Några alternativa metoder för produktionsstyrning på Gruvön

Åström, Karl Johan

1973

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

NÅGRA ALTERNATIVA METODER FÖR PRODUKTIONSSTYRNING PÅ GRUVÖN

K.J. Åström

Lund den 2 november 1967

1. INLEDNING

Problemet att styra produktionen på Gruvöns utbyggda bruk har studerats av B. Pettersson. Han har angivit en matematisk modell för produktionssystemet samt formulerat detta som ett linjärt optimeringsproblem, som har angripits med linjärprogrammering. Det har emellertid visat sig, att numerisk lösning av linjärprogrammering kräver så lång räknetid att det är helt orealistiskt att utföra de erforderliga beräkningarna på IBM 7090. Lösningstiden vid linjärprogrammering är ungefär proportionell mot $(5\ n\ N)^3$ där n är antalet buffertcisterner och N är antalet planeringsintervall. För ett förenklat problem med $n = 10$ och $N = 12$ motsvarande en planeringsperiod av två dygn med 12 fyratimmars intervall, erhålls en beräkningstid av 36 min på IBM 7044 för själva simplexalgoritmen.

I detta memorandum diskuteras några alternativa metoder för att lösa planeringsproblemet. Det mest lovande alternativet utnyttjar teorin för optimal styrning - Pontryagins maximumprincip. På grund av planeringsproblemets mycket speciella struktur kan man med hjälp av maximumprincipen omedelbart erhålla viss information om de optimala lösningarnas struktur. Maximumprincipen kan även tas som utgångspunkt för konstruktion av numeriska algoritmer. Dessa algoritmer kan tolkas som en rekursiv lösning av en rad mindre LP problem i stället för ett enda stort LP problem. Dessa små LP problem är mycket lätta att lösa. Det är ej möjligt att utan närmare studier göra noggranna uppskattningar av räknetiderna med den alternativa algoritmen. Då räknealgoritmerna emellertid kan formuleras som en serie rekursiva simuleringar av systemekvationerna med förbättringar av styrsignalerna i varje steg, kan optimeringsproceduren emellertid provas med en måttlig påbyggnad av en simulering av problemet. Simuleringar är dessutom så enkla att de kan utföras direkt genom grafiska konstruktioner. Alternativa formuleringar av produktionsstyrningsproblemet diskuteras i avsnitt 2. En kortfattad översikt av existerande numeriska metoder för optimala styrningsproblem ges i avsnitt 3. Med denna diskussion som grund behandlas sedan de alternativa formuleringarna från avsnitt 2. Det visar sig att en av problemformuleringarna har avsevärda fördelar. Avsnitt 5 behandlar de optimala lösningarnas struktur. Slutligen ges ett antal referenser i avsnitt 6.

2. FORMULERING AV PRODUKTIONSSTYRNINGSPROBLEMET SOM ETT OPTIMALT STYRNINGSPROBLEM

B. Pettersson har angivit följande matematiska modell för produktionsstyrningsproblemet

$$\frac{dx}{dt} = Bu + Cv \qquad (2.1)$$

där x är en n-vektor vars komponenter anger nivåerna i de olika buffertkaren, u är en k-vektor av styrvariabler som anger produktionsnivåerna i de olika processenheterna, v är en ℓ-vektor av "störningar" som anger de önskade produktionsnivåerna på de olika processenheterna. Det är bekvämt att välja enheter så att begränsningarna på karnivåerna kan uttryckas som

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad (2.2)$$

samt att $u_i = 1$ betecknar maximal produktion på den i:e produktionsenheten, dvs

$$0 \leq u_i \leq 1 \qquad (2.3)$$

Villkoret på ångbalans i systemet kan vidare uttryckas som

$$d^T u + d_o = 0 \qquad (2.4)$$

där d_o är värmeeffekten från ångpannan.

Det är inte självklart hur kriteriefunktionen skall se ut. Det finns vissa önskemål på hur styrningen skall fungera.

- den tillgängliga ångan skall utnyttjas så effektivt som möjligt
- de olika produktionsenheterna skall ej köras alltför ojämnt
- lagringskaren skall utnyttjas.

För att få en förnuftig problemställning får man med säkerhet stegvis söka sig fram genom att ansätta kriteriefunktionen, analysera konsekvenserna i samråd med driftledningen, modifiera kriteriefunktionen etc. Självfallet måste man lägga ned mer arbete på att definiera kriteriefunktionen än vad som nu har gjorts innan problemet detaljbearbetas. Som ett underlag för den följande diskussionen skall vi emellertid antaga att problemet formuleras på följande sätt.

