiv om $f > d$, ty antalet nytillkommande individer ökar då med befolkningen. Återkopplingen är negativ om $f < d$, dvs om födelsetalet är mindre än dödstalet.

Det är lätt att inse hur systemet uppför sig. Införes

$$a = 1 + f - d$$

så kan ekvationen (2.17) skrivas

$$n(t+1) = an(t).$$

Befolkningsutvecklingen beror alltså kritiskt av det numeriska värdet av talet a. Om återkopplingen är negativ så är a mindre än 1 och antalet individer i populationen avtar exponentiellt mot noll.

Om $a = 1$, dvs återkopplingen saknas, så bibehåller populationen sin storlek. Om återkopplingen är positiv så växer antalet individer mot oändligheten. Se fig. 2.11. I det speciella fallet säger man att systemet är <u>stabilt</u> om återkopplingen är negativ

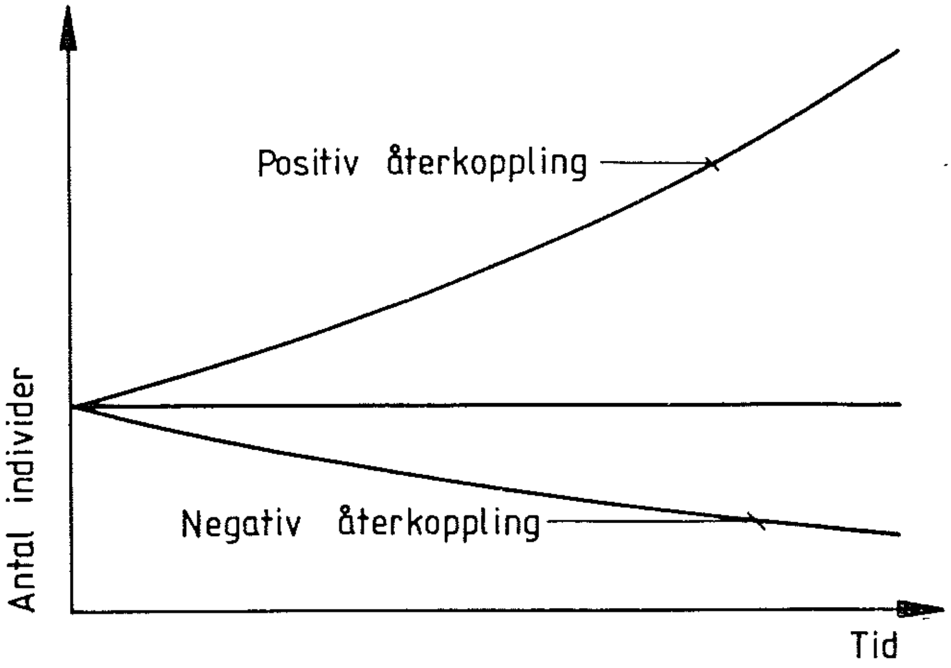


Fig. 2.11 - Visar hur befolkningsutvecklingen beror av återkopplingens tecken.

och att systemet är instabilt om återkopplingen är positiv. I exemplet är det lätt att förstå vad som händer. Om födelsetalet är större än dödstalet så ökar populationen med en given procentuell andel i varje tidsperiod.

□

System med positiv och negativ återkoppling har således helt olika egenskaper. Eftersom det alltid är svårt att hålla reda på tecken, har de flesta regulatorer en omkopplare så att reglerfelets tecken lätt kan växlas.

2.9 STABILITET

Resonemanget i avsnitt 2.6 antyder att det är gynnsamt att alltid välja kretsförstärkningen så stor som möjligt. Det är då naturligt att fråga om det finns något som sätter en gräns för kretsförstärkningen. Att en sådan gräns ej erhålles i avsnitt 2.6 beror på att det antagits att processen kan inta ett jämviktsläge för alla värden på kretsförstärkningen. Om man tar hänsyn till att processen är dynamisk visar det sig att det finns bestämda gränser för hur stor kretsförstärkningen kan göras. För stora värden på kretsförstärkningen visar det sig att jämviktsläget ej kan intas. Fig. 2.12 illustrerar vad som kan hända.

