



LUND UNIVERSITY

Elementär brottmekanik

Modéer, Matz

1980

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Modéer, M. (1980). *Elementär brottmekanik*. (Rapport TVBM; Vol. 3006). Avd Byggnadsmaterial, Lunds tekniska högskola.

Total number of authors:

1

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

AVDELNINGEN FÖR BYGGNADSMATERIALLÄRA
TEKNISKA HÖGSKOLAN I LUND – LUNDS UNIVERSITET

DIVISION OF BUILDING MATERIALS
LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY – UNIVERSITY OF LUND

ELEMENTÄR BROTTMEKANIK

ELEMENTARY FRACTURE MECHANICS

MATZ MODÉER

RAPPORT TVBM-3006

LUND SWEDEN 1980

ELEMENTÄR BROTTMEKANIK

ELEMENTARY FRACTURE MECHANICS

MATZ MODÉER

тнн

MOR

FÖRORD

Det okända skrämmer.

Detta gäller i hög grad brottmekanik.

I de flesta (alla ?) brottmekaniska böcker omges olika ekvationer av "kan visas" och "inses". När undertecknad började studera brottmekanik staplades därför naturligtvis frågetecknen på varandra. De anteckningar som fördes vid uträtandet av alla dessa frågetecken är "Elementär brottmekanik". Av denna anledning finns det ingen särskild litteraturlista, de ekvationer som härleds finns i de flesta brottmekaniska böcker.

Anteckningarna fördes redan 1975, att de inte publiceras förrän 1980 beror på den låga prioritet renskrivningen haft. På grund av denna långa tidrymd, har många medarbetare på olika sätt varit inblandade. Det mesta av arbetet har emellertid gjorts av Leif Erlandsson (som har tålamod att lyssna när unga forskarstuderande ivrigt berättar om sina "upptäckter"), Britt Andersson (som textar så vackra ekvationer), Christina Norlin (som skrivit maskin) och Mona Hammar (som klippt och klistrat). Undertecknad framför sitt stora tack.

Trondheim i juni 1980

Matz Modéer

INLEDNING

Mänskligheten har alltid känt till och utnyttjat att sprickor i ett material kraftigt kan påverka dess hållfasthet. Stenåldersmannen använde denna kunskap då han tillverkade sina stenverktyg, själv har Du säkert också utnyttjat den, t ex vid vedhuggning eller då Du rivit sönder ett tygstycke i två delar.

Med en spricka i ett material menas inte ett vanligt hål utan en inhomogenitet med skarp spets - den kan i en del material betraktas som en separation mellan två atomplan. Man kan vid beräkning av deformationer sålunda inte använda vanlig kontinuumsmekanic för ett litet område framför sprickspetsen. Gör man det så erhåller man den fysikaliskt orimliga lösningen att deformationen vid sprickspetsen växer obegränsat. Genom att tillskriva detta lilla sprickspetsområde olika egenskaper, kan man emellertid reducera deformationerna till ändlig storlek och därigenom studera hur en spricka påverkar materialets hållfasthet. Dessa studier faller inom ämnesområdet brottmekanic.

Disciplinen "Brottmekanic" är en ung vetenskap. Detta gör att ingenjörer och forskare som inte direkt arbetar med hållfasthetstekniska problem saknar en del grundläggande kunskaper om hur material uppför sig ur brottmekanisk synpunkt. Denna skrift kan förhoppningsvis vara till hjälp vid utfyllandet av dessa kunskapsluckor.

Elementär brottmekanic är mycket allmänt hållen. Den är skriven så att man med endast enkla kunskaper i matematik skall kunna följa hur de grundläggande sambanden inom brottmekaniken tagits fram, vilka approximationer och förenklingar som är gjorda samt hur man praktiskt kan använda resultaten.

Det finns inga egna forskningsresultat redovisade, skriften innehåller endast härledningur ur redan kända samband. För den som redan till viss del är bevärdad i brottmekaniska eller hållfasthetstekniska frågor, rekommenderas sålunda en inledande botanisering i registret.

Lund i mars 1976

Matz Modéer

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. KRAFTBEGREPPET	1
1.1 Klassiskt	1
1.2 Kinetisk energi	2
1.3 Potentiell energi	2
1.4 Energi	3
1.5 Definition av kraft	9
2. NORMALSPÄNNING	9
2.1 Enaxiellt normalspänningstillstånd	9
2.2 Fleraxiellt normalspänningstillstånd	10
2.3 Skjuvspänning och skjuvdeformation	12
2.4 Samband mellan materialkonstanterna E, G och ν	14
3. PLANT NORMALSPÄNNINGSTILLSTÅND	17
3.1 Plant spänningstillstånds jämviktsekvationer	17
3.2 Plant spänningstillstånds spänningssamband	19
3.3 Plant spänningstillstånds deformationsegenskaper	23
4. SPÄNNINGSFUNKTIONER	25
4.1 Reella spänningsfunktioner	25
4.2 Komplexa spänningsfunktioner	27
5. KURVLINJÄRA KOORDINATSYSTEM	37
6. KOLLAPSORSAKER	41
6.1 Sprickbildning	41
7. SPÄNNINGSKONCENTRATION	42
7.1 Grafisk representation - kraftlinjer	42
8. SPÄNNINGSBILDEN KRING EN SPRICKA	44
8.1 Cirkulärt hål; Leon's lösning	44
8.2 Elliptiskt hål; Inglis' lösning	47
8.3 Skarp sprickspets; Westergaards lösning	51

- III -

9. MODE I, II OCH III	57
9.1 Mode I öppning	57
9.2 Mode II skjuvning	57
9.3 Mode III ickeplan skjuvning	57
10. SPÄNNINGSINTENSITETSAKTORN	58
11. SPRICKSPETSPLASTICERING	60
11.1 Ekvivalent elastisk spricka	60
11.2 Dugdale's lösning	61
12. LINJÄR ELASTISK BROTTMEKANIK	65
12.1 Ideal brotthållfasthet	65
12.2 Griffith-sprickor	70
12.3 G kontra K	75
13. ICKELINJÄR BROTTMEKANIK	78
13.1 Elastoplastiska brott	78
13.2 J-integralen	79
13.3 J för Dugdale - Barenblatts lösning	83
14. NUMERISKA BERÄKNINGAR	84
14.1 Potential	84
14.2 Castligianos första sats	86
14.3 Styvhetsmatrisen	87
14.4 FEM, allmänt	88
14.5 Finita element i ett kontinuum	89
14.6 Assemblering av styvhetsmatrisen	93
14.7 FEM vid lösande av differentialekvationer	96
15. ELEMENTÄR BROTTMEKANIK	97
15.1 Allmänt	97
15.2 Atomär brotthållfasthet	98
15.3 Griffith	99
15.4 Modern brottmekanik	100
15.5 Sprickspetszoner	102

INTRODUCTION

Man has always known and used that cracks in materials influence its strength in a significant way. Stone-age man used this knowledge when making his tools; you have probably used it yourself, for example while chopping wood or tearing fabric in two pieces.

A crack in a material does not mean an ordinary hole but an inhomogeneity with a sharp point - it can in some materials be considered as a separation between two atomic layers. In figuring the deformation you cannot use ordinary continuum mechanics for the small area around the crack tip. If you do, you will reach the physically impossible solution that the deformation increases without limit. By describing the crack tip area in a different way from the rest of the material, it is possible to reduce the deformations and by that study how a crack will influence the strength of materials. This is what fracture mechanics is all about.

The science of fracture mechanics is a young science. That is the reason engineers and researchers not working continuously with problems relating to the "strength of materials" lack knowledge in materials fracture behaviour. Hopefully this report will help eliminate this problem.

Elementary fracture mechanics is general. The reader needs only basic knowledge in mathematics to be able to follow how approximations and simplifications have been used in the development of fracture mechanics and how these results can be utilized in solving practical problems.

This report does not specify any special research results, it contains only deductions of well known connections. The reader, to some extent familiar with fracture problems, is therefore recommended to start reading the list of contents.

Lund in March 1976

Matz Modéer

LIST OF CONTENTS

1. CONCEPTION OF FORCE	1
1.1 Classically	1
1.2 Kinematic energy	2
1.3 Potential energy	2
1.4 Energy	3
1.5 Definition of force	9
2. NORMAL STRESS	9
2.1 Uniaxial normal state of stress	9
2.2 Multiaxial normal state of stress	10
2.3 Shear stress and strain	12
2.4 Relationship between E, G, and ν	14
3. PLANE STATE OF STRESS	17
3.1 Equilibrium equations	17
3.2 Mohr's circles	19
3.3 Compatibility equations	23
4. STRESS FUNCTION	25
4.1 Real stress function	25
4.2 Complex stress function	27
5. CURVILINEAR COORDINATES	37
6. MODES OF FAILURE	41
6.1 Cracking	41
7. STRESS CONCENTRATION	42
7.1 Graphic representation - elastic strings	42
8. STRESSES AROUND A CRACK	44
8.1 Circular hole; solution by Leon	44
8.2 Elliptical hole; solution by Inglis	47
8.3 A sharp crack; solution by Westergaard	51
9. DIFFERENT CRACK CONFIGURATIONS	57
9.1 Mode I opening	57
9.2 Mode II shear	57
9.3 Mode III antiplane strain	57

- VI -

10. THE STRESS INTENSITY FACTOR	58
11. PLASTICITY AROUND A CRACK	60
11.1 The equivalent elastic crack	60
11.2 The Dugdale solution.	61
12. LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS	65
12.1 Ideal fracture strength	65
12.2 Griffith crack	70
12.3 G versus K	75
13. YIELDING FRACTURE MECHANICS	78
13.1 Elastoplastic fracture	78
13.2 The J-integral	79
13.3 The J-integral for Dugdale's solution	83
14. NUMERICAL CALCULATION	84
14.1 Potential	84
14.2 The first theorem by Castigliano	86
14.3 The stiffness matrix	87
14.4 FEM in general	88
14.5 Finite elements in a continuum	89
14.6 Assembling of the stiffness matrix	93
14.7 FEM - solution of differential equations	96
15. ELEMENTARY FRACTURE MECHANICS	97
15.1 Introduction	97
15.2 Atomic fracture strength	98
15.3 Griffith	99
15.4 Modern fracture mechanics	100
15.5 The crack tip zone	102

1 KRAFTBEGREPPET

1.1 Klassiskt

Varje begränsad materiemängd kan sägas utgöra en kropp. Ett mått på denna materiemängd är kroppens massa m . Förmågan att accelerera denna massa benämnes klassiskt KRAFT.

Dessa tankar framfördes första gången av sir Isaac Newton (1642 - 1727) i hans 1687 publicerade verk "Philosophiæ naturalis principia mathematica". Han postulerade där bl a tre lagar:

I Tröghetslagen: Det existerar ett referenssystem i vilket en partikel som ej påverkas av någon kraft rör sig med konstant hastighet v_0 .

II Kraftlagen: För en partikel med massan m och rörelsemängden $\vec{p} = m * \vec{v}$ gäller

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F} \quad \dots(1.1.1)$$

där \vec{F} är den kraft som verkar på partikeln.

III Lagen om verkan och motverkan:

De ömsesidiga krafter varmed två partiklar påverkar varandra är lika stora och motsatt riktade.

Newtons kraftlag ger en väldefinierad betydelse åt begreppet kraft. Användbarheten i denna ekvation ligger i att man i konkreta situationer kan bilda ett annat uttryck för kraften

$$F = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

1.2 Kinetisk energi

För att uträtta ett arbete åtgår energi. I det endimensionella fallet kan detta visas med hjälp av ekvation (1.1.1):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = m \frac{\partial v}{\partial t} = F(x)$$

$$\text{men } \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v^2)$$

$$\therefore m \frac{1}{2} \int_{v_0}^v \frac{\partial}{\partial x} (v^2) dx = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

$$\frac{m}{2} \int_{v_0}^v d(v^2) = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad \dots(1.2.1)$$

Detta leder till följande definitioner:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \text{partikelns kinetiska energi}$$

$$A = \int_{x_0}^x F(x) dx = \text{det arbete som kraften } F(x) \text{ uträttar från } x_0 \text{ till } x$$

För att förändra en rörelse måste man alltså tillföra energi.

1.3 Potentiell energi

Den primitiva funktionen till $-F(x)$ benämnes potential eller potentiell energi.

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{x_0}^x -U(x) = -U(x) + U(x_0)$$

Detta kan också skrivas som:

$$F(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

Insatt i ekvation (1.2.1) fås:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -U(x) + U(x_0)$$

eller annorlunda uttryckt:

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = \frac{mv_0^2}{2} + U(x_0)$$

Normalt skrives detta:

$$T + U = \text{konstant} \quad \dots (1.3.1)$$

En kropp i vila eller rörelse har sålunda ett konstant energinnehåll, summan av den kinetiska och den potentiella energin.

1.4 Energi

1905 publicerade Albert Einstein (1879 - 1955) sin speciella relativitetsteori och med den ett direkt samband mellan begreppen massa och energi. Förenklat kan detta samband visas så:

Enligt klassisk relativitet gäller så kallad Gallileitransformation mellan två system enligt figur 1.4.1. Det primade

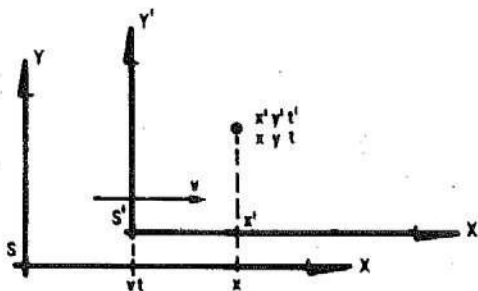


Fig 1.4.1. Klassisk relativitet

systemet tänkes röra sig med hastigheten v i x -led relativt det oprimade systemet. Med beteckningar enligt figuren fås då för en händelse •:

$$\begin{aligned}x &= x' + vt & x' &= x - vt \\y &= y' & y' &= y\end{aligned}\quad \dots(1.4.1)$$

Denna klassiska relativitetsprincip innebär att mekanikens lagar är lika i alla referenssystem. Einsteins relativitetsteori postulerar att alla fysikens lagar är identiska i alla referenssystem. Genom att antaga (vilket också ett otal försök visat, bland andra av Michelson och Moorley) att ljusets hastighet är konstant kan man istället för den tidigare Gallileitransformationen göra en så kallad Lorentztransformation.

Enligt ekvation (1.4.1) är $x' = x - vt$. Denna ekvation är av typen $x' = ax + bt$.

Om detta $x' = 0$, så är $x = vt$ och:

$$0 = avt + bt \Rightarrow \frac{b}{a} = -v$$

Om a sättes till $\gamma(v)$ fås nu:

$$x' = ax + bt = a\left(x + \frac{b}{a}t\right) = \gamma(v)(x - vt)$$

Om systemen är ekvivalenta så innebär detta för en iakttagare i det primade systemet att:

$$x = \gamma(-v)(x' + vt')$$

Genom att vända koordinataxlarna, d v s:

$$x' \rightarrow -x'$$

$$x \rightarrow -x$$

$$v \rightarrow -v$$

fås:

$$-x' = \gamma(-v)(-x+vt) \Rightarrow x' = \gamma(-v)(x-vt)$$

d v s $\gamma(v) = \gamma(-v)$

eller:

$$x = \gamma(v)(x' + vt')$$

$$x' = \gamma(v)(x - vt)$$

....(1.4.2)

Vi väljer nu tiden $t = t' = 0$ då koordinataxlarna sammanfaller och utsänder vid denna tidpunkt en ljusimpuls från origo. Ljusimpulsen träffar en partikel och händelsen i S sker i x vid t och i S' i x' vid t' . Då ljushastigheten c är konstant i alla system är emellertid $x = ct$ och $x' = ct'$ vilket via (1.4.2) ger:

$$ct = \gamma(v)(ct' + vt') \quad (a)$$

$$ct' = \gamma(v)(ct - vt) \quad (b)$$

Med t' enligt (b) insatt i (a) fås:

$$ct = \gamma(v)(c+v) \gamma(v)(c-v) t/c.$$

$$c^2 = [\gamma(v)]^2 (c^2 - v^2)$$

$$\therefore [\gamma(v)]^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

\Rightarrow

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

....(1.4.3)

där minustecknet kan strykas eftersom Lorentztransformationen måste gå mot Gallileitransformationen då $v \ll c$.

Ekvation (1.4.3) insatt i (1.4.2) ger

$$x = (x' + vt') / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \dots (1.4.4)$$

$$x' = (x - vt) / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Ur den första av dessa ekvationer fås:

$$t' = \frac{1}{v} \left[x \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - x' \right]$$

Med x' enligt den andra av ekvationerna 1.4.4 fås så:

$$t' = \frac{1}{v} \left[x \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - (x - vt) / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right] = \frac{1}{v} \left[\frac{x - x \left(\frac{v}{c}\right)^2 - x + vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]$$

På liknande sätt fås t och vi kan teckna:

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad ; \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \dots (1.4.5)$$

För att kunna formulera massa - energi sambandet måste vi först definiera relativistisk rörelsemängd. Denna ansluter sig till den klassiska definitionen $\vec{F} = m\vec{v}$ med skillnaden att $m = m(v)$. Nödvändig form för $m(v)$ fås genom att studera en stöt.

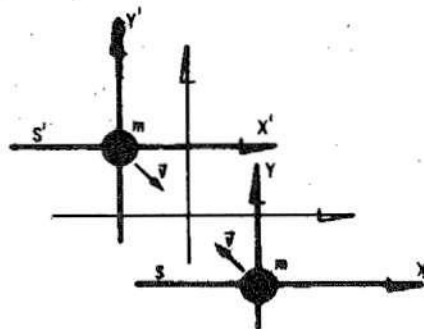


Fig 1.4.2. Stöt mellan två ekvivalenta partiklar.

Symmetrin i systemet enligt figur 1.4.2 ger att totala $\vec{P} = 0$. Om vi nu betraktar systemet stående på S-korsets x-axel samt låter x- och x'-axlarna sammanfalla fås:

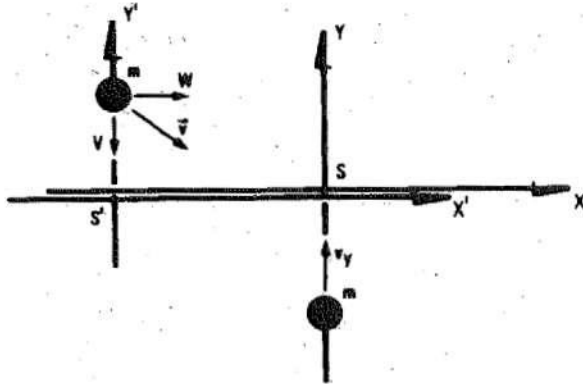


Fig 1.4.3. Stöt enligt fig 1.4.2 betraktad från S-systemet

Med uttryck för Δt enligt ekvation (1.4.5) fås:

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t' + \frac{w\Delta x'}{c^2}} = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}} = v \sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}$$

Rörelsemängden i y-led för hela systemet sett från S-systemet är:

$$m(V) V - m(v) v_y = 0 \rightarrow m(V) V = m(v) v \sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}$$

Om nu $V \rightarrow 0$, så $w \rightarrow v$ (\vec{v} betecknas i detta fall v).

$$\therefore m(0) = m(v) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

\rightarrow

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

.....(1.4.6)

där m_0 betecknar vilomassan.

Den kinetiska energin kan skrivas:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right)}{dt} = \vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \dots(1.4.7)$$

vilket är en differentialekvation med en konstant som ges av $T(v=0) = 0$.

Om vi vidareutvecklar (1.4.7) erhålles relativistiskt:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \vec{v}) - \vec{p} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{v} \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) - \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Det var genom denna omskrivning samt följande idé som Einstein visade det av oss sökta sambandet.

$$\frac{d}{dt} \left(mc^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{mc^2}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(-\frac{2\vec{v}}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = -\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Sålunda fås nu:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) + \frac{d}{dt} \left(mc^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \right. \\ &\left. + mc^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \end{aligned}$$

Vi kan nu teckna den relativistiska kinetiska energin:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + C \quad \text{där} \quad T(v=0) = 0 \quad \text{ger} \quad C = -m_0c^2$$

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \quad \dots(1.4.8)$$

Den totala energin kan nu skrivas som:

$$E = T + U = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 + m_0c^2$$

som för normala hastigheter v antar formen:

$$E = mc^2 \quad \dots(1.4.9)$$

1.5 Definition av kraft

Som avrundning på dessa energiska betraktelser, kan nu följande fastslås:

En kraft är den energi som behöver tillföras ett system för att förändra dess tillstånd av vila eller rörelse.

2 NORMALSPÄNNING

2.1 Enaxiellt normalspänningstillstånd

Med normalkraft avses en kraft som verkar utefter normalen till den yta där den angriper. En sådan kraft F får verka på en homogen stång enligt figur 2.1.1.



Fig 2.1.1. Dragen homogen stång

Om den ursprungliga arean var A , diametern D och längden L och den nya diametern är $D - \Delta D$ och längden $L + \Delta L$, kan de inom elasticitetsteorin grundläggande sambanden spänning σ och töjning ϵ definieras som:

$$\sigma = F / A \quad \dots(2.1.1)$$

$$\epsilon_l = \Delta L / L \quad \dots(2.1.2)$$

$$\epsilon_t = \Delta L / L \quad \dots(2.1.3)$$

För ett elastiskt homogent material gäller enligt Robert Hooke (1635 - 1702) av år 1676:

UT TENSIO SIC VIS

eller "som förlängningen så kraften", dvs $\sigma = \text{konstant} \cdot \epsilon_l$.

Konstanten kallas Elasticitetsmodul eller Youngs modul och betecknas ofta E .

$$\therefore \sigma = E \epsilon_l \quad \dots(2.1.4)$$

Mellan (2.1.3) och (2.1.4) gäller $\epsilon_t = \text{konstant} \cdot \epsilon_l$.

Konstanten kallas tvärkontraktionstalet eller Poissons tal och betecknas ofta ν .

$$\therefore \epsilon_t = \nu \epsilon_l \quad \dots(2.1.5)$$

2.2 Fleraxiellt normalspänningstillstånd

En parallelepiped påverkas av normalkrafterna F_x , F_y och F_z .

