



# LUND UNIVERSITY

## Reglering av farkoster

Svensson, Göran; Bergman, Sten-Åke; Bjerke, Ola; Dymling, Stephan; Grgic, Alexander; Grimsberg, Mikael; Henningsson, Bertil; Kleverman, Mats; Månsson, Lennart; Nielsen, Lars

1979

*Document Version:*  
Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*  
Svensson, G., Bergman, S.-Å., Bjerke, O., Dymling, S., Grgic, A., Grimsberg, M., Henningsson, B., Kleverman, M., Månsson, L., & Nielsen, L. (1979). *Reglering av farkoster*. (Technical Reports TFRT-7165). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

*Total number of authors:*  
10

### General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:  
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117  
221 00 Lund  
+46 46-222 00 00

# REGLERING AV FARKOSTER

S-Å BERGMAN, O BJERKE, S DYMLING, A GRGIĆ, M GRIMSBERG,  
B HENNINGSSON, M KLEVERMAN, L MÅNSSON, L NIELSEN,  
G SVENSSON

INSTITUTIONEN FÖR REGLERTEKNIK  
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA  
MARS 1979

## Dokumentutgivare

04T0  
Lund Institute of Technology  
Handläggare Dept of Automatic Control  
36T0  
G Olsson, B Wittenmark

## Författare

38T0  
S-Å Bergman, O Bjerke, S Dymling, A Grgic,  
M Grimsberg, B Henningsson, M Kleverman,  
L Månsson, L Nielsen, G Svensson

## Dokumentnamn

04T4  
REPORT  
Utgivningsdatum  
06T4  
March 1979

## Dokumentbeteckning

04T6  
LUTFD2/(TFRT-7165)/1-055/(1979)

## Ärendebeteckning

06T6

10T4

## Dokumenttitel och undertitel

18T0  
Reglering av farkoster (Control of vehicles)

## Referat (sammandrag)

26T0  
This is a report of a special group working in parallel with the course "Regler-  
teknik AK" (Introductory course in Automatic Control). The subject was modeling  
and control of airplanes and ships.

## Referat skrivet av

B2W0  
Wittenmark

## Förslag till ytterligare nyckelord

44T0

## Klassifikationssystem och -klass(er)

50T0

## Indextermer (ange källa)

52T0

## Omfång

56T0  
Pages

## Övriga bibliografiska uppgifter

56T2

## Språk

58T0  
Swedish

## Sekretessuppgifter

60T0

## ISSN

60T4

## ISBN

60T6

## Dokumentet kan erhållas från

62T0  
Department of Automatic Control  
Lund Institute of Technology  
Box 725, S-220 07 LUND 7, Sweden

## Mottagarens uppgifter

62T4

## Pris

66T0

DOKUMENTATABLAD enligt SIS 62 10 12

SIS-  
DB 1

Specialgrupp Reglerteknik Ak

Sten-Åke Bergman

Ola Bjerke

Stephan Dymling

Alexander Grgič

Mikael Grimsberg

Bertil Henningsson

Mats Kleverman

Lennart Månsson

Lars Nielsen

Göran Svensson

## 0. INTRODUKTION

Gruppen har studerat dynamik och reglering av två modeller av flygplan respektive båt.

Hjälpmedel var teori ur Reglerteknik allmän kurs och simulering på analogmaskin och dator.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING:

- 0    **Intröduktion**
  - Innehållsförteckning**
- 1    **Inledning**
- 2    **Modeller**
  - 2.1 Flygplan
  - 2.2 Båt
- 3    **Analys av dynamiken**
  - 3.1 Flygplan
  - 3.2 Båt
- 4    **Specifikationer för reglering**
  - 4.1 Flygplan
  - 4.2 Båt
- 5    **PID-reglering**
  - 5.1 Flygplan
  - 5.2 Båt
- 6    **Tillståndsåterkoppling**
  - 6.1 Flygplan
  - 6.2 Båt
- 7    **Rekonstruktion**
  - 7.1 Båt
- 8    **Sammanfattning**
  - Referenser**
  - Bilagor**

# 1 INLEDNING

## 1.1

Detta arbete har utförts parallellt med de första grundläggande studierna i reglerteknik.

Vid utbildning med hjälp av projektstudier brukar man inhämta nya teoretiska kunskaper, först när en svårighet dyker upp och ett behov av mer teori föreligger. Vårt arbete kan alltså ej klassificeras som inläring av reglerteori med hjälp av ett projekt.

I vårt arbete har vi inhämtat teorin först för att sedan se efter ifall vi kan förbättra vårt system med dessa nya kunskaper. Emellertid, i vissa fall har vi inte kunnat uppfylla systemspecifikationerna med de kunskaper vi hade utan först senare i kursen erhöll vi de erforderliga verktygen. Hur pass man kan kalla det projektarbete i vanlig bemärkelse eller inte kan diskuteras, men är i och för sig ointressant.

### Målsättning:

I början av arbetet behövs litteratursökning, vilket är ett ofta glömt kapitel i utbildningen. Detta skulle i viss mån åtgärdas. På samma sätt skulle avslutningen av arbetet - rapportskrivningen - också täcka över - åtminstone delvis - en lucka i utbildningen.

Arbetet skulle också öka förståelsen av vad teori försöker säga, så att man inte bara behandlar problem rent mekaniskt med hjälp av formelsamling.

Från ord till matematik var ett av de "honnörsord" vi hade inför arbetet. Härmed syftas på att det vanliga ekvationslösandet också skulle föregås av uppställningen av själva ekvationen utifrån problemet som skulle lösas. Detta är också en av de försummade delarna av utbildningen, tyvärr.

Man skulle här kunna följa "orden" genom de matematiska manipulationerna och få en känsla för vad reglerteorin försöker utföra. Sist men inte minst skulle handhavandet både med matematiken och de praktiska hjälpmedlen bli bättre än vad själva kursen normalt ger.

### Flyggruppen

Arbetets målsättning har inte varit att ta fram en styrautomat - autopilot - inte ens ett underlag för en sådan.

Då arbetet från början begränsas av både kunskaps- och tidsramar och dessutom endast skall fylla några teknologers behov - ej någon kunds - har utgångspunkten varit:

1. Styrervo för endast höjdroder
2. Flygplanets arbetspunkt är planflygt - horisontell flygning -, utan bankning - lutning -, och med konstant fart.
3. De olika fallen har skiljt sig åt i avseende på fart och höjd.
4. Styrervot skall uppfylla specifikationerna för en stegändring - stigning - i de olika flygfallen.

### Båtgruppen

1. Undersöka olika modellers dynamiska egenskaper
2. Att undersöka hur man med olika styrlagar kan förbättra möjligheterna att enkelt styra de olika båtarna.



2 VAL AV MODELL

## 2.1 Modell för flygplan

En av de viktigaste punkterna vid undersökning av flygplansdynamik är att välja en lämplig matematisk modell.

En möjlighet att erhålla en modell är att starta från aerodynamiska formler och samband. P.g.a. att ett flygplan är mycket komplicerat aerodynamiskt sett är denna metod knappast praktiskt genomförbar. Förenklingar är tydligen nödvändiga.

Ett mera praktiskt sätt är att införa de tillstånd som behövs, vinklar, accelerationer, o.dyl. och sedan mäta sig till approximativa formler.

För flygplanet valdes som arbetspunkt flygning rakt fram. På detta sätt slipper man att ekvationerna för höjdled kopplas med de sidled. I fortsättningen undersöks sambanden för höjddreglering.

En "lagom" omfattande modell hittades i Lee (1967) där det amerikanska flygplanet F-101 B hade undersökts.

De longitudinella rörelserna beskrevs av:

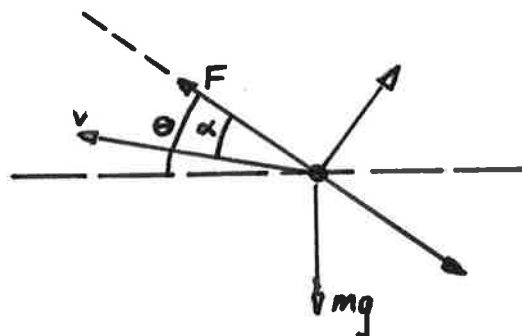
$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} u$$

$\theta$  = pitchvinkel

$\alpha$  = attackvinkel

$\delta$  = höjdroderdeflektion

$u$  = styrsignal till roder



$v$  = fpl.- hastigheten

$F$  = Motor dragkraft.

Fig. 2.1.1 Definitionen av  $\alpha$  och  $\theta$

$$A = \begin{pmatrix} M\dot{\alpha} + M\dot{\alpha} & M\alpha + M\dot{\alpha}z_w & M\delta_e + M\alpha z_{\delta_e/2\alpha} \\ 1 & z_w & z_{\delta_e/2\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De i A ingående aerodynamiska derivatorna var bestämda för olika flygfall, d.v.s höjder och farter.

## 2.2 Båt

I den fysikaliska beskrivningen som har använts, för att få en matematisk modell av olika båtar, har det gjorts en rad förenklingar.

Följande antagande har gjorts (se även fig. 2.2.1):

- i) Båten betraktas som en stel kropp
- ii) Roderdynamiken har försumrats
- iii) Rotationer kring x-, resp. y-axel försummas

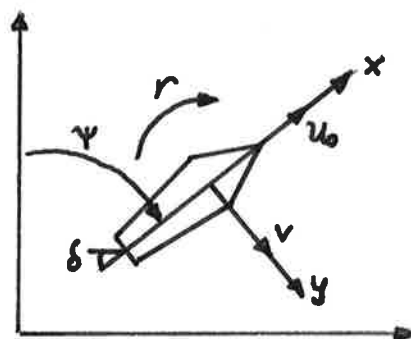


Fig. 2.2.1

Under dessa förutsättningar och med vissa antagande beträffande de hydrostatiska krafterna, så studeras två modeller med följande rörelseekvationer.

- 1) "Sea Sovereign" Fullt lastad kallad BAT 1:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = a_1 v + a_{11} v \cdot |v| + a_2 r + b_1 \delta & \text{Kraftekvationen} \\ \frac{dr}{dt} = a_3 v + a_4 r + a_{22} r \cdot |v| + b_2 \delta & \text{Momentekvationen} \\ \frac{d\psi}{dt} = r \end{cases}$$

- 2) "Sea Splendour" Ballast, kallad BAT 2:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = a_1 v + a_{11} v \cdot |v| + a_2 r + b_1 \delta & \text{Kraftekvationen} \\ \frac{dr}{dt} = a_3 v + a_4 r + b_2 \delta & \text{Momentekvationen} \\ \frac{d\psi}{dt} = r \end{cases}$$

Värdet på de ingående parametrarna finns redovisade i bilaga 1. Se även Åström (1976). Ekvationerna 1) och 2) är normaliserade, d.v.s dimensionsfria variabler har införts. Här är detta gjort så att en längdenhet är båtens längd,  $L$ , tidsenheten är  $L/v$ , där  $v$  är båtens hastighet, och en massenhet är  $\rho L^3/2$ , där  $\rho$  är vattnets densitet.

Utgående från ekvationerna 1/ och 2) linjäriserades kring punkten  $v=0, r=0$ .

För att kunna använda teorin för linjära tidsinvarianta system. De linjäriserade ekvationerna blir:

BAT 1 och BAT 2;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ r \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ r \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \delta \\ y = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} v \\ r \\ \psi \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

3 ANALYS AV DYNAMIKEN3.1 Flygplan

Formeln ur Lee (1967) skrevs om på standardform där

$$\dot{x} = A'x + B'u \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad u = \delta$$

överföringsfunktionen  $G_0(s)$  från  $\delta$  till  $\dot{\theta}$  blir då

$$G_0(s) = \frac{K(s+b)}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

där  $K$ ,  $b$ ,  $\zeta$ ,  $\omega$ , erhålls av mätningar av de aerodynamiska derivatorna.

Koefficienterna för en del flygfall som undersöktes närmare framöver visas nedan.

Flygfall	macktal	höjd(m)	K	b	$\zeta$	$\omega$
1	0.2	0	2.707	0.3615	0.3885	1.349
9	1.0	0	43.77	1.674	0.2981	8.585
30	1.4	7.000	35.68	0.8518	0.1627	7.883
56	1.8	15.000	18.22	0.3833	0.0937	5.629

Ur mät-data kunde pol och nollställen inritas i diagram, se fig. 3.1.1

Bodediagram för flygfall 1 och 56, se fig. 3.1.2

Impulssvaret  $g(t)$  för systemet är

$$g(t) = K \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot [\sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \tau) + b \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2} \cdot t)] \quad ; \quad \tau = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$$

D.v.s ett svängande system, vinkelfrekvens med realdelen  $-e^{-\zeta\omega t}$

Ur fig. 3.1.1 ses att frekvensen ökar med farten samt dämpningen är bäst på låga höjder.

Vid landning är systemet långsamt och dåligt dämpat.

En lämplig regulator ska nu realiseras.

### 3.2 Båt

Som framgick av avsnitt 2 kan för båda de studerade båtarna systemet skrivas på tillstånds form:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

där:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} v \\ r \\ \psi \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \delta, C_\psi = (0 \ 0 \ 1)$$

I vissa fall kan även  $r$  vara den intressanta utsignalen. Då skrivs istället  $C_r = (0 \ 1 \ 0)$

För att härleda överföringsfunktionen för systemet utnyttjas formeln:  $G(s) = C(sI-A)^{-1}B$ . Se Åström (1976).

Det förutsätts då att  $x(t=0)=0$

För att invertera  $(sI-A)$  används t.ex. Cramers regel, varvid resultatet blir:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \begin{pmatrix} s(s-a_4) & a_2s & 0 \\ a_3s & s(s-a_1) & 0 \\ a_3 & s-a_1 & (s-a_1)(s-a_4)-a_2a_3 \end{pmatrix}, \text{ där}$$

$$\det(sI-A) = s(s^2 - (a_1+a_4)s + (a_1a_4 - a_2a_3)).$$

Överföringsfunktionen  $G_\psi$  erhålls nu efter enkla matrisoperationer som

$$G_\psi(s) = \frac{b_2s + (b_1a_3 - b_2a_1)}{s(s^2 - (a_1+a_4)s + (a_1a_4 - a_2a_3))} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_2(s - z_1)}{s(s^2 + K_2s + K_3)}$$

$$\text{där } z_1 = a_1 - \frac{b_1a_3}{b_2}$$

$$K_2 = -(a_1 + a_4)$$

$$K_3 = (a_1a_4 - a_2a_3)$$

Nämnen i  $G_\psi(s)$  kan faktoriseras och  $G_\psi(s)$  skrivs då:

$$G_\psi(s) = \frac{K(s-z_1)}{s(s-p_1)(s-p_2)}$$

		<u>Båt 1</u>	<u>Båt 2</u>
där: $z_1 = a_1 - \frac{b_1}{b_2} a_3$	=	- 1.245	- 1.266
$K_2 = -(a_1 + a_4)$	=	2.403	1.298
$K_3 = (a_1 a_4 - a_2 a_3)$	=	- 0.598	0.486
$K = b_2$	=	- 0.790	- 1.236
$A = -\frac{1}{2}(K_2 - \sqrt{K_2^2 - 4K_3})$	=	- 2.630	- 1.870
$P_2 = -\frac{1}{2}(K_2 + \sqrt{K_2^2 - 4K_3})$	=	+ 0.227	- 0.260

Bodediagram för båt 2 finns i fig. 3.2.1.

Båt 1 har alltså en pol i höger halvplan och är därmed instabil, medan båt 2 är stabil med båda polerna i vänstra halvplanet.

Instabiliteten för båt 1 är dock införd genom linjäriseringen av systemet och är alltså inte en fysisk realitet. Detta kan inses av fig. 3.2.2-4, simuleringar av olika driftsfall för de båda båtarnas linjära modeller jämförs med de olinjära. I figurerna konstateras lätt att skillnaden mellan det linjära och olinjära systemet för båt 1 är av väsentlig typ medan motsvarande för båt 2 bara är en grad skillnad. Simuleringarna är utförda på Institutionen för Regleringstekniks PDP-15 med simuleringspaketet SIMNON.