Problem

Givet systemet (2.1) med restriktionerna (2.2), (2.3) och (2.4) samt givet produktionen $v(t)$ över tidsintervallet $(0,T)$. Bestäm ett produktionsschema, dvs en styrsignal $\{ u(t), 0 \leq t, \leq T \}$ sådan att $x(0)$ och $x(T)$ antar givna värden och den av ångpannan levererade ångan är minimum, dvs d_o min.

Observera att denna formulering med säkerhet får modifieras innan problemet är färdigt. Anledningen till att fordra att $x(T)$ antar ett givet värde är att vi ej vill styra processen så att vi börjar nästa planeringsperiod i ett omöjligt läge. Det är troligen väl restriktivt att fordra att $x(T)$ har ett givet värde t.ex. att alla tankar är halvfulla vid planeringsperiodens slut. Man kan även diskutera huruvida kriteriefunktionen explicit skall innehålla termer som bestraffar förändringar i de olika produktionsenheternas produktion.

Restriktioner på tillståndsvariablerna av typen (2.2) kan vara mycket besvärliga att taga hand om med vissa optimeringsmetoder. Man kan därför tänka sig att slopa villkoren (2.2) och i stället införa termer i förlustfunktionen av typen

$$g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)$$

där $g(x)$ är en funktion som är liten i det inre av intervallet $0 < x < 1$, men som antar stora värden då x går mot 0 eller 1. T.ex.

$$g(x) = (x - \frac{1}{2})^n$$

3. KORTFATTAD ÖVERSIKT AV TILLGÄNGLIGA NUMERISKA METODER FÖR OPTIMAL STYRNING

Produktionsstyrningsproblemet som det formulerats i avsnitt 2 är ett specialfall av följande styrningsproblem.

Betrakta ett system som beskrivs av

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \qquad (3.1)$$

med restriktioner på tillståndsvariablerna

$$0 \leq g(x, t) \leq 1 \qquad (3.2)$$

och på styrvariablerna

$$0 \leq u_i \leq 1 \qquad (3.3)$$

Bestäm en styrsignal sådan att kriteriefunktionen

$$\int_0^T G(x(s), u(s), s)\, ds + G^0(x(T)) \qquad (3.4)$$

är så liten som möjligt. Problem av denna typ har behandlats ingående inom de senaste årens reglertekniska forskning i samband med styrning av rymdraketer och industriella processer. Lösningsmetoderna kan uppdelas i två huvudgrupper, dynamisk programmering resp. maximumprincipen.

Dynamisk programmering

Det går att visa att optimeringsproblemet går att reducera på lösning av följande partiella differentialekvation

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{H}^0 (x, \text{grad } V, t) = 0 \qquad (3.5)$$

$$V(x, T) = G^0(x) \qquad (3.6)$$

där $\mathcal{H}(x, p, u)$ är hamiltonfunktionen

$$\mathcal{H}(x, p, u, t) = G(x, u, t) + p^T f(x, u, t) \tag{3.7}$$

och

$$\mathcal{H}^o(x, p, t) = \min_u \mathcal{H}(x, p, u, t) \tag{3.8}$$

Maximumprincipen

Det går att visa att optimeringsproblemet går att reducera till följande randvärdesproblem för en ordinär differentialekvation

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{H}^o{}_p(x, p, t) = f(x, u^o, t) \tag{3.9}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\mathcal{H}^o{}_x(x, p, t) \tag{3.10}$$

$$x(0) \quad \text{given} \tag{3.11}$$

$$p(T) = G^o{}_x(x(T)) \tag{3.12}$$

Om vi fordrar att x(T) skall anta givet värde ersätts randvillkoret (3.12) med

$$x(T) \quad \text{given} \tag{3.12'}$$

Det finns ingen direkt metod att lösa randvärdesproblemet, däremot har ett antal iterativa metoder utvecklats. De tillgängliga metoderna kan uppdelas i tre huvudtyper.

1. Randvärdesiteration

Gissa initialvärdet p(0). Bestäm p(T) (eller x(T)) genom att integrera ekvationerna (3.9) och (3.10). Ändra gissningen av p(0) och upprepa proceduren tills p(T) eller x(T) antar det önskade värdet.