Om dragande normalspänning och relativ förlängning betecknas som positiva, erhålles för ϵ_x enligt (2.1.4) och (2.1.5):

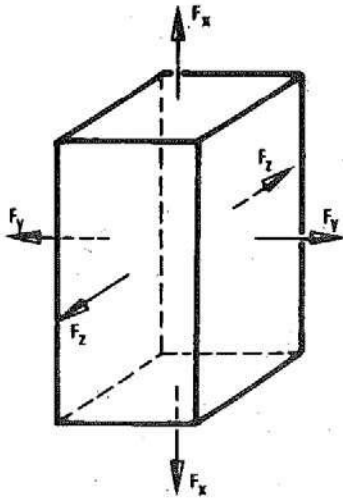


Fig 2.2.1. Dragen parallelepiped

- från F_x $+\sigma_x/E$
- från F_y $-\nu \sigma_y/E$
- från F_z $-\nu \sigma_z/E$

$$\therefore \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad \dots (2.2.1a)$$

På samma sätt erhålles

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \quad \dots (2.2.1b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad \dots (2.2.1c)$$

Ekvation (2.2.1) kallas allmänt för Hookes generaliserade lag. Genom att lösa ut normalspänningarna fås:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \epsilon_x + \nu (\epsilon_y + \epsilon_z)] \quad \dots (2.2.2.a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \epsilon_y + \nu (\epsilon_x + \epsilon_z)] \quad \dots (2.2.2.b)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \epsilon_z + \nu (\epsilon_x + \epsilon_y)] \quad \dots (2.2.2.c)$$

2.3 Skjuvspänning och skjuvdeformation

En parallelepiped påverkas av normalkraften F . Över ett snitt tillräckligt långt från F 's angreppspunkt verkar då en jämnt fördelad spänning σ . Se figur 2.3.1. b.

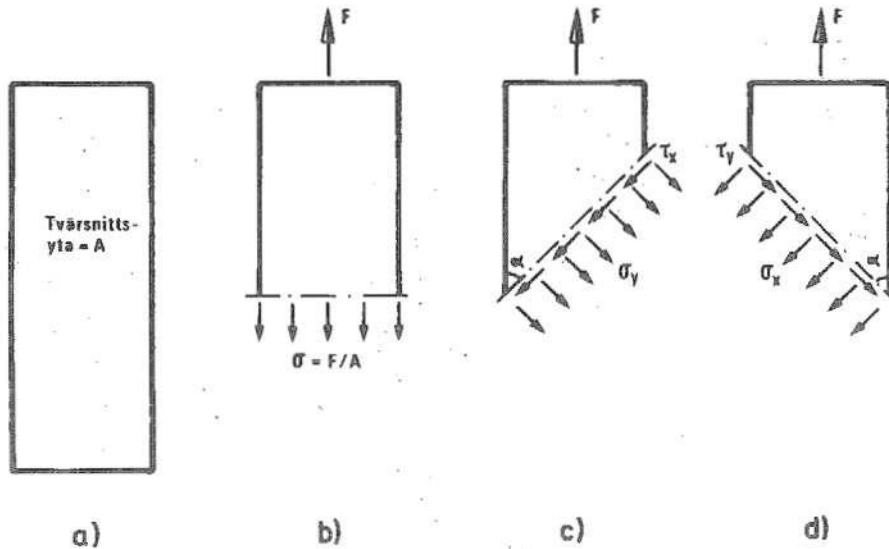


Fig 2.3.1. Spänningsbild i en dragen parallelepiped

Om vi istället tänker oss ett snitt som bildar vinkeln α med vertikalplanet, ger en enkel jämviktsanalys att det i snittytan måste finnas en tangentiellt verkande spänning. Denna spänning kallas skjuvspänning eller skärspänning och betecknas τ . Se figur 2.3.1. c och d.

Om vi nu ur den dragna parallelepipeden i figur 2.3.1. a, tar ut ett infinitesimalt element med tjockleken d fås följande kraftspel: (se omstående sida)

En momentekvation kring o ger:

$$\overset{\curvearrowright}{M}_o = 2\tau_x d dx dy / 2 - 2\tau_y d dy dx / 2 = 0$$

$$\therefore \tau_x = \tau_y = \tau$$

....(2.3.1)

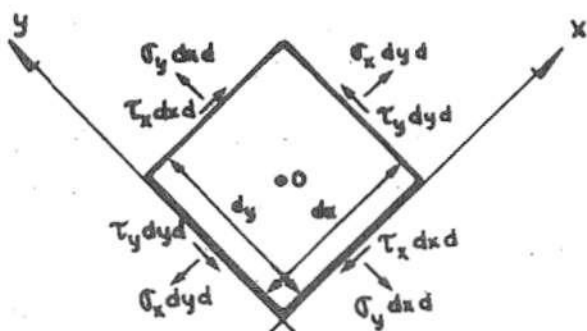


Fig 2.3.2. Kraftspel i infinitesimalt ytelement med tjocklek d vilket kallas "lagen om parvisa lika skjivspänningar".

Följande deformationsbild erhålles:

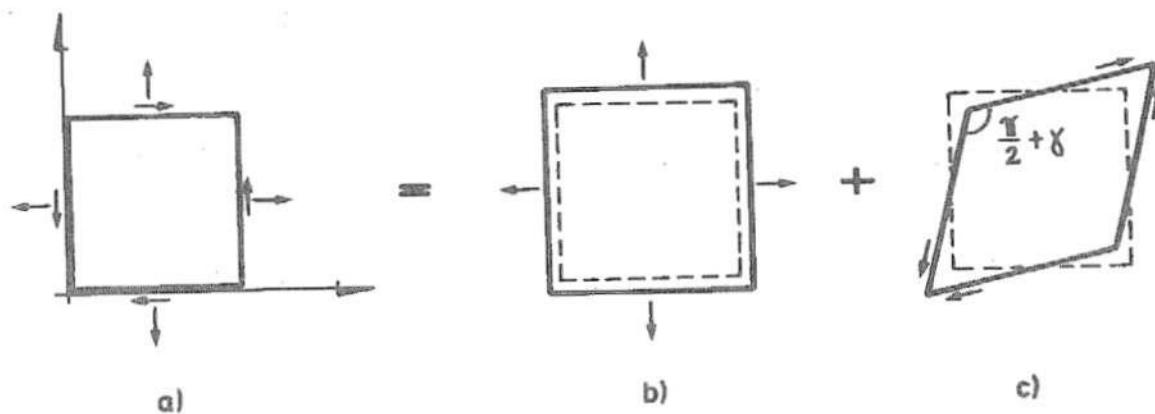


Fig 2.3.3. Deformation hos element enligt fig 2.3.2.

För fig 2.3.3b gäller Hooke's lag med proportionalitet mellan σ och ϵ . För fig 2.3.3c gäller att $\tau = \text{konstant} \cdot \gamma$. Konstanten benämnes skjuvmodul och betecknas G .

$$\tau = G \gamma$$

....(2.3.2)

I tre dimensioner fås:

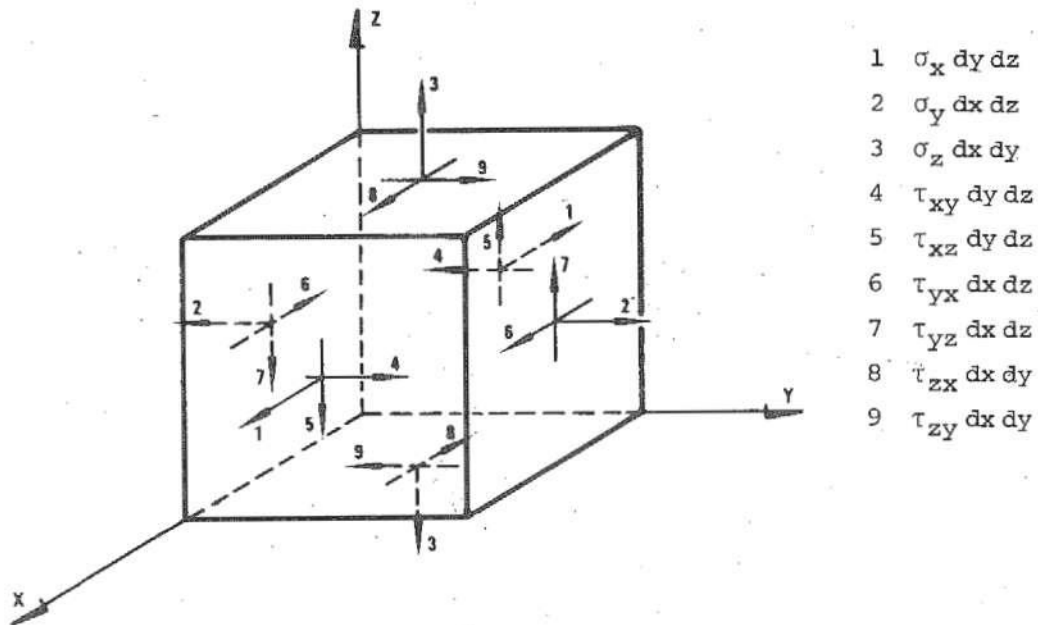


Fig 2.3.4. Kraftspel i infinitesimalt rymdelement

Lagen om parvisa lika skjuvspänningar ger:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \dots(2.3.3)$$

Ekvation (2.3.2) i tre dimensioner blir:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} ; \tau_{xz} = G \gamma_{xz} ; \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad \dots(2.3.4)$$

Till exempel refererar γ_{xy} till ett plan parallellt med xy-planet!

2.4 Samband mellan materialkonstanterna E, G och ν

Ett infinitesimalt ytelement med tjockleken d påverkas av spänningar σ_x och σ_y . Om $\sigma_y = -\sigma_x = \sigma$ ($\sigma_z = 0$) fås:

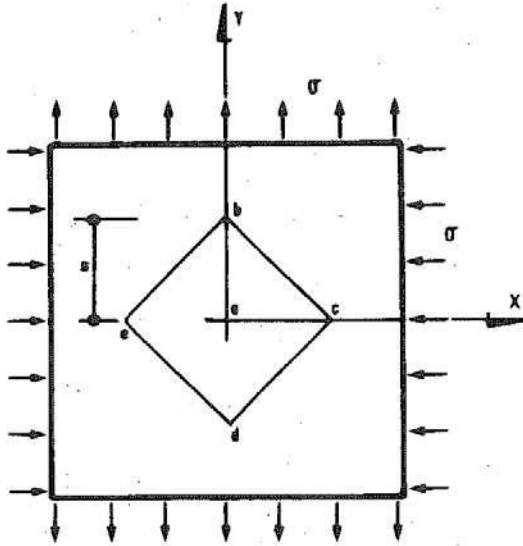


Fig 2.4.1. Spänningar i ytelement med tjocklek d

Ekvationerna (2.2.1) ger

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] = -\frac{\sigma}{E} (1 + \nu) \quad \dots (2.4.1.a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] = \frac{\sigma}{E} (1 + \nu) \quad \dots (2.4.1.b)$$

En skiva b-c-d-e enligt figur 2.4.1 skäres ut. På en kvadrant 0-b-c med katetlängden a av denna verkar krafterna:

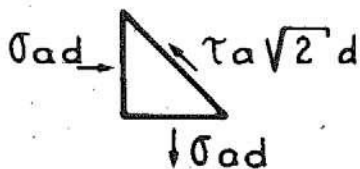


Fig 2.4.2. Krafter på kvadranten 0-b-c ur fig 2.4.1.

Kraften $\tau \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot d$ ges av jämviktskravet. En vertikal projektionsekvation ger nu:

$$\downarrow \sigma a d - \tau a \sqrt{2} d \cos 45 = 0$$

$$\therefore \sigma = \tau$$

$$\dots (2.4.2)$$

För skivan b-c-d-e fås följaktligen det renodlade skjuvspänningstillståndet:

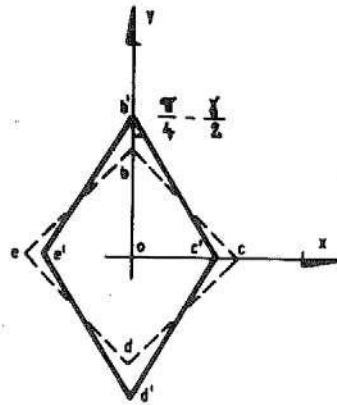


Fig 2.4.3. Skjuvdeformation för skivan b-c-d-e ur fig 2.4.1.

Definitionsmässigt fås:

$$\frac{Oc'}{Ob'} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} \quad \dots (2.4.3)$$

Men enligt ekvationerna (2.4.1) är:

$$Oc' = a(1 + \epsilon_x) = a \left[1 - \frac{\sigma}{E} (1 + \nu) \right]$$

$$Ob' = a(1 + \epsilon_y) = a \left[1 + \frac{\sigma}{E} (1 + \nu) \right]$$

vilket insatt i ekvation (2.4.3) ger:

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma}{E} (1 + \nu)}{1 + \frac{\sigma}{E} (1 + \nu)} \Rightarrow \frac{2 - \gamma}{2 + \gamma} = \frac{E - \sigma (1 + \nu)}{E + \sigma (1 + \nu)} \Rightarrow$$

$$2E + 2\sigma(1 + \nu) - \gamma E - \gamma\sigma(1 + \nu) = 2E - 2\sigma(1 + \nu) + \gamma E - \gamma\sigma(1 + \nu) \Rightarrow$$

$$4\sigma(1 + \nu) = 2\gamma E$$

$$\therefore \gamma = \frac{2\sigma}{E} (1 + \nu) \quad \dots (2.4.4)$$

Enligt ekvationerna (2.3.2) och (2.4.2) är emellertid $\gamma = \tau/G = \sigma/G$, vilket insatt i (2.4.4) ger det sökta sambandet.

$$\frac{\sigma}{G} = \frac{2\sigma}{E} (1+\nu)$$

$$\therefore G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots(2.4.5)$$

3 PLANT NORMALSPÄNNINGSTILLSTAND

3.1 Plant spänningstillstånds jämviktsekvationer

För en tunn skiva med konstant tjocklek d uppkommer ett approximativt plant spänningstillstånd om skivan belastas av i sitt plan verkande krafter som är jämnt fördelade över skivtjockleken. Med försumbart fel är då:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_x, \sigma_y \text{ och } \tau_{xy} \quad | \quad \text{konstanta över skivtjockleken}$$

Ur en sådan skiva skäres ett infinitesimalt element med sidlängder dx och dy ut. I snittyta x angriper σ_x och τ_y och i snittyta y σ_y och τ_x . I snittyta $x+dx$ fås spänningstillskotten $\partial\sigma_x/\partial x dx$ och $\partial\tau_y/\partial x dx$, i snittyta $y+dy$ fås tillskotten $\partial\sigma_y/\partial y dy$ och $\partial\tau_x/\partial y dy$. I det allmänna fallet kan en sned volymkraft angripa i elementets centrum. Den har då komponenterna XdV och YdV .

Sammanfattningsvis fås kraftbilden: (se nästa sida)

En momentekvation kring O ger om termer av ordning större än två försummas:

$$\widehat{M}_O = 2\tau_x dx d dy / 2 - 2\tau_y dy d dx / 2 = 0$$

$$\therefore \tau_x = \tau_y = \tau$$

.....(3.1.1)

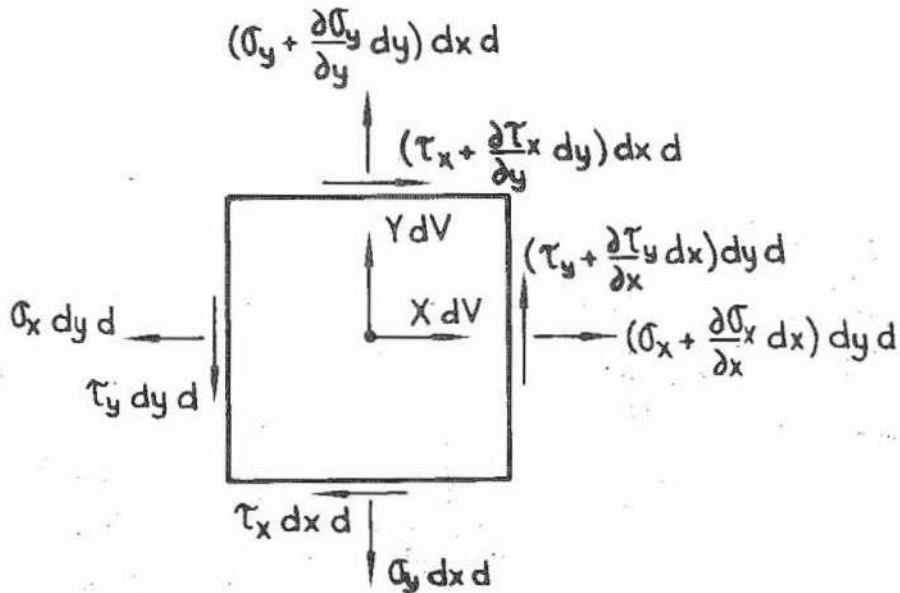


Fig 3.1.1. Kraftspel i infinitesimalt ytelement med tjocklek d

vilket bekräftar ekvation (2.3.1). En horisontell projek-
tionsekvation ger:

$$\rightarrow -\sigma_x dy d + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy d - \tau_x dx d + (\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy) dx d + X dV = 0$$

Efter förenkling och med ekvation (2.5.1) insatt fås:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy d + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy dx d + X dV = 0$$

Men då $dx dy d = dV$, kan detta uttryck ytterligare förenklas:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X = 0 \quad \dots (3.1.2)$$

På samma sätt ger en vertikal projektionsekvation:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + Y = 0 \quad \dots (3.1.3)$$

3.2 Plant spänningstillstånds spänningssamband

Speciellt gäller att finna de riktningar för vilka σ och τ antager maximala värden.

För detta ändamål utskäres ett triangulärt element ur en med plant spänningstillstånd belastad infinitesimal tunn skiva med tjockleken d . För denna fås kraftspelet:

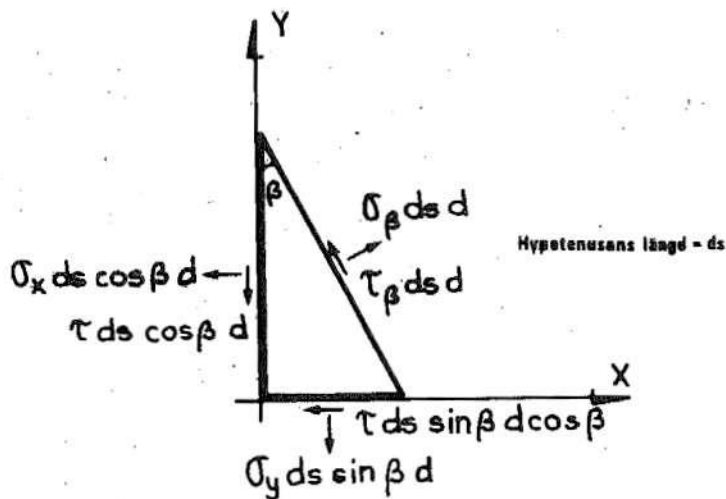


Fig 3.2.1. Kraftspel i tunn skiva med tjocklek d

Jämviktsekvationer ger:

$$\begin{aligned} \nearrow \sigma_{\beta} ds d - \sigma_x ds \cos \beta d \cos \beta - \tau ds \sin \beta d \cos \beta - \sigma_y ds \sin \beta d \sin \beta - \\ - \tau ds \cos \beta d \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\beta} = \sigma_x \cos^2 \beta + \sigma_y \sin^2 \beta + \tau \sin 2\beta$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_x \frac{\cos 2\beta + 1}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \tau \sin 2\beta$$

$$\therefore \sigma_{\beta} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\beta + \tau \sin 2\beta \quad \dots (3.2.1)$$

$$\tau_{\beta} ds d + \sigma_x ds \cos \beta d \sin \beta - \tau ds \sin \beta d \sin \beta - \sigma_y ds \sin \beta d \cos \beta + \tau ds \cos \beta d \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{\beta} = -\sigma_x \cos \beta \sin \beta + \sigma_y \sin \beta \cos \beta + \tau \cos 2\beta$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\beta + \frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\beta + \tau \cos 2\beta$$

$$\therefore \tau_{\beta} = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\beta + \tau \cos 2\beta \quad \dots (3.2.2)$$

Enligt ekvation (3.2.1) fås i snitt som bildar vinkeln $\beta + \pi/2$ med y-axeln:

$$\sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos (2\beta + \pi) + \tau \sin (2\beta + \pi)$$

$$\sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\beta - \tau \sin 2\beta$$

Adderar vi detta uttryck till ekvation (3.2.1) fås:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}} + \sigma_{\beta} &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\beta - \tau \sin 2\beta \\ &+ \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\beta + \tau \sin 2\beta \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{\beta+\frac{\pi}{2}} + \sigma_{\beta} = \sigma_x + \sigma_y \quad \dots (3.2.3)$$

Slutsats: Summan av två mot varandra vinkelräta normalspänningar i godtyckligt vald punkt av en skiva under plant spänningstillstånd är alltid konstant!

Extremvärde av σ_{β} fås då $\partial \sigma_{\beta} / \partial \beta = 0$.

Derivation av ekvation (3.2.1) med avseende på β ger:

$$\frac{\partial \sigma_{\beta}}{\partial \beta} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) (-2 \sin 2\beta) + \tau 2 \cos 2\beta = 0$$

Då detta är lika med $2 \times (3.2.2)$, dvs $\partial \sigma_{\beta} / \partial \beta = 2 \tau_{\beta} = 0$, följer att i de snitt β för vilka σ_{β} har extremvärde är $\tau_{\beta} = 0$!

Snittens lägen bestäms av:

$$\tan 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \dots(3.2.4)$$

Den godtyckligt valda punktens maximala och minimala normalspänningar benämnes huvudspänningar och deras riktningar huvudspänningsriktningar. De betecknas:

$$\sigma_{\beta \max} = \sigma_1 ; \sigma_{\beta \min} = \sigma_2 \quad \dots(3.2.5)$$

Om det i figur 3.2.1 redovisade triangulära elementets x- och y-axlar sammanfaller med huvudspänningsriktningarna blir sålunda $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ och $\tau = 0$.

Ekvationerna (3.2.1) och (3.2.2) blir då:

$$\sigma_{\beta} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\beta \quad \dots(3.2.6)$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta \quad \dots(3.2.7)$$

Ur (3.2.7) följer direkt att:

$$\tau_{\beta \min} = -\tau_{\beta \max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad \dots(3.2.8)$$

Extremvärdena inträffar för $\beta = \pm 45^\circ$ (+min; -max) d v s i snittytor som bildar 45° vinkel med huvudspänningsriktningarna!

Ekvation (3.2.6) kan skrivas:

$$\sigma_{\beta} - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\beta$$

Kvadreras detta uttryck och (3.2.7), varpå de summeras, fås:

$$\left[\sigma_{\beta} - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]^2 + \tau_{\beta}^2 = \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \right]^2 \quad \dots(3.2.9)$$

vilken i ett axelkors $\sigma_\beta; \tau_\beta$ beskriver en cirkel med radien $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ och medelpunkten $\{(\sigma_1 + \sigma_2)/2; 0\}$. Cirkeln angavs 1882 av Otto Mohr i en uppsats och kallas därför Mohrs spänningscirkel.

