# Lösningar till `Problems in Nonlinear Control Theory'

Mårtensson, Bengt

1987

*Document Version:*
Förlagets slutgiltiga version

Link to publication

*Citation for published version (APA):*
Mårtensson, B. (Red.) (1987). *Lösningar till `Problems in Nonlinear Control Theory'*. (Technical Reports TFRT-7348). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

*Total number of authors:*
1

CODEN: LUTFD2/(TFRT-7348)/1–064/(1987)

# Lösningar till "Problems in Nonlinear Control Theory"

Bengt Mårtensson (Red.)

Institutionen för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola

Mars 1987

**Department of Automatic Control**
**Lund Institute of Technology**
P.O. Box 118
S-221 00 Lund Sweden

*Document name*
Report

*Date of issue*
March 8, 1987

*Document Number*
CODEN: LUTFD2/(TFRT-7348)/1-064/(1987)

*Author(s)*
Bengt Mårtensson (Ed.)

*Supervisor*

*Sponsoring organisation*

*Title and subtitle*
Lösningar till "Problems in Nonlinear Control Theory" (Solutions to "Problems in Nonlinear Control")

*Abstract*

This report contains student's solutions to the problems in B Mårtensson: "Problems in Nonlinear Control Theory" (TFRT-7347). They are hand-written in Swedish.

*Key words*

*Classification system and/or index terms (if any)*

*Supplementary bibliographical information*

*ISSN and key title*

*ISBN*

*Language*
Swedish

*Number of pages*
64

*Security classification*

*Recipient's notes*

*The report may be ordered from the Department of Automatic Control or borrowed through the University Library 2, Box 1010, S-221 03 Lund, Sweden, Telex: 33248 lubbis lund.*

# Lösningar till "Problems in Nonlinear Control Theory"

*Bengt Mårtensson (Red.)*

## Inledning

*Detta är en samling lösningar till "Problems in Nonlinear Control Theory", TFRT-7347. Jag har väsentligen klippt samman lösningar inlämnade av Bo Bernhardsson, Kjell Gustafsson, Mats Lilja, Per Olof Olsson, och Anders Ranzer. Bidrag till de två första övningarna har också lämnats av Jan Peter Axelsson och Ulf Holmberg. Vissa lösningar har jag skrivit själv. Som synes har jag också ändrat lite här och var. Eventuella felaktigheter är jag ensam ansvarig för.*

*Sist finns ett opus av Bo Bernhardsson om "Fickparkering med hjälp av Lie-klamrar", samt overheadbilder av Anders Ranzer. Dessa handlar om ett referat av en styrbarhetssats av H. Sussman.*

*Bengt Mårtensson*

Solutions Problemset 1

(1)

1. $f(s,k) \equiv d(s) + k\,n(s)$

Slutna systemets kar. ekv. : $f(s,k) = 0$

Implicita funktions teoremet ⇒

För $s_0$ och $k_0$ som uppfyller

$$\begin{cases} f(s_0,k_0) = 0 \\ \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\substack{s=s_0\\k=k_0}} \neq 0 \end{cases}$$

(Detta är uppfyllt överallt utom vid multipla rötter)

gäller att i en omgivning till $(s,k) = (s_0,k_0)$ kan $s$ lokalt skrivas som en funktion av $k$

$$s = g(k)$$

Diff. ekv. som grenarna $s_i(k)$ uppfyller blir

$$\frac{d}{dk} s_i(k) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial k}}{\frac{\partial f}{\partial s}} = -\frac{n(s)}{\frac{\partial d(s)}{\partial s} + k\frac{\partial n(s)}{\partial s}}$$

---

2. $$H(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{-1} \mathcal{Z}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{G(s)}{s} = \sum \operatorname{Res}\left\{\frac{z-1}{z-e^{sh}}\,\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Betrakta $H(z,h) = 0$ och gör som uppg. 1