Pol och ena komplexkonjugerade  
nollställets placering vid olika  
flygfall.

fig 3.1.1

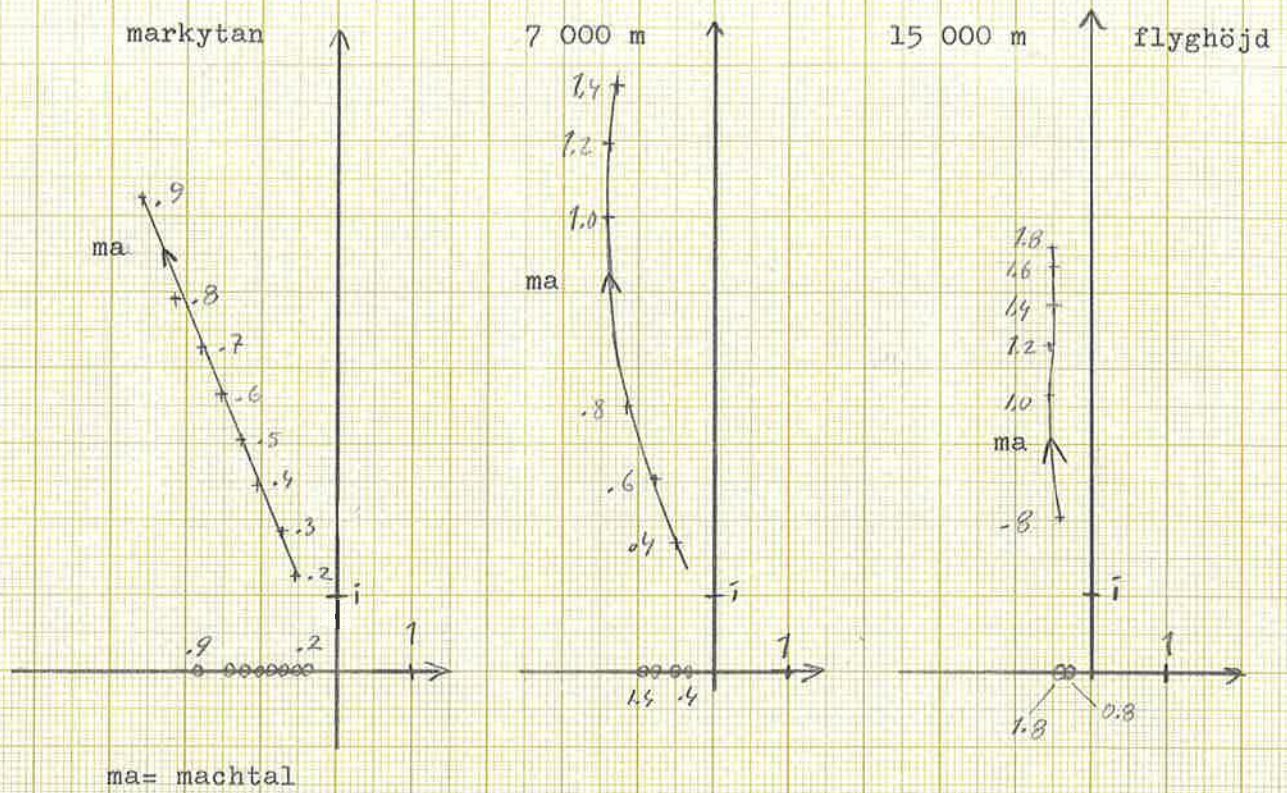


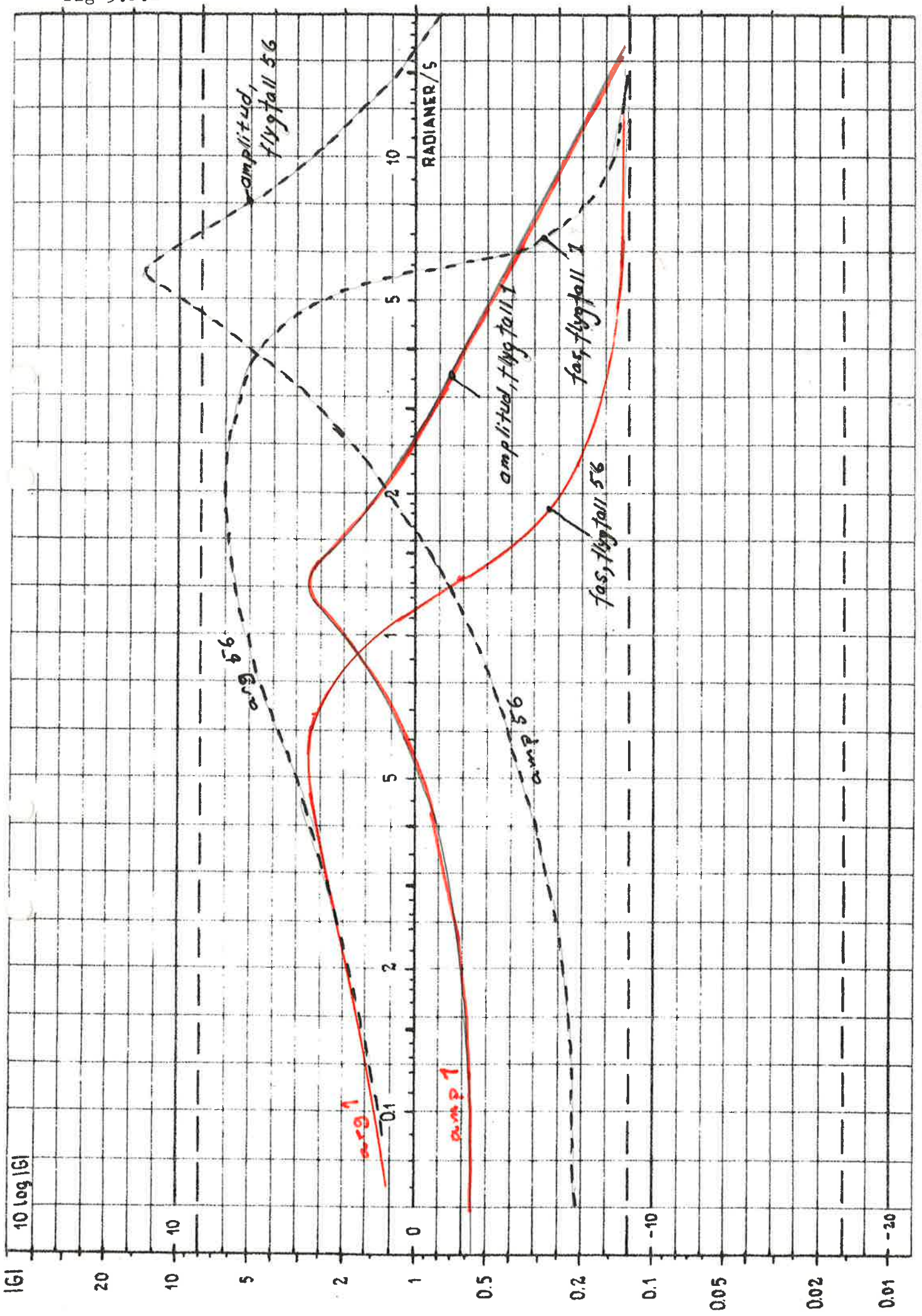
fig 3.1.2

90°

0°

-90°

-180°

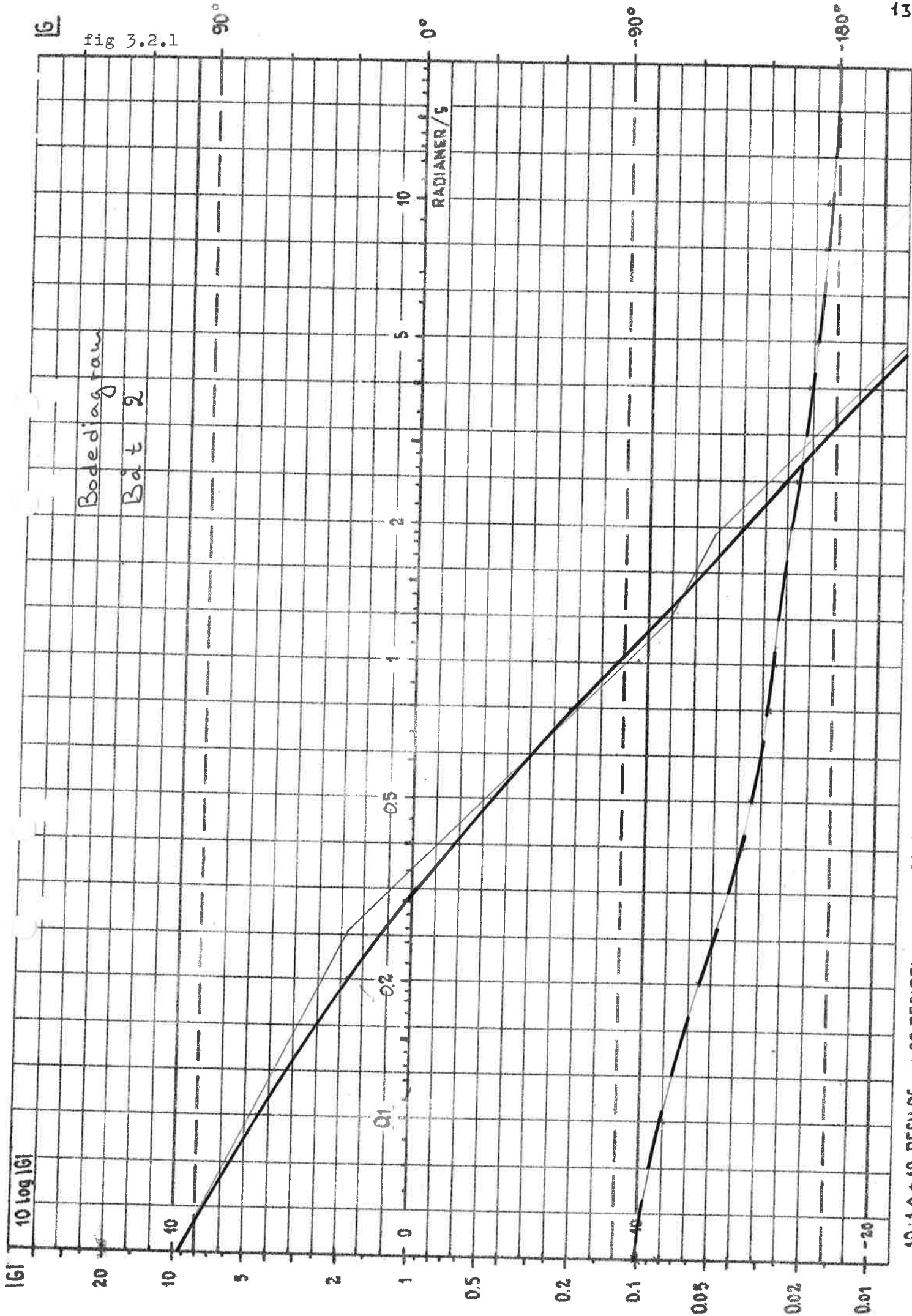


10:1 Δ + 10 DECIBEL = + 20 DECIBEL = + 2.30 NEPER

INSTITUTIONEN FÖR REGLERINGSTEKNIK L.T.H.



fig 3.2.1



10:1  $\pm$  10 DECIBEL = + 20 DECIBEL = + 2.30 NEPER

INSTITUTIONEN FÖR REGLERINGSTEKNIK L.T.H.

fig 3.2.2

.LJ R V  
PLOT U R V

BAT1

Stationary point around the origin,  $r=0$ ,  $v=0$  is unstable  
 Pulse of rudder  $0.1$  during  $10$  time units.  
 Observe, that the new stationary point is a circular movement.