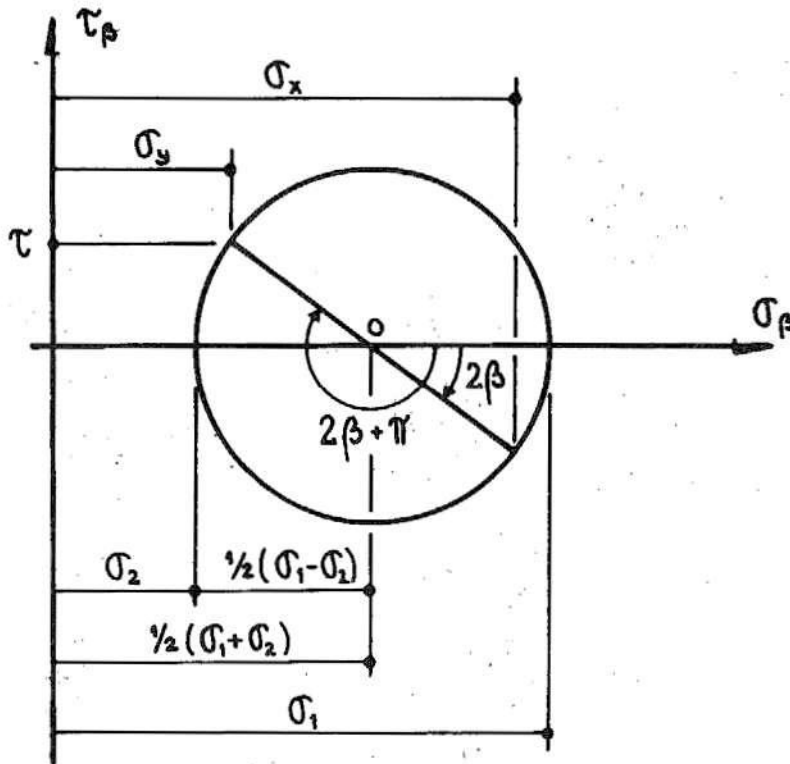


Fig 3.2.2. Mohrs spänningscirkel

Ekvation (3.2.6) ger σ_x och σ_y för kända σ_1 , σ_2 , 2β och $2\beta + \pi$. Omvänt fås σ_1 och σ_2 genom att använda Pythagoras' sats på Mohrs spänningscirkel:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \dots (3.2.10)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \dots (3.2.11)$$

3.3 Plant spänningstillstånds deformationsegenskaper

För att finna σ_x , σ_y , τ_x och τ_y behövs fyra ekvationer. Vi har tre, ekvationerna (3.1.1), (3.1.2) och (3.1.3). Dessa är spänningssamband, vi behöver också ett deformationssamband.

Detta kan härledas om vi antar

1. elastiskt, homogent och isotropt material
2. små deformationer

En tunn infinitesimal skiva med tjockleken d har i obelastat tillstånd ett läge enligt figur 3.3.1.a och i belastat tillstånd enligt 3.3.1.b.

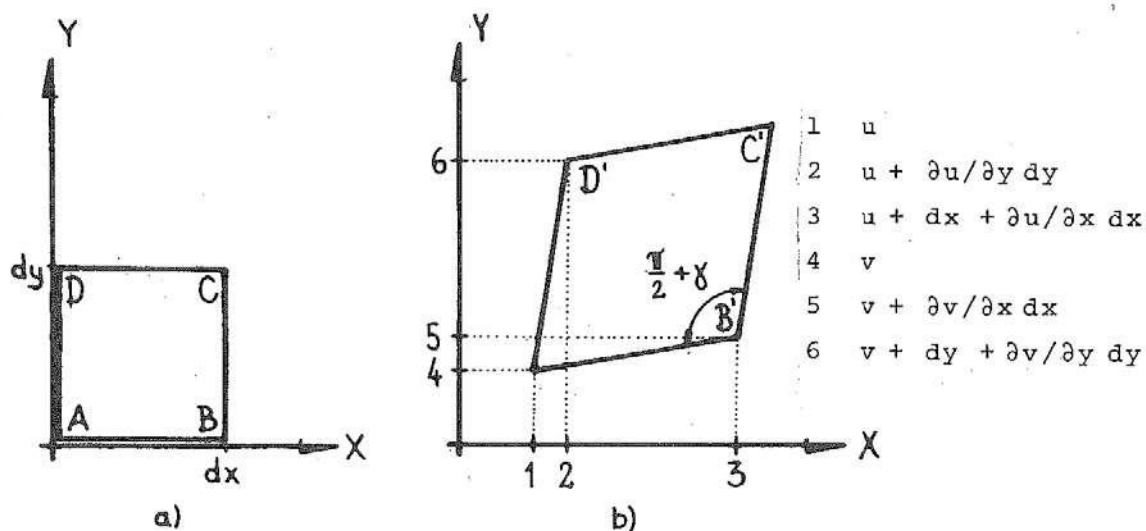


Fig 3.3.1. Deformerat ytelement med tjocklek d .

Ur figuren ovan fås:

$$\epsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots (3.3.1a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots (3.3.1b)$$

$$\gamma = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (3.3.1c)$$

Dessa tre ekvationer ger:

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Sammantaget är alltså:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \quad \dots (3.3.2)$$

Ur ekvationerna (2.2.1), (2.3.2) och (2.4.5) fås nu direkt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\tau}{G} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{E} 2(1+\nu) \tau \right] \\ \therefore & \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} \quad \dots (3.3.3) \end{aligned}$$

Om (3.1.2) deriveras med avseende på x och (3.1.3) med avseende på y fås:

$$\frac{\partial^3 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right]$$

Detta uttryck insatt i (3.3.3) ger:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] (\sigma_x + \sigma_y) - (1+\nu) \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]$$

eller om Laplace-operatören ∇ införes:

$$\nabla (\sigma_x + \sigma_y) - (1+\nu) \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] \quad \dots (3.3.4)$$

4. SPÄNNINGSFUNKTIONER

Ofta kan hållfasthetstekniska problem förenklas genom införandet av reella eller komplexa spänningsfunktioner.

4.1 Reella spänningsfunktioner

Spänningsfunktionen ϕ väljes så att:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V; \quad \tau = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \dots (4.1.1)$$

Dessa samband medför att:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}; & \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{aligned} \quad \dots (4.1.2)$$

Om nu $X = -\partial V/\partial x$ och $Y = -\partial V/\partial y$ är de i (3.1.2) och (3.1.3) införda volymkrafterna, fås:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad \dots (4.1.3)$$

Ekvationerna (4.1.2) och (4.1.3) insatta i (3.3.4) ger:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} =$$

$$(1+\nu) \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]$$

Om nu $\nabla^2 = (\nabla)^2$ införes fås:

$$\nabla^2 \Phi = -(1-\nu) \nabla^2 V \quad \dots (4.1.4)$$

För $V = 0$ introducerades 1862 spänningsfunktionen Φ av G B Airy. Numera kallas den, även för $V \neq 0$, Airys spänningsfunktion.

Airy begränsade tillämpningen till plant spänningstillståndets jämviktsekvationer. J C Maxwell utvidgade 1863 tillämpningen att gälla även det plana spänningstillståndets deformations-samband.

Vid lösningen via spänningsfunktion Φ gäller det att finna en Φ -funktion som satisfierar både (4.1.4) och gällande randvillkor. Därefter fås σ_x , σ_y och τ ur (4.1.1). Om så önskas kan sedan ϵ_x , ϵ_y och γ_{xy} bestämmas via (2.2.1) och (2.3.2).

Ofta är det bekvämt att använda sig av polära koordinater σ_r , σ_φ och τ . Om $X = Y = 0$ (vanligast) fås, om spänningsfunktion Φ väljes enligt (4.1.5), liksom tidigare:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \quad \dots (4.1.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

Om nu $\nabla = \partial^2 / \partial r^2 + 1/r \partial / \partial r + 1/r^2 \partial^2 / \partial \varphi^2$ fås

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \dots (4.1.6)$$

4.2 Komplexa spänningsfunktioner

Det komplexa talet z kan uttryckas i vanliga cartesiska koordinater via

$$z = x + iy \quad \text{eller} \quad z = r e^{i\theta}$$

där x , y , r och θ är reella variabler och $i = \sqrt{-1}$.

För att komma vidare måste först några definitioner klargöras:

Funktionen $f(z)$ säges vara analytisk i en punkt z om f är deriverbar i varje punkt i en omgivning till z .

En analytisk funktion $f(z)$ har de partiella derivatorna:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z) \frac{\partial z}{\partial y} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = if'(z)$$

Om nu $f(z)$ skrives som $f(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, där α och β är reella funktioner av x och y , fås:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} = f'(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} = if'(z)$$

$$\therefore i \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right] = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Dessa ekvationer kallas Cauchy-Riemanns ekvationer.

De ger:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} ; \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}$$

eller

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0$$

Med hjälp av Laplace-operatorn ∇ kan detta skrivas:

$$\nabla^2 \alpha = 0$$

En lösning α till Laplace's differentialekvation kallas en harmonisk funktion.

Vi kunde på liknande sätt eliminerat β från Cauchy - Riemanns ekvationer och fått:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = \nabla^2 \beta = 0$$

Sålunda erbjuder både den reella och den imaginära delen av varje analytisk funktion separata lösningar till Laplace's differentialekvation. Funktionerna α och β säges vara konjugata harmoniska funktioner.

Om nu $\psi = f(x,y)$ fås:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] X\psi &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi \frac{\partial x}{\partial x} + X \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\psi \frac{\partial x}{\partial y} + X \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + X \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial y} + X \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial y} = \\ &= X \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Om Ψ är harmonisk är $\nabla\Psi = 0$. I så fall måste också $\partial\Psi/\partial x$ vara harmonisk, ty:

$$\nabla \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \right] = 0$$

Med annat skrivsätt:

$$\nabla \left[\nabla (x\Psi) \right] = \nabla \left[0 + 2 \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right] = 0$$

$$\therefore \nabla^2 (x\Psi) = 0$$

Detta betyder (se t ex (4.1.4)) att $x\Psi$ kan användas som spänningsfunktion då Ψ är harmonisk.

På liknande sätt kan man visa att både $y\Psi$ och $(x^2+y^2)\Psi \equiv r^2\Psi$ också kan användas som spänningsfunktioner, och naturligtvis, Ψ själv.

Allmänt kan visas att varje spänningsfunktion (reell eller komplex) kan uttryckas i formen:

$$\Phi = \text{Re} \left[(x-iy) \Psi(z) + \chi(z) \right] \quad \dots(4.2.1)$$

Hur finner man nu sina spänningar och töjningar via dessa komplexa potentialer?

Om $f(z) = \alpha + i\beta$ är $\bar{f}(z) = \alpha - i\beta$ dess konjugerade funktion.

$$\therefore f(z) + \bar{f}(z) = 2\alpha = 2 \text{Re} \left[f(z) \right] \quad \dots(4.2.2)$$

Ekvation (4.2.1) kan med \bar{z} skrivas:

$$\Phi = \text{Re} \left[\bar{z} \Psi(z) + \chi(z) \right] \quad \dots(4.2.3)$$

då ju $z = x + iy$ och $\bar{z} = x - iy$

Ekvationerna (4.2.2) och (4.2.3) tillsammans ger nu

$$2\Phi = \bar{z}\Psi(z) + \chi(z) + z\bar{\Psi}(z) + \bar{\chi}(z)$$

Om detta partialderiveras med avseende på x och y, får man:

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \Psi(z) + \bar{z}\Psi'(z) + \bar{\Psi}(z) + z\bar{\Psi}'(z) + \chi'(z) + \bar{\chi}'(z)$$

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -i\Psi(z) + i\bar{z}\Psi'(z) + i\bar{\Psi}(z) - iz\bar{\Psi}'(z) + i\chi'(z) - i\bar{\chi}'(z)$$

Smidigare att arbeta med är det summerade uttrycket

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Psi(z) + z\bar{\Psi}'(z) + \bar{\chi}'(z)$$

För att erhålla uttryck för σ_x , σ_y och τ måste vi enligt ekvation (4.1.1) bilda spänningsfunktionens andraderivata.

Vi antar att V i (4.1.1) är noll:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) = 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 2\sigma_y \quad \dots (4.2.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) = 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 2\sigma_x \quad \dots (4.2.4b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) = 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -2\tau \quad \dots (4.2.4c)$$

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \Psi'(z) + \Psi'(z) + \bar{z}\Psi''(z) + \bar{\Psi}'(z) + \bar{\Psi}'(z) + z\bar{\Psi}''(z) + \chi''(z) + \bar{\chi}''(z)$$

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \Psi'(z) + \Psi'(z) - \bar{z}\Psi''(z) + \bar{\Psi}'(z) + \bar{\Psi}'(z) - z\bar{\Psi}''(z) - \chi''(z) - \bar{\chi}''(z)$$

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = i\Psi'(z) - i\Psi'(z) + i\bar{z}\Psi''(z) - i\bar{\Psi}'(z) + i\bar{\Psi}'(z) - iz\bar{\Psi}''(z) + i\chi''(z) - i\bar{\chi}''(z)$$

Nu kan vi bilda:

$$2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = 4\Psi'(z) + 4\bar{\Psi}'(\bar{z})$$

$$2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = 2\bar{z}\Psi''(\bar{z}) + 2z\bar{\Psi}''(z) + 2\chi''(z) + 2\bar{\chi}''(\bar{z})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - i 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \bar{z}\Psi''(\bar{z}) + z\bar{\Psi}''(z) + \chi''(z) - \bar{\chi}''(\bar{z}) + \bar{z}\Psi''(\bar{z}) - z\bar{\Psi}''(z) + \chi''(z) - \bar{\chi}''(\bar{z})$$

Ekvationerna (4.2.4) ger alltså:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} [\Psi'(z)] \quad \dots (4.2.5)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau = 2 [\bar{z}\Psi''(\bar{z}) + \chi''(z)] \quad \dots (4.2.6)$$

Genom att separera real- och imaginärdel av den sista ekvationen fås $(\sigma_x - \sigma_y)$ och τ separat. Vi kan således ur de komplexa potentialfunktionerna $\Psi(z)$ och $\chi(z)$ erhålla uttryck för σ_x , σ_y och τ .

Härledningen av förskjutningarna kan göras som:

via ekvationerna (3.3.1) kan vi bilda v enligt:

$$\mathcal{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \dots (4.2.7)$$

Att z -termen tas med visar sig senare vara praktiskt.

Om (4.2.7) sätts in i (2.2.2: a) får vi:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_x + \nu \mathcal{V} - 2\nu \varepsilon_x] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-2\nu) \varepsilon_x + \nu \mathcal{V}] \quad (4.2.8)$$

Vi sätter för enkelhetens skull:

$$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \quad \dots (4.2.9)$$

Detta med (2.4.5) och (4.2.8) ger:

$$\sigma_x = \lambda \mathcal{V} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{(1-2\nu)}{\nu} \lambda = \lambda \mathcal{V} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{(1-2\nu)}{\nu} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \mathcal{V} + 2G \frac{\partial u}{\partial x}$$

På samma sätt erhålles

$$\sigma_y = \lambda \nu + 2G \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = \lambda \nu + 2G \frac{\partial w}{\partial z}$$

Om nu uttrycken för σ_x och σ_y sättes in i (4.1.1) med $V = 0$ fås:

$$\lambda \nu + 2G \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \dots (4.2.10a)$$

$$\lambda \nu + 2G \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \dots (4.2.10b)$$

Enligt (2.3.2), (3.3.1c) och (4.1.1) är

$$G \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad \dots (4.2.10c)$$

Ekvationerna (4.2.10a) och (4.2.10b) kan omformas till:

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \lambda \nu$$

$$2G \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \lambda \nu$$

vilka i sin tur kan skrivas som:

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \nabla^2 \Phi$$

$$2G \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \nabla^2 \Phi$$

ty enligt (2.4.5), (4.1.1) och (4.2.9) är

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \nabla^2 \Phi = \lambda \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2 \left[\frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right]} =$$

$$= \lambda \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2E \left[\frac{2\nu+1-2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)2} \right]} = \lambda \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E(1+\nu)(1-2\nu)}$$

För fallet plant töjningstillstånd är $\epsilon_z = 0$ (\approx tjock skiva) och vi får enligt (2.2.2)

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \nabla \Phi = \lambda [(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y + (1-\nu)\epsilon_y + \nu\epsilon_x] = \lambda \nu^h$$

Om för enkelhetens skull $\nabla \Phi$ benämnes P fås:

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = P - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} P = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda+2G}{2(\lambda+G)} P \quad \dots (4.2.11a)$$

$$2G \frac{\partial v}{\partial y} = P - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} P = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\lambda+2G}{2(\lambda+G)} P \quad \dots (4.2.11b)$$

Eftersom $\nabla(\sigma_x + \sigma_y)$ enligt (3.3.4) är noll då som i vårt fall volymkrafterna är noll, framgår av (4.1.1) att $\nabla P = \nabla \nabla \Phi = 0$, dvs P är harmonisk.

Låt nu Q vara den harmoniska funktion som är P:s konjugat, d v s som satisfierar Cauchy - Riemanns ekvationer:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Det finns då också $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ där $z = x + iy$.
Sätt nu $\Psi(z) = p + iq = 1/4 \int f(z) dz$

$$\Rightarrow \Psi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} + i \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}(P+iQ)$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4}P$$

vilket i sin tur ger:

$$P = 4 \frac{\partial p}{\partial x} = 4 \frac{\partial q}{\partial y}$$

Insatt i (4.2.11) fås:

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\lambda+2G}{2(\lambda+G)} 4 \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$2G \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\lambda+2G}{2(\lambda+G)} 4 \frac{\partial q}{\partial y}$$

Dessa differentialekvationer kan lösas och blir då:

$$2Gu = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G} p + f_1(Y)$$

$$2Gv = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G} q + f_2(Y)$$

Om termerna $f_1(Y)$ och $f_2(Y)$ försummas, de ger ju bara en stelkroppsförflyttning, fås genom att multiplicera $2Gv$ med i och addition (från de båda uttrycken ovan):

$$2G(u+iv) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}(p+iq)$$

vilket enligt tidigare är:

$$2G(u+iv) = -\psi(z) - z\bar{\psi}'(z) - \bar{\chi}'(z) + \frac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G}\psi(z)$$

$$\Rightarrow 2G(u+iv) = \mathcal{K}\psi(z) - z\bar{\psi}'(z) - \bar{\chi}'(z)$$

$$\text{där } \mathcal{K} = \frac{2(\lambda+2G)}{\lambda+G} - 1 = \frac{\lambda+3G}{\lambda+G}$$

Sätts värden för λ och G enligt (2.4.5) och (4.2.9) in i detta fås:

$$\mathcal{K} = \frac{\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{3E}{2(1+\nu)}}{\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{2(1+\nu)}} = \frac{2E\nu+3E(1-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2E\nu+3E-6E\nu}{2E\nu+E(1-2\nu)} = \frac{2E\nu+3E-6E\nu}{2E\nu+E-2E\nu} = 3-4\nu$$

∴ För plant töjningstillstånd ($\epsilon_z = 0$) gäller:

$$2G(u+iv) = (3-4\nu)\Psi(z) - z\bar{\Psi}'(z) - \bar{X}'(\bar{z}) \quad \dots (4.2.12)$$

För plant spänningstillstånd ($\sigma_z = 0$) gäller:

Om vi har en tunn platta enligt figur 4.2.1 fås medelvärdena

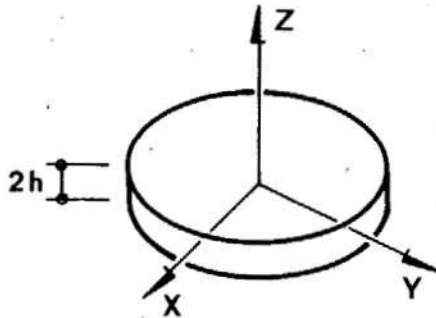


Fig 4.2.1. Tunn platta med \approx plant spänningstillstånd

av förskjutningarna u och v i x - respektive y -led över plattans tjocklek (h är mycket litet!) som:

$$u^*(x,y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u(x,y,z) dz$$

$$v^*(x,y) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v(x,y,z) dz$$

Jämviktsvillkoren (3.1.2) (med volymkraften = 0) ger:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

För $z = \pm h$ är $\sigma_z = 0$ och

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, \pm h)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, \pm h)}{\partial y} = 0$$

Sålunda är också $\partial \sigma_z / \partial z = 0$ för $z = \pm h$. Därför är det uppenbart att σ_z är en mycket liten storhet över tjockleken $2h$ och med god approximation är $\sigma_z = 0$.

Ekvationerna (3.1.2):s och (3.1.3):s medelvärden över tjockleken $2h$ ger sålunda (stjärna betecknar medelvärde):

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} = 0$$

Från $\lambda u + 2G \partial w / \partial z = \sigma_z = 0$ fås nu:

$$\lambda \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + 2G \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

⇒

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

Insatt i $\lambda u + 2G \partial u / \partial x = \sigma_x$ fås:

$$\sigma_x = \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + 2G \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2G} + 2G \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2G} \right] \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{2G\lambda}{\lambda + 2G} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + 2G \frac{\partial u}{\partial x}$$

På samma sätt fås:

$$\sigma_y = \frac{2G\lambda}{\lambda + 2G} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + 2G \frac{\partial v}{\partial y}$$

Medelvärden för dessa uttryck för σ_x och σ_y samt för $\tau_{yz} = G[\partial u/\partial y + \partial v/\partial x]$ är:

$$\sigma_x^* = \lambda^* \mathcal{J}^* + 2G \frac{\partial u^*}{\partial x}$$

$$\sigma_y^* = \lambda^* \mathcal{J}^* + 2G \frac{\partial v^*}{\partial y}$$

$$\text{där } \lambda^* = \frac{2G\lambda}{\lambda+2G} = \frac{\frac{2EE\nu}{2(1+\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}}{\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2E}{2(1+\nu)}} = \frac{\frac{E^2\nu}{(1+\nu)^2(1-2\nu)}}{\frac{E\nu+E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}} = \frac{E\nu}{(1+\nu)^2(1-2\nu)(1-\nu)} E$$

$$\therefore \lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$$

$$\mathcal{J}^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y}$$

dvs plant spänningstillstånd erhålles genom att från plant töjningstillstånd byta λ mot λ^* och ν mot ν^* !

$$\mathcal{K} = \frac{\lambda+3G}{\lambda+G} \Rightarrow$$

$$\mathcal{K}^* = \frac{\lambda^*+3G}{\lambda^*+G} = \frac{\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{3E}{2(1+\nu)}}{\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}} = \frac{E\nu 2 + 3E(1-\nu)}{E\nu 2 + E(1-\nu)} = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

För plant spänningstillstånd ($\sigma_z=0$) kan ekvation (4.2.12) skrivas:

$$2G(u+iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \Psi(z) - z \bar{\Psi}'(z) - \bar{\chi}'(z)$$

5 KURVLINJÄRA KOORDINATSYSTEM

Vid beräkning av olika problem användes ofta cartesiska eller polära koordinater. Ett annat koordinatsystem, som senare visar sig lämpligt för våra problem, är det kurvlinjära koordinatsystemet med elliptiska och hyperboliska koordinater.