Byt $f$ mot $H$
$k$ mot $h$
$s$ mot $z$

3. $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

rang $F = k$

Det finns 2 diffeomorfismer (inverterbara matriser)

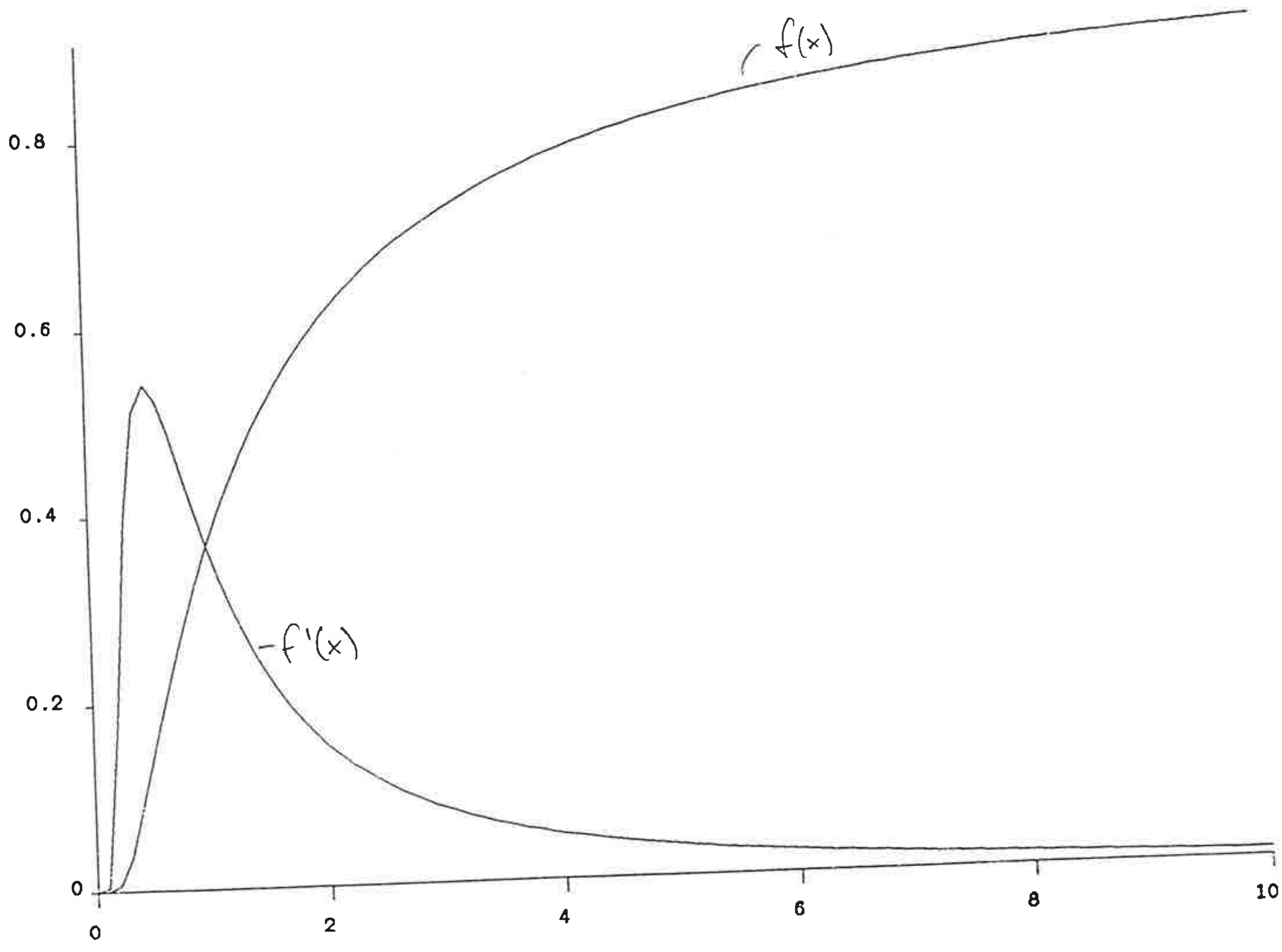
$G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$H: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