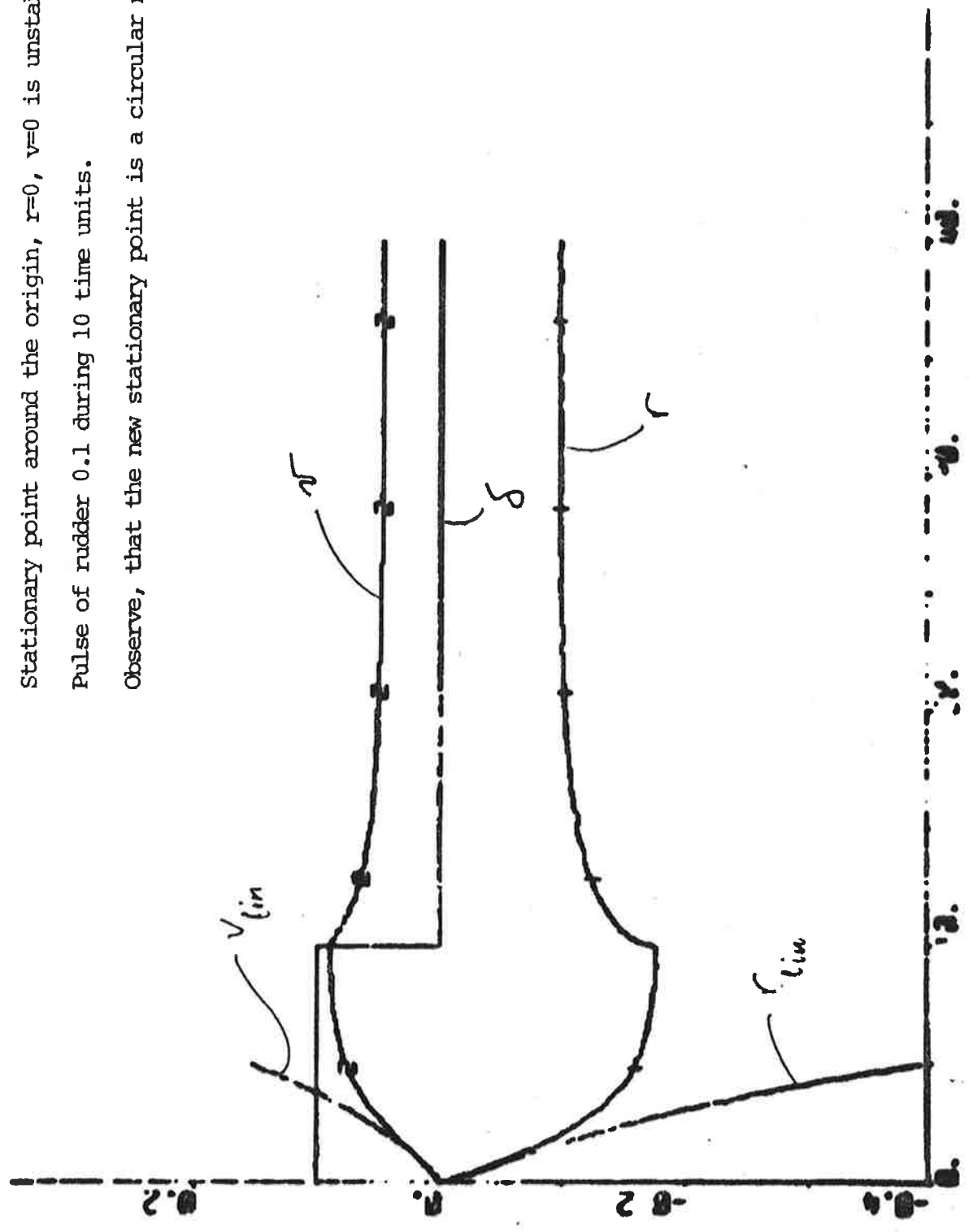


fig 3.2.3

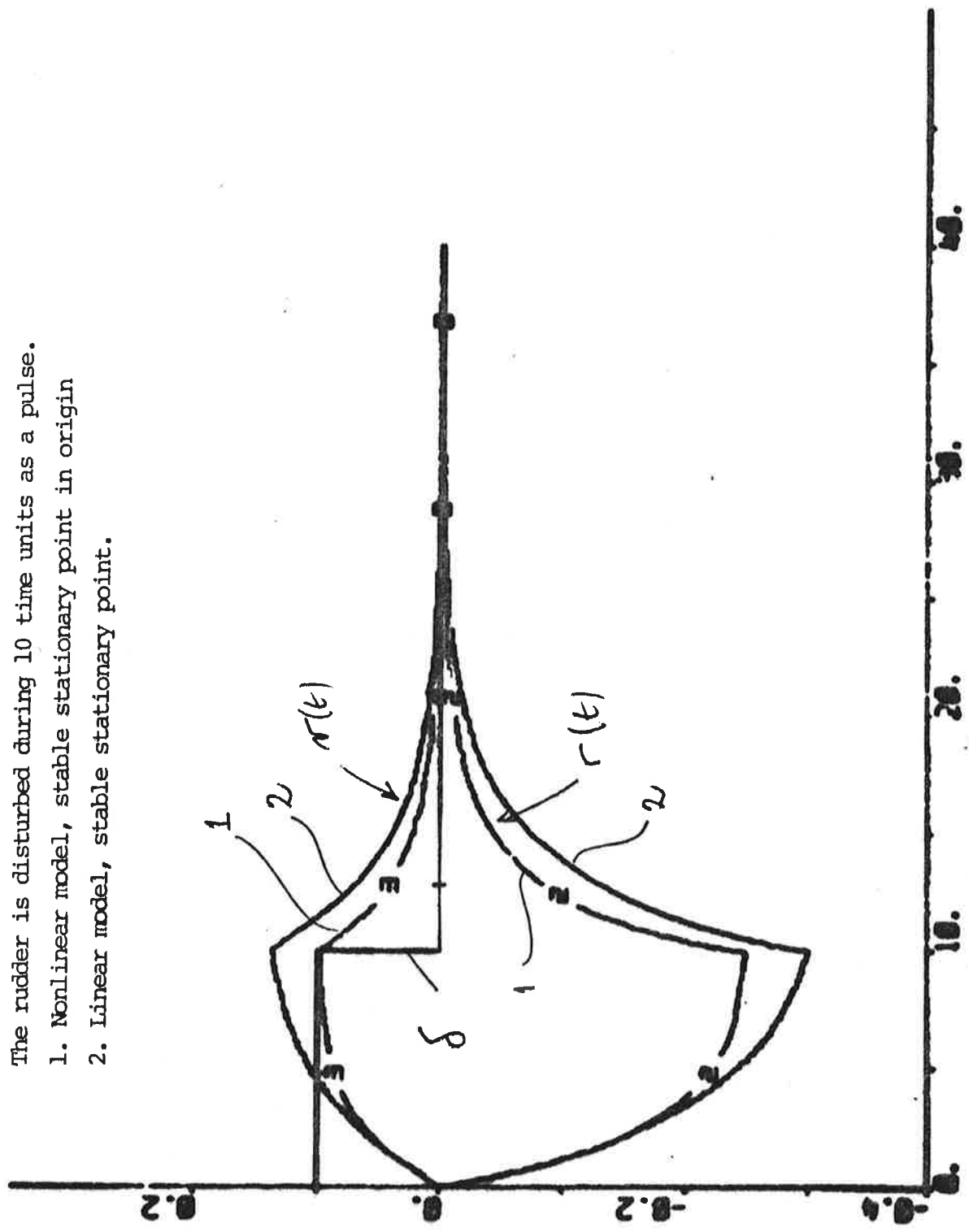
BATZ

### PLOT U R V

System BAT2

The rudder is disturbed during 10 time units as a pulse.

- 1. Nonlinear model, stable stationary point in origin
- 2. Linear model, stable stationary point.

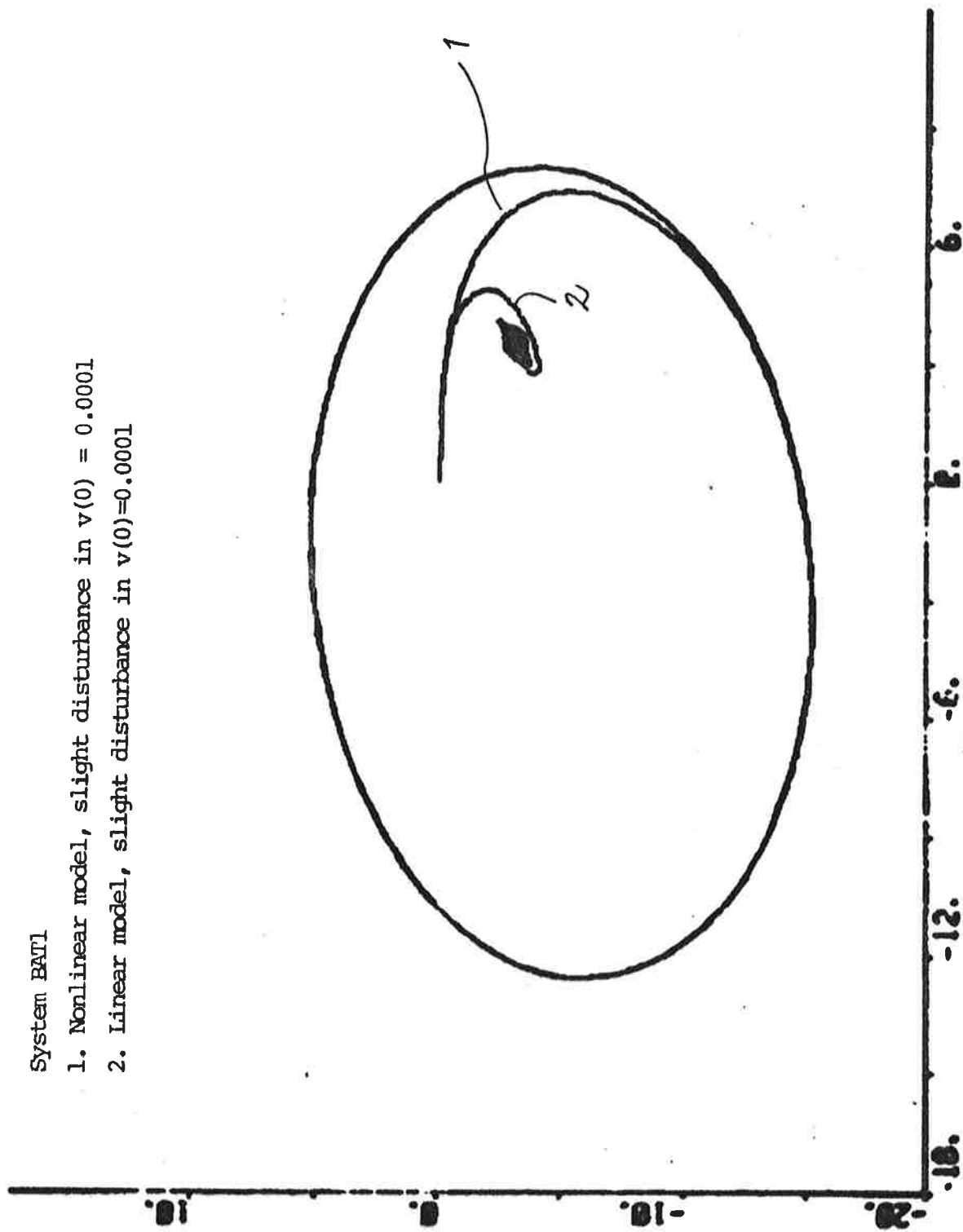


BA. 1

**PLOT v(x)**  
**RII--2.017**

System BAI

- 1. Nonlinear model, slight disturbance in  $v(0) = 0.0001$
- 2. Linear model, slight disturbance in  $v(0)=0.0001$



#### 4. SPECIFIKATIONER

##### 4.1 Flygplan

Om piloten ändrar referensvärdet för höjdvinkelhastigheten vill han inom en sekund ha fått maximala svaret. Indikationen att insvängningen är klar, är den lilla återgång som sker efter att maximum passerats.

Följande krav ansågs eftersträvansvärda:

Stegsvar:  $\dot{\theta}_r \rightarrow \dot{\theta}$

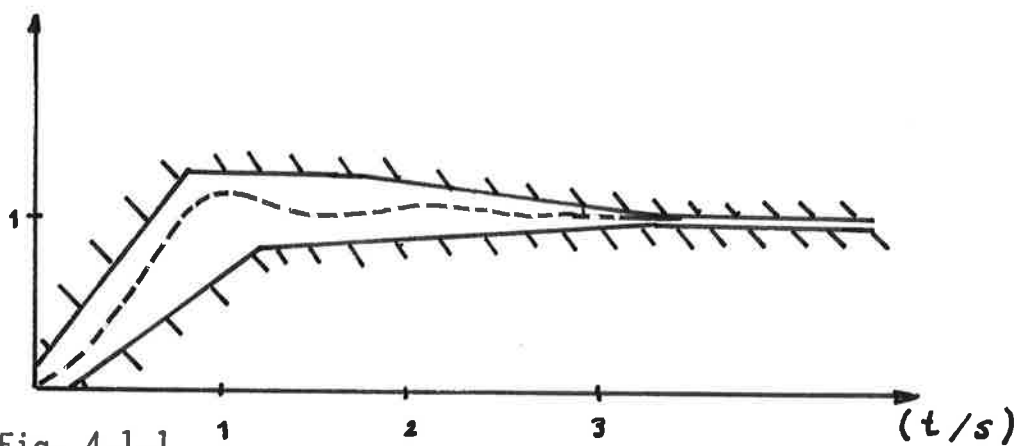


Fig. 4.1.1

Den steckade kurvan anger det för piloten idealiska uppförandet.

Ytterligare krav:

Styrsignalen, d.v.s roderutslaget i grader, ska

1. vara av samma storleksordning som ändringen av höjdvinkelhastigheten (i grader per sekund)
2. samtidigt inte variera för mycket.

Kravet " 1 " för att rodret ska vara mekaniskt realiserbart och kravet " 2 " för att hålla slitaget nere.

##### 4.2 Båt

Vid studium av det återkopplade systemet från  $\psi_{ref}$  till  $\psi$  har målet varit, att under bivillkoret att roderutslaget  $\delta$  inte får överstiga  $\pm 20^\circ$ , försöka minimera översläng och lösningstid hos stegsvaret.

## 5. PID-REGLERING

### 5.1 Flygplan

På institutionens analogimaskin simulerades systemet med PI-regulator för flygfall 1.

Det öppna systemets överföringsfunktion gavs av

$$G_o(s) = \frac{K(s+b)}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

systemekvationen på styrbar kanonisk form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\zeta\omega & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (K \quad Kb) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

där för flygfall 1:

$$\begin{aligned} K &= 2,71 \\ b &= 0,36 \\ 2\zeta\omega &= 1,05 \\ \omega^2 &= 1,82 \end{aligned}$$

### PI-regulator

PI-regulatorns överföringsfunktion  $G_I = K_I \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$ .

Under simuleringen visade det sig omöjligt att uppfylla specifikationerna för systemet. En avvägning mellan översläng och lösningstid fick göras och ett bästa resultat erhöles där

översläng	17 %	Fig. 5.1.1
lösningstid	2,8 s	

Resultatet är inte tillfredsställande, dels uppfylles inte specifikationerna och dels är systemet för slängigt för att vara godtagbart.

Systemet kan göras mycket snabbt med PI-regulator så en D-del hjälper inte att uppfylla specifikationerna.

### PDP - 11

För att närmare studera systemets uppförande vid PI-regulatorn och en lokal återkoppling (fig. 5.1.2) används färdiga program till PDP-11.

För att ytterligare göra systemet mer verklighetstroget infördes ett servo med överföringsfunktionen.

$$G_s(s) = \frac{10}{s+10}$$

som gjorde att kretsöverföringsfunktionen blev

$$G(s) = G_0(s) \cdot G_s(s)$$

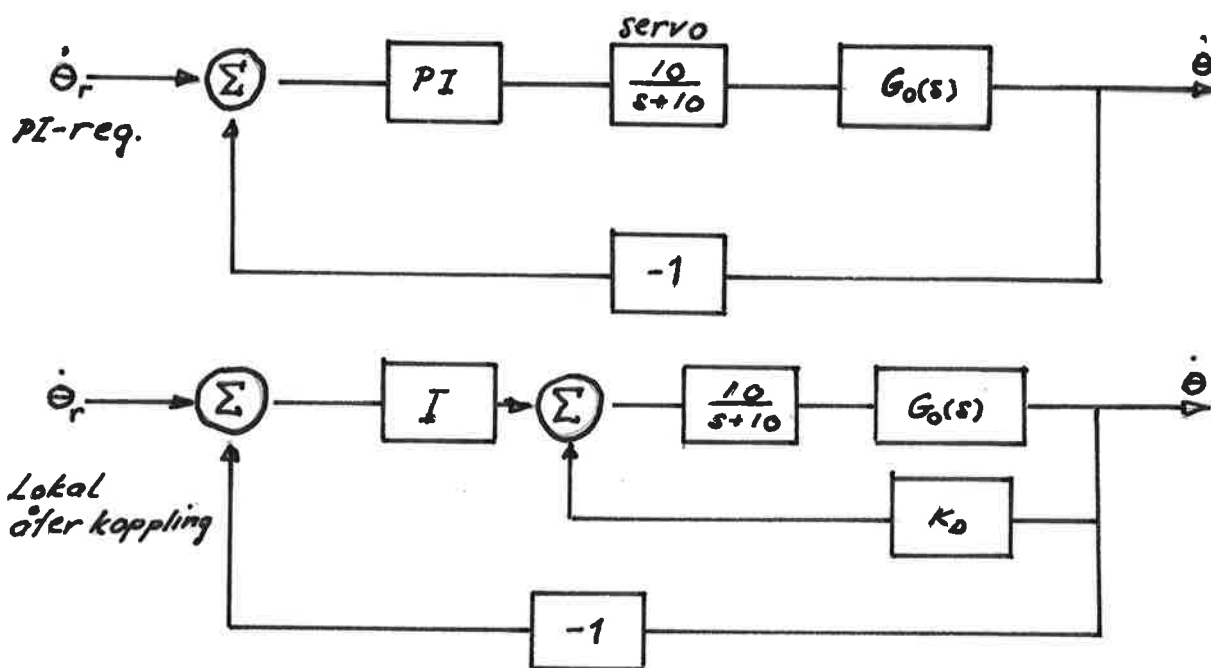


Fig. 5.1.2

Med hjälp av PDP-11:an beräknades rotorterna vid olika  $K_I$  och  $T_I$  värden (fig. 5.1.3) för PI-regulatorn och olika  $K_D$  och  $T_D$  värden (fig. 5.1.4) för den lokala återkopplingen.

PI-reg: systemet har två reella nollställen

$$s = -b$$

$$s = -1/T_I$$

där för flygfall 1  $b = 0,36$ .

Rotorten över kontrollpolerna visade att det borde finnas ett lämpligt  $K_I$  för  $T_I$  mellan 1,0 - 0,2 som får systemet att uppfylla specifikationerna.

Men det återkopplade systemet har en dipol nära origo som inverkar på systemets uppförande (fig. 5.1.5).

För stora  $K_I$  närmar sig polen nollstället men den relativa dämpningen minskar samtidigt. Detta visar att PI-reglering inte går att använda enligt våra specifikationer.