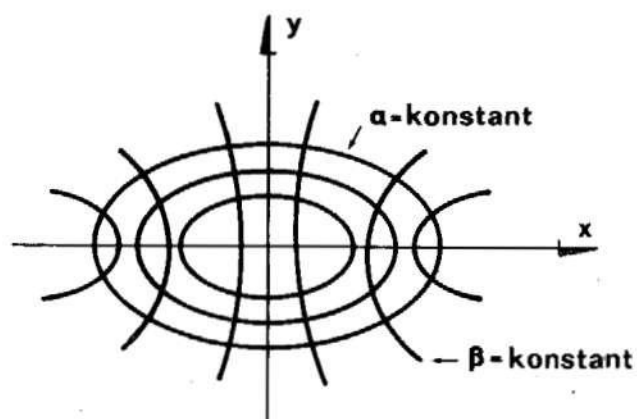


Fig 5.1. Kurvlinjärt koordinatsystem

Transformation mellan de cartesiska och kurvlinjära systemen enligt figur 5.1 fås som:

$$\begin{aligned}x &= c \cosh \alpha \cos \beta \\y &= c \sinh \alpha \sin \beta\end{aligned}\quad \dots(5.1)$$

Fördelen med detta system är: När vi senare kommer att behandla brottmekaniska problem, kan vi med rätt val av α bilda randen på en inre elliptisk spricka och med rätt val av β randen av en yttre parabolisk spricka.

Komplext fås:

$$x + iy = c (\cosh \alpha \cos \beta + i \sinh \alpha \sin \beta)$$

Enligt definition är $\cosh \alpha = (e^\alpha + e^{-\alpha})/2$ och $\sinh \alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$ vilket insatt i ekvation 5.2 ger:

$$x + iy = \frac{c}{2} (e^\alpha \cos \beta + e^{-\alpha} \cos \beta + i e^\alpha \sin \beta - i e^{-\alpha} \sin \beta)$$

Eftersom, också enligt definition:

$$e^z = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha e^{i\beta} = e^\alpha (\cos\beta + i\sin\beta) \quad \text{fås}$$

$$x+iy = \frac{c}{2} (e^{\alpha+i\beta} + e^{-\alpha-i\beta})$$

Om $f(z) = \alpha + i\beta$ och $z = x + iy$, är uttrycket ovan ekvivalent med:

$$z = c \cosh[f(z)]$$

Via (5.2) inses att (5.1) och (5.3) är ekvivalenta.

För detta koordinatsystem gäller också t ex (4.2.5) och (4.2.6).

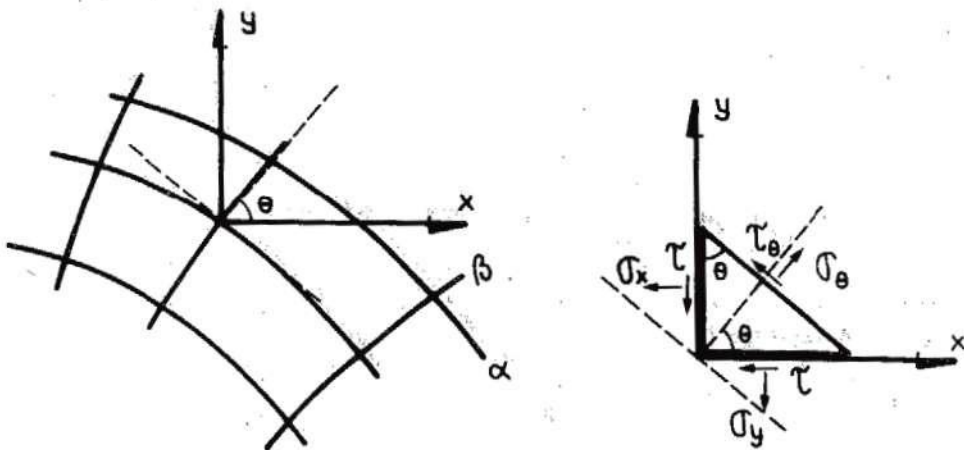


Fig 5.2 Samband mellan cartesiska och kurvlinjära koordinater.

Enligt (3.2.1) och (3.2.2) fås:

$$\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{\theta + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \tau = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta$$

Skrivs detta om som (4.2.5) och (4.2.6) fås:

$$\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\tau_{\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau \sin 2\theta - i(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2i\tau \cos 2\theta$$

Då $e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ enligt definition, fås:

$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\tau_{\theta} = (\sigma_y - \sigma_x)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + 2i\tau(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$\therefore \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\tau_{\theta} = e^{2i\theta} [\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau]$$

D v s i kurvlinjära koordinater är

$$\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} = 4 \operatorname{Re} [\psi'(z)] \quad \dots (5.4)$$

$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\tau_{\theta} = e^{2i\theta} [\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau] \quad \dots (5.5)$$

6 KOLLAPSORSAKER

De viktigaste mekaniska kollapsorsakerna för ett material är:

- elastisk instabilitet
- plastisk instabilitet
- stora elastiska deformationer
- stora plastiska deformationer
- sprickbildning

Framöver behandlas huvudsakligen den sista orsaken.

6.1 Sprickbildning

Vid brott genom sprickbildning innefattar brottmekanismen den instabila tillväxten av en spricka i ett material. Denna instabila tillväxt sker oftast mycket snabbt och därför kallas dessa brott "spröda".

Framöver kommer brott att betecknas som spröda om den instabila spricktillväxten erhålles av en spänning som är mindre än den maximala flytspänningen i det ospruckna materialet just i det ögonblick som den instabila spricktillväxten börjar.

Om ett material skall kollapsa på ett sprött sätt, måste det innehålla en spänningskoncentrator, eftersom brottmekanismen med avseende på sprickbildning är begränsad till ett litet lokalt område. Vi kommer därför huvudsakligen att behandla hur brott uppkommer framför redan existerande sprickor eller andra spänningskoncentrationer och hur dessa kan relateras till det pålagda spänningsfältet.

Ett materials motstånd mot instabil spricktillväxt kan uttryckas med dess "brottseghet" liksom dess förmåga att taga upp spänning kan uttryckas med en flytspänning.

I de följande kapitlen kommer denna brottseghet att karakterisera både makroskopiska och mikroskopiska spricktillväxtmekanismer. Först genomföres härvid en analys av spänningar och deformationer runt de spänningskoncentratorer kring vilka brottet initieras.

7 SPÄNNINGSKONCENTRATION

Eftersom förekomsten av brott genom instabil spricktillväxt nödvändigtvis sätts samman med en hög lokal spänning eller töjning nära en spänningskoncentrator, måste varje mätning av ett materials brottseghet föregås av en exakt bestämning av fördelningen av spänningar och töjningar. Detta senare leder ofta till en komplicerad matematisk analys.

7.1 Grafisk representation - kraftlinjer

En platta med ett elliptiskt hål är utsatt för en jämnt fördelad dragspänning σ . Denna spänning kan man tänka sig överförd genom plattan längs kraftlinjer. Härvid störs de kraftlinjer som finns nära hålet och eftersom de antages uppföra sig som elastiska strängar och sålunda strävar efter att minimera sin längd, trängs de samman nära hålets kanter och ger ett tillskott till den lokala spänningen (fler kraftlinjer inom samma yta). Detta framställs i figur 7.1 nedan.

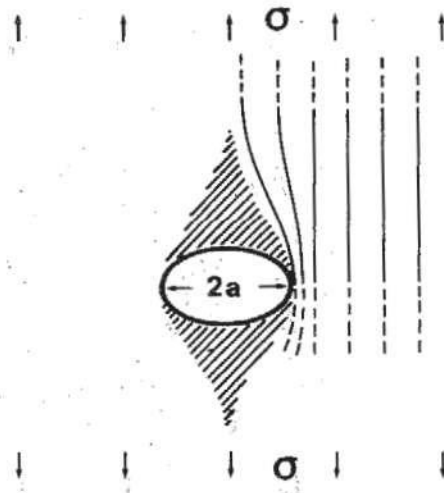


Fig 7.1. Spänningskoncentration kring $2a$ lång elliptisk spricka

Om vi nu tänker oss en spricka med makroskopiskt skarp spets och tänker oss hur atomerna är arrangerade längst ut i en sådan spets, fås: (se nästa sida)

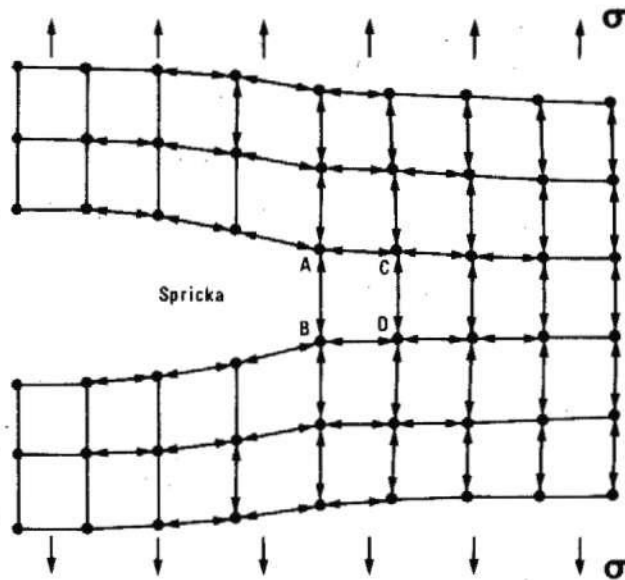


Fig 7.2. Skarp sprickspets i atomär skala

Här kan man tänka sig att kraftlinjerna löper längs atomernas förbindningslinjer. Av figur 7.2 framgår då att bindningen A-B utsättes för stor töjning. Mindre last och töjning uppträder i bindningen C-D och ganska nära sprickspetsen kommer bindningarna att utsättas för endast den pålagda yttre spänningen σ .

Lägg märke till att dragspänningar måste uppträda även i A-C och B-D (för jämvikt). Man kan alltså misstänka att en platta som innehåller en spricka och som utsättes för en dragspänning tvärs sprickan också erhåller en dragspänning i den andra riktningen. Figur 7.2 ger emellertid en mycket grov bild av verkliga förhållanden. För kraftspelet enligt figuren finns normalkrafter till sprickytorna vilket strider mot jämviktsvillkoren. I verkligheten kan dessa inte existera och i ett område omedelbart över respektive under sprickan fås obelastade områden (vilka antydes skuggade i figur 7.1). Man kan förmoda att den töjningsenergi som på detta sätt frigjorts lagrats vid sprickspetsarna. Denna förmodan kommer senare att beläggas matematiskt.

8 SPÄNNINGSBILDEN KRING EN SPRICKA

8.1 Cirkulärt hål; Leon's lösning

Spänningstillståndet kring ett cirkulärt hål med radien a i en i y -led enaxiellt dragspänningsbelastad skiva fås enligt (4.1.4) och gällande randvillkor. Dessa är $\sigma_x = \tau = 0$ för radien $r = a$. Då $r \rightarrow \infty$ gäller ostört enaxiellt spänningstillstånd med $\sigma_y = \sigma$ och $\sigma_x = \tau = 0$.

Då det här uppenbarligen är lämpligt att använda polära koordinater, använder vi inte (4.1.4) utan (4.1.6) med spänningarna σ_r , σ_φ och τ . Randvillkoren förändras då till:

$$\sigma_r = \tau = 0 \text{ då } r = a$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \sigma (1 - \cos 2\varphi)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\varphi) \text{ då } r \rightarrow \infty$$

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi$$

Grundekvationen samt randvillkoren blir uppfyllda av spänningsfunktionen (A Leon 1908):

$$\Phi = \left(-\frac{\sigma}{4} r^2 - \frac{a^4}{4} \frac{\sigma}{r^2} + \frac{a^2}{2} \sigma \right) \cos 2\varphi + \frac{\sigma r^2}{4} - \frac{\sigma a^2}{2} \ln r \quad \dots (8.1.1)$$

Att (4.1.6) är uppfyllt framgår av:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{3a^4}{2} \frac{\sigma}{r^4} \right) \cos 2\varphi + \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma a^2}{2r^2} \quad \dots (a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(-\frac{\sigma}{2} r + \frac{a^4}{2} \frac{\sigma}{r^3} \right) \frac{1}{r} \cos 2\varphi + \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma a^2}{2r^2} \quad \dots (b)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \left(+\frac{\sigma}{4} r^2 + \frac{a^4}{4} \frac{\sigma}{r^2} - \frac{a^2}{2} \sigma \right) \frac{1}{r^2} 4 \cos 2\varphi \quad \dots (c)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{2a^2}{r^2} \sigma \cos 2\varphi + \sigma \quad \dots (d)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (d) = - \frac{12a^2}{r^4} \sigma \cos 2\varphi$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (d) = + \frac{4a^2}{r^4} \sigma \cos 2\varphi$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (d) = + \frac{8a^2}{r^4} \sigma \cos 2\varphi$$

∴ är (4.1.6) uppfylld.

Spänningarna fås enligt (4.1.5) till:

$$\sigma_r = (b) + (c) = \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{4a^2\sigma}{2r^2} + \frac{3a^4\sigma}{2r^4} \right) \cos 2\varphi + \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma a^2}{2r^2} \quad \dots (8.1.2)$$

$$\sigma_\varphi = (a) = \left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{3a^4}{2} \frac{\sigma}{r^4} \right) \cos 2\varphi + \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma a^2}{2r^2} \quad \dots (8.1.3)$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{3\sigma a^4}{2r^4} - \frac{\sigma a^2}{r^2} \right) \sin 2\varphi \quad \dots (8.1.4)$$

För $r = a$ fås av dessa samband:

$$\sigma_r = \tau = 0$$

Då $r \rightarrow \infty$ går sambanden mot:

$$\sigma_r \rightarrow \frac{\sigma}{2} \cos 2\varphi + \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\sigma_\varphi \rightarrow -\frac{\sigma}{2} \cos 2\varphi + \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2} \sigma (1 - \cos 2\varphi)$$

$$\tau \rightarrow -\frac{\sigma}{2} \sin 2\varphi$$

Randvillkoren är därför också uppfyllda.

Således är ansatsen (8.1.1) riktig.

För $\varphi = 0$ och $\varphi = \pi$ är $\sigma_\varphi = \sigma_y$ och $\sigma_r = \sigma_x$. Dessa φ -värden insätta i (8.1.2) och (8.1.3) ger sålunda:

$$\sigma_y = - \left[\frac{\sigma}{2} - \frac{3a^4\sigma}{2r^4} \right] + \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma a^2}{2r^2} = \sigma + \frac{\sigma a^2}{2r^2} + \frac{3a^4\sigma}{2r^4}$$

$$\therefore \sigma_y = \sigma \left[1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right] \quad \dots (8.1.5)$$

$$\sigma_x = - \left[\frac{\sigma}{2} - \frac{4a^2\sigma}{2r^2} + \frac{3a^4\sigma}{2r^4} \right] + \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma a^2}{2r^2} = \frac{3a^2\sigma}{2r^2} - \frac{3a^4\sigma}{2r^4}$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{3\sigma}{2} \left[\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right] \quad \dots (8.1.6)$$

För $r = a$ är således:

$$\sigma_y = \sigma \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right] = 3\sigma \quad \dots (8.1.7)$$

$$\sigma_x = \frac{3\sigma}{2} [1 - 1] = 0$$

Vårt runda hål fungerar alltså som en spänningskoncentrator med en elastisk spänningskoncentrationsfaktor på 3.

σ_x max. fås av:

$$\frac{\partial}{\partial r} (8.1.6) = \frac{3\sigma}{2} \left[-\frac{2a^2}{r^3} + \frac{4a^4}{r^5} \right] = 0$$

vilken ger max $\sigma_x(\varphi=0, \pi)$ då $r = a\sqrt{2}$.

Uppritat fås spänningsbilden för $\varphi = 0$ och π : (se nästa sida)

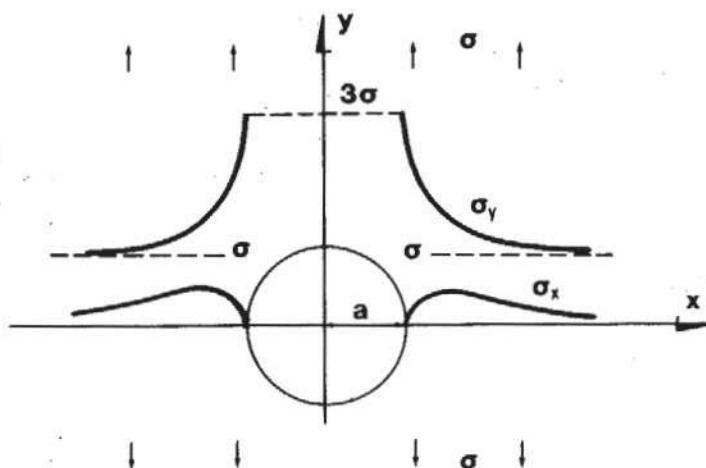


Fig 8.1. Spänningar för $\varphi = 0$ och π för ett cirkulärt hål med radien a

8.2 Elliptiskt hål; Inglis' lösning

Ett elliptiskt hål, med den stora axeln = $2a$ och den lilla axeln = $2b$, i en skiva med oändlig utsträckning vilken utsättes för en enaxiell spänning σ i y -led, har ett utseende enligt:

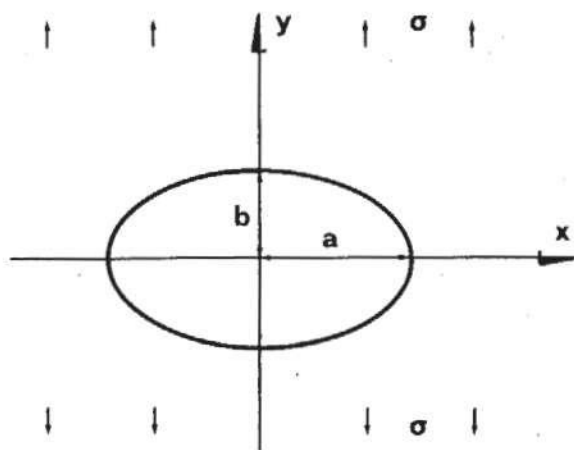


Fig 8.2.1. Elliptiskt hål i en oändlig skiva utsatt för enaxiell spänning $\sigma_y = \sigma$

Om man ur (5.1) eliminerar β fås:

$$x^2 = c^2 \cosh^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (a)$$

$$y^2 = c^2 \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta \quad (b)$$

(a) + (b) \Rightarrow

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \alpha} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} = 1 \text{ d v s ekvationen för en ellips.}$$

I vårt fall är sålunda:

$$\begin{aligned} a &= c \cosh \alpha_0 \\ b &= c \sinh \alpha_0 \end{aligned} \quad \dots (8.2.1)$$

När $\alpha_0 \rightarrow 0$ blir ellipsen en spricka med längden $2a$, en övergång som göres senare.

Inglis fann följande potentialfunktioner:

$$4\Psi(z) = \sigma c [(1 + e^{2\alpha_0}) \sinh p - e^{2\alpha_0} \cosh p]$$

$$4\chi(z) = -\sigma c^2 [(\cosh 2\alpha_0 - \cosh h\pi) p + \frac{1}{2} e^{2\alpha_0} - \cosh [2(p - \alpha_0 - i\frac{\pi}{2})]] \quad (8.2.2)$$

som båda uppfyller $\nabla^2(\Psi, \chi) = 0$ och gällande randvillkor:

$$\sigma_y = \sigma; \quad \sigma_x = \sigma_\theta = 0$$

oändligt långt från randen och att:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \tau_\theta = 0 \text{ då } \alpha = \alpha_0$$

Enligt dessa randvillkor och (4.2.5) samt (4.2.6) gäller oändligt långt borta:

$$\sigma = 4 \operatorname{Re}[\Psi'(z)]$$

$$\sigma = 2[\bar{z}\Psi''(z) + \chi''(z)]$$

För $\alpha = \alpha_0$ fås enligt (8.2.2) och (5.3) samt definitionen

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

vilken här översättes till:

$$c^2 \cosh^2 p - c^2 \sinh^2 p = c^2$$

$$c^2 \sinh^2 p = c^2 \cosh^2 p - c^2$$

$$c \sinh p = \sqrt{c^2 \cosh^2 p - c^2} = \sqrt{z^2 - c^2}$$

$$\therefore \Psi(z) = \frac{\sigma}{4} \left[(1 + e^{2\alpha_0}) \sqrt{z^2 - c^2} - e^{2\alpha_0} z \right]$$

$$\Rightarrow \Psi'(z) = \frac{\sigma}{4} \left[(1 + e^{2\alpha_0}) \frac{2z}{2\sqrt{z^2 - c^2}} - e^{2\alpha_0} \right]$$

Insatta värden på z ger:

$$\Psi'(z) = \frac{\sigma}{4} \left[(1 + e^{2\alpha_0}) \frac{c \cosh p}{c \sinh p} - e^{2\alpha_0} \right]$$

Eftersom $p = \alpha_0 + i\beta$ kan detta skrivas som:

$$\Psi'(z) = \frac{\sigma}{4} \left[(1 + e^{2\alpha_0}) \frac{\cosh \alpha_0 \cosh i\beta + \sinh \alpha_0 \sinh i\beta}{\sinh \alpha_0 \cosh i\beta + \cosh \alpha_0 \sin i\beta} - e^{2\alpha_0} \right]$$

Vi utnyttjar nu att $\sinh ix = i \sinh x$, $\cosh ix = \cos x$ samt att $\bar{z} \cdot z = x^2 + y^2$. Detta senare utnyttjat på nämnaren gör att den blir reell. Därefter tar vi bort den imaginära delen i täljaren och får vad vi söker:

$$\therefore 4 \operatorname{Re} [\Psi'(z)] = \sigma \left[(1 + e^{2\alpha_0}) \frac{\cosh \alpha_0 \sinh \alpha_0 \cos^2 \beta + \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 \sin^2 \beta}{\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \beta + \cosh^2 \alpha_0 \sin^2 \beta} - e^{2\alpha_0} \right]$$

Om vi utnyttjar att:

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$2 \sinh^2 \alpha_0 = \cosh 2\alpha_0 - 1$$

$$2 \cosh^2 \alpha_0 = \cosh 2\alpha_0 + 1$$

$$2 \sinh \alpha_0 \cosh \alpha_0 = \sinh 2\alpha_0 \quad \text{så :}$$

$$4 \operatorname{Re} [\Psi'(z)] = \sigma \left[(1 + e^{2\alpha_0}) \frac{\sinh 2\alpha_0}{(\cosh 2\alpha_0 - 1) \cos^2 \beta + (\cosh 2\alpha_0 + 1) \sin^2 \beta} - e^{2\alpha_0} \right]$$

Till slut skriver vi:

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos 2\beta \quad \text{och får :}$$

$$4 \operatorname{Re} [\Psi'(z)] = \sigma \left[(1 + e^{2\alpha_0}) \frac{\sinh 2\alpha_0}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} - e^{2\alpha_0} \right]$$

Det maximala värdet på $\sigma_{\beta\beta}$ fås för $\beta = (0, \pi)$ d v s att $\sigma_{\beta\beta \max} = \sigma_y$ för $(a; 0)$ och $(-a; 0)$.