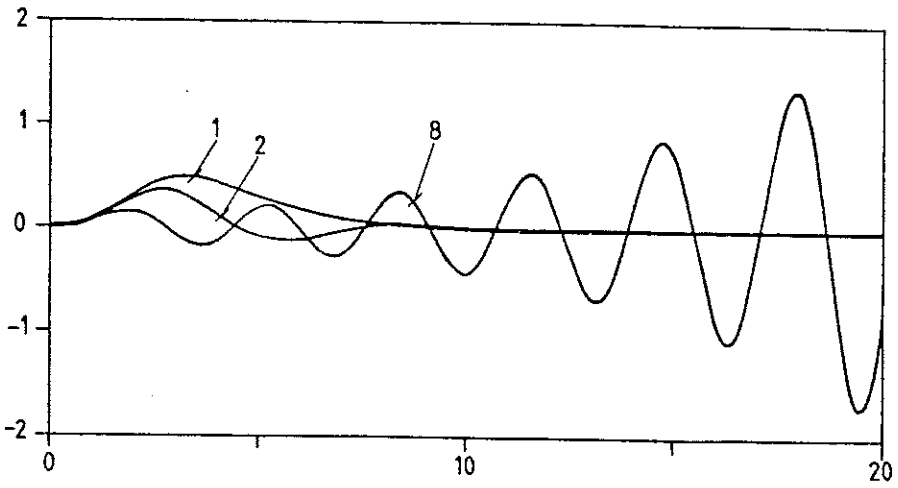


Fig. 2.12 - Reglerfelet för en enkel reglerkrets som utsättes för en pulsstörning.

Det framgår av figuren att en ökning av kretsförstärkningen ger förbättrade reglerprestanda. Reglerfelet efter en belastningsstörning blir mindre med ökande kretsförstärkning. Då kretsförstärkningen ökas över ett givet kritiskt värde så uppstår större och större pendlingar i utsignalen och något jämviktsläge uppnås ej. Detta fenomen observerades empiriskt i reglerteknikens begynnelse. Ett av de viktigaste målen för den tidiga teoribildningen var att finna lämpliga begrepp och metoder för att beskriva och förstå vad som händer. Om systemet befinner sig i jämvikt och sedan utsättes för en liten störning så kan följande fall inträffa:

- Reglerfelet kan avta monotont
- Reglerfelet kan bli konstant
- Reglerfelet kan växa monotont
- Reglerfelet kan vara en svängning med avtagande amplitud
- Reglerfelet kan vara en svängning med konstant amplitud
- Reglerfelet kan vara en svängning med växande amplitud

De olika fallen har illustrerats i fig. 2.13. I de fall då reglerfelet går mot noll kallas jämviktsläget <u>stabilt</u>. I de andra fallen kallas jämviktsläget <u>instabilt</u>. Det kan mycket väl inträffa att ett jämviktsläge är stabilt och ett annat jämviktsläge är instabilt. Stabilitet är således ett begrepp som primärt hänför sig till ett speciellt jämviktsläge. För speciella typer av system kan man visa att om ett jämviktsläge är stabilt så är alla andra jämviktslägen också stabila. I sådana fall kan man tala om stabila och instabila system.

Man kan intuitivt förstå hur instabilitet kan uppkomma genom att undersöka hur sinusformade signaler fortplantas i det slutna systemet. Då systemen är dynamiska uppstår en fördröjning och amplitudförändring av sinussignalen.