### Lokal återkoppling

Enligt rotorten över kontrollpolerna borde det finnas ett lämpligt  $T_I \in (0.2, 1)$  för  $K_I \in (2.0, 1.0)$  som gör att systemet uppfyller kraven. Även här finns det en dipol som påverkar systemets uppförande. (fig. 5.1.6)

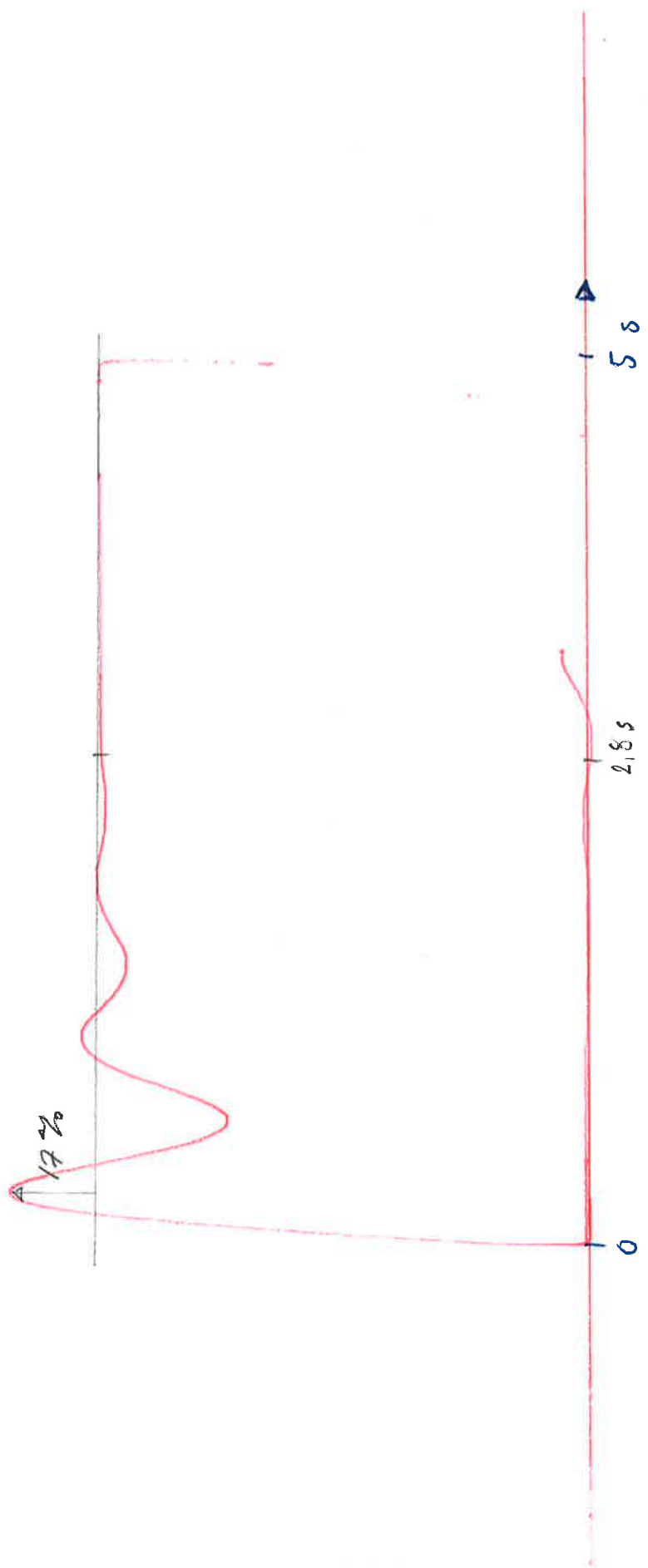
### PDP-15

På PDP-15 simulerades systemet för flygfall 56. Simulering på dator visade sig vara ett mycket bekvämt sätt att studera reglersystemen. Givetvis erhöles samma resultat som på analogmaskin. (fig. 5.1.7 - 5.1.9)



fig 5.1.1

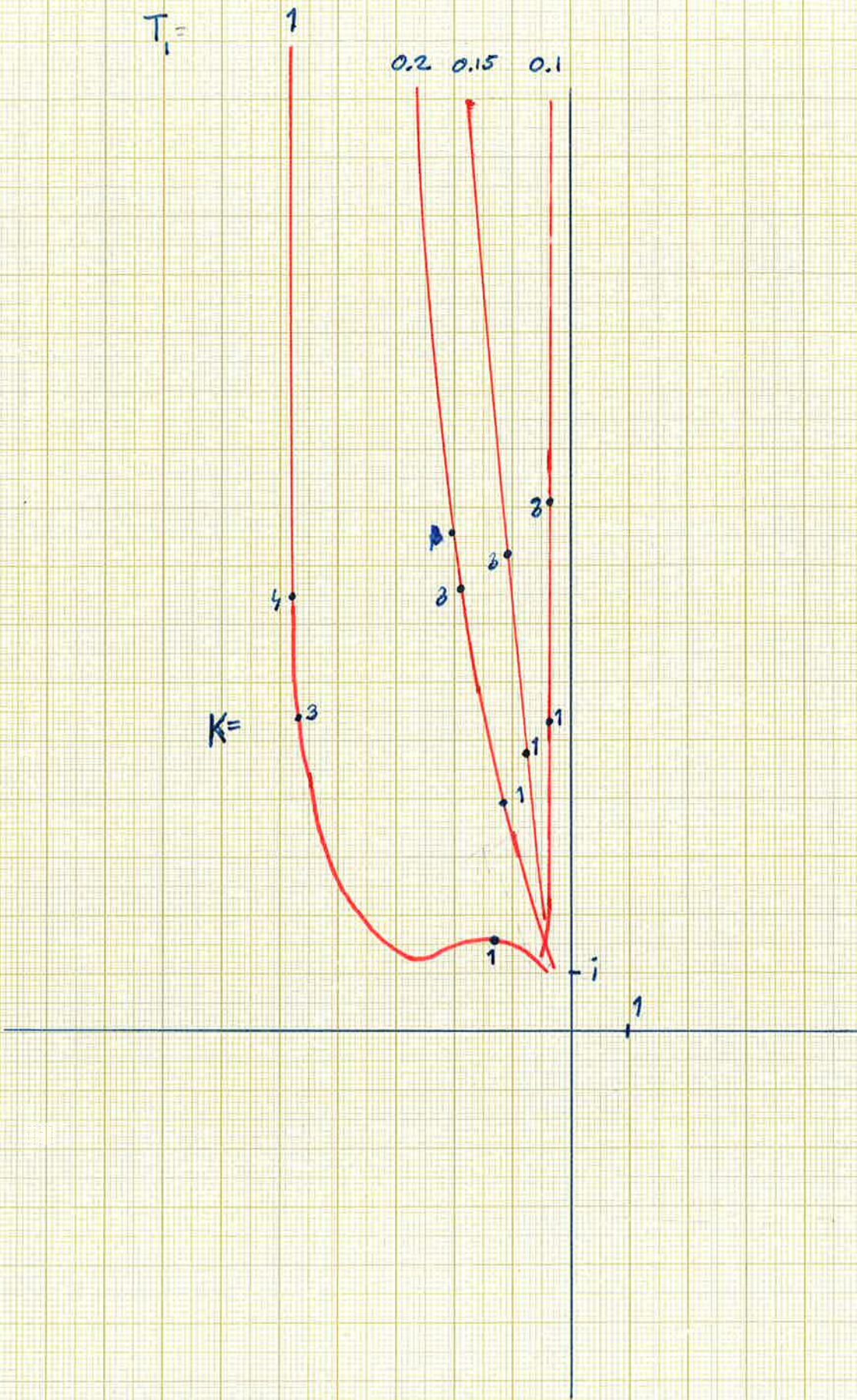
Flygfall 1  
PI-regulator



Rotorten för de komplexkonjugerade polerna.

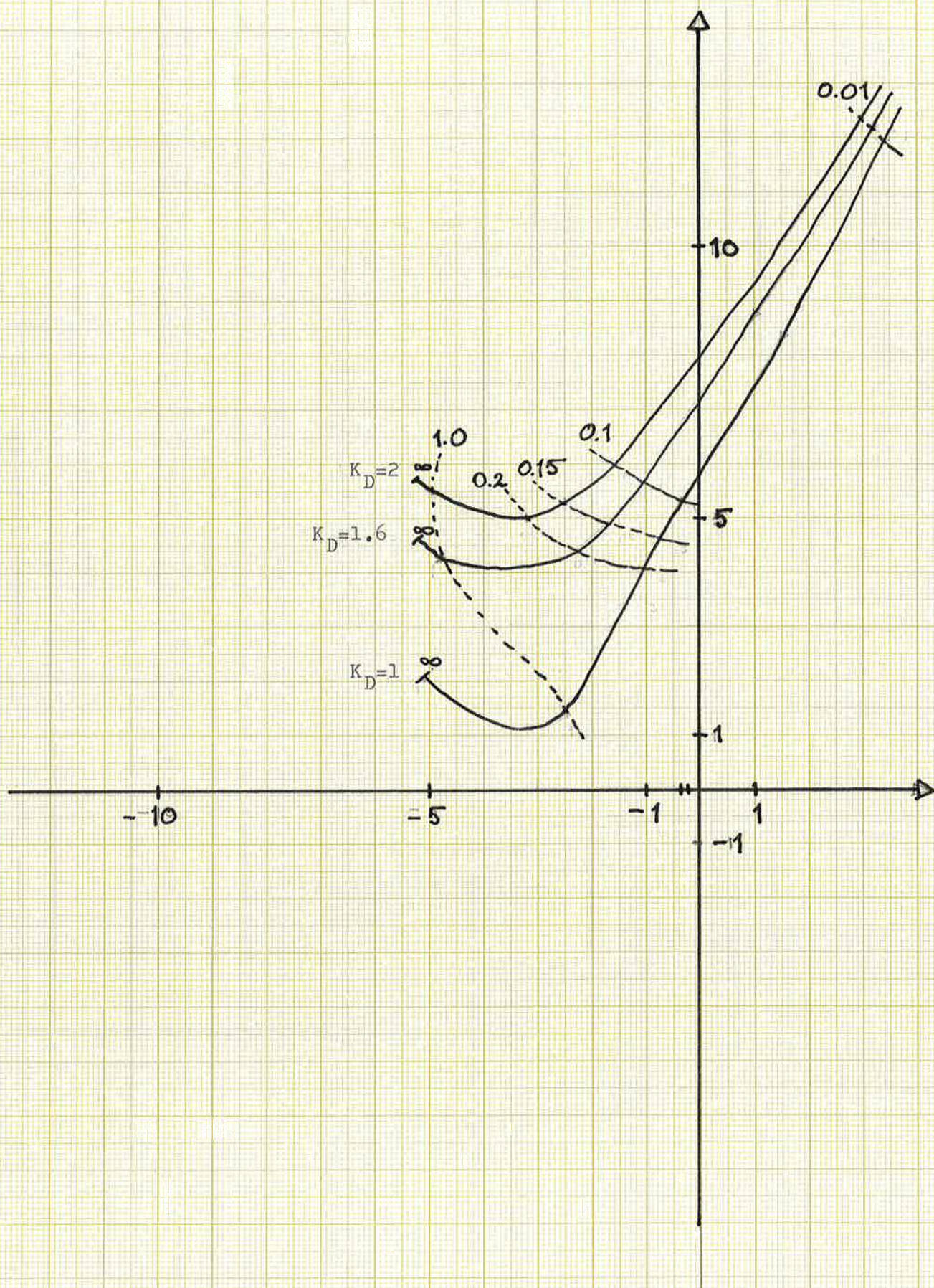
fig 5.1.3

Servo med PI-regulator.



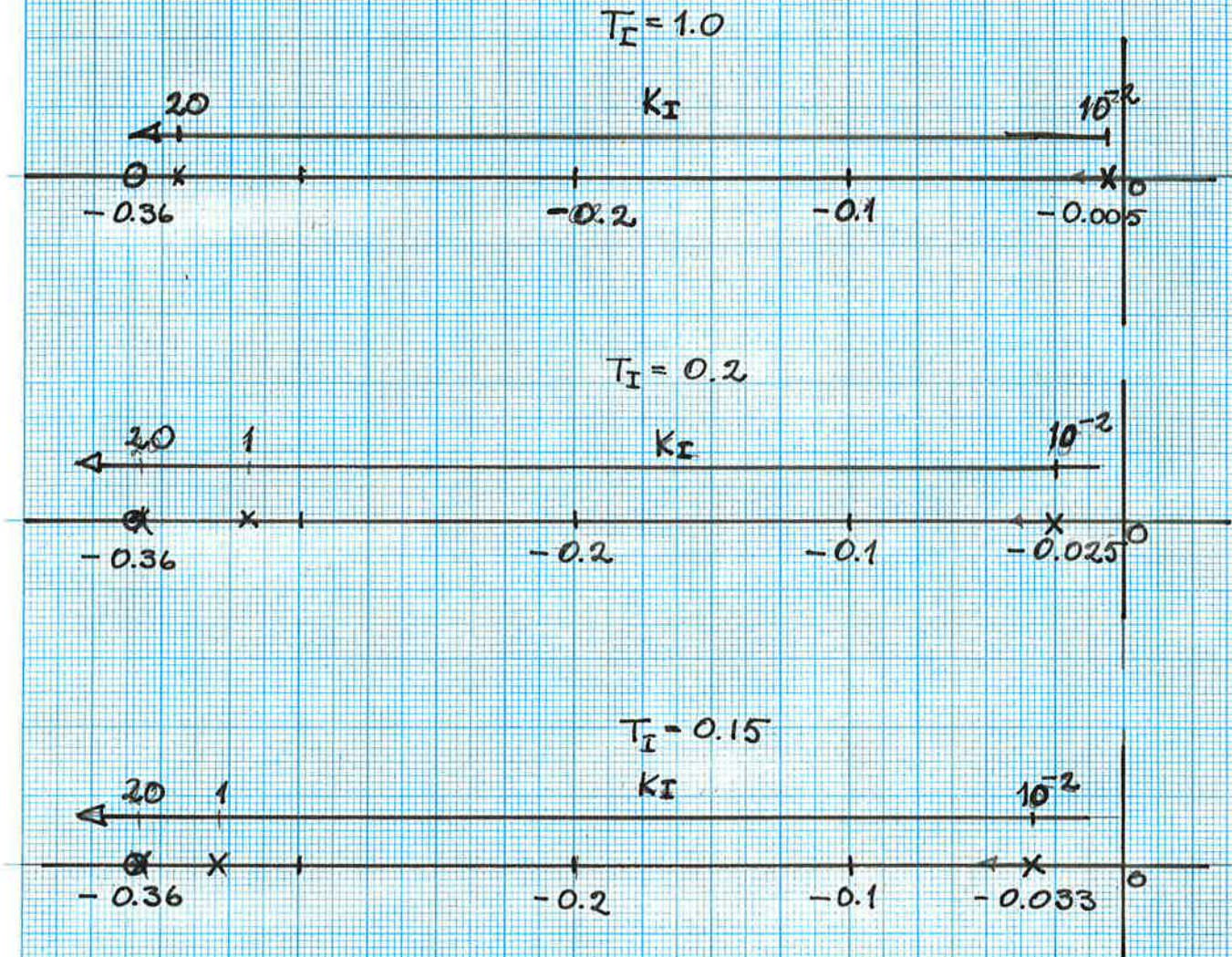
Rotorten för de komplexkonjugerade polerna.  
Servo med lokal återkoppling.

fig 5.1.4



Dipolens läge som funktion  
 av  $T_I$  och  $K_I$ .  
 PI-regulator med servoa.

fig 5.1.5



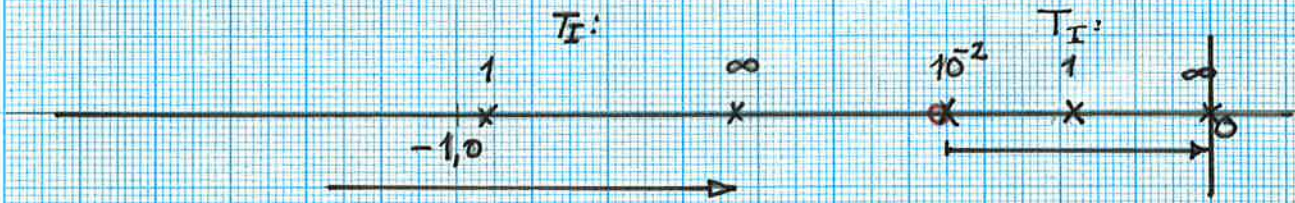
Dipolens läge som funktion  
 av  $T_I$  och  $K_I$ .  
 Lokal återkoppling med servo.

fig 5.1.6

$K_D = 1.0$



$K_D = 1.6$



$K_D = 2.0$



fig 5.1.7

$K_I=4$   
 $T_I=0.4$

PLOT U[PLANE]  
K1=10. K2=4.