Vi vet också att $e^{2\alpha_0} = \cosh 2\alpha_0 + \sinh 2\alpha_0$

$$\therefore \sigma_y = \sigma \left[\frac{2 \sinh 2\alpha_0 - 1 + \cosh 2\alpha_0}{\cosh 2\alpha_0 - 1} \right]$$

Via ekvation (8.2.1) finner man att

$$\frac{2ab}{c^2} = \sinh 2\alpha_0; \quad \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \cosh 2\alpha_0; \quad a^2 - b^2 = c^2$$

$$\therefore \sigma_y = \sigma \left[\frac{2 \frac{2ab}{c^2} - 1 + \frac{a^2 + b^2}{c^2}}{\frac{a^2 + b^2}{c^2} - 1} \right] = \sigma \left[\frac{4ab - a^2 + b^2 + a^2 + b^2}{a^2 + b^2 - a^2 + b^2} \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_y = \sigma \left[\frac{4ab + 2b^2}{2b^2} \right] = \sigma \left[1 + 2 \frac{a}{b} \right]$$

.... (8.2.3)

σ_y växer alltså mot oändligheten då $b \rightarrow 0$. För $a=b$ får vi naturligtvis samma resultat som av (8.1.7).

Eftersom krökningsradien för en ellips vid storaxelns ände är $\rho = b^2/a$ blir (8.2.3):

$$\sigma_y = \sigma \left[1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right] \quad \dots(8.2.4)$$

8.3 Skarp sprickspets; Westergaard's lösning

Antag att vi känner en harmonisk komplex potentialfunktion $\Psi(z)$. Dess första och andra derivator med avseende på z betecknar vi med $\Psi'(z)$ och $\Psi''(z)$ och dess första och andra integraler (integrerade två gånger) med avseende på z betecknar vi med $\tilde{\Psi}(z)$ och $\tilde{\tilde{\Psi}}(z)$.

Med dessa antaganden gjorde Westergaard ansatsen:

$$\Phi = \operatorname{Re} [\tilde{\tilde{\Psi}}(z)] + y \operatorname{Im} [\tilde{\Psi}(z)]$$

Med denna ansats fås σ_x , σ_y och τ enligt (4.1.1). För att bestämma dessa påminnes om Cauchy - Riemanns ekvationer, vilka, om $f(z) = \alpha + i\beta$, ger:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \operatorname{Im}}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re}}{\partial y} \quad \text{med} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}$$

Dessa är visade under 4.2.

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \operatorname{Re} [\Psi''(z)] + y \operatorname{Im} [\Psi'(z)] \quad \dots(8.3.1a)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} [\tilde{\Psi}(z)]) + \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{Im} [\tilde{\Psi}(z)]) \right]$$

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} [\tilde{\Psi}(z)]) + \operatorname{Im} [\tilde{\Psi}(z)] + y \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} [\tilde{\Psi}(z)]) \right]$$

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\operatorname{Im} [\tilde{\Psi}(z)] + \operatorname{Im} [\tilde{\Psi}(z)] + y \operatorname{Re} [\Psi'(z)] \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[y \operatorname{Re} [\Psi'(z)] \right]$$

$$\sigma_x = \operatorname{Re} [\Psi'(z)] + y \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} [\Psi'(z)]) = \operatorname{Re} [\Psi'(z)] + y \frac{\partial}{\partial x} (-\operatorname{Im} [\Psi'(z)])$$

$$\therefore \sigma_x = \operatorname{Re} [\Psi'(z)] - y \operatorname{Im} [\Psi''(z)] \quad \dots (8.3.1b)$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{Re} [\Psi'(z)])$$

$$\therefore \tau = -y \operatorname{Re} [\Psi''(z)] \quad \dots (8.3.1c)$$

Att dessa spänningar uppfyller gällande jämviktsvillkor, till exempel (3.1.2), fås av:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \operatorname{Re} [\Psi''(z)] - y \operatorname{Im} [\Psi'''(z)]$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-y \operatorname{Re} [\Psi''(z)]) = -\operatorname{Re} [\Psi''(z)] + y \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} [\Psi'''(z)])$$

$$\therefore \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad \text{vilket satisfierar (3.1.2)}$$

För förskjutningarna u och v gjorde Westergaard ansatserna

$$2Gu = (1-2\nu) \operatorname{Re} [\tilde{\Psi}(z)] - y \operatorname{Im} [\Psi'(z)]$$

$$2Gv = 2(1-\nu) \operatorname{Im} [\tilde{\Psi}(z)] - y \operatorname{Re} [\Psi'(z)]$$

Ansatsens korrekthet fås av :

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = 2G\epsilon_x = (1-2\nu) \operatorname{Re} [\Psi(z)] - y \operatorname{Im} [\Psi'(z)]$$

Detta kan skrivas som:

$$2G\epsilon_x = (1-\nu)(\operatorname{Re} [\Psi(z)] - y \operatorname{Im} [\Psi'(z)]) - \nu(\operatorname{Re} [\Psi(z)] + y \operatorname{Im} [\Psi'(z)])$$

Via (8.3.1) och (8.3.2) är detta

$$2G\epsilon_x = (1-\nu) \sigma_x - \nu \sigma_y$$

Värdet på G fås från (2.4.5) och ger :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1-\nu^2) \sigma_x - \nu(1+\nu) \sigma_y]$$

Detta överensstämmer med (2.2.1.a) som för $\epsilon_z = 0$ (plant töjningstillstånd) ger:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y - \nu)(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [(1-\nu^2) \sigma_x - \nu(1+\nu) \sigma_y]$$

För $y = 0$ ger (8.3.1) att $\tau = 0$ och att $\sigma_x = \sigma_y$. Westergaards förskjutningar blir sålunda för $y = 0$:

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \operatorname{Re} [\tilde{\Psi}(z)] \quad \dots (8.3.2a)$$

$$v = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \operatorname{Im} [\tilde{\Psi}(z)] \quad \dots (8.3.2b)$$

Nu återstår att visa Westergaards ansatser vid randen av vår spricka. För detta ändamål tänker vi oss en spricklängd $2a$ i en oändlig skiva under en jämnt fördelad tvåaxiell spänning $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Som $\Psi(z)$ väljer vi en lämplig harmonisk funktion sådan att σ_y då $y = 0$ är noll för $x < \pm a$ och σ då $x \rightarrow \pm\infty$. Vi vill också att sprickan skall ha en spänningskoncentrerande effekt så att $\sigma_y \gg \sigma$ nära sprickspetsen.

Ett sätt att uttrycka att $\sigma_y \rightarrow \sigma$ då $x \rightarrow \infty$ och att $\sigma_y \gg \sigma$ nära sprickspetsen, är :

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{1 - \frac{a}{x}}$$

Denna funktion blir symmetrisk för $\pm x$ om :

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$$

σ_y skulle också vara noll då $-a < x < a$ och $y = 0$. Detta uppnås om $\Psi(z)$ blir imaginär för dessa x -värden eftersom enligt (8.3.1.a) $\sigma_y = \text{Re}[\Psi(z)]$.

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

....(8.3.3)

Våra randvillkor leder oss alltså till den komplexa funktionen :

$$\Psi(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}}$$

....(8.3.4)

Om vi istället för x i (8.3.3) skriver $a + r$, där r är avståndet från och framför sprickspetsen, fås :

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(a+r)^2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2(1+\frac{r}{a})^2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{(1+\frac{r}{a})^2 - 1}} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

$$\therefore \sigma_y = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a} - 1}} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

För mycket små r , $r \ll a$, blir detta :

$$\sigma_y \approx \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad \dots (8.3.5)$$

Om vi istället för $r = x - a$ använder $\eta = z - a$ där $\eta = r e^{i\theta}$ får vi även hur spänningen varierar med vinkeln runt sprickspetsen. Enligt (8.3.2.a) kan vi, då $\eta \ll a$, finna :

$$\operatorname{Re}[\Psi(z)] = \operatorname{Re}\left[\sigma \sqrt{\frac{a}{2r e^{i\theta}}}\right] = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

Eftersom $y = r \sin \theta$ blir :

$$y \operatorname{Im}[\Psi'(z)] = r \sin \theta \operatorname{Im}\left[\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2(r e^{i\theta})^3}}\right]$$

$$\Rightarrow y \operatorname{Im}[\Psi'(z)] = r \sin \theta \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2r^3}} = r \sin \theta \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{3\theta}{2}$$

Detta skrives om så att:

$$y \operatorname{Im}[\Psi'(z)] = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2r}} \frac{1}{r} \cdot r 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}$$

$$\therefore y \operatorname{Im}[\Psi'(z)] = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}$$

(8.3.1.a) blir sålunda

$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad \dots (8.3.6a)$$

allt detta under förutsättning att $r \ll a$.

Via (8.1.3.b) och (8.3.1.c) kan på samma sätt visas

$$\sigma_x = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad \dots (8.3.6b)$$

$$\tau = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad \dots (8.3.6c)$$

Detta gäller då vi har en tvåaxiell spänning σ i oändligheten. Det enaxiella fallet fås enkelt genom att superponera en spänning $-\sigma$ i x-riktningen. Att detta inte påverkar (8.3.6) framgår av beräkningarna ovan.

En anmärkningsvärd sak är sprickans form. Ekvation (8.3.2.b) ger för $y = 0$, då den primitiva funktionen till

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \quad \text{är} \quad \sqrt{a^2 - x^2} :$$

$$v = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \sigma \sqrt{a^2 - x^2} \quad \dots (8.3.7)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{4(1-\nu^2)^2}{E^2} \sigma^2 (a^2 - x^2) \quad \text{eller}$$

$$\frac{v^2}{\frac{4(1-\nu^2)^2}{E^2} \sigma^2} + \frac{x^2}{a^2} = a^2$$

d v s sprickan är elliptisk!

9 MODE I, II OCH III

9.1 MODE I öppning

Den spricköppning vi får då en spänning $\sigma_y = \sigma$ verkar vinkelrät en spricka kallas en MODE I öppning. Som vi såg i 8.3 är en sådan spricka elliptisk och vi erhåller:

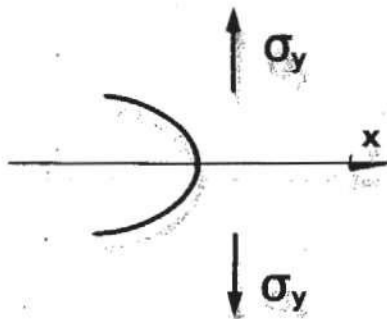


Fig 9.1.1. MODE I öppning

9.2 MODE II skjuvning

Vi har liksom tidigare en spricka med längden $2a$. Nu utsättes den för en skjuvspänning τ enligt figur 9.2.1.

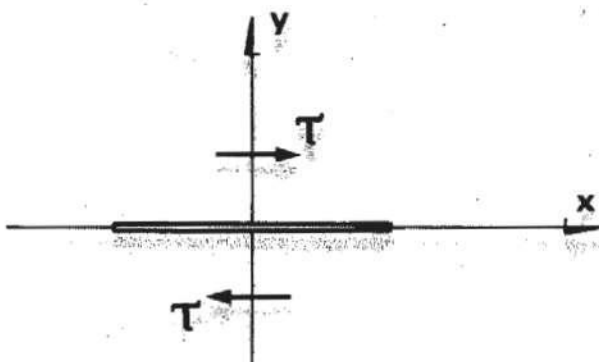


Fig 9.2.1. MODE II skjuvning

Denna situation kallas MODE II skjuvning.

9.3 MODE III ickeplan skjuvning

Som MODE II förutom att skjuvspänningen τ verkar parallellt med Y - Z planet. Situationen kallas för MODE III ickeplan skjuvning.

10 SPÄNNINGSINTENSITETSFAKTORN

Enligt ekvation (8.3.6.a) är för $\theta = 0$:

$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} = \frac{K'}{\sqrt{2r}}$$

där $K' = \sigma \cdot \sqrt{a}$ är den ursprungliga spänningsintensitetsfaktorn. Vanligare är emellertid att K definieras som:

$$K = \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \quad [\text{MNm}^{-3/2}] \quad \dots (10.1)$$

$$\therefore \sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \quad \dots (10.2)$$

Fördelen med att uttrycka spänningen vid sprickspetsen med en enda faktor K beror på att $1/\sqrt{2\pi r}$ -beroendet är samma oavsett det pålagda spänningssystemet.

I MODE I ger kombinationer av pålagda spänningar (drag, vridning, punktlaster.....) var och en sitt specifika bidrag till σ_y . Det resulterande σ_y fås helt enkelt genom $\Sigma K_I / \sqrt{2\pi r}$. Den romerska ettan I står naturligtvis för MODE I.

Sålunda:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \Sigma K_I / \sqrt{2\pi r} \\ \tau_{xy} &= \Sigma K_{II} / \sqrt{2\pi r} \\ \tau_{yz} &= \Sigma K_{III} / \sqrt{2\pi r} \end{aligned} \quad \dots (10.3)$$

Som exempel beräknar vi följande lastfall: (se nästa sida)

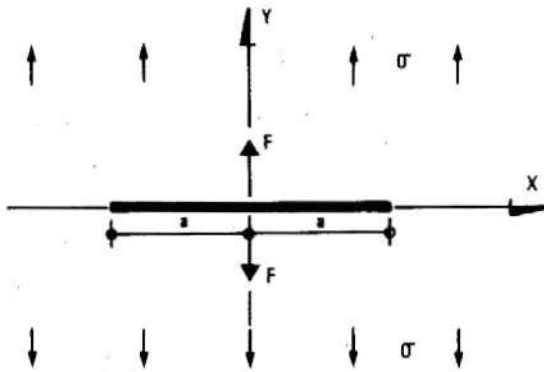


Fig 10.1. . Beräkningsexempel

För σ gäller ekvation (10.2) med $K_{I\sigma} = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$. För F fås följande:

För punktlaster (eg. linjelaster/breddenhet) ger Westergaard spänningsfunktionen:

$$\Psi(z) = \frac{Fa}{\pi z \sqrt{z^2 - a^2}}$$

Eftersom $\sigma_y = \text{Re}[\Psi(z)]$ då $y = 0$ enligt (8.3.1.a), är:

$$\sigma_y^F = \frac{Fa}{\pi x \sqrt{x^2 - a^2}} \quad \dots (10.4)$$

Sätter vi nu $x = a + r$ där r är avståndet framför sprickspetsen, fås:

$$\sigma_y^F = \frac{Fa}{\pi(a+r) \sqrt{(a+r)^2 - a^2}} = \frac{Fa}{\pi(a+r) \sqrt{r^2 + 2ar}} = \frac{F}{\pi(1+\frac{r}{a}) \sqrt{r^2 + 2ar}}$$

Om nu $r \ll a$ så:

$$\sigma_y^F = \frac{F}{\pi \sqrt{a} \sqrt{2r}} = \frac{F}{\sqrt{\pi a} \sqrt{2\pi r}}$$

$$\therefore \sigma_y^F = \frac{K_{IF}}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{där} \quad K_{IF} = \frac{F}{\sqrt{\pi a}}$$

Sålunda blir σ_y :

$$\sigma_y = \sigma_y^\sigma + \sigma_y^F = (K_{I\sigma} + K_{IF}) / \sqrt{2\pi r} = \left(\sigma \sqrt{\pi a} + \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \right) / \sqrt{2\pi r}$$

11 SPRICKSPETSPLASTICERING

11.1 Ekvivalent elastisk spricka

Denna metod är en enkel uppskattning av den effekt som en liten plasticering i sprickspetsen på en skarp spricka har på spänningar och förskjutningar framför spetsen.

För plant spänningstillstånd uppstår vid sprickspetsen en lokal flytning vars längd från sprickspetsen är d_f . I denna zon är $\sigma_y = \sigma_f$. Problemet är att uppskatta d_f 's storlek för givet σ eller $K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$.

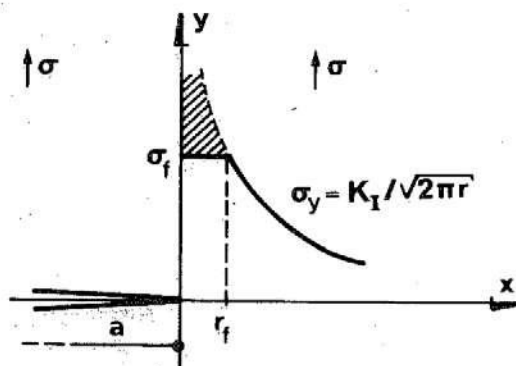


Fig 11.1. Elastisk spänningsfördelning

Antag att zonen sprider sig ut till den punkt där $\sigma_y = \sigma_f$. Detta måste emellertid vara en underskattning då efter flytning fram till r_f kraft frigöres och ger upphov till ytterligare flytning. Den frigjorda kraften motsvaras av den skuggade delen i figur 11.1. Denna ytas storlek är:

$$\int_0^{r_f} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr - \sigma_f r_f = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{r_f} - \sigma_f r_f = \frac{\sigma_f \sqrt{2\pi r_f}}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{r_f} - \sigma_f r_f = \sigma_f r_f$$

Som en grov approximation räknar man ofta med att den plastiska zonens storlek är

$$d_f \approx 2r_f = K_I^2 / (\pi \sigma_f^2) \quad \dots (11.1.1)$$

Den nya elastiska spänningsfördelningen framför sprickan blir då:

$$\sigma_y = K^* / \sqrt{2\pi r} \quad \dots (11.1.2)$$

med $K^* = \sigma \sqrt{\pi(a+r_f)}$ och $r \geq r_f$

Lägg märke till att r i (11.1.2) börjar i det gamla $a + r_f$, d v s att sprickan tänkes ha längden $a + r_f$.

11.2 Dugdales lösning

De singulära sprickspetsspänningar man erhåller för en spänning σ verkande i y -led i oändligheten, tänkte sig Dugdale balanserade av en motriktad spänning σ_f vid sprickspetsen simulerande en plastisk zon. Villkoret att de av dessa spänningar orsakade sprickspetsingulariteterna skall ta ut varandra ger ett uttryck för längden av den plastiska zonen, uttryckt i den pålagda spänningen σ , spricklängden $2a$ och materialkonstanter. Barenblatt tänkte sig en liknande lösning, dock sammanhåller sprickspetsytorna i hans modell av kohesiva atom- eller molekylarkrafter.

Vi föreställer oss nu en situation i vilken en spricka med längden $2a$ är utsatt för en spänning σ i oändligheten. Vi tänker oss vidare att sprickspetsen plasticiserar en längd $|b-a|$. Följande läge uppstår:

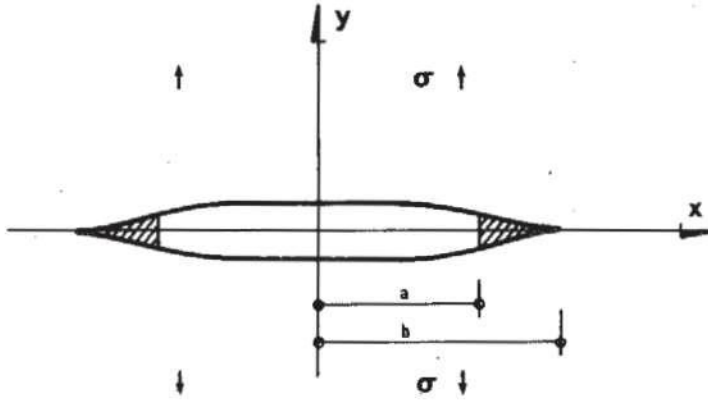


Fig 11.1. Modell enligt Dugdale

Detta läge kan göras om till två olika lastfall vilka vi sedan superponerar. Vi tänker oss dels en spricka med längden $2b$ utsatt för spänningen σ i oändligheten och dels en spricka med längden $2b$ utsatt för en spänning σ_f enligt figur 11.2:

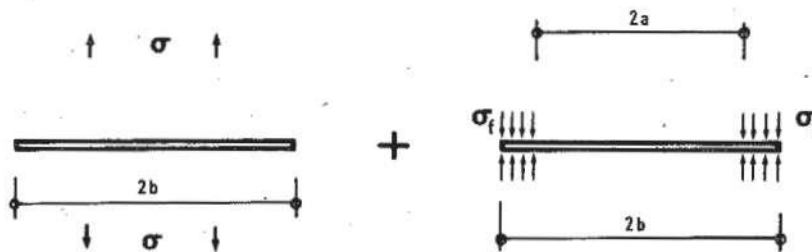


Fig 11.2. Beräkningsmodell

För fallet ③ är $K_I = \sigma\sqrt{\pi \cdot b}$ enligt ekvation (10.1)
För fallet ④ är $K_I = 2\sigma_f\sqrt{b} \arccos\left(\frac{a}{b}\right)/\sqrt{\pi}$ vilket värde fås
från tabellverk över spänningsintensitetsfaktorer.