så att $H \circ F \circ G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

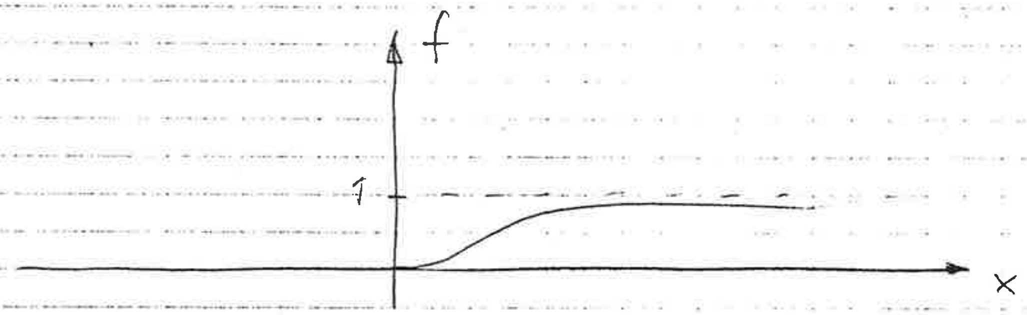
$$H \circ F \circ G = \underbrace{\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n} \Big\} m$$

.01.22 - 10:46:50 nr: 1
hcopy "Problem 1.4, f(x) and f'(x)"



1.4 (3)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$




All derivatives of $f(x)$ has the form

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ P_n \, e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

where $P_n$ is a polynomial in $\frac{1}{x}$. $\operatorname{Deg} P_n = 2n$

$e^{-1/x}$ and $P_n$ are continuous and since

$P_n e^{-1/x} \longrightarrow 0$, $x \to 0$ for all $n$ we

conclude that $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ exist and is continuous

for all $n$. Thus $f(x) \in C^\infty$

There is one analytic function with the property that it is 0 on the negative real axis. If an analytic function vanish on some line segment it vanishes everywhere. Thus $f \equiv 0$.

(4)

1.5 EFTERSOM VI ÄR INTRESSERADE AV DERIVERBARA ($C^\infty$-) FUNKTIONER $f$ PÅ $A \subset \mathbb{R}^n$ ÄR DET TREVLIGAST ATT KUNNA DERIVERA I VARJE PKT $x \in A$. DÄRFÖR FÖRUTSÄTTS $A$ VARA ÖPPEN. DEN TOMMA MÄNGDEN ($\emptyset$) ÄR I OCH FÖR SIG ÖPPEN (OCH SLUTEN) MEN FUNKTIONER DEFINIERADE PÅ $\emptyset$ HAR TROLIGEN ETT GANSKA BEGRÄNSAT ANVÄNDNINGSOMRÅDE.

1.6 a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ TÄT MEN EJ ÖPPEN

b) $\{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ EJ TÄT, EJ ÖPPEN

c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ TÄT MEN EJ ÖPPEN

d) $\{(x,y) : x^2+y^2<1\} \subset \mathbb{R}^2$ EJ TÄT MEN ÖPPEN

e) $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ EJ TÄT, EJ ÖPPEN

1.7 Since if $\varphi$ is a diffeomorphism, $\varphi^{-1}$ is as well, it is sufficient to show the statement for $n<m$.
Suppose $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n<m$, is of injective and of class $C^\infty$.
Then $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_x$ is of rank $n$, $x \in \mathbb{R}^n$.
The rank theorem shows the existance of diffeomorphisms, $H$ and $G$, such that

$$H \circ F \circ G\,(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

in a neighborhood of $x_0 \in \mathbb{R}^n$. This contradicts the ~~injectivity~~ surjectivity of $\varphi$. In particular, $\varphi$ cannot be a diffeomorphism.