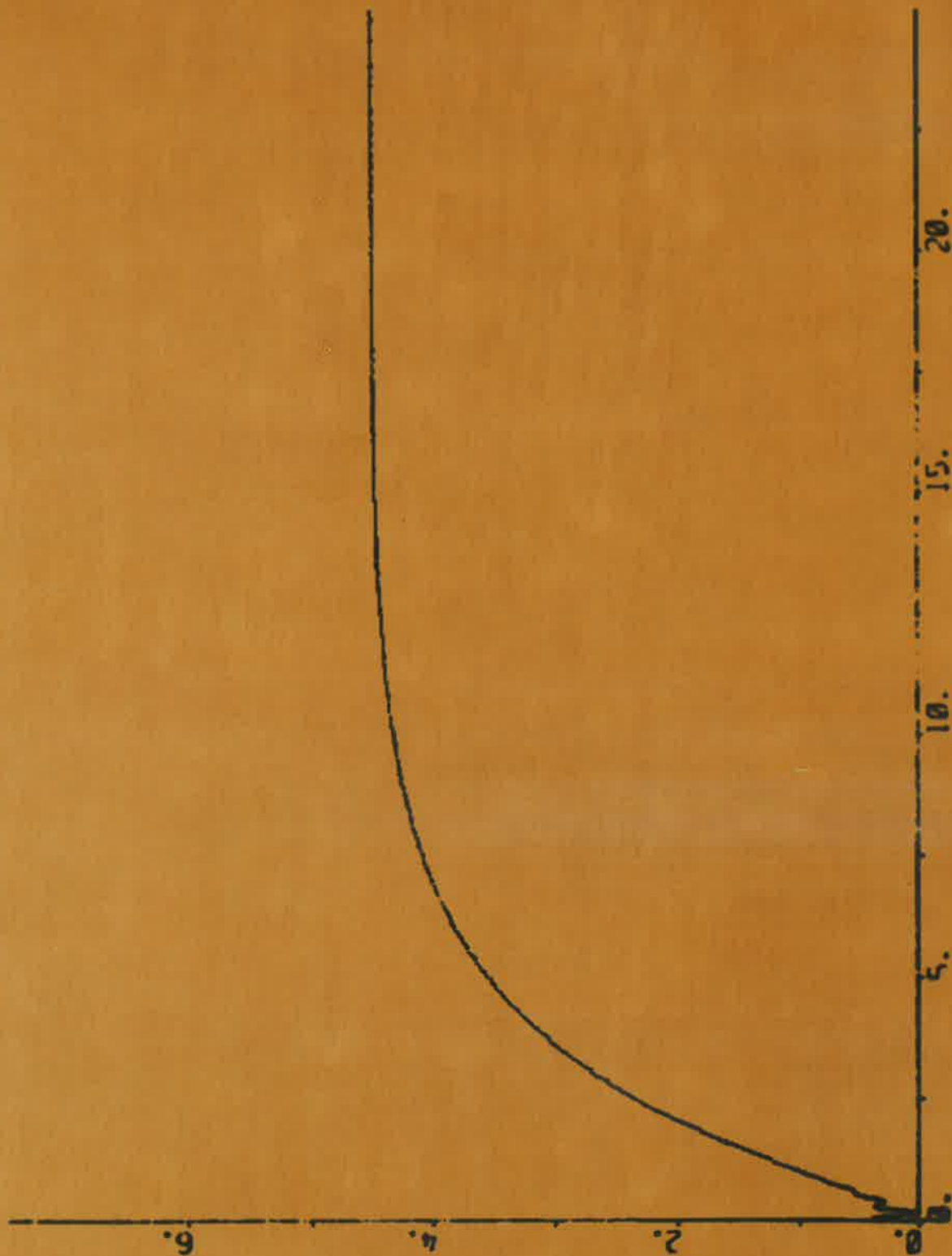


fig 5.1.8

$K_I=0.4$   
 $T_I=0.27$

PLOT Y(PLANE) YR  
PLOT U(PLANE)  
K1=1.5 K2=0.4

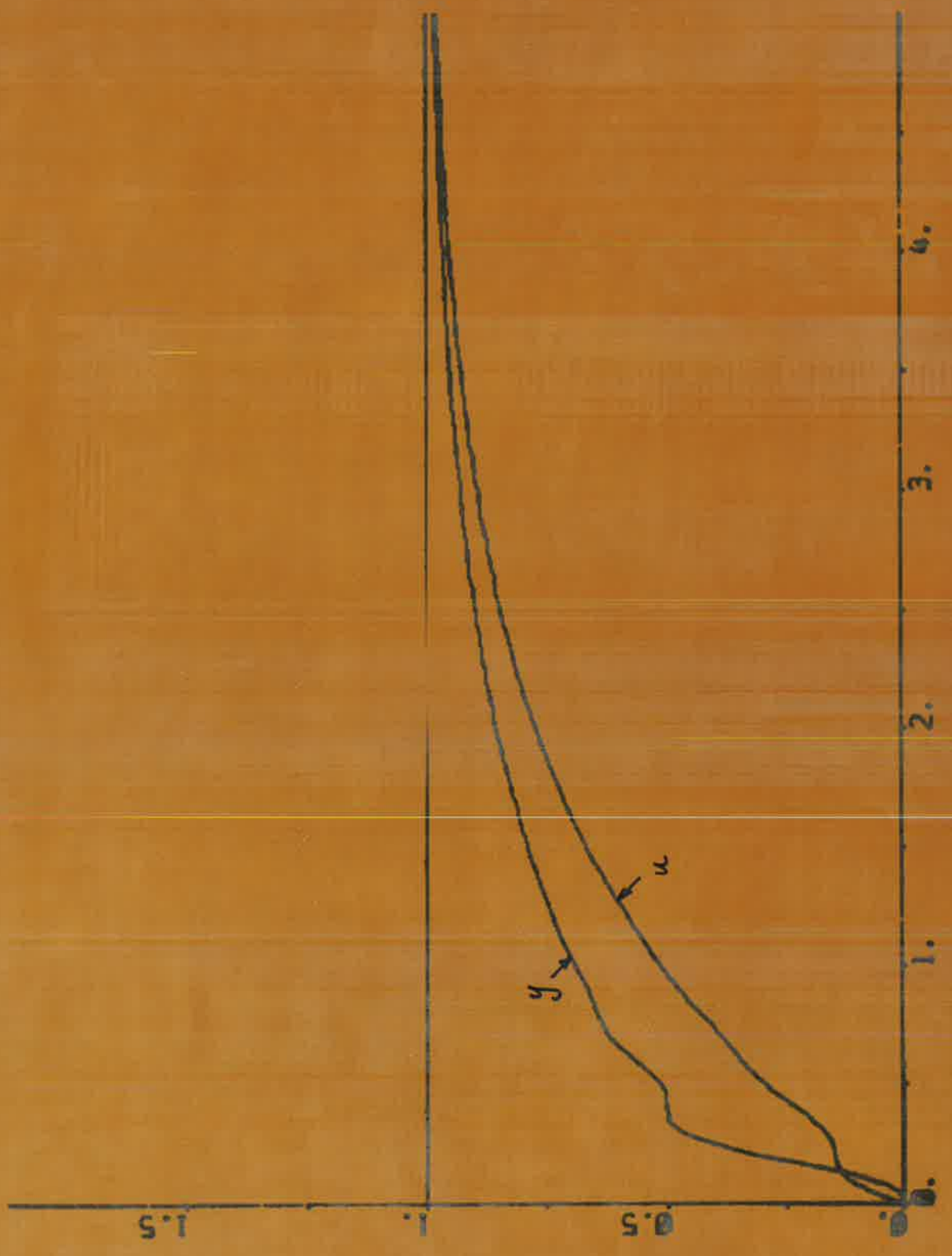


fig 5.1.9

$$K_I = 4$$

$$T_I = 0.4$$

PLOT YCPLANE1 YR  
K1=10. K2=4.





5.2 Båt

För analys av PID-reglering används en regulator modell enligt fig. 5.2.1.

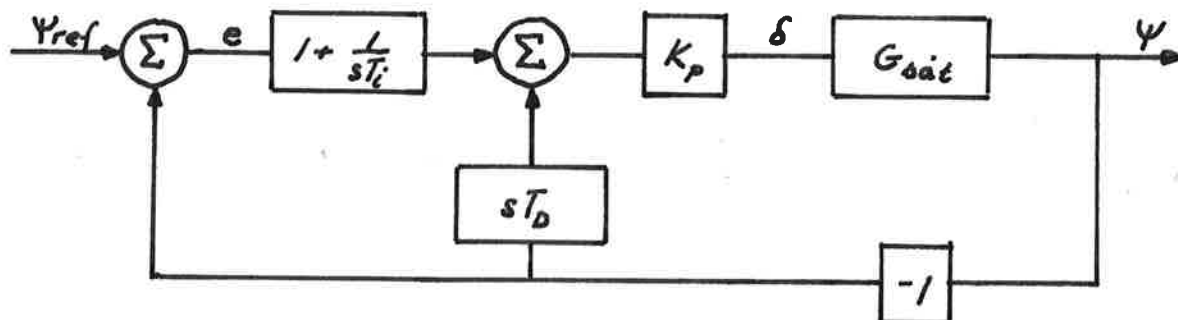


Fig. 5.2.1

Överföringsfunktioner från  $Y_{ref}$  till  $\Psi$  blir:

$$\Psi = \frac{G_{Båt} K_p (1 + 1/sT_i)}{1 + G_{Båt} K_p (1 + 1/sT_i + sT_D)} \quad \text{Här bör noteras att}$$

nämnummern i denna överföringsfunktion är samma som i ett enkelt återkopplat system med hel PID-regulator på felsignalen. (se fig.

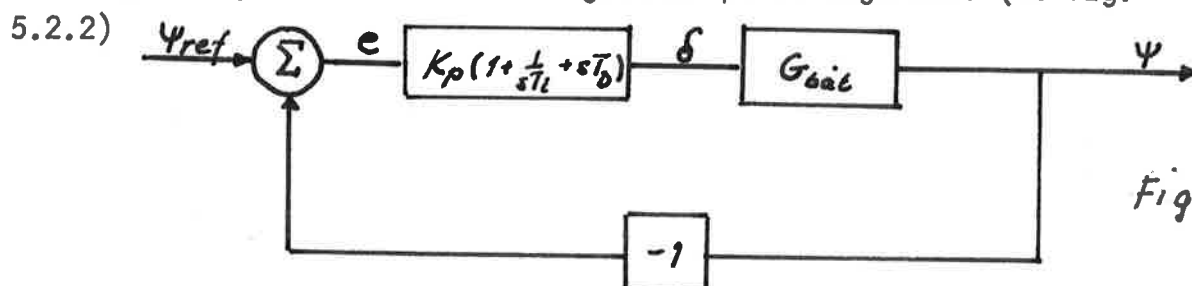


Fig. 5.2.2

Detta innebär att programmet .ROOT, ur ett programpaket för PDP 11 som beräknar polerna till ett enkelt återkopplat system om kretsöverföringsfunktionen specificeras, även kan användas för att beräkna poler till det lite mer komplicerade systemet enligt fig. 5.2.1.

Anledning till att modell enligt fig. 5.2.1 används, är att slippa derivera felsignalen som ju t.ex. vid stegstörningar på varierar snabbt.

För båt 1 användes först programmet .ROOT på systemet med både  $T_D$  och  $\frac{1}{T_i}$  satta till noll.

Körningarna visade att systemet är asymptotiskt stabilt då  $K_p < -1.56$ . Anledningen till att stabiliteter uppträder för negativt  $K_p$  är att roderutslaget är definierat så att positivt roderutslag med förminskning i kursvinkeln. Negativt  $K_p$  innebär alltså inte en positiv återkoppling.

Vidare gav körningarna att självsvängningstiden för systemet

$$T_o = \frac{2\pi}{0.8} = 7,9 \text{ s}$$

Dessa uppgifter utnyttjades till att göra en förstahandsbestämning av parametrarna  $T_D$  och  $T_i$  enligt Ziegler-Nichols självsvängningsmetod:

$$\begin{aligned} K_p &= -1.56/0.6 && \approx -3 \\ T_i &= T_o/2 && \approx 4 \\ T_D &= T_o/8 && \approx 1 \end{aligned}$$

Ytterligare beräkningar utfördes med .ROOT-programmet för olika parametervärden i närheten av de ovan bestämda.

Dessa gjordes dels för att få en uppfattning om polernas lägen, dels för att få koefficienterna till nämnarpolynomet för det återkopplade systemet. Nästa steg blev nämligen att simulera systemet med hjälp av programmet .LAPL ur samma programpaket.

Detta program beräknar en funktion  $f(t)$  om dess Laplacetransform specificeras på formen:

$$F(s) = \frac{a_0 s^m + \dots + a_m}{b_0 s^n + \dots + b_n}$$

Koefficienterna  $b_i$  erhöles alltså från .ROOT-programmet medan  $a_i$  beräknades för hand.

Simulering av stegsvar utfördes för olika parameterkombinationer.

Plottar för en av de bättre regulatorinställningarna finns i fig.

5.2.3-4. Vi valde parametrarna  $K_p = -3$ ,  $T_i = 5$ ,  $T_D = 1.5$ .

Båda figurerna visar samma system fast i olika skalor.

I figur 4 finns även en plott över roderutslaget  $\delta$  vid stegstörning på  $\psi_{ref}$ . Denna visar felet med teoretiska analyser som den utförda.

Roderutslaget behöver nämligen vara ca  $-3$  rad i början av kursändringen. Det maximala roderutslaget på den verkliga båten är ca.

0,35 rad och dessutom används en linjäriserad modell som förutsätter små korrekationer.

fig 5.2.3

PLOT PSI  
C=3. T1=5. TD=1.5

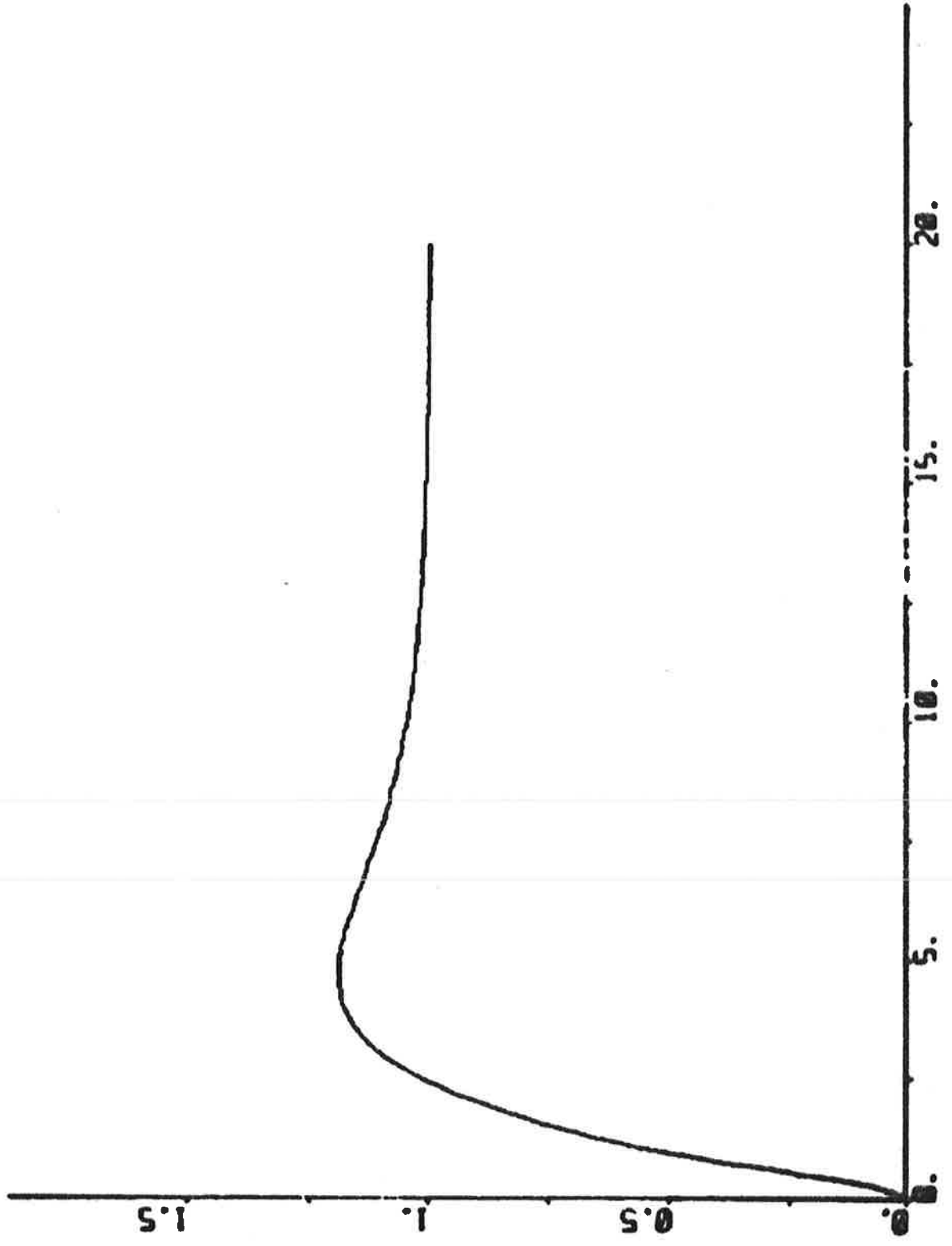
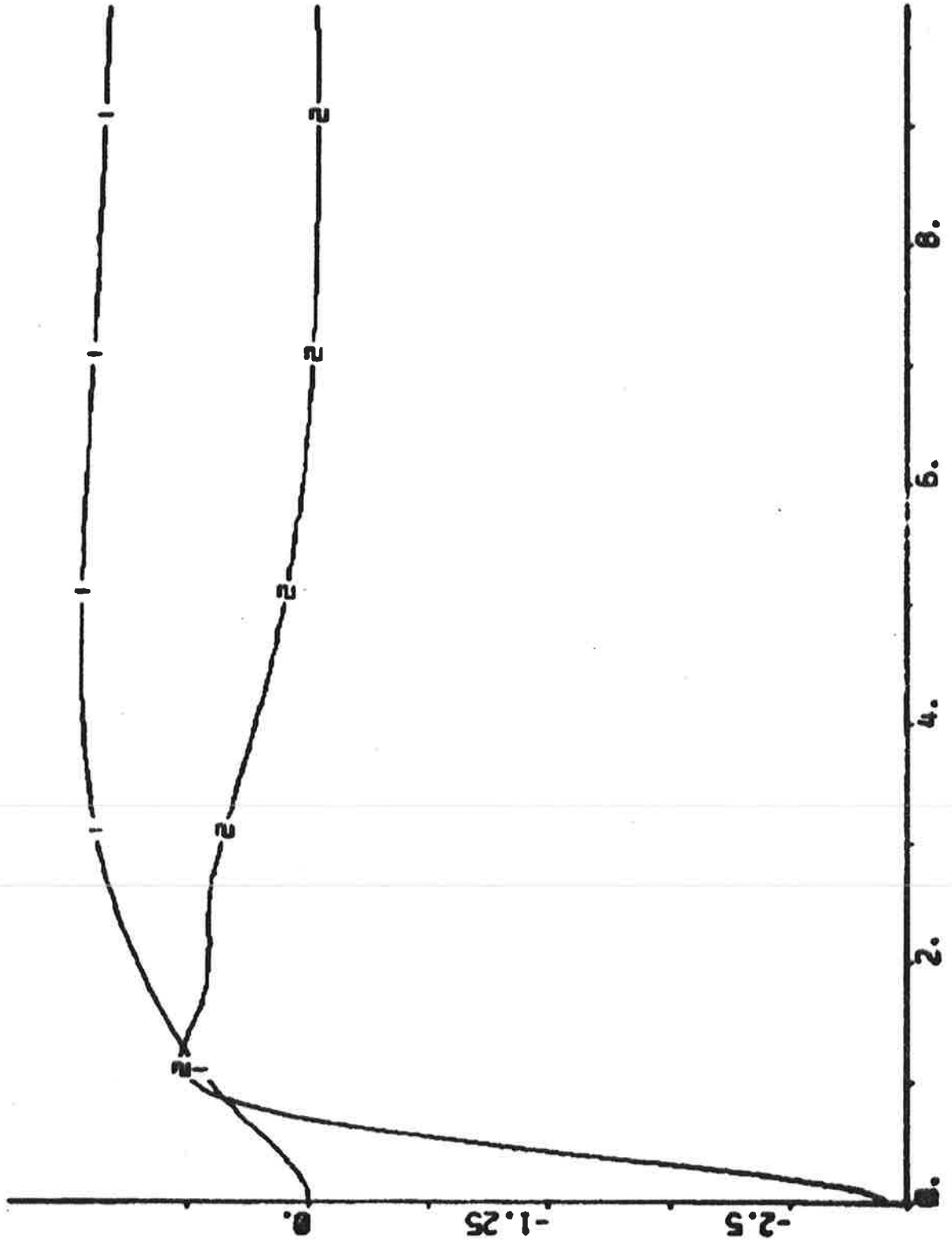