Dugdales samband blir nu:

$$\sigma\sqrt{\pi b} = 2\sigma_f\sqrt{b} \arccos\left(\frac{a}{b}\right)/\sqrt{\pi}$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right) = \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_f}\right)$$

.....(11.2.1)

Härav framgår att då $\sigma \rightarrow \sigma_f$ så $a/b \rightarrow 0$ vilket betyder att
 $b-a \rightarrow \infty$, d v s flytningen sprider sig i hela materialet.
När σ/σ_f är liten, så :

$$\left(\frac{a}{b}\right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_f}\right)^2 + \dots$$

Om vi betecknar flytizonen $b-a$ med d_f (liksom i avsnitt 11.1)
fås:

$$\frac{a}{a+d_f} = \left(\frac{a+d_f}{a}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{d_f}{a}\right)^{-1} = 1 - \frac{d_f}{a} + \dots$$

Sålunda är för små pålagda spänningar:

$$1 - \frac{d_f}{a} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_f}\right)^2$$

$$\therefore d_f = \frac{\pi^2\sigma^2}{8\sigma_f^2} a$$

.....(11.2.2)

Detta kan jämföras med ekvation (11.1). Sätter vi $K_I = \sigma\sqrt{\pi \cdot a}$ i (11.2.2) blir denna:

$$d_f = \frac{\pi K_I^2}{8\sigma_f^2}$$

Sålunda

$$(11.1.1) \rightarrow d_f = 0.32 \frac{K_I^2}{\sigma_f^2}$$

$$(11.2.2) \rightarrow d_f = 0.39 \frac{K_I^2}{\sigma_f^2}$$

Av intresse är sprickbredden vid a , d v s där den plastiska zonen börjar. Denna sprickbredd kallas COD, Crack Opening Displacement, och betecknas ofta δ_t . Nedan ges bara slutresultatet.

Om σ_f över sprickspetsen avtar linjärt med den plastiska zonen bredd enligt $\sigma(\delta) = \sigma_f + E_{tan} \cdot \delta$ fås enligt Rice (1966)

$$\delta_t = \frac{\sigma_f}{E_{tan}} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{E_{tan} K_I^2}{E \sigma_f^2}} - 1 \right) \quad \dots (11.2.3)$$

Om $E_{tan} = 0$ (perfekt plasticitet) så blir

$$\delta_t = \frac{K_I^2}{E \sigma_f} \quad \dots (11.2.4)$$

12 LINJÄR ELASTISK BROTTMEKANIK

I de tidigare kapitlen har vi lärt oss hur man kan beräkna spänningar och töjningar kring spänningskoncentratorer med spricklik geometri. Spänningen framför en sprickspets beskrives till exempel av spänningsintensitetsfaktorn K .

Dessa beskrivningar kan kallas brottmekanik först då man konstaterar att brott i ett material, ett öppnande av en spricka, sker vid vissa specifika materialtypiska nivåer på spänningsintensiteten framför sprickspetsen.

12.1 Ideal brotthållfasthet

Vi tänker oss ett idealt kristallint material i vilket avståndet mellan atomerna i obelastat tillstånd är b_0 . Detta gitter utsättes för en dragspänning σ . För att beräkna den

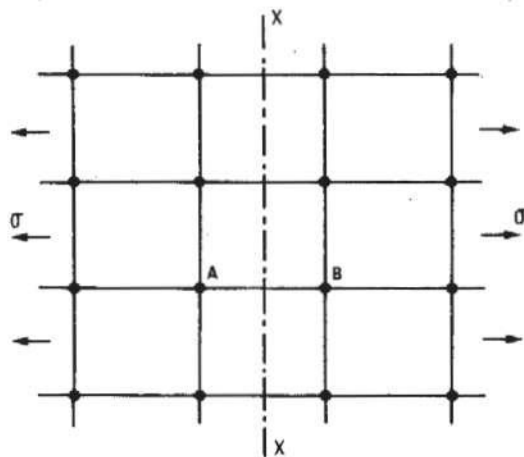


Fig 12.1.1. Ideal kristall som utsättes för dragspänning σ

spänning som ger brott längs planet $x - x$, antas att σ är summan per ytenhet av de krafter F som verkar mellan atomer som till exempel atomerna A och B i figur 12.1.1. Vi antar nu att det F som ger brott är detsamma som behövs för att separera ett enskilt atomer som A och B. Detta är en ganska grov approximation ty självfallet samverkar atomen A med fler atomer än B på B:s sida av $x-x$.

Mellan två atomer A och B ges attraktions- respektive repulsionskrafterna som funktion av avståndet mellan atomerna av potentialdiagrammet i figur 12.1.2.

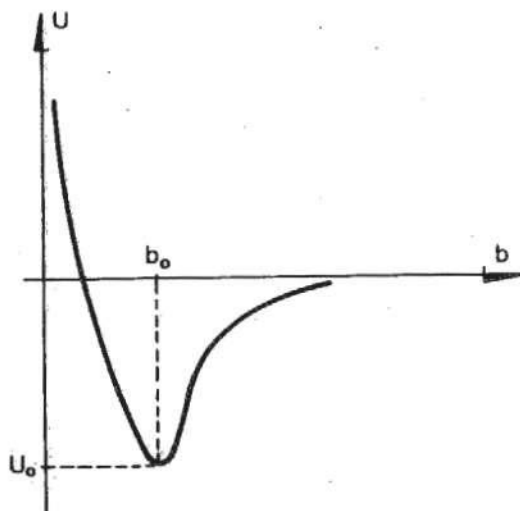


Fig 12.1.2. Potential mellan atomer på avståndet b från varandra

Denna energi har minimum för $b = b_0$, d v s för obelastat material. Den energi som måste tillföras för att separera atomerna är U_0 . Detta brottarbete sätts ofta till 2γ där γ är ytenergin per ytenhet av en fri yta.

Den kraft F som behövs för att dela atomerna från varandra fås ur definitionen på sidan 3 till :

$$F = \frac{\partial U}{\partial b}$$

F som funktion av b blir med denna definition och figur 12.1.2.

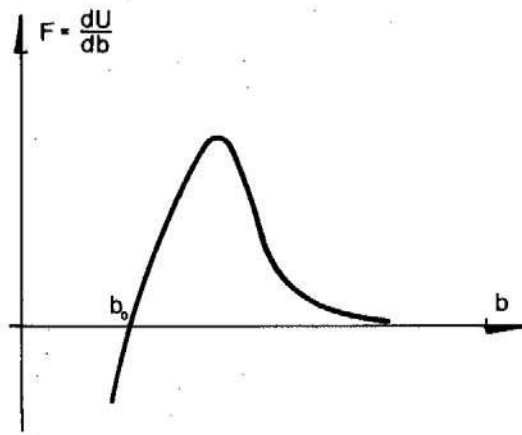


Fig 12.1.3. Kraft-förskjutningskurva mellan två atomer

Lutningen hos kurvan omedelbart till höger om b_0 representerar E-modulen, eller styvheten om man så vill. Om vi nu sätter $b - b_0 = x$, kan töjningen ϵ skrivas som x/b_0 . Med $\sigma = F/b_0^2$ fås då $\sigma - \epsilon$ kurvan för atombindningen A - B :

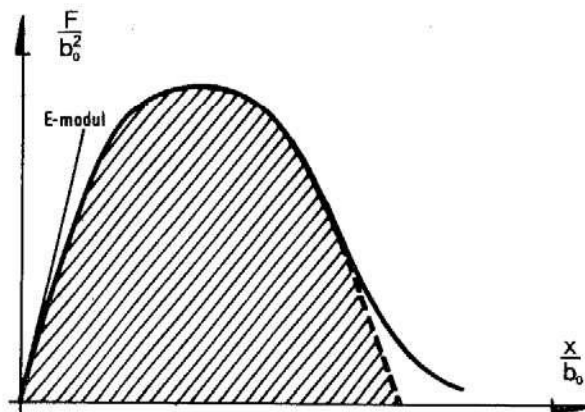


Fig 12.1.4. $\sigma - \epsilon$ diagram för atomerna A och B

För att komma vidare måste följande inses:

En rak provstav med tvärsnittsarean A påverkas av en centriskt dragande kraft F . Spänningen och töjningen långt ifrån kraftens infästningspunkt blir då $\sigma = F/A$ och $\epsilon = \Delta L/L$ där ΔL är längdändringen över en mätlängd L .

Om nu kraften F ges ett tillskott ΔF , ger detta i sin tur längdändringstillskottet ΔL . Arbetet som härvid åtgår blir enligt (1.2.1) :

$$\Delta W = \left(F + \frac{\Delta F}{2} \right) \Delta L \approx F \Delta L$$

eller

$$\Delta W = \sigma V \Delta \epsilon$$

där V är stängens volym.

Det totala arbetet att ge stängen en relativ förlängning ϵ_1 blir alltså:

$$W = \sum_{i=0}^n \Delta W_i = V \sum_{i=0}^n \sigma \Delta \epsilon_i + V \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon \quad \text{då } n \rightarrow \infty \quad \dots (12.1.1)$$

Om $\sigma = f(\epsilon)$ ritas upp åskådliggöres sålunda ekvation (12.1.1) av ytan mellan funktionskurvan och ϵ -axeln fram till $\epsilon = \epsilon_1$ multiplicerad med stängens volym.

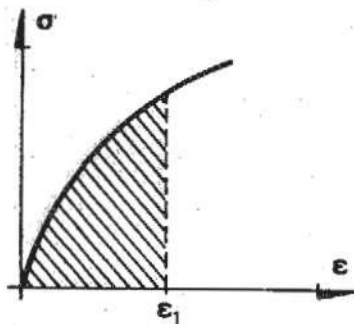


Fig 12.1.5. Arbetet kontra arbetslinje.

För att återgå till figur 12.1.4:

Den skuggade delen är identisk med en halv sinusvåg så att

$$\sigma = \sigma_{\max} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

Det arbete som behövdes för att ge brott är enligt tidigare 2Y. Approximativt fås därför via (12.1.1):

$$\int_0^{\lambda/2} \sigma_{\max} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_0^{\lambda/2} \sigma_{\max} \frac{\lambda}{2\pi} [-\cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)] = 2Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} \frac{\lambda}{2\pi} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{\lambda}{2\lambda}\right)\right] = \sigma_{\max} \frac{\lambda}{\pi} - 2Y$$

$$\therefore \lambda = \frac{2\pi Y}{\sigma_{\max}}$$

För mycket små förskjutningar är

$$\sigma = \sigma_{\max} 2\pi \frac{x}{\lambda} = E \frac{x}{b_0}$$

vilket med värdet för λ blir :

$$\sigma_{\max} 2\pi \frac{x \sigma_{\max}}{2\pi Y} = E \frac{x}{b_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max}^2 = \frac{E Y}{b_0}$$

$$\therefore \sigma_{\max} = \sqrt{\frac{E Y}{b_0}}$$

.....(12.1.2)

12.2 Griffith-sprickor

Om vi i ett material har en elliptisk spricka med huvudaxeln $2a$ fås vid sprickspetsen enligt ekvation (8.2.4):

$$\sigma_y = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$$

Om b (axel z) är mycket liten, kan som ett rimligt värde på ρ sättas b_0 . Eftersom då $2\sqrt{a/b_0} \gg 1$ fås :

$$\sigma_y = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{b_0}}$$

Om vi nu som brottkriterium sätter :

$$\sigma_y = \sigma_{\max} \quad \dots (12.2.1)$$

får vi via (12.1.2) :

$$2\sigma\sqrt{\frac{a}{b_0}} = \sqrt{\frac{E\gamma}{b_0}} \quad \dots (12.2.2)$$

$$\therefore \sigma_{\text{brott}} = \sqrt{\frac{E\gamma}{4a}} \quad \dots (12.2.3)$$

γ är för många material av storleksordningen $0.01 Eb_0$, vilket enligt (12.1.2) ger $\sigma_{\text{BROTT}} = E/10$.

Om vi nu har en spricka med längden $1 \mu\text{m}$ ($\sim 5000 b_0$), fås av (12.2.3) $\sigma_{\text{BROTT}} = E/1000$. En spricka med längden $1 \mu\text{m}$ sänker brotthållfastheten med två tiopotenser!

Ekvationen (12.2.2) kan förefalla underlig. Vänster sida härrör från linjär elasticitet, höger sida från en sinus-

formad spännings-töjningskurva. Vänster sida relateras till en makroskopisk spänning, höger sida till atomära kraft-förskjutningslagar. Dessutom förutsätter (8.2.4) ren elasticitet, vi har här en sprickspetsspänning långt över linjärelastiska förhållanden.

Det viktiga med Griffith-teorin är emellertid att det är möjligt att bestämma ett brottkriterium genom att ta hänsyn till den totala energiändringen för ökande spricklängd i ett sprucket material.

Detta kan göras genom att betrakta en spricka enligt figur 12.2.1. :

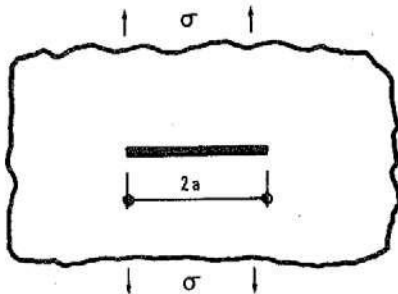


Fig 12.2.1. Griffith-spricka

Om denna spricka ökar sin längd med det infinitesimala beloppet $2da$ bildas nya brottytor och ytenergiökningen blir $\gamma \cdot$ ytorna hos de nya brottytorna. De andra energitermerna hanteras bäst genom att anta att det är möjligt att rita en makroskopisk last-förskjutningskurva för de båda halva spricklängderna a och $a + da$:

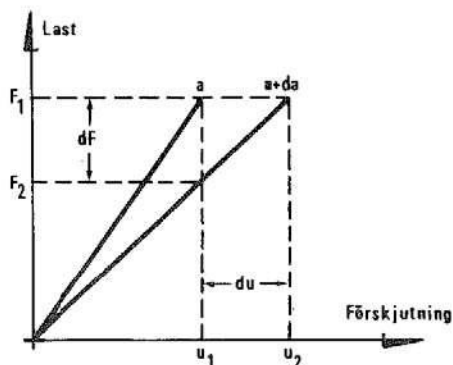


Fig 12.2.2. Elastisk lastkurva för spricklängder a och $a+da$

Kurvorna gäller för små laster (elasticitet). Kroppen med längre spricka har alltså en skenbart lägre E-modul.

En ökning av spricklängden från a till $a + da$ under konstant förskjutning, resulterar i en minskning av den elastiska töjningsenergin med $1/2 (F_1 - F_2) u_1$ (samtidigt som γ ökar).

För konstant last F_1 är den elastiska töjningsenergin större för spricklängden $a + da$ än för spricklängden a , skillnaden är $1/2 (u_2 - u_1) F_1$. Lasten F_1 har emellertid samtidigt förflyttat sig sträckan $u_2 - u_1$ och därvid uträttat arbetet $F_1(u_2 - u_1)$. Totalt fås sålunda för konstant last en minskning av den potentiella energin med $F_1(u_2 - u_1) - 1/2(u_2 - u_1)F_1 = 1/2 (u_2 - u_1) F_1$ då en spricka a växer med beloppet da .

Om $F_1 - F_2 = dF$ och $u_2 - u_1 = du$ fås :

$$\begin{aligned} \text{Töjningsenergiförlust (u konstant)} & : -1/2 u dF \\ \text{Potentiell energiförlust (F konstant)} & : -1/2 F du \end{aligned} \quad \dots(12.2.4)$$

Vi vet nu att $u = CF$ där C är en vekhetskoefficient (jämför (2.2.1)). Vi vet också att då $da \rightarrow 0$ måste C för a och $a + da$ vara approximativt lika stora.

$$\therefore du = C dF$$

Vi får således av ekvation (12.2.4) :

$$\begin{aligned} -1/2 u dF &= -1/2 CF dF \\ -1/2 F du &= -1/2 CF dF \end{aligned} \quad \dots(12.2.5)$$

Slutsatsen av (12.2.5) är : För en infinitesimal ökning av en spricklängd, är minskningen i lagrad elastisk energi vid konstant töjning lika stor som minskningen i potentiell energi vid konstant last.

Griffith menade att drivkraften vid en sprickbildning är skillnaden mellan den frigjorda elastiska töjningsenergin och den energi som behöver tillföras för att skapa nya ytor. Han angav också ett värde för den frigjorda elastiska töjningsenergin vid en ökning da av en spricka vid konstant töjning som:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -2 \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad \dots (12.2.6)$$

där σ är en pålagd yttre spänning i y -led i oändligheten.

Hur skall man tolka detta? Ett sätt är via "omskrivningen" :

$$U = -\frac{\sigma^2 \pi a^2}{E}$$

Om detta skrives som $U = -2 \cdot (1/2 \cdot \sigma \cdot \sigma / E \cdot \pi a^2)$ så är det just $-2 \cdot 1/2 \cdot \text{spänning} \cdot \text{töjning} \cdot \text{yta}$, eller om det föres över till figur 8.1., att den yta som töjningsenergin frigjöres inom är 2-dan cirkel som skuggats i figur 12.2.3 (töjningsenergin/enhetstjocklek) :

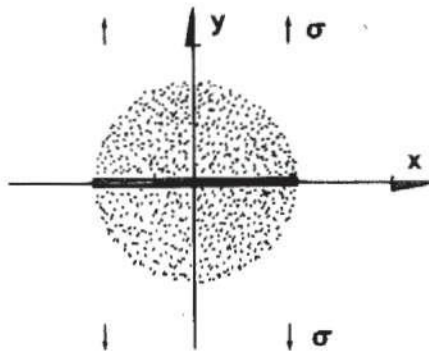


Fig 12.2.3. Modell för beräkning av frigjord elastisk töjningsenergi

Ekvation (12.2.6) ger alltså frigjord elastisk energi under konstant töjning. Enligt (12.2.5) ger den också den frigjorda potentiella energin vid konstant last.

Den totala energin vid en sprickspets är därför enligt Griffith (termen γ har definierats på sidan 66) :

$$W = -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} + 2 \gamma a \quad \dots (12.2.7)$$

Maximal energi ges av:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = -\frac{\sigma^2 \pi a}{E} + 2 \gamma = 0 \quad \dots (12.2.8)$$

Det positiva värdet av $\partial U/\partial a$ kallas konventionellt för frigjord elastisk töjningsenergi (och betecknas G) då sprickan a ökar sin längd till $a + da$. Mer logiskt vore att kalla $\partial U/\partial a$ för frigjord potentiell energi vid konstant last.

Uppritat fås:

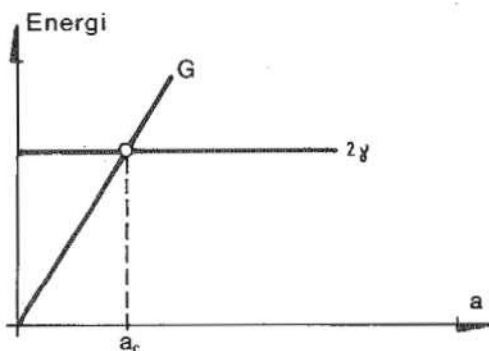


Fig 12.2.4. Variation av frigjord potentiell energi och ytenergi per ytenhet spricklängdsökning vid spricklängden a . I figuren betecknar a_c kritisk Griffithspricklängd.

Maximal Griffith-brottspänning blir enligt (12.2.8) :

$$\sigma_{\text{BROTT}} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (\text{plant spänningstillstånd}) \quad \dots (12.2.9)$$

För plant töjningstillstånd erhåller man på samma sätt:

$$\sigma_{\text{BROTT}} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)a}} \quad (\text{plant töjningstillstånd}) \quad \dots(12.2.10)$$

vilket är naturligt då en töjning ϵ given av en spänning σ enligt Hooke's lag är $\sigma(1 - \nu^2)/E$. Detta insatt i (12.2.7) ger (12.2.10).

12.3 G kontra K

Sambandet mellan G och K fås direkt ur Griffith-teorin genom att i $G = \sigma^2 \pi a / E$ sätta $\sigma^2 \pi a = K^2$ (plant spänningstillstånd).

Via Westergaards lösning fås för en naturlig sprickgeometri :

Framför en spricka med längden a är enligt Westergaard spänningen vinkelrät sprickan :

$$\sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}}$$

och förskjutningen :

$$v = 2 \frac{\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Motsvarande värde framför en spricka a + da (där da är en infinitesimal längd) blir :

$$v = 2 \frac{\sigma}{E} \sqrt{(a+da)^2 - x^2}$$

Genom att betrakta det arbete ytkrafterna utför över längden da, fås:

$$G da = \int_0^{da} \sigma_y v dr \quad \dots(12.3.1)$$

Insatt fås av detta uttryck

$$G da = \int_0^{da} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot 2 \frac{\sigma}{E} \sqrt{(a+da)^2 - x^2} dr$$

Genom att ersätta x med $a + r$ blir detta:

$$G da = \int_0^{da} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot 2 \frac{\sigma}{E} \sqrt{a^2 + da^2 + 2ada - a^2 - r^2 - 2ar} dr$$

vilket för små da approximativt blir:

$$G da = \int_0^{da} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot 2 \frac{\sigma}{E} \sqrt{2a} \sqrt{da-r} dr = \frac{2\sigma^2 a}{E} \int_0^{da} \sqrt{\frac{da-r}{r}} dr$$

En primitiv funktion till integralen fås via substitutionen $r = da \sin^2 \omega$ och $dr = da 2 \sin \omega \cos \omega d\omega$. Gränserna ändras så att de går från 0 till $\pi/2$.

$$\therefore G da = \frac{2\sigma^2 a}{E} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{da - da \sin^2 \omega}{da \sin^2 \omega}} da 2 \sin \omega \cos \omega d\omega$$

$$G da = \frac{4\sigma^2 a}{E} da \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \sin \omega \cos \omega d\omega = \frac{4\sigma^2 a}{E} da \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega d\omega \quad (\omega \neq 0)$$

$$\therefore G da = \frac{4\sigma^2 a}{E} da \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\omega + \sin \omega \cos \omega) = \frac{4\sigma^2 a}{E} da \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\sigma^2 a \pi}{E} da = \frac{K^2}{E} da$$

$$\therefore G = \frac{K^2}{E} \quad (\text{plant spänningstillstånd}) \quad \dots (12.3.2)$$

På samma sätt kan vi för plant töjningstillstånd visa :

$$G = \frac{K^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (\text{plant töjningstillstånd}) \quad \dots (12.3.3)$$

Liksom tidigare fås Griffithkriteriet:

$$G_c da - \frac{K_c^2}{E} da - 2\gamma da$$

13 ICKELINJÄR BROTTMEKANIK

13.1 Elastoplastiska brott

Griffith-teorin behandlar endast spröda materials brottmekanik. Vad som avses med sprött material har tidigare (6.1) förtydligats, nu nöjer vi oss med att säga att det är material som går sönder medan de fortfarande arbetar elastiskt. Hos material som inte är spröda i denna bemärkelse, fann man emellertid via experiment att σ_B trots allt är av formen

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{E \cdot \text{konstant}}{\pi a}} \quad (\text{jmf ekvation (12.2.9)})$$

Konstanten är emellertid $\gg 2\gamma$, Orowan postulerade därför :

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{E(2\gamma + \gamma_p)}{\pi a}} \approx \sqrt{\frac{E \gamma_p}{\pi a}}$$

där γ_p erhålles från försök.