2. Styrsignaliteration (Bryson-Kelley)

Gissa en styrsignal $\{ u(t), 0 \leq t \leq T \}$. Beräkna gradienten av förlustfunktionen i funktionsrummet av styrsignalen. Ändra styrsignalen så att förlustfunktionen avtar.

3. Newton Raphson

Gissa en funktion som satisfierar minimum villkoret (3.8) och randvärdena (3.11), (3.12). Iterera till differentialekvationerna är uppfyllda.

Alla dessa metoder kan sägas vara relaxationsmetoder. Med den första metoden relaxeras randvärdena, med den andra maximumvillkoret och med den tredje differentialekvationerna.

Oavsett vilken metod som användes är det i allmänhet besvärligt att handskas med begränsningar i tillståndsrummet av typen (3.2).

I det speciella fallet då $f(x, u, t)$ är linjär, $G(x, u, t)$ kvadratisk och restriktioner av typen (3.2),(3.3) saknas, så elimineras många av svårigheterna och effektiva algoritmer kan konstrueras i det generella fallet.

4. DISKUSSION AV ALTERNATIVA METODER FÖR LÖSNING AV PRODUKTIONSSTYRNINGSPROBLEMET

På grund av antalet tillståndsvariabler (= antalet tankar $\sim$ 10) i ekvation (2.1), är det helt otänkbart att använda dynamisk programmering, då detta skulle kräva ett mycket stort minnesutrymme. Man är således hänvisad till någon av metoderna som bygger på maximumprincipen. I allmänhet är det för dessa metoder besvärligt att ta hänsyn till begränsningar i tillståndsrummet av typen (2.2) och det skulle därför vara naturligt att i stället införa begränsningarna i förlustfunktionen såsom antytts i avsnitt 2. För att få korta räkningar, skulle man vidare på prov kunna approximera begränsningarna med kvadratiska funktioner. Detta har emellertid tre nackdelar. Den kvadratiska funktionen är ej så skarp, som man skulle vilja önska. Man kan således ej gardera sig mot översvämningar och tomma tankar. Förlustfunktionens form medför även att systemet kommer att tendera att hålla tankarna medelfyllda, vilket kan medföra dålig utnyttjning av tankarna. Vidare får den optimala styrstrategin följande karaktär

$$u(t) = L\,x(t) \tag{4.1}$$

De olika produktionsenheternas produktionsnivåer blir således proportionella mot tankvolymerna, vilket bl.a. innebär att produktionsnivåerna ständigt kommer att ändras. Driften blir således ojämn vilket ej är önskvärt.

Produktionsplaneringsproblemet har emellertid en mycket speciell karaktär, som gör det möjligt att draga vissa slutsatser även om vi bibehåller restriktionen (2.2). Hamiltonfunktionen lyder

$$\mathcal{H}(x, p, u, t) = d^T u + p^T(Bu + Cv) \tag{4.2}$$

Den är således oberoende av x. Detta medför att ekvationen för de adjungerade variablerna lyder

$$\frac{dp}{dt} = 0 \qquad (4.3)$$

Denna ekvation kan lösas. Vi får

$$p(t) = \text{konstant}$$

Eventuellt kan p(t) göra ett språng då en restriktion påträffas. För att beräkna värdet av konstanten p, måste vi dock utnyttja randvillkoren x(0) given och x(T) given, vilket betyder att konstantens värde kommer att bero av värdet av x(T) och den önskade produktionen över tidsintervallet (0,T).

5. DISKUSSION AV DEN OPTIMALA STYRNINGENS KARAKTÄR

På grund av den mycket speciella strukturen hos produktionsstyrningsproblemet, finner vi således att med hjälp av maximumprincipen så kan problemet i avsnitt 2 reduceras till följande.

Bestäm i varje tidpunkt t styrsignalen u:s värde sådan att

$$0 \leq u_i \leq 1 \tag{5.1}$$

$$(Bu + Cv)i = 0 \quad \text{om} \quad x_i = 0 \quad \text{eller} \quad x_i = 1 \tag{5.2}$$

$$d^T u + p^T Bu \quad \text{minimal} \tag{5.3}$$

där n-vektorn p har konstanta komponenter så beskaffade att randvillkoren om givna begynnelse- och slutvärden x(0) resp. x(T) är uppfyllda. Vektorn p kan bestämmas med någon iterativ procedur av typen: Gissa ett värde $p = p^o$: Integrera systemekvationerna

$$\frac{dx}{dt} = Bu + Cv \tag{5.4}$$

där vid varje tidpunkt u väljes så att villkoren (5.1) - (5.3) är uppfyllda med $p = p^o$. Med ledning av det erhållna värdet på x(T) modifieras sedan gissningen av p så att x(T) konvergerar mot det önskade.