fig 5.2.4

PLOT PSI DELTA  
G=3. T1=6. TD=1.6

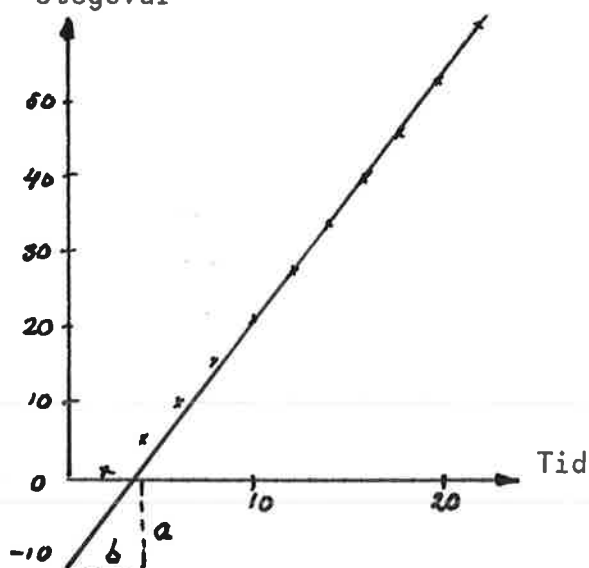


Överföringsfunktionen från roder till kursvinkel för Båt 2 är:

$$G_{\text{båt}}(s) = -1.236 \frac{s + 1.266}{s(s+0.260)(s+1.870)} = K \cdot \frac{s+z}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

För den stabila Båt 2 gäller att systemet ej kan sättas i självsvängning, om man ej tar hänsyn till tidskonstanterna hos rodermaskineriet. Således kan Nichols-Zieglers, på självsvängning baserade metod för regulatorinställning ej användas. Försök gjordes att med hjälp av .ROOT-programmet få det öppna systemet i självsvängning. Eftersom det väsentligen är av andra graden går det ej. Tredje gradens system fås då en faktor  $(1+T_s)$  införes i nämnaren. Denna faktor härrör från rodermaskineriets tidsfördröjning. För att inte göra systemet mera komplicerat får det vara oförändrat och Nichols-Zieglers metod med studium av processens stegsvar användes som riktmärke.

LAPLACE-programmet ger då  $\delta(s) = 1/s$   
Stegsvar



Regulatorinställning enligt  
Nichols & Ziegler:

Regulator	K	$T_i$	$T_D$
P	$1/a = 0.083$		
PI	$0.9/a = 0.075$		
PID	$1.2/a = 0.100$	$2b=8$	$b/2 = 2$

$$a = 12$$

$$b = 4$$

Enbart proportionell regulator

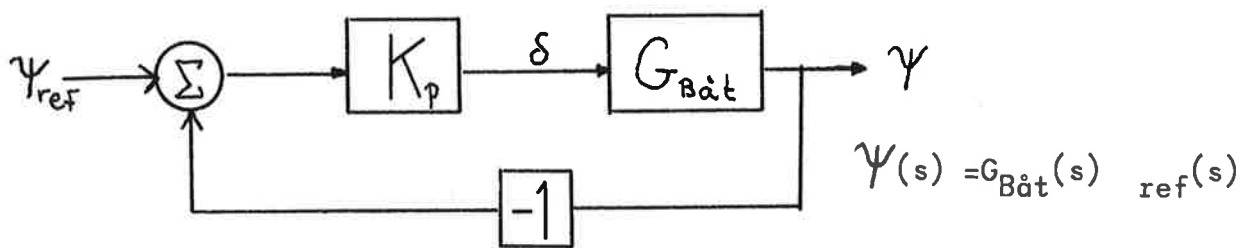


Fig 5.2.5

$$\Psi(s) = \frac{K_p K_s + K_p K_z}{s^3 + (p_1 + p_2)s^2 + (p_1 p_2 + K_p)s + K_p z} \Psi_{\text{ref}}(s)$$

Då  $\Psi_{\text{ref}}(s) = 1/s$  fås med insatta värden på konstanterna:

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \frac{K_p 1.236s + K_p 1.565}{s^4 + 2.13s^3 + (0.486 + K_p)s^2 + K_p 1.266s} = \\ &= \frac{b_3 s + b_4}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s} \end{aligned}$$

LAPLACE-programmet matades med följande värden :

$K_p$ (enligt Nichols-Ziegler)	$b_3$	$b_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
0.083	0.1	0.13	0.13	0.57	0.11

Vid ett begränsat antal körningar på datorn hittades ingen bättre kombination. Stegsvaret till ovanstående värden redovisas på nästa sida. ( Fig. 5.2.6 )

fig 5.2.6

4 ORDER OF LAPLACE TRANSFORM

DENOMINATOR COEFFICIENTS

2.13  
.57  
.11

0

NOMINATOR COEFFICIENTS

0

0

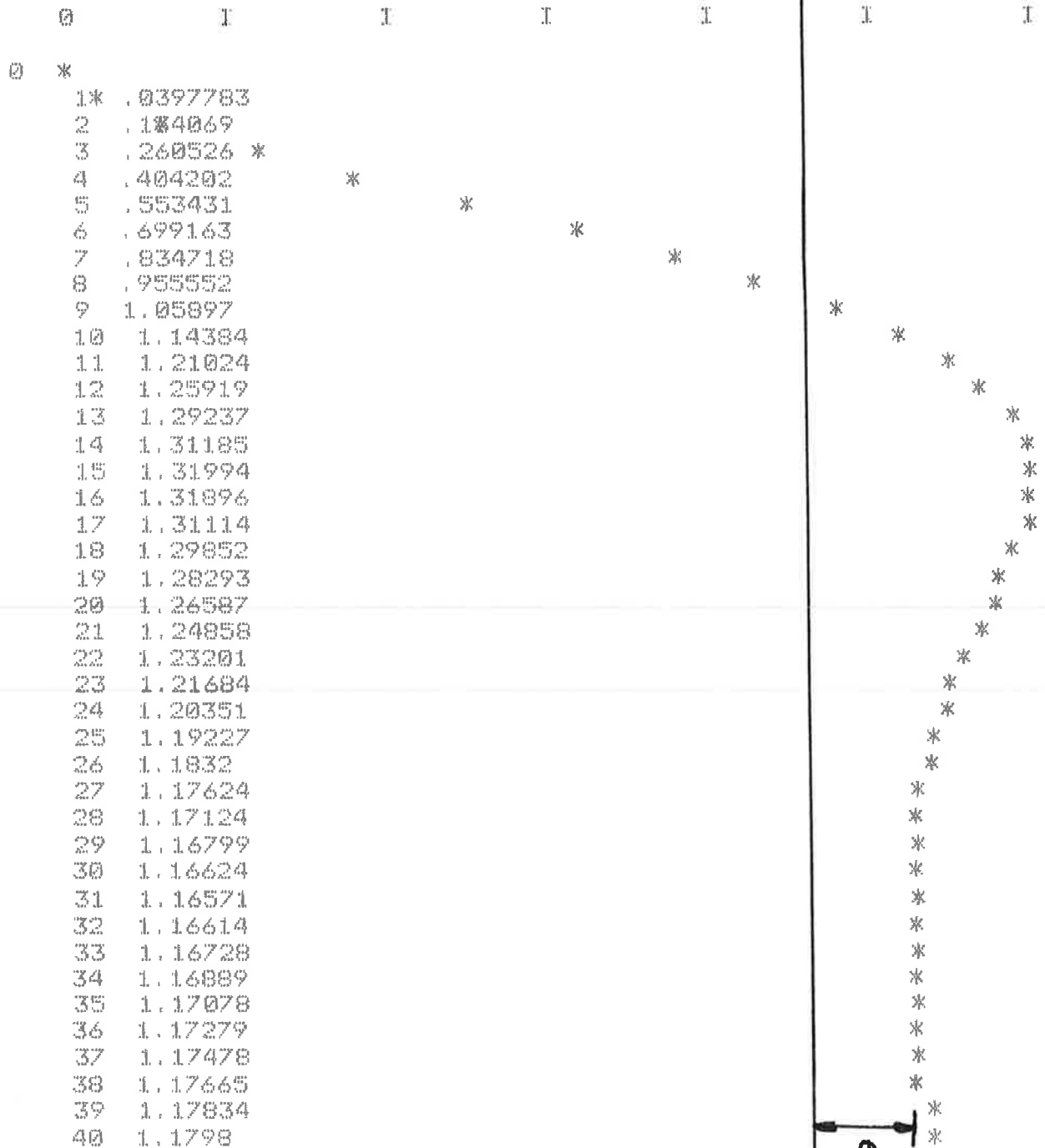
.1

.13

SAMPLING TIME= 1

SIMULATION TIME= 40

ONE SCALE UNIT = .21999 UNITS



e<sub>0</sub> = STATIONÄRT FELL

0 0  
 1 .0397783  
 2 .134069  
 3 .260526

## PID-regulator

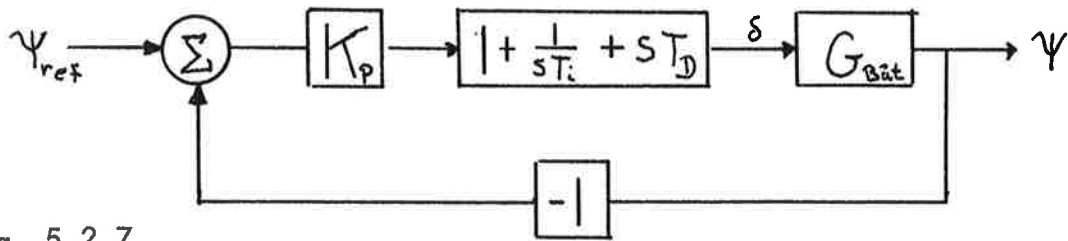


Fig. 5.2.7

Om  $\Psi_{ref}$  är ett steg så ger deriveringen av flanken mycket stora signaler, varför denna typ är olämplig.

Alternativ koppling: "  $\frac{I P}{D}$  - regulator":

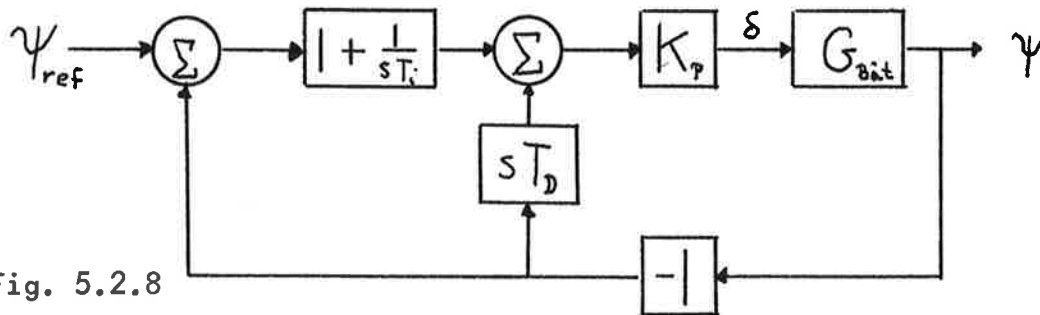


Fig. 5.2.8

Med denna koppling deriveras ej flanken hos steget. Egentligen är två överföringsfunktioner intressanta, nämligen:

$$\Psi = G_1 \Psi_{ref} \text{ och } \delta = G_2 \Psi_{ref}$$

Den första,  $G_1$ , ger som tidigare en bild av reglersystemets effektivitet. Den andra,  $G_2$ , ger möjlighet till kontroll av rodervinkelns amplitud, vilken är begränsad av hållfasthetsskäl.