Irwin gjorde en ännu bättre ansats när han skrev

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{E G_c}{\pi a}}$$

Enligt modellen med en ekvivalent elastisk spricka, så :

$$a \rightarrow a + r_f \quad \text{och} \quad d_f - 2r_f = \frac{K_c^2}{\pi \sigma_f^2} = \frac{\sigma_B^2 \pi a}{\pi \sigma_f^2} = a \frac{\sigma_B^2}{\sigma_f^2}$$

$$\therefore \sigma_B = \sqrt{\frac{E G_c}{\pi(a+r_f)}} = \sqrt{\frac{E G_c}{\pi(a + \frac{a \sigma_B^2}{\sigma_f^2})}}$$

Eftersom $G_c = K_c^2 / E$ får vi :

$$\sigma_B = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_f^2}\right)}}$$

$$\therefore K_c = \sigma_B \sqrt{\pi a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_f^2}\right)} \quad \dots(13.1.1)$$

vilket visar att $K_c = \sigma_B \sqrt{\pi a}$ underskattar brottsegheten med ca 4% när $\sigma_B / \sigma_f = 0,4$ och med ca 15% när $\sigma_B / \sigma_f = 0,8$.

Med Dugdale's modell fås enligt (11.2.2) :

$$d_f = \frac{\pi^2 \sigma_B^2}{8 \sigma_f^2} a \approx 2 r_f$$

$$\therefore \sigma_B = \sqrt{\frac{E G_c}{\pi(a+r_f)}} = \sqrt{\frac{E G_c}{\pi \left(a + \frac{\pi^2 \sigma_B^2}{16 \sigma_f^2} a\right)}} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a \left(1 + \frac{\pi^2 \sigma_B^2}{16 \sigma_f^2}\right)}}$$

$$\therefore K_c = \sigma_B \sqrt{\pi a \left(1 + \frac{\pi^2 \sigma_B^2}{16 \sigma_f^2}\right)}$$

vilket visar att $K_c = \sigma_B \sqrt{\pi a}$ underskattar brottsegheten med ca 4,5% när $\sigma_B / \sigma_f = 0,4$ och med ca 20% när $\sigma_B / \sigma_f = 0,8$.

13.2 J-integralen

För ett linjärelastiskt material kan den frigjorda energin då en spricka växer med ett belopp da uttryckas med G . För ett icke-linjärt elastiskt material motsvaras G av J .

Vi definierar en töjningsenergidensitetsfunktion W .

$$W = \text{töjningsenergi/volymsenhet} = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad \dots(13.2.1)$$

För en vanlig linjärelastisk kropp, utsatt för en dragspänning σ är

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma_{11} d\epsilon_{11} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

Antag att en kropp med ett elliptiskt hål utsättes för spänningen T_i^0 längs en del av sin yta S_T samt förskjutningar u_i^0 längs en annan del av sin yta S_U . Initialspänningen i kroppen är σ_{ij}^0 och initialtöjningen är ϵ_{ij}^0 .

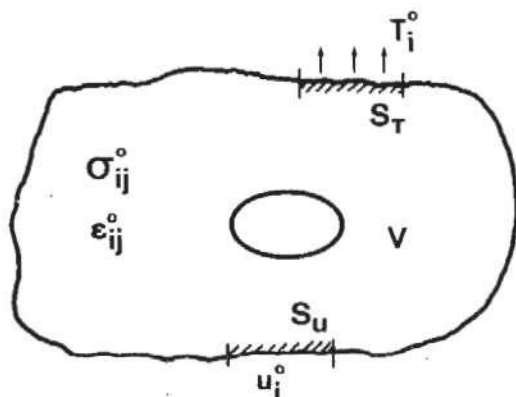


Fig 13.2.1. Spännings- och förskjutningsbild för godtycklig kropp

Den potentiella energin för kroppen är då

$$U^0 = \int_V W(\epsilon_{m,n}^0) dV - \int_{S_T} T_i^0 u_i^0 ds \quad \dots (13.2.2)$$

Om vi har en likadan kropp med skillnaden att hålet är ΔV större med ΔS större yta, fås

$$U^0 + \Delta U = \int_{V-\Delta V} W(\epsilon_{m,n}^0 + \Delta \epsilon_{m,n}) dV - \int_{S_T} T_i^0 (u_i^0 + \Delta u_i) ds \quad \dots (13.2.3)$$

Lägg här märke till, att integralen $T_i^0 \Delta u_i$ över S_T är lika stor som $(T_i^0 + \Delta T_i) \Delta u_i$ över hela ytan. Detta då $\Delta T_i = 0$ på S_T , $\Delta u_i = 0$ på S_U och $T_i^0 + \Delta T_i = 0$ på den nya ytan ΔS . Sålunda :

$$\int_{S_T} T_i^0 \Delta u_i ds = \int_{V-\Delta V} (\sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma_{ij}) \Delta \epsilon_{ij} dV$$

Minskningen i potentiell energi kan nu skrivas:

$$-\Delta U = \int_{\Delta V} W(\epsilon_{m,n}^{\circ}) dV + \int_{V-\Delta V} \{ (\sigma_{ij}^{\circ} + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\epsilon_{ij} - [W(\epsilon_{m,n}^{\circ} + \Delta\epsilon_{m,n}) - W(\epsilon_{m,n}^{\circ})] \} dV$$

$$\therefore -\Delta U = \int_{\Delta V} W(\epsilon_{m,n}^{\circ}) dV + \int_{V-\Delta V} \int_{\epsilon_{m,n}^{\circ}}^{\epsilon_{m,n}^{\circ} + \Delta\epsilon_{m,n}} (\sigma_{ij}^{\circ} + \Delta\sigma_{ij} - \sigma_{ij}) d\epsilon_{ij} dV \quad \dots (13.2.4)$$

Lägg märke till att töjningsintegralen i volymintegralen är oberoende av vilken linje (vi har konstant enhetstjocklek) vi betraktar. Vi kan då göra följande:

Vi belastar kroppen med det större hålet som innan samt lägger till $T_i^{\circ} = \sigma_{ij}^{\circ} u_j$ på den nya ytan ΔS . Deformationstillståndet är då σ_{ij}° , ϵ_{ij}° som för kroppen med det lilla hålet. Om nu lasterna på S_T och S_U hålles konstanta och T_i° på ΔS reduceras till 0, uppkommer deformationstillståndet $\sigma_{ij}^{\circ} + \Delta\sigma_{ij}$, $\epsilon_{ij}^{\circ} + \Delta\epsilon_{ij}$. Vi låter T_i^* , u_i^* beteckna lasterna på ΔS då $\epsilon_{ij}^{\circ} + \Delta\epsilon_{ij}$. (13.2.4) blir då :

$$-\Delta U = \int_{\Delta V} W(\epsilon_{m,n}^{\circ}) dV - \int_{\Delta S} \int_{u_i^{\circ}}^{u_i^{\circ} - \Delta u_i, T_i^{\circ}=0}^{u_i^* - u_i^{\circ}, T_i^*=T_i^{\circ}} T_i^* du_i^* dS \quad \dots (13.2.5)$$

d v s energireduktion är lika med töjningsenergin hos den borttagna kroppsdelens minus det negativa arbete som utförs då lasterna på ΔS går mot 0.

Om vi antar att ΔV är mycket liten kommer detta negativa arbete (vilket är av andra ordningen!) att vara ≈ 0 .

$$\therefore -dU = \int_{dV} W(\epsilon_{m,n}^{\circ}) dV - \int_{dS} [W(\epsilon_{m,n}^{\circ}) du] dS \quad \dots (13.2.6)$$

där du är det avstånd som punkter på ytan i kropp tvås ellips rör sig för att sammanfalla med motsvarande punkter i kropp ett.

Om vi har följande fall:

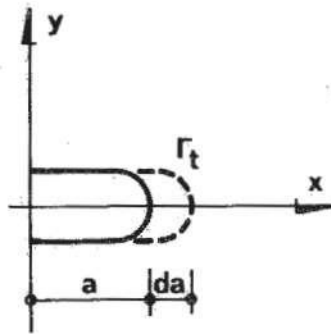


Fig 13.2.2. Sprickspets i elastoplastiskt material

Här är $dV = da \cdot dz \cdot dy$ vilket i (13.2.6) ger

$$-\frac{dU}{da} = \int_{\Gamma_t} W(\varepsilon_{m,n}) dy \quad \dots(13.2.7)$$

sett per tjockleksenhet material.

Allmänt definierar vi nu:

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - T \frac{\partial u}{\partial x} dS) \quad \dots(13.2.8)$$

där Γ är en godtycklig kurva som i motsols riktning löper runt sprickspetsen. Att kurvan kan väljas godtyckligt framgår av (självklart får den inte gå genom flytzoner):

Låt Γ_1 och Γ_2 vara två olika kurvor och J_1 och J_2 respektive värden på (13.2.8). Om Γ_2 omger Γ_1 så :

$$J_2 - J_1 = \int_{A(\Gamma_2, \Gamma_1)} \left(\frac{dW}{dx} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad \text{ty}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x}$$

$$\therefore J = -\frac{\partial U}{\partial a} \quad \dots(13.2.9)$$

I det helt linjärelastiska fallet sammanfaller sålunda G och J samt G_c och J_c .

13.3 J för Dugdale - Barenblatts lösning

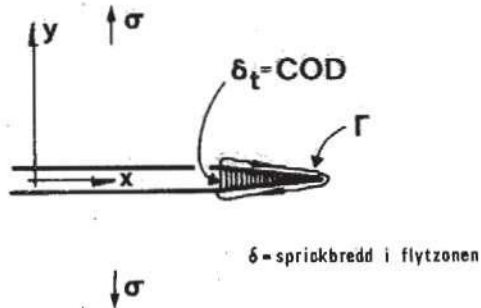


Fig 13.3.1. Dugdale-Barenblatts modell

Om vi väljer Γ enligt fig 13.3.1. blir $dy \approx 0$ och vi får :

$$J = - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dS = - \int_{f_z} \sigma_y \frac{\partial \delta}{\partial x} dx = - \int_{f_z} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta_t} \sigma(\delta) d\delta \right] dx$$

$$\therefore J = \int_0^{\delta_t} \sigma(\delta) d\delta$$

där f_z står för flytzone (kohesiv zon som Barenblatt menade). Sålunda blir stabilitetsvillkoret för sprickan att $\delta_t < \delta^*$ där δ^* är den sprickbredd för vilken de sammanhållande krafterna över sprickan är 0.

Jämviktsvillkoret vid vilket sprickutbredning just är möjlig blir alltså:

$$J = \int_0^{\delta^*} \sigma(\delta) d\delta$$

....(13.3.1)

Antag att flytzoneen är mycket liten jämfört med geometrin hos problemet i övrigt. Eftersom J-integralen är oberoende av valet av Γ väljer vi nu att lägga den mycket långt från flytzoneen där deformationsfältet med stor noggrannhet är det som svarar mot den elastiska lösningen (d v s Griffith-lösningen). Enligt definitionen av ytenergi är den totala

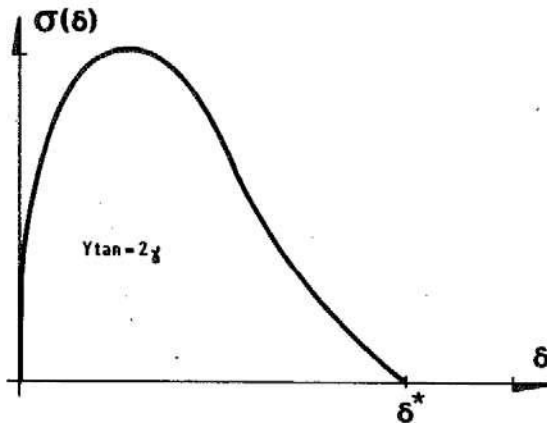


Fig 13.3.2. Spänning kontra separationsdistans över spricka

ytan under spänning sprickbreddskurvan då också lika med 2γ .

Sålunda leder Griffith-teorin och Dugdale - Barenblatts lösning till samma brottmekaniska beteende om flytzoneen är mycket liten.

Genom att lösa (13.3.1) för $\sigma(\delta) = \sigma_f + E_{tan} \cdot \delta$ fås den tidigare nämnda ekvationen (11.2.3).

14 NUMERISKA BERÄKNINGAR

Endast ett fåtal problem inom spännings- och deformationsanalysen kan i sin helhet lösas med analytiska metoder. Oftast leder den analytiska behandlingen till så komplicerade delresultat, t ex integralekvationer, att en numerisk lösningsmetod måste användas.

Finita elementmetoden (FEM) är en sådan numerisk metod.

Vid vanlig analys förfares ofta på så sätt att sambanden mellan intressanta storheter, t ex spännings - töjningssamband, uppställs för ett kontinuumselement. Den kropp som undersökes uppfattas som sammansatt av oändligt många sådana element, vilkas storlek går mot noll.

I FEM låter man kroppen bestå av ett ändligt antal kontinuumselement med ändlig utsträckning. Under vissa villkor konvergerar den så erhållna lösningen mot kontinuumslösningen då antalet element ökas. Vid brottmekaniska beräkningar kan man med FEM också enkelt rent geometriskt efterlikna sprickor genom att koppla loss en del element från varandra. Man kan också simulera plasticering framför sprickspetsar genom att t ex ändra materialdata för element framför denna.

FEM kan baseras på dels kraftmetoden och dels deformationsmetoden (eller en kombination av dessa båda metoder). I denna presentation av FEM användes deformationsmetoden då den väl ansluter till det naturliga energibetraktelsesättet.

14.1 Potential

Det totala arbetet att med en centriskt dragande kraft ge en stång en töjning ϵ är enligt (12.1.1):

$$W = V \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad \dots(12.1.1)$$

Detta gäller om vi betraktar ett snitt vinkelrät mot stångens tvärsektion. Om snittet istället lägges snett, så att det bildar vinkeln α med dragkraftsriktningen, kan inte jämvikt villkoren uppfyllas med ensam förekomst av vinkelrät mot snittytan verkande normalspänning σ . För jämvikt fordras samtidig förekomst av en i snittytan tangentiellt verkande spänning, en så kallad skjuvspänning τ . Detta belyses i avsnitt 2.3.

För detta snett utskurna element tecknar vi spänningsvektorn $[\sigma]$ och töjningsvektorn $[\epsilon]$:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots (14.1.1)$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots (14.1.2)$$

Om hela staven nu tänkes uppdelad i sådana här infinitesimala element, fås det ur (12.1.1) generaliserade uttrycket:

$$W = \int_V \beta [\epsilon]^T [\sigma] dV \quad \dots (14.1.3)$$

där β är beroende av stavens elasticitet. Vid linjärelastiska förhållanden inses t ex att $\beta = 0.5$.

En hel konstruktions potential U kan nu definieras som det arbete som utföres av alla inre snittkrafter och alla yttre krafter då konstruktionen tvingas övergå från sitt deformerade tillstånd till sin ursprungliga, obelastade position.

Härvid fås bidraget från de inre snittkrafterna ur ekvation (14.1.3) och bidraget från de yttre krafterna som summan av det negativa arbete de utför då de flyttas tillbaka till sitt ursprungliga läge.

U kan således fås som:

$$U = W - [\delta]^T [F] \quad \dots (14.1.4)$$

där [F] innehåller de yttre krafterna som angriper konstruktionen och [δ] är krafternas förflyttningar i motsvarande krafts riktning.

14.2 Castligianos första sats

Ett system av yttre krafter [F] påföres en godtycklig konstruktion med elastiskt beteende. Konstruktionen deformeras och en viss mängd deformationsenergi W magasineras.

Genom att ge konstruktionen en virtuell deformation, som karakteriseras av förskjutningen δ_i vid kraften F_i och av att förskjutningen samtidigt är noll vid alla andra yttre krafter F_j , förorsakas en ändring av deformationsenergin W enligt 12.1.1 med beloppet:

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} \delta_i$$

Samtidigt utför det yttre kraftsystemet arbetet

$$F_i \delta_i$$

Enligt det virtuella arbetets princip är det yttre arbetet lika med ändringen av deformationsenergin vid en virtuell deformation av en konstruktion i jämvikt. Således:

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} = F_i \quad \dots (14.2.1)$$

Detta samband uttrycker Castligianos första sats. Sambandet kan också fås genom att minimera potentialen (14.1.4).

14.3 Styvhetsmatrisen

Under förutsättning av linjärelastiskt samband mellan kraft och deformation kan deformationsenergin W enligt (12.1.1) skrivas som en kvadratisk form i deformationerna.

$$W = \sum K_{ij} \delta_i \delta_j \quad \dots(14.3.1)$$

där K_{ij} är koefficienter som är beroende enbart av geometri och styvhet hos konstruktionen.

Ekvation (14.2.1) tillämpad på (14.3.1) ger ekvationerna

$$F_1 = \frac{\partial W}{\partial \delta_1} = K_{11} \delta_1 + K_{12} \delta_2 + \dots + K_{1n} \delta_n$$

$$F_2 = \frac{\partial W}{\partial \delta_2} = K_{21} \delta_1 + K_{22} \delta_2 + \dots + K_{2n} \delta_n$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$F_n = \frac{\partial W}{\partial \delta_n} = K_{n1} \delta_1 + K_{n2} \delta_2 + \dots + K_{nn} \delta_n$$

I matrisform blir detta:

$$[F] = [K][\delta] \quad \dots(14.3.2)$$

Ekvation (14.3.2) är fundamental för deformationsmetoden och därmed också för FEM, i vilken deformationerna $[\delta]$ är de primärt obekanta. I (14.3.2) är $[K]$ och $[F]$ kända på förhand för given konstruktion och belastning. Sålunda fås:

$$[\delta] = [K]^{-1}[F] \quad \dots(14.3.3)$$

Matrisen $[K]$ är den så kallade styvhetsmatrisen som spelar

en avgörande roll inom FEM-analysen. Den kan fås direkt genom att derivera ekvation (14.3.2) med avseende på i ordning $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \delta_1^2} &= K_{11} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \delta_1 \partial \delta_2} &= K_{12} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \delta_1 \partial \delta_n} &= K_{1n} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \delta_n^2} &= K_{nn} \end{aligned}$$

Det generella sambandet blir:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \quad \dots(14.3.4)$$

Eftersom ordningsföljden för derivationerna kan väljas godtyckligt, ses att $K_{ij} = K_{ji}$ vilket innebär att matrisen $[K]$ är symmetrisk och att $[K] = [K]^T$.

14.4 FEM, allmänt

Liksom tidigare skall vi begränsa oss till planet. Beräkningen genomförs på en modell som genom ett antal snitt uppdelas i mindre bitar (finita element) vilka antas vara helt fria från varandra längs snitten men stelt förbundna vid gemensamma knutpunkter. Indelningen i element görs härvid tätare i de områden där stor påkänningsvariation kan förväntas.

För varje sådant här element kan sedan den tidigare beskrivna

energimetoden appliceras. Matriserna $[F]$, $[K]$ och $\{\delta\}$ utökas härvidlag och får en global karaktär.

Den yttre lasten omräknas till knutpunktslaster. Samtliga komponenter för hela konstruktionen samlas i den globala kraftvektorn $[F]$.

Konstruktionens styvhetsmatris $[K]$ sammansättes av de enskilda elementens styvhetsmatriser $[k]$, varvid $[k]$ bestäms, element för element, ur varje elements geometriska form, elastiska egenskaper och läge i förhållande till det globala koordinatsystemet.

Med $[F]$ och $[K]$ nu kända kan de obekanta deformationerna $\{\delta\}$ beräknas med hjälp av ekvation (14.3.3) varefter påkännings-tillståndet kan bestämmas inom varje element.

14.5 Finita element i ett kontinuum

Ett typiskt finit element e har noderna i , j och m som förbinds med räta linjer enligt figur 14.5.1.

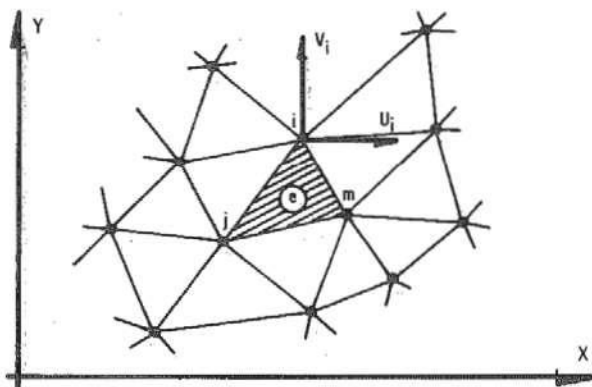


Fig 14.5.1. Finita element i ett kontinuum

Förskjutningarna i någon punkt inom e tecknas nu i vektorn $\{f\}$:

$$[f] = [N][\delta]^e = [N_i \ N_j \ N_m] \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad \dots (14.5.1)$$

där $[\delta]^e$ innehåller elementets nodförskjutningar och $[N]$ innehåller formfunktioner som ger läget inom elementet.

Om man nu känner $[f]$ känner man i princip också töjningarna som sålunda kan skrivas:

$$[\varepsilon] = [B][\delta]^e \quad \dots (14.5.2)$$

Spänningarna inom elementet kommer, om vi har elastiska förhållanden, att linjärt bero av töjningarna via materialkaraktéristiska enligt Hooke's lag. Vi får alltså:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad \dots (14.5.3)$$

Vi använder oss nu av virtuella arbetets princip (som i 14.3) :

Om därför noderna ges en virtuell förskjutning $[\delta^*]^e$, får vi $[f^*] = [N][\delta^*]^e$ och $[\varepsilon^*] = [B][\delta^*]^e$. Det yttre arbetet fås nu som:

$$([\delta^*]^e)^T [F]^e \quad \dots (14.5.4)$$

där $[F]^e$ är en kolonnmatris som innehåller aktuella nodkrafter U och V (se fig 14.5.1.).