5

1.8a) vectorrum $V = \mathbb{R}^3$

$[x, y] = x \cdot y = x^T y$

(i) $[y, x] = y^T x = x^T y$ symmetrisk

ej en Lie-algebra

b) vektorrum $V = \mathbb{R}^3$

$[x, y] = x \times y$

(i) $[x, y] = x \times y$

$[y, x] = y \times x = -x \times y = -[x, y]$

(ii) $[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \times y =$

$= \alpha_1 x_1 \times y + \alpha_2 x_2 \times y = \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y]$

(ii) $[v, [w, z]] = v \times (w \times z) = w(v \cdot z) - z(w \cdot v)$

$[w, [z, v]] = w \times (z \times v) = z(w \cdot v) - v(z \cdot w)$

$[z, [v, w]] = z \times (v \times w) = v(z \cdot w) - w(v \cdot z)$

$\Sigma = 0$

(i), (ii) och (iii) är uppfyllda dvs man har här en Lie-algebra.

OK

1.9 Previous problem demonstrates a Lie-algebra in which the associative law does not hold. Explicitly

$$e_x \times (e_x \times e_y) = e_x \times e_z = -e_y$$

$$(e_x \times e_x) \times e_y = 0 \times e_y = 0$$

Assume $[x,[y,z]] = [[x,y],z] \quad \forall x,y,z \in \mathcal{L}$

Then

$$[x,[y,z]] \overset{\text{Jacobi}}{=} -[y,[z,x]] - [z,[x,y]]$$

$$= -[y,[z,x]] - [[z,x],y] = 0$$

One Lie algebra s.t. $[\cdot,\cdot] \neq 0$ but $[x,[y,z]] = 0 \quad \forall x,y,z$ (i.e. the assoc. law holds) is the matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \times & \times \\ \vdots & & & 0 & \times \\ & & & \vdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1.10 För en 1-dim Lie algebra måste ($x = \underset{\in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}}{a} e_1 \quad y = b e_1$)
$[x, y] = ab[e_1, e_1] = 0$. Det finns alltså bara en.

1.11/ $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$[A, B] = AB - BA$

(i) $[B, A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B]$

(ii) $[A, \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2] = A(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) - (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A =$

$= \alpha_1 (AB_1 - B_1 A) + \alpha_2 (AB_2 - B_2 A) = \alpha_1 [A, B_1] + \alpha_2 [A, B_2]$

(iii) $[A, [B, C]] = A(BC - CB) - (BC - CB)A =$

$= \cancel{ABC} - \cancel{ACB} - \cancel{BCA} + \cancel{CBA}$

$[B, [C, A]] = B(CA - AC) - (CA - AC)B =$

$= \cancel{BCA} - \cancel{BAC} - \cancel{CAB} + \cancel{ACB}$

$[C, [A, B]] = C(AB - BA) - (AB - BA)C =$

$\cancel{CAB} - \cancel{CBA} - \cancel{ABC} + \cancel{BAC}$ OK

Summa $= 0 \Rightarrow$ (i) (ii) (iii) uppfyllt. #

1.12a) Suppose $f_a$ periodic. Then for some $T \in \mathbb{R}$

$(0,0) = f_a(0) = f_a(T) = (T \bmod 2\pi,\ aT \bmod 2\pi)$

i.e. $T = 2\pi n_1$, $aT = 2\pi n_2$ where $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

and $a = \frac{n_2}{n_1} \in \mathbb{Q}$

Conversely, if $a = \frac{n_2}{n_1} \in \mathbb{Q}$, then put $T = 2\pi n_1$ to get

$f_a(t+T) = (t + 2\pi n_1 \bmod 2\pi,\ t + 2\pi n_2 \bmod 2\pi) = f_a(T)$

Hence $f_a(t)$ is a periodic (closed) curve.

1.12b) Injectivity. Suppose $f_a(t_1) = f_a(t_2)$.