Då  $\Psi_{ref}(s) = \frac{1}{s}$  fås:

$$\Psi(s) = \frac{KK_p s^2 + KK_p(z+1/T_i)s + KK_p z/T_i}{s^5 + (p_1+p_2+KK_p T_D)s^4 + (p_1 p_2 + KK_p + KK_p z T_D)s^3 + KK_p(z+1/T_i)s^2 + KK_p z/T_i \cdot s}$$

$$= \frac{b_3 s^2 + b_4 s + b_5}{s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s}$$

Bästa stegsvar erhålls med regulatorinställning enligt Nichols-Ziegler:

$K_p$	$T_i$	$T_D$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
0.10	8	2	0.124	0.172	0.020	2.377	0.924	0.218	0.020

Stegsvar se fig. 5.2.9



fig 5.2.9

5 ORDER OF LAPLACE TRANSFORM  
DENOMINATOR COEFFICIENTS

2.377  
.924  
.218  
.02  
0

NOMINATOR COEFFICIENTS

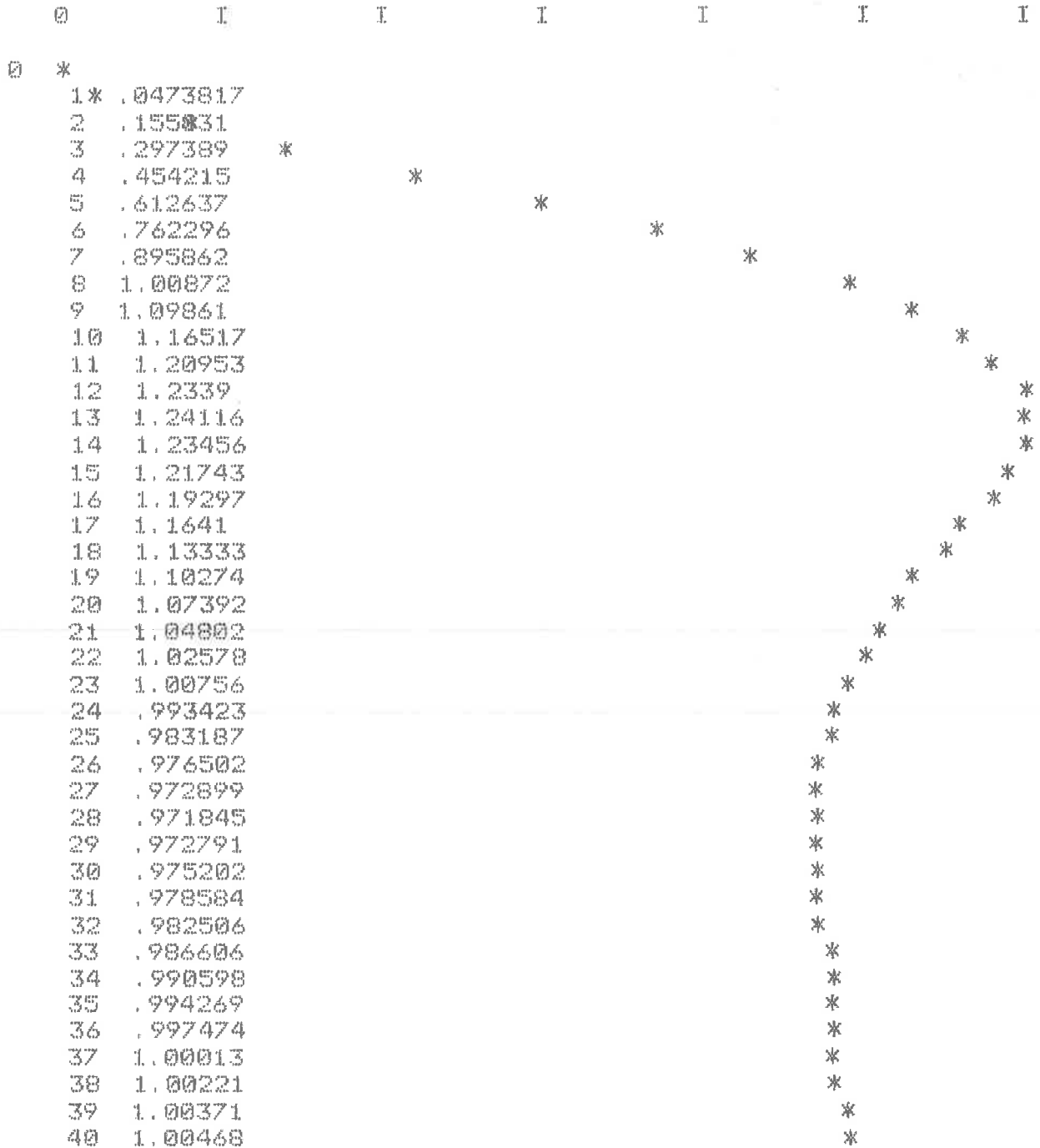
0  
0  
.124  
.172  
.02

SAMPLING TIME= 1

SIMULATION TIME= 40

ONE SCALE UNIT = .20686 UNITS

Sea Splendor är 300 m lång. Med en hastighet på 16 knop blir en tidsenhet ca 30 sekunder. Med nedanstående PID-regulator fås ett insvängningsförlopp på ca 20 tidsenheter, dvs 10 minuter.



Undersökning av rodevinkeln  $\delta$ :s storlek

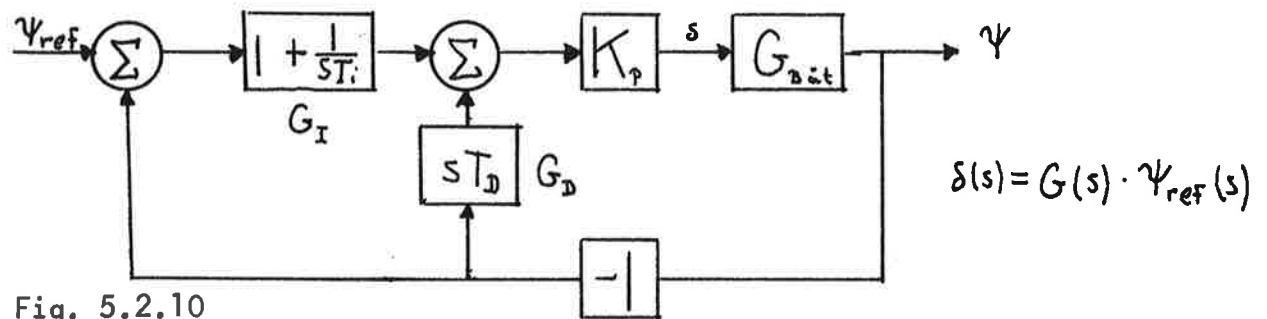


Fig. 5.2.10

$$\begin{cases} \psi = \delta G_{Båt} \\ \delta = K_p [(\psi_{ref} - \psi) G_I - G_D \psi] \end{cases} \quad \text{Då } \psi_{ref}(s) = \frac{1}{s} \text{ fås:}$$

$$\delta(s) = \frac{K_p s^4 + K_p (P_1 + P_2 + \frac{1}{T_i}) s^3 + K_p \frac{(P_1 + P_2)}{T_i} s^2 + K_p \frac{P_1 P_2}{T_i} s}{s^5 + (P_1 P_2 + K K_p T_D) s^4 + (P_1 P_2 + K K_p + K K_p z T_D) s^3 + K K_p (z + \frac{1}{T_i}) s^2 + K K_p \frac{z}{T_i} s} =$$

$$= \frac{b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s}{s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s}$$

Med regulatorinställning enligt Nichols-Ziegler:

$K_p$	$T_i$	$T_D$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
0.10	8	2	2.377	0.924	0.218	0.020	0.10	0.226	0.075	0.006

Stegsvaret, fig. 5.2.11, visar att maximala roderutslaget är 0.1 rad  $\approx 5.7^\circ$ , vilket ligger väl inom rodermaskineriets gränser.

På grund av att dynamiken hos rodersystemet är försummad antar rodret sin styrvinkel momentant då insignalen är ett steg.

Sammanfattning

Den stabila Båt 2 klarar sig kanske med en enkel proportionell regulator, men blir något snabbare och lite bättre dämpad med en PID-regulator. Dessutom saknas det stationära felet. Den instabila Båt 1 blir asymptotisk stabil med en P-regulator men knappast praktisk stabil. Däremot ger här en PID-regulator en snabb insvängning men roderutslaget blir då något udda.

5 ORDER OF LAPLACE TRANSFORM

DENOMINATOR COEFFICIENTS

2.377  
.924  
.218  
.02  
0

NOMINATOR COEFFICIENTS

.1  
.226  
.075  
6.00000E-03  
0

SAMPLING TIME= 1 SIMULATION TIME= 40  
ONE SCALE UNIT = .0194666 UNITS

I	0	I	I	I	I	I	I
	0	.1					*
	1	.0903637					*
	2	.079836				*	
	3	.0672846				*	
	4	.0536426			*		
	5	.0399259		*			
	6	.0269509	*				
	7	.0150061					
	8	*5.36664E-03					

\*0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0  
0

-3.86551E-04\*  
7.15610E-04\*

#5 1.51720E-03  
#6 2.04244E-03  
#7 2.32563E-03  
#8 2.40689E-03  
#9 2.32855E-03  
#0 2.13226E-03  
#1 1.85673E-03  
#2 1.53627E-03  
#3 1.19981E-03

8.70501E-04\*  
5.65734E-04\*  
2.97476E-04\*  
7.28216E-05\*  
-1.05269E-04\*  
-2.37197E-04\*  
-3.25925E-04\*

## 6. TILLSTÅNDSÅTERKOPPLING

### 6.1 Flygplan

Vid tillståndsåterkoppling finns det två saker som kan begränsa våra möjligheter att få önskad utsignal.

1. specifikationer på utsignalen
2. störningar

Vi kommer inte att behandla 2.

För att tillståndsåterkoppling överhuvudtaget skall vara möjlig så måste vi kräva att systemet är observerbart. För flygplanet är detta uppfyllt.

#### Modell

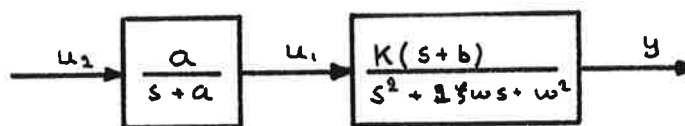


Fig. 6.1.1

Med tillståndsåterkoppling kan vi helt bestämma hur utsignalen ska se ut. Vi bestämmer oss för följande signal:

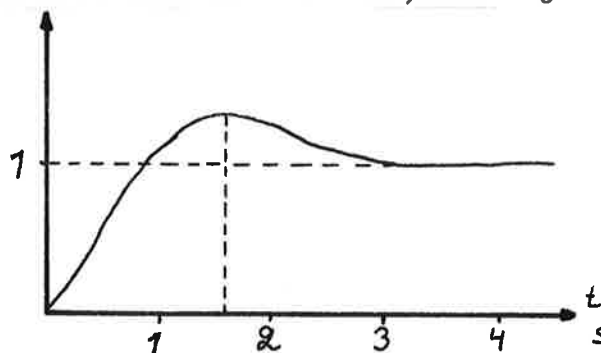


Fig. 6.1.2

Formen på utsignalen bestäms av systemets kontrollpoler. (se sid. 199 i Åström, Reglerteori)

$$\begin{aligned} \zeta &= 0.5 \Rightarrow \theta = 60 \\ \omega/\omega_0 &= 1.0 \Rightarrow \omega_0 = 3 \end{aligned}$$

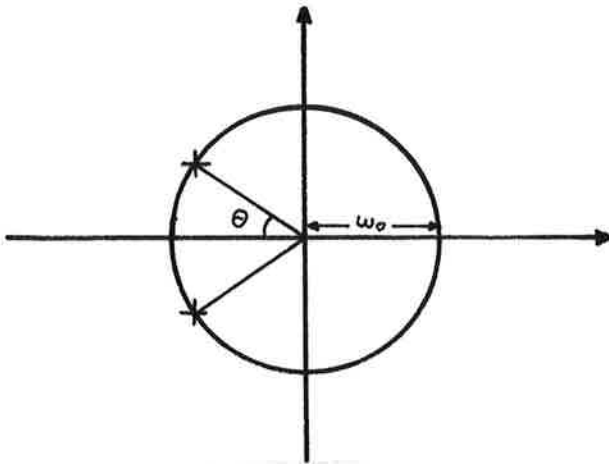


Fig. 6.1.3

Kontrollpolerna är nollställda till  $P(s) = s^2 + 3s + 9$  eftersom systemet har ett nollställe i  $-b$  så lägger vi en pol just där.

Den fjärde polen lägger vi lite godtyckligt i  $-3$ .

Vi har alltså fått att karakteristiska ekvationen för systemet skall ha följande utseende för att uppfylla specifikationen.

$$p(s) = (s^2 + 3s + 9)(s + b)(s + 3) =$$

$$= s^4 + (6 + b)s^3 + (9 + 6b)s^2 + (27 + 9b)s + 27b$$

### Regulatorstruktur

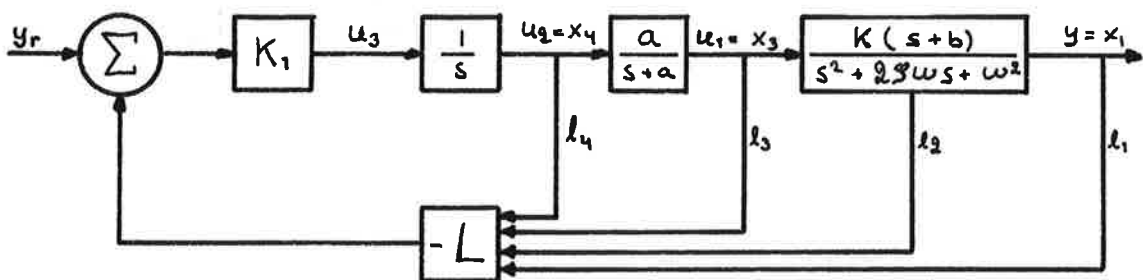


Fig. 6.1.4

$$x = \begin{pmatrix} -2 & 1 & K & 0 \\ - & 0 & Kb & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ -K_1 l_1 & -K_1 l_2 & -K_1 l_3 & -K_1 l_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_1 \end{pmatrix} y_r$$

$$y = (1 \ 0 \ 0 \ 0) x$$

vi har skrivit ursprungliga systemet på observerbar form.

Karakteristiska ekvationen:

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - K_1 BL)) \Rightarrow (\sigma = 2j\omega) = & s^4 + s^3(\sigma + a + K_1 l_4) + \\ & + s^2(\omega^2 + \sigma(a + K_1 l_4) + aK_1(l_4 + l_3)) + \\ & + s(\sigma a K_1(l_4 + l_3) + aK_1(1_1 + b l_2) + (a + K_1 l_4)\omega^2) + \\ & + aK_1(l_4 + l_3) + aK_1(\omega^2 l_2 - l_1 b - \sigma b l_2) \end{aligned}$$

vi har 5 obekanta:  $l_1, l_2, l_3, l_4, K_1$

och 5 ekvationer : 4 ur specifikationen på karakteristiska ekvationen

den femte ekvationen  $\dot{x}_{00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vi fick följande värden för några flygfall:

Flygfall	$K_1$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
1	0.996	0.240	0.408	5.986	-4.703
5	0.121	0.081	-0.247	47	-50.03
9	0.0617	10.011	-2.230	25.475	-120,7
30	0.0757	-0.1871	-1.962	9.396	-75.53

I figur 6.1.5 kan vi se resultatet av återkopplingen.

Vi kan konstatera att insignalen  $U_1$  uppfyller specifikationerna.

I figur 6.1.6 kan vi se att FF-9 är väldigt känslig för parametervariationer. En ändring av  $K_1$  från 0.0617 till 0.07 medför att systemet blir instabilt.

Botemedlet får bli att man lägger en "inre-loop" för att stabilisera systemet.

## 6.2 Båt

PID-reglering kunde inte uppfylla de specifikationer som givits. En möjlig väg är då återkoppling från samtliga tillstånd. Betrakta systemet.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x \end{aligned}$$

Vid tillståndsåterkoppling används styrlagen

$$U = U - L \cdot X$$

Matrisen väljs i detta fall så systemet får två långsamma egenvärden samt ett snabbt egenvärde.

### Bestämning av L-vektorn

Betrakta matrisen  $A-BL$  och sök dess egenvärden. Följande ekvation kan då sättas upp.

$$\begin{vmatrix} s + (b_1 l_1 - a_1) & b_1 l_2 - a_2 & b_1 l_3 \\ b_2 l_1 - a_3 & s + b_2 l_2 - a_4 & b_2 l_3 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma$$

där  $s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma$  är det karakteristiska polynomet.

Lös  $l_1$ ,  $l_2$  och  $l_3$  samtidigt som aktuella värden på A och B-matrisen sätts in

$$\begin{aligned} l_3 &= -1.017 \cdot \gamma \\ l_2 &= 3.885 (1.163 + 0.458\alpha + 0.106\beta - 0.0852\gamma) \\ l_1 &= 9.434\alpha + 7.452 l_2 - 22.670 \end{aligned}$$

Egen värden önskas i -2, -0.3, -0.3

Detta medför att:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2.6 \\ \beta &= 1.29 \\ \gamma &= 0.18 \end{aligned}$$

och att

$$\begin{aligned} l_3 &= -0.1831 \\ l_2 &= 0.3637 \\ l_1 &= 4.5687 \end{aligned}$$

Processen simulerades med SIMNON på PDP-15. Vid simulering plottades kursvinkel PSI och rodervinklet V. Se fig. 6.2.1.