Per enhetsvolym inom elementet fås det inre arbetet

$$[\varepsilon^*]^T [\sigma] = ([B][\delta^*]^e)^T [\sigma]$$

Eftersom $([A][B])^T = [B]^T [A]^T$, fås det inre arbetet per enhetsvolym nu till :

$$([\delta^*]^e)^T [B]^T [\sigma] \quad \dots (14.5.5)$$

Då inre och yttre krafter skall vara lika fås slutligen, med det inre arbetet summerat över hela volymen:

$$[F]^e = \int_V [B]^T [\sigma] dV$$

Värdet på $[\sigma]$ fås ur (14.5.3) och för $[\epsilon]$ ur (14.5.2)

$$\therefore [F]^e = \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) [\delta]^e \quad \dots (14.5.6)$$

Jämföres detta med (14.3.2) fås att styvhetsmatrisen $[k]^e$ är:

$$[k]^e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \dots (14.5.7)$$

Dessa resultat fås också om man minimerar potentialen i (14.1.4) som påpekades under 14.2.

$$U = W - [\delta]^T [F] \quad \dots (14.1.4)$$

$$U^e = \frac{1}{2} \int_V [\epsilon]^T [\sigma] dV - ([\delta]^e)^T [F]^e$$

$$U^e = \frac{1}{2} \int_V [\epsilon]^T [D] [\epsilon] dV - ([\delta]^e)^T [F]^e$$

$$U^e = \frac{1}{2} \int_V ([B][\delta]^e)^T [D] [B][\delta]^e dV - ([\delta]^e)^T [F]^e$$

$$U^e = \frac{1}{2} \int_V ([\delta]^e)^T [B]^T [D] [B] [\delta]^e dV - ([\delta]^e)^T [F]^e$$

Minimering ger nu:

$$\frac{\partial U^e}{\partial \delta_i} = \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) [\delta]^e - [F]^e = 0$$

vilket är ekvation (14.5.6).

14.6 Assemblering av styvhetsmatrisen

Antag att vi har ett element enligt figur 14.6.1. Dess längd

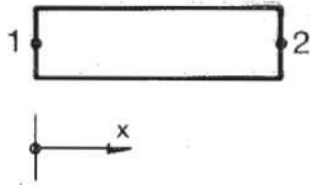


Fig 14.6.1. Enkelt balkelement med två noder

är l och noderna har bara en frihetsgrad u_1 respektive u_2 .
Om dess tvärsnittsytta är A fås styvhetsmatrisen enligt (14.5.7)
som:

$$[k] = \int_0^l [B]^T [D] [B] A dx$$

(14.5.3) ger att $[D]$ här är $= E$. Vidare ger (14.5.2) och (14.5.1):

$$[\epsilon] = [B][\delta] = \frac{\partial}{\partial x} [f] = \frac{\partial [N]}{\partial x} [\delta]$$

$$\therefore [B] = \frac{\partial [N]}{\partial x}$$

Ekvation (14.5.7) ger nu:

$$[k] = EA \int_0^l [B]^T [B] dx = EA \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} ([N]^T [N]) dx$$

Eftersom $[N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$ får vi (se nästa sida)

$$[k] = EA \begin{bmatrix} \int_0^L \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)^2 dx & \int_0^L \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx \\ \int_0^L \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx & \int_0^L \left(\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)^2 dx \end{bmatrix}$$

Nu blir alltså (14.5.6) $[F] = [k] \cdot [\delta]$:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = EA \int_0^L \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \left(\frac{\partial N_2}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad \dots (14.6.1)$$

Som uttryck för formfunktionerna N_1 och N_2 väljer vi:

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{och} \quad N_2 = \frac{x}{L}$$

Denna ansats ger:

$$[F] = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [\delta] \quad \dots (14.6.2)$$

Kopplar vi nu samman två balkelement enligt figur 14.6.2 får vi den globala styvhetsmatrisen genom att summera (assemblera) de ingående elementens styvhetsmatriser.

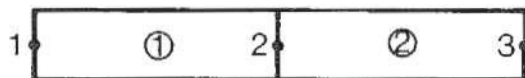


Fig 14.6.2. Sammankopplade enkla balkelement

Isärkopplade blir elementen 1 och 2:

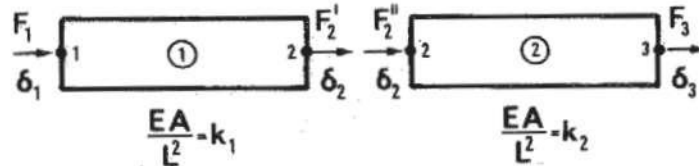


Fig 14.6.3. Isärkopplade enkla balkelement

Vi får på detta sätt ekvationssystemen:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_2'' \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

Utskrivna blir dessa:

$$\begin{cases} F_1 = k_1 \delta_1 - k_1 \delta_2 \\ F_2' = -k_1 \delta_1 + k_1 \delta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2'' = k_2 \delta_2 - k_2 \delta_3 \\ F_3 = -k_2 \delta_2 + k_2 \delta_3 \end{cases}$$

Då $F_2' + F_2'' = F_2$ får vi:

$$F_2 = -k_1 \delta_1 + k_1 \delta_2 + k_2 \delta_2 - k_2 \delta_3 = -k_1 \delta_1 + (k_1 + k_2) \delta_2 - k_2 \delta_3$$

Tydligt blir assembleringen:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

..... (14.6.3)

14.7 FEM vid lösande av differentialekvationer

Den i 14.6 visade processen för ett element är speciell. Allmänt kan samma sak visas genom att direkt minimera potentialen (14.1.4) vilket oftast är en bättre metod. Enligt denna ekvation är för en hel kropp:

$$U = \int_V (W - [f][F]) dV \quad \dots (14.7.1)$$

För elementet i figur 14.6.1 är:

$$W = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial [f]}{\partial x} \right)^2$$

$$\therefore U = \int_0^L \left(\frac{EA}{2} \left(\frac{\partial [f]}{\partial x} \right)^2 - [f][F] \right) dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = \int_0^L \left(\frac{EA}{2} 2 \frac{\partial [f]}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} - N_i F_i \right) dx = 0$$

$$\begin{cases} EA \int_0^L \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} \delta_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} \delta_2 \right) dx = \int_0^L N_1 F_1 dx & \text{för } i = 1 \\ EA \int_0^L \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \delta_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \delta_2 \right) dx = \int_0^L N_2 F_2 dx & \text{för } i = 2 \end{cases}$$

Sammantaget fås sålunda ekvation (14.6.1).

15 ELEMENTÄR BROTTMEKANIK

15.1 Allmänt

Vi tänker oss en spricka med längden $2a$ i en oändligt stor skiva som i oändligheten utsättes för en dragspänning σ_∞ .

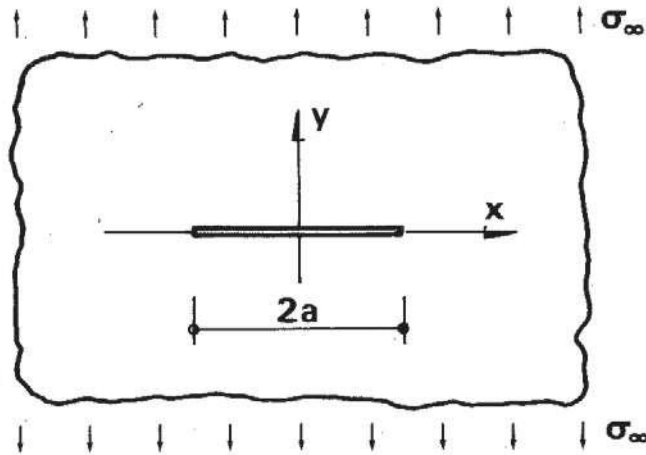


Fig 15.1.1. Spricka i oändligt stor skiva

Sprickan kommer här att fungera som en spänningskoncentrator och spänningen σ_y , omedelbart framför sprickspetsarna, kommer att bli större än σ_∞ .

Hur stor inverkan denna spricka har på materialets hållfasthet kan uttryckas med spänningskoncentrationsfaktorn S :

$$S = \frac{\sigma_y}{\sigma_\infty} \quad \dots (15.1.1)$$

Spänningskoncentrationsfaktorns storlek beror på materialets karaktär och på sprickgeometrin, den kan variera från 1 upp till över 100.

15.2 Atomär brotthållfasthet

Från fysiken känner vi den atomära potentialkurvan:

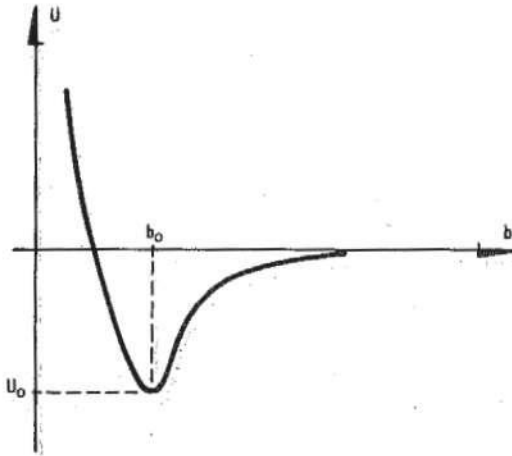


Fig 15.2.1. Potential U mellan atomer på avståndet b från varandra

Denna potentiella energi U har minimum för $b = b_0$, vilket inträffar då materialet är spänningsfritt. Den energi som måste tillföras för att separera atomerna är U_0 och detta brottarbete sättes ofta till 2γ , där γ är ytenergin per ytenhet av en fri yta. Arbetet blir 2γ eftersom det bildas två ytor vid en spricka.

Den kraft F som behövs för att dela atomerna fås genom derivation av potentialfunktionen enligt figur 15.2.1. Ett uttryck för spänningen σ fås nu av F/b_0^2 och genom att sätta $b - b_0 = x$ kan töjningen ϵ skrivas som x/b_0 .

Sålunda fås arbetslinjen för bindningen mellan två atomer som (se nästa sida) :

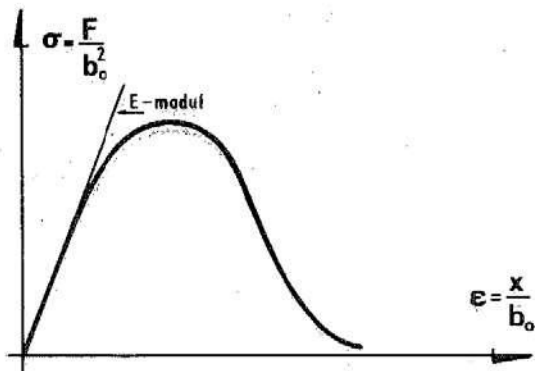


Fig 15.2.2. Arbetslinje för två-atomigt material

Ytan under kurvan representerar givetvis brottarbetet 2γ . Genom att beräkna denna ytas storlek erhåller man ett uttryck för den maximala spänningen (som också ofta är den samma som brottspänningen) mellan två atomer :

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{E\gamma}{b_0}} \quad \dots (15.2.1)$$

15.3 Griffith

I ett elastiskt material med en spricka och belastat som figur 15.1.1 visar, fås spänningskoncentrationsfaktorn till:

$$S = \frac{\sigma_y}{\sigma_\infty} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \approx 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad \dots (15.3.1)$$

I denna ekvation betecknar ρ sprickspetsradien. Om sprickspetsen är skarp, kan som ett rimligt värde på ρ sättas b_0 . Om vi vidare som brottkriterium sätter att $\sigma_y = \sigma_{\max}$ enligt (15.2.1) uppnås, får vi :

$$\sigma_\infty = \sigma_{\text{BROTT}} = \sqrt{\frac{E\gamma}{4a}} = 0.5\sqrt{\frac{E\gamma}{a}} \quad \dots (15.3.2)$$

Detta värde tar bara hänsyn till bindningen mellan de två atomerna på ömse sidor om själva sprickspetsen. Eftersom atomerna inom själva sprickspetszonen självklart samverkar och påverkar varandra, är detta värde lågt.

Griffith satte därför (?) brottspänningen till :

$$\sigma_{\text{BROTT}} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} = 0.8 \sqrt{\frac{E\gamma}{a}} \quad \dots (15.3.3)$$

Denna ekvation verifierade Griffith experimentellt för glas, ett praktiskt taget helt sprött material. Med ledning av dessa resultat postulerade han därefter:

Drivkraften vid en sprickutbredning är skillnaden mellan den frigjorda elastiska töjningsenergin och den energi som behöver tillföras för att skapa nya sprickytor.

Om vi kallar den frigjorda töjningsenergin för G (efter Griffith) och som innan ytenergin för 2γ , blir vårt brottvillkor:

$$G_c = 2\gamma \quad \dots (15.3.4)$$

där c står för critical. G_c är en materialspecifik storhet.

I de flesta material förändras emellertid själva sprickspetszonens egenskaper då spänningen där uppnått ett tillräckligt högt värde, materialet i sprickspetsen flyter. Detta gör att man under senare år modifierat ekvationerna (15.3.3) och (15.3.4), vilket framgår av det följande.

15.4 Modern brottmekanik

I den moderna brottmekaniken arbetar man inte i den atomära skalan som Griffith gjorde. Materialet ses istället som ett homogent kontinuum.

Framför en matematiskt skarp sprickspets i ett sådant material, erhåller man med vanlig elasticitetsteori en spänningskoncentrationsfaktor S som beror av avståndet r från sprickspetsen (r är riktad i sprickans plan) enligt :

$$S = \sqrt{\frac{a}{2\pi r}} \alpha \quad \dots(15.4.1)$$

där α är en faktor som beror av sprickgeometrin. Ofta kan denna faktor sättas till 2. Exakt fås för en spricka enligt figur 15.1.1 $\alpha = \sqrt{\pi}$.

Om σ_{∞} som innan betecknar det pålagda spänningsfältet långt från sprickan och σ_y spänningen tvärs sprickan framför sprickspetsen, kan (15.4.1) också skrivas:

$$\sigma_y = \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{a}{2\pi r}} \alpha \quad \dots(15.4.2)$$

I denna ekvation har det visat sig praktiskt att sätta termen $\sigma_{\infty} \sqrt{a} \alpha = K$. Denna faktor kallas spänningsintensitetsfaktorn. Sålunda får vi :

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \quad \dots(15.4.3)$$

Fördelen med att uttrycka spänningen vid sprickspetsen med en enda faktor K beror på att $1/\sqrt{2\pi r}$ - beroendet är samma oavsett det pålagda spänningssystemet. Detta betyder att olika belastningar som drag och vridning var och en ger sitt bidrag till σ_y och det resulterande σ_y fås som $\Sigma K / \sqrt{2\pi r}$.

K beskriver ju också i en term hur farlig kombinationen pålagd spänning - sprickgeometri är. Så till exempel växer K för en given geometri med den pålagda spänningen mot en

kritisk nivå. För denna kritiska spänningsnivå uppnår K sitt kritiska värde K_c , den så kallade brottsegheten. För denna kan tre viktiga fall urskiljas :

- 1 Om K_c uppnås för en pålagd spänning som är större än materialets flytspänning, kommer brottet att ske genom en fortgående plastisering.
- 2 Om K_c uppnås för en pålagd spänning som är mindre än materialets flytspänning, kommer brottet att bli sprött, d v s katastrofartat.
- 3 Om K_c uppnås för en pålagd spänning som är lika stor som materialets flytspänning, är man just på gränsen mellan segt och sprött brott. Den spricklängd a för vilken detta inträffar (K är en funktion av pålagd spänning, spricklängd och formfaktorn α), kallas kritisk spricklängd a_c , en materialspecifik parameter. Detta är ett ur konstruktionsmässig synpunkt viktigt konstaterande.

Kopplingen mellan denna parameter K_c och det Griffith'ska brottarbetet G_c är för plant spänningstillstånd :

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \quad \dots (15.4.4)$$

15.5 Sprickspetszonen

Eftersom spänningen σ_y enligt (15.4.2) stiger då r minskar, kommer den inom ett visst avstånd r_f från sprickspetsen att uppnå flytvärdet σ_f .

Den kraftreduktion som blir följden av plasticeringen representeras av ytan Y i den vänstra av figurerna 15.5.1, en yta som beräkningsmässigt är $= \sigma_f \cdot r_f$. Ett grovt sätt att ta hänsyn till denna kraftreduktion är att flytta den

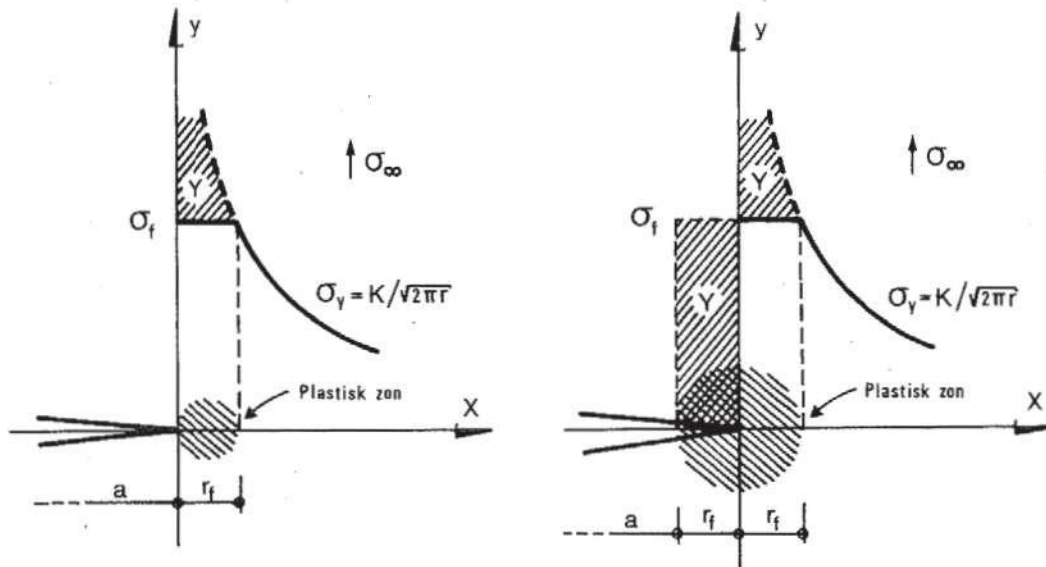


Fig 15.5.1. Grovt hänsynstagande till sprickspetsplasticering

beräkningsmässiga sprickspetsen en sträcka r_f enligt den högra av figurerna 15.5.1, den verkliga sprickspetsen finns självklart kvar på avståndet a . Genom denna metod, i litteraturen benämnd ekvivalent elastisk spricka, kommer den totala kraften i området närmast sprickspetsen att bli den samma som i det rent elastiska fallet med en sprickspetsspänning som går mot oändligheten.

Avståndet r_f , halva flytzoneans längd, blir:

$$r_f = \frac{K^2}{2\pi\sigma_f^2} \quad \dots(15.5.1)$$

Den Griffithska brottspänningen enligt (15.3.3) har dålig giltighet om sprickspetszonen flyter. Ett bättre förhållande fås i detta fall enligt Irwin om ytenergin 2γ ersätts med G_c , den förbrukade energin i sprickspetszonen. I Griffith's rent elastiska fall är $2\gamma = G_c$ vilket inte är fallet då sprickspetsområdet flyter, G_c är då $\gg 2\gamma$.

Irwin satte alltså upp brottspänningen :

$$\sigma_{\text{BROTT}} = \sqrt{\frac{E G_c}{\pi a}} \quad \dots (15.5.2)$$

Vad detta innebär kan vi kontrollera för en spricka enligt figur 15.1.1. Eftersom $G_c = K_c^2 / E$ och a skall ersättas av det fiktiva värdet $a + r_{fc}$ (ekvivalent elastisk kritisk spricka) blir (15.5.2) :

$$\sigma_{\text{BROTT}} = \sqrt{\frac{E K_c^2}{\pi E (a + r_{fc})}} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi (a + r_{fc})}}$$

Värdet på r_{fc} fås av (15.5.1) och då K_c för det betraktade fallet är $\sigma_\infty \sqrt{a + r_{fc}} \sqrt{\pi}$, blir $a + r_{fc}$:

$$a + r_{fc} = a + \frac{K_c^2}{2\pi \sigma_f^2} = a + \frac{\sigma_\infty^2 a \pi}{2\pi \sigma_f^2} = a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_f^2}\right)$$

$$\therefore \sigma_{\text{BROTT}} = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_f^2}\right)}} \Rightarrow K_c = \sigma_{\text{BROTT}} \sqrt{\pi a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_f^2}\right)}$$

Då σ_{BROTT} är ekvivalent med σ_∞ kan vi skriva :

$$K_c = \sigma_\infty \sqrt{a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_f^2}\right)} \sqrt{\pi} \quad \dots (15.5.3)$$

I det rent elastiska fallet bortser man alltså från termen $1/2 \sigma_\infty^2 / \sigma_f^2$ vilket kan låta sig göras då $\sigma_\infty \ll \sigma_f$.

Om däremot $\sigma_\infty \rightarrow \sigma_f$, kan det elastiska brottseghetsvärdet ändras kraftigt vilket framgår av figuren 15.5.2. I figuren betecknar K_c^* det korrigerade värdet enligt (12.5.3).

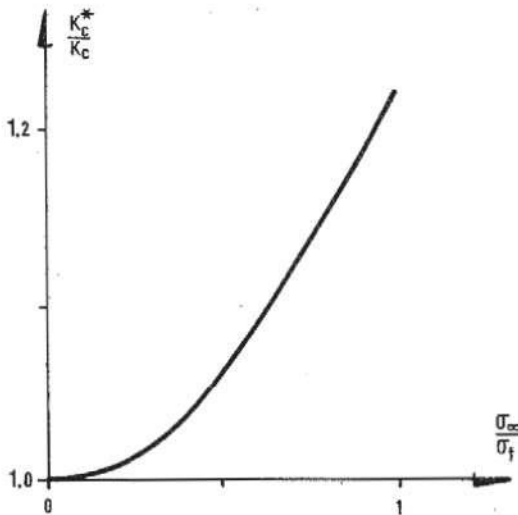


Fig 15.5.2. Korrektion av elastiskt brottseghetsvärde då $\sigma_\infty \rightarrow \sigma_f$

Denna korrektion medför bland annat:

Som påpekades i punkten 3 på sidan 102 kan man med hjälp av $K_c = \sigma_f \sqrt{a_c} \alpha$ lösa ut en materialspecifik kritisk spricklängd a_c . Eftersom formfaktorn α i de flesta praktiska tillämpningar med god approximation antar värdet 2, sätter man ofta :

$$a_c = \left(\frac{K_c}{2\sigma_f} \right)^2 = 0.25 \left(\frac{K_c}{\sigma_f} \right)^2$$

Eftersom σ_∞/σ_f här är = 1, bör detta värde istället vara:

$$a_c = \left(\frac{K_c^*}{1.22 \cdot 2\sigma_f} \right)^2 = 0.17 \left(\frac{K_c^*}{\sigma_f} \right)^2 \quad \dots (15.5.4)$$

Denna ekvation är emellertid en tånjbar sanning då vår enkla modell med ekvivalent elastisk spricka är tveksam för höga σ_{∞}/σ_f -värden, bättre modeller ger ännu kortare kritiska spricklängder.

Viktiga slutsatser av detta lilla resonemang är :

1. Brottmekaniken av idag representerar en bra matematisk modell så länge som σ_{∞}/σ_f är liten.
2. Kritiska spricklängder fås uppskattningsvis med ekvationen (15.5.4). Verkliga kritiska spricklängder är kortare.

SIGMA · TRYCK
TLTH · Lund