Then $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$: $t_1 = t_2 + 2\pi n_1$ and $at_1 = at_2 + 2\pi n_2$.

Thus $n_1 = \frac{n_2}{a}$, which is impossible when $a \notin \mathbb{Q}$.

$f_a(\mathbb{R})$ dense. It would be enough to show that

$(na \bmod 1)_{n=0}^{\infty}$ is dense in $[0,1]$, since

$f_a(p_1 + 2\pi n) = (p_1,\ ap_1 + 2\pi a n \bmod 2\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

For this, we notice that among the numbers $(na \bmod 1)_{n=0}^{N}$

there must be two, $(n_1 a \bmod 1)$ and $(n_2 a \bmod 1)$ whose

difference is less than $\frac{1}{N}$, or equivalently:

$$\left|(n_2 - n_1)a \bmod 1\right| < \frac{1}{N}.$$

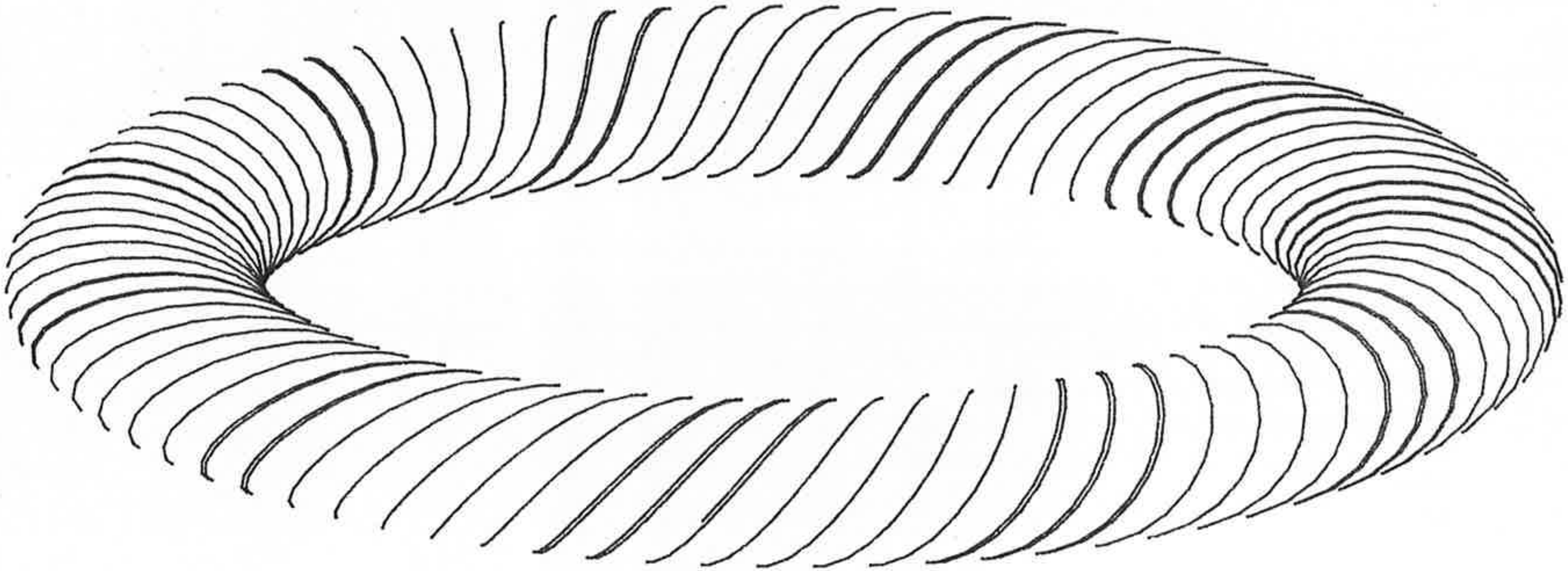
No point of the interval $[0,1]$ can now have

a distance greater than $\frac{1}{N}$ to the sequence

$(k(n_2 - n_1)a \bmod 1)_{k=0}^{\infty}$.