Jämförelse med PID-reglering visar att insvängningstiden ökar medan överslängen försvinner helt. Vidare blir rodervinkel initialt betydligt mindre.



Flygfall 9

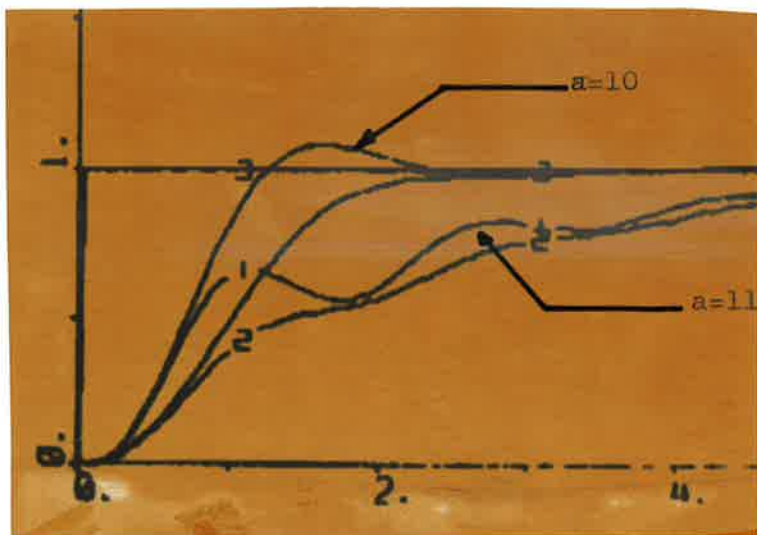


fig 6.1.5

Flygfall 9

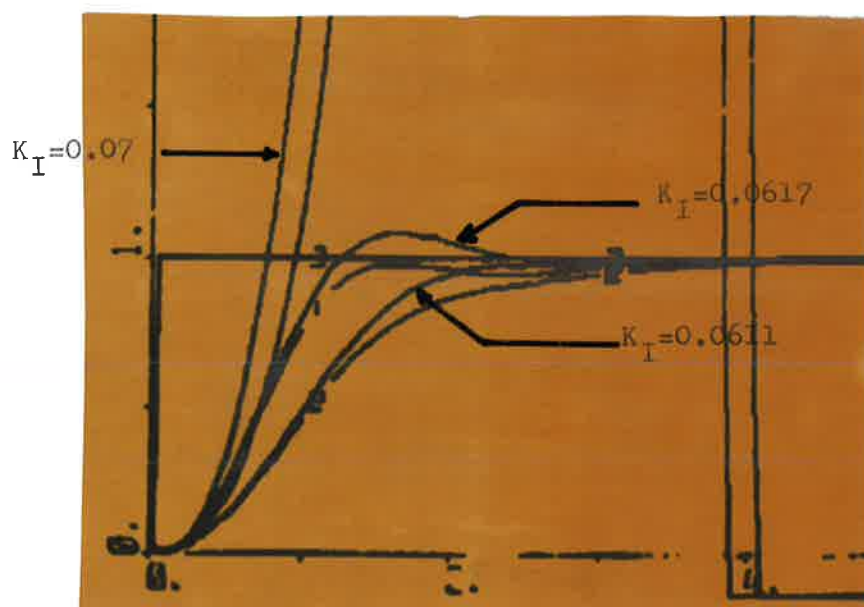
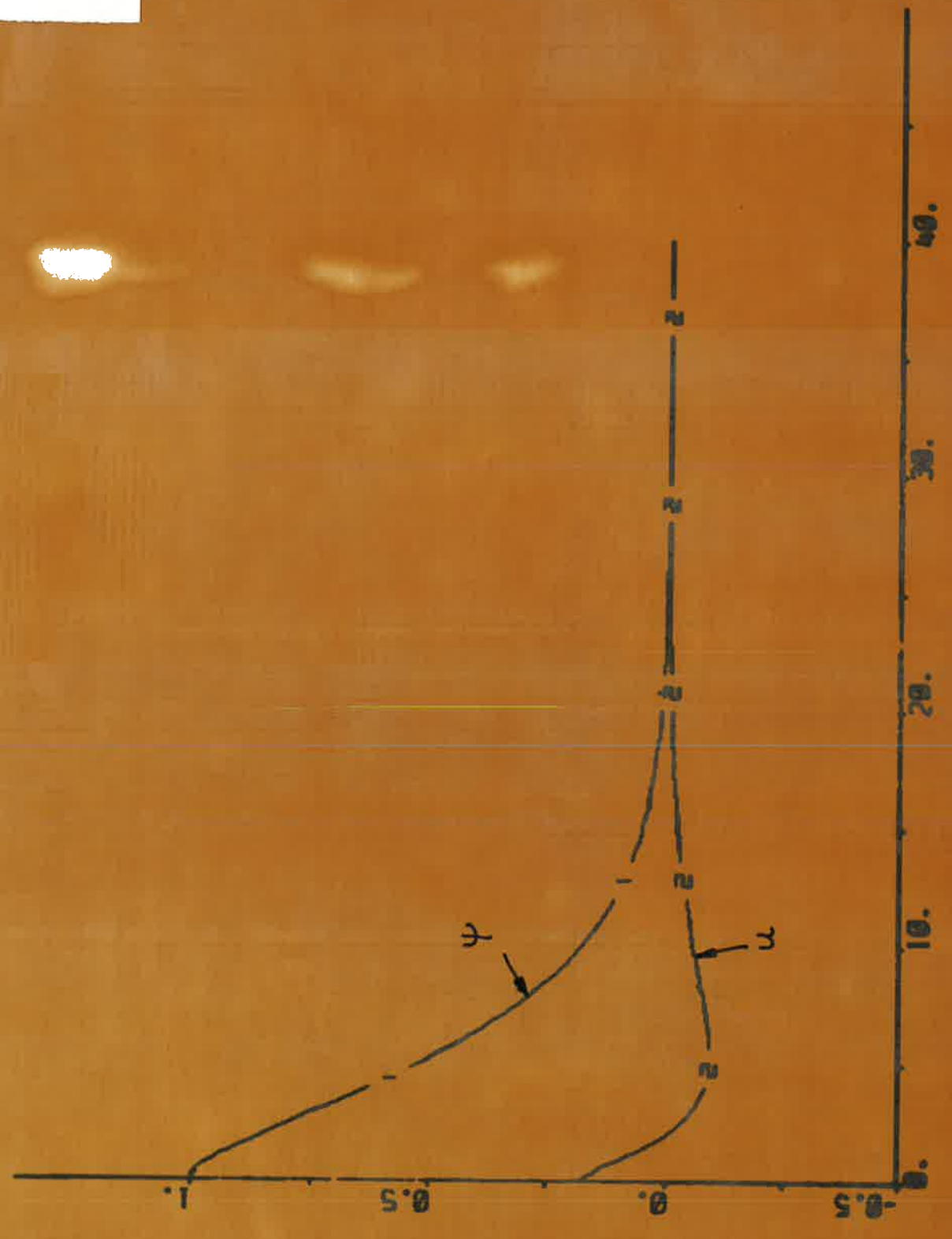


fig 6.1.6

fig 6.2.1

$\lambda_1 = -2$   
 $\lambda_{2,3} = -0.3$   
 $u = u_r - Lx$   
 $u_r = 0$   
 $\psi(0) = 1$

PLOT PSI U



## 7. REKONSTRUKTION

### 7.1 Båt

Ett problem med tillståndsåterkoppling är behovet av mätsignaler från samtliga tillståndsvariabler. Ett sätt att lösa detta är att rekonstruera de mätsignaler som är svåra att mäta.

Betrakta systemet

$$\hat{x} = A \hat{x} + Bu + K (y - C\hat{x})$$

Matrisen K väljes så att  $\hat{x}$  är en god approximation till  $x$ .

#### Rekonstruktion då endast kursen $\psi$ kan mätas

Den enda tillståndsvariabeln som kan mätas med lätthet är kursen  $\psi$ . De övriga tillståndsvariablerna rekonstrueras då ur kursen  $\psi$ . Matrisen  $A-KC$  önskas väljas så att det rekonstruerade systemet får sina egenvärden i  $-5$ . Dessa egenvärden valdes så det rekonstruerade systemet får egenvärden som är dubbelt så snabba som det öppna systemet snabbaste egenvärden. Det bör påpekas att denna uppskattning endast är en första grov uppskattning.

Beräkningar ger att matrisen K skall väljas så att

$$K = \begin{bmatrix} -15 \\ 40 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

#### Resultat

Processen simulerades med SIMNON på PDP-15. Vid simuleringen plottades kursvinkel  $\psi$  och rodervinkel  $V$ . Se fig. 7.1.1.

En jämförelse med tillståndsåterkoppling visar att insvängningstiden blir obetydligt längre och att efter ca. 10 tidsenheter blir förloppen likartade. Den kraftiga skillnaden i början beror på att rekonstruktionen testades med sämsta tänkbara förutsättning d.v.s rekonstruerade variabeln och tillståndsvariabel skilde sig maximalt ifrån varandra.

$$k_1 = -15$$

$$k_2 = 40$$

$$k_3 = 12.5$$

$$u_r = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = -5$$

$$\Psi(0) = 1$$

$$\hat{\Psi}(0) = 0$$

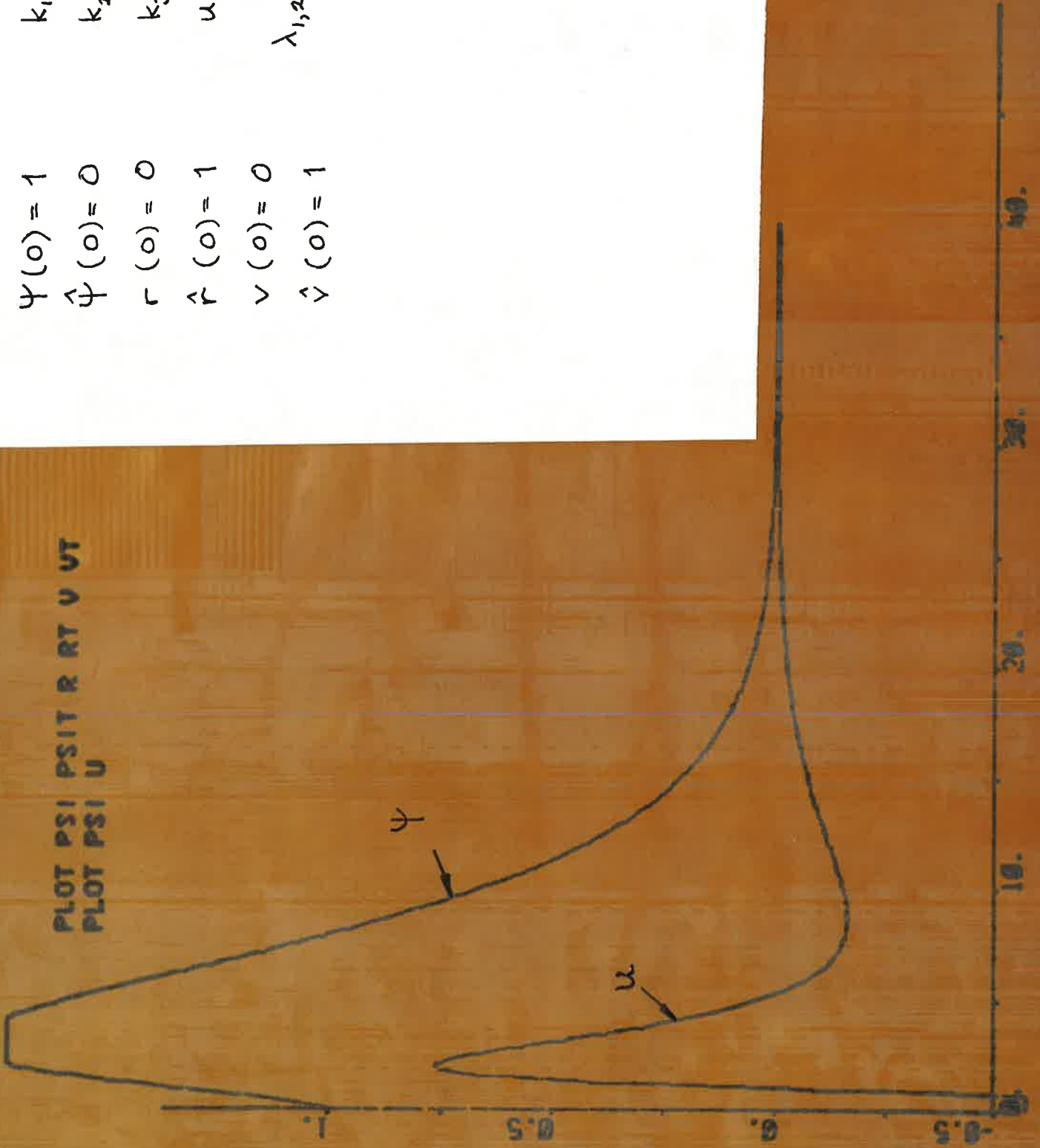
$$r(0) = 0$$

$$\hat{r}(0) = 1$$

$$v(0) = 0$$

$$\hat{v}(0) = 1$$

PLOT PSI PSIT R RT V VT  
 PLOT PSI U



## 8. SAMMANFATTNING

### 8.1 Flygplan

För att uppfylla specifikationerna räcker det ej med en PID-regulator, däremot gav tillståndsåterkoppling en tillfredställande reglering. En svårighet är dock det känsliga beroendet av parametererna i vissa flygfall.

### 8.2

PID-reglering av stabila båten (Båt 1) gav önskat uppförande, medan den instabila båtens (Båt 2) reglering lyckades med tillståndsåterkoppling.

REFERENSER

- Lee Y S (1967): A Time-Optimal Adaptive Control System via Adaptive Switching Hypersurface, IEEE Trans Autom Control, Aug, 367-375
- Åström K J, Källström C (1976): Identification of Ship Steering Dynamics, Automatica, vol 12, 9-22
- Åström K J (1976): Reglerteori, Almqvist & Wiksell

Bilaga 1a

CONTINUOUS SYSTEM BAT1  
"SEA SOVEREIGN FULLY LOADED

"AUTHOR K J ASTROM 750120

INPUT DELTA "RUDDER ANGLE  
OUTPUT BETA "SIDE SLIP ANGLE  
STATE V R PSI X Y  
DER DV DR DPSI DX DY

INITIAL

V:0.

R:0.

PSI:0.

X:0

Y:0.

OUTPUT

BETA=V/U0

DYNAMICS

DV=A1\*V+A11\*V\*ABS(V)+A2\*R+B1\*DELTA

"CONSERVATION OF LINEAR MOMENTUM  
"CONSERVATION OF ANGULAR MOMENTUM

DR=A3\*V+A4\*R+A22\*R\*ABS(V)+B2\*DELTA

DPSI=R

DX=U0\*COS(PSI)+V\*SIN(PSI)

DY=U0\*SIN(PSI)+V\*COS(PSI)

A1:-0.581

A2:-0.335

A3:-4.945

A4:-1.822

B1:0.106

B2:-0.790

A11:-2.017

A22:-12.88

U0:1.

END

Bilaga 1b

CONTINUOUS SYSTEM RAT2  
"SEA SPLENDOUR BALLAST

"AUTHOR K J ASTROM 750201

INPUT DELTA "RUDDER ANGLE  $\max \pm 20^\circ (= \pm 0.35)$   
OUTPUT BETA "SIDE SLIP ANGLE  
STATE V R PSI X Y  
DER DV DR DPSI DX DY

INITIAL

V:0.

R:0.

PSI:0.

X:0

Y:0.

OUTPUT

BETA=V/U0

DYNAMICS

DV=A1\*V+A11\*V\*ABS(V)+A2\*R+B1\*DELTA

"CONSERVATION OF LINEAR MOMENTUM

DR=A3\*V+A4\*R+B2\*DELTA

"CONSERVATION OF ANGULAR MOMENTUM

DPSI=R

DX=U0\*COS(PSI)+V\*SIN(PSI)

DY=U0\*SIN(PSI)+V\*COS(PSI)

A1:-0.936

A2:-0.362

A3:-1.745

A4:-1.194

B1:0.234

B2:-1.236

A11:-2.00

U0:1.

END