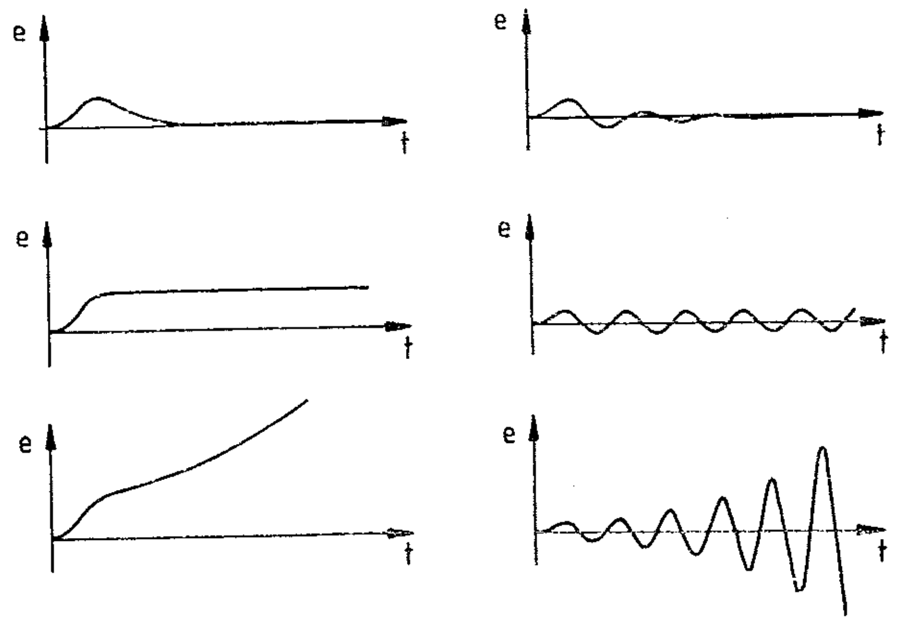


Fig. 2.13 - Illustrerar hur reglerfelet kan se ut för ett reglersystem som utsättes för en störning.

Fördröjningen beror av signalens frekvens. Som regel ökar tidsfördröjningen med signalernas frekvens. Då fördröjningen blir så stor att den svarar mot en halv period av sinussignalen kan det ju tolkas som att sinussignalen byter tecken. Om den slutna kretsen skärs upp i en punkt kommer signalen vid snittpunkten då att vara i fas med den injicerade signalen. Om kretsförstärkningen är ett kommer signalerna dessutom att ha samma amplitud. Den uppskurna slingan kan då förbindas och en periodisk lösning kommer att upprätthållas. Om kretsförstärkningen är större än ett erhålles en krets med positiv återkoppling. Som vi såg i avsnitt 2.8 kan då instabilitet uppträda.

Av det intuitiva resonemanget kan vi också inse att instabiliteten kan hävas genom att minska kretsförstärkningen. Det finns flera situationer då intuitiva resonemang av den typ vi använt ger felaktiga resultat. För att få en verklig förståelse av stabilitetsbegreppet blir det nödvändigt att använda mer exakta uttrycksmedel i form av reglerteori. Detta skall kortfattat beröras i kapitel 3.

2.10 SAMMANFATTNING

Den enkla reglerkretsen baserad på negativ återkoppling har presenterats i detta avsnitt. Vi har visat att man med hjälp av blockschema kan ge en allmän representation av många olika reglersystem. Några viktiga begrepp såsom ärvärde, börvärde, referenssignal, mätsignal, reglerfel, kretsförstärkning och återföringsskillnad har införts. Vi har också sett hur man kan förstå hur ett reglersystem fungerar genom att leta reda på reglerfelet och utgå från att det är litet (cherche l'erreur!). Några viktiga egenskaper, nämligen känslighet för ändringar i börvärde, variationer i processegenskaper och känslighet för störningar, har undersökts. Det visar sig att användande av återkopplingsprincipen ger system som är mycket gynnsamma i dessa avseenden. Vi har också sett att i jämviktstillstånd är systemets känslighet för störningar omvänt proportionell mot kretsförstärkningen.

Det är således ur denna synpunkt gynnsamt att välja kretsförstärkningen så stor som möjligt. Begreppet stabilitet har införts. Vi har visat att positiv återkoppling lätt kan leda till att systemet blir instabilt så att jämviktstillståndet ej kan uppnås. Om de system som ingår i den enkla reglerkretsen är dynamiska så uppträder instabilitet i allmänhet vid ökande kretsförstärkning. Stabiliteten sätter således en gräns för den kretsförstärkning som kan användas.