Observera att bestämningen av ett u som satisfierar villkoren (5.1) - (5.3) är ett LP-problem dock av låg ordning (maximalt 2n restriktioner). Observera vidare att varje steg i en iterativ beräkning av värdet av p-vektorn kan tolkas som en simulering av systemet.

Det bör vidare noteras att p via randvillkoret om givet x(T) blir en funktion av det givna slutvärdet x(T) och den givna produktionen i intervallet (0,T). Det påpekades i avsnitt 2 att kravet på att x(T) är given ej nödvändigtvis är relevant för problemet. Det var endast en möjlighet att se till att man ej börjar nästa produktionsperiod från en omöjlig utgångspunkt. Man bör därför undersöka om det ej finns andra sätt att bestämma p-vektorn.

Även om vektorn p ej är känd, kan vi direkt ur ekvationerna (5.1) - (5.3) draga vissa slutsatser om den optimala lösningens struktur. Vi finner att om samtliga karnivåer ligger inom restriktionerna, dvs $0 < x_i < 1 \quad \forall_i$, så är produktionsenheterna antingen avstängda eller i full produktion. Vilka produktionsenheter som går i full produktion bestäms av villkoret (5.3) där p ingår. Vidare om något kar blir antingen tomt eller fullt så måste de anslutande produktionsenheterna anpassas så att in- och utflöde till detta kar blir lika. Jfr. ekvation (5.2).

6. SLUTSATSER OCH REKOMMENDATIONER

Det torde under alla omständigheter vara nödvändigt att simulera produktionsstyrningen för att kunna överblicka problemet. En simulering är mycket enkel och består endast i att lösa ekvation (2.1) för givna u(t) och v(t). Med den här föreslagna metoden skulle man genom att tillfoga beräkningen (5.1) - (5.3) till simuleringen omedelbart kunna sortera bort alla styrsignaler u, som leder till översvämning eller torrkörning. Vidare kan den optimala strategin bestämmas genom successiva simuleringar för att iterativt bestämma p. Det har ej studerats hur dessa iterationer skall genomföras i detalj. Man borde även undersöka om man med hjälp av kunniga produktionstekniker skulle kunna få andra regler för att bestämma vektorn p med hjälp av föreliggande produktionsplaner, särskilt som antagandet om att x(T) är given kan vara något artificiellt. Det förefaller intuitivt klart att för stora värden på T har x(T) och framtida produktionsplaner liten inverkan på det aktuella värdet av styrvariabeln.

Då den optimala strategin består i att produktionsenheterna antingen är helt stängda, helt fyllda eller köres på ett sådant sätt att nivåerna i cisternerna ej ändras, så kan simuleringarna direkt utföras som grafiska konstruktioner.

REFERENSER

Den matematiska modellen har beskrivits i {6}. Teorin för optimal styrning har utförligt behandlats i läroböckerna {1}, {5}, {7}. Fallet med begränsningar i tillståndsvariablerna finns endast i {7}, där man bl.a. har angivit villkor för storleken på spången i de adjungerade variablerna p (jump conditions). Numeriska algoritmer för lösning av optimalproblemet med de tre metoder som angivits i avsnitt 3, har behandlats i tre examensarbeten vid LTH {2}, {3} och {4}. Datamaskinprogram för det linjärkvadratiska problemet finns i {8}.

{1} Athans, M. and Falb, P.L. "Optimal Control", McGraw-Hill New York 1966

{2} Gustavsson, I. "Numerisk lösning av optimala styrningsproblem med Bryson-Kelley metodik", LTH 1966

{3} Mattsson, B. "Numerisk lösning av optimala styrproblem med Kenneth-McGills metod", LTH 1967

{4} Mårtensson, K. "Numeriska algoritmer för lösning av minimaltidsproblemet", LTH 1966

{5} Noton, A.R.M. "Introduction to Variational Methods in Control Engineering", Pergamon Press, Oxford 1965

{6} Pettersson, B. "Gruvöns Bruk - 1800 projektet. LP-modell för produktionsstyrning" Ekvationsunderlag PM 30/67 Pd 8.9.1967

{7} Pontryagin, et al. "The Mathematical Theory of Optimal Processes", John Wiley 1962

{8} Åström, K.J. "On the Control of Linear Discrete Dynamic Systems with Qadratic Loss", RJ-222, 1962