Since $N$ may be given any magnitude, we are finished.

9



# Solutions Problemset 2

(10)

2.1/a) Visa att $SL(n)$, dvs $n \times n$ matriser med trace $= 0$, med $[A B] = AB - BA$, utgör en Lie algebra.

Jan Peter Axelsson

Enl tal 1.11 utgör redan i allmänhet $n \times n$ matriser en Lie algebra då $[A B]$ = kommutator. Vi har kvar att visa att detta då är en under-Lie algebra. dvs att trace $= 0$ bevaras

$$\mathrm{tr}[A B] = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$$

Ty
$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}\right) = \mathrm{tr}(BA)$$

q.e.d.

b/ Visa $SO(n)$ $(A^T = -A)$ är en under Lie alg.

$$[A B]^T = (AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T =$$
$$= (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -[A B] \quad \text{q.e.d.}$$

---

2.2 a) Visa $A^T = -A \Rightarrow e^A (e^A)^T = I$ (ortogonal)

$$e^A (e^A)^T = \left\{ A \text{ [illegible] } A^T \right\} = e^A \cdot e^{A^T} = \left\{ [A A^T] = 0 \right\}$$
$$= e^{A + A^T} = e^{A - A} = e^0 = I$$

Däremot är $A = \begin{pmatrix} i2\pi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inte skevhermitesk men

$$e^A = S^{-1} e^{\begin{pmatrix} i2\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} S = S^{-1} S = I, \quad \text{ngt } S,$$

så omvändningen gäller inte.

11

Dock: eftersom exp bijektiv kring omgivning av $0$ så $\exists\, \varepsilon > 0$ så att

$$\|S\| < \varepsilon,\ e^{S} \in SO(n) \Rightarrow S \in so(n)$$

---

2b) Skriv $B_0 = A$! Det finns $B_{m+1}, \dots, B_p$ ($u_0 \equiv 1$) så span $\{B_i\}_0^p = LA\{B_i\}_0^m$. Givna satsen $\Rightarrow$

$$\Phi(t) = \underbrace{e^{g_1(t) B_1}}_{\in SO(n)} \cdots e^{g_p(t) B_p} \in SO(n)$$

(åtminstone för små $t$.)

$x(t) = \Phi(t)\, x(0)$ så

$\|x(t)\| = \|x(0)\| \Rightarrow R(x(0), t) \subset \{x : \|x\| = \|x(0)\|\}$

Eftersom resonemanget går igenom i omgivning av alla $t$ så klart.

---

2c) $B_i \in so(n)$

b) $\Rightarrow \Phi(t) \in SO(n)$

$\Phi, X(0) \in SO(n) \Rightarrow X(t) = \Phi(t) X(0) \in SO(n)$

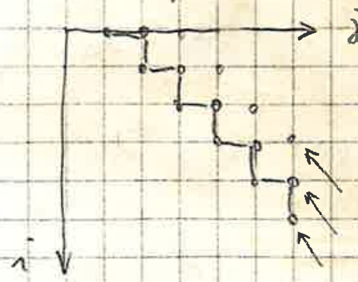
(12)

c) Låt $B_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i,j) \\ -1 & (j,i) \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$ då är $B_i = B_{i,i+1}$

Klart att $LA\{B_i\} \subset so(n)$ ty $so(n)$ är en Liealgebra som innehåller alla $B_i$. Genom uträkning fås:

$$[B_{i,j}, B_{k,l}] = \begin{cases} \pm B_{i,k} & \text{om } j = l \\ \pm B_{i,l} & \text{om } k = j \\ \pm B_{j,k} & \text{om } i = l \\ \pm B_{j,l} & \text{om } i = k \end{cases}$$ (Tecknen ej väsentliga)

Följande diagram visar vilka $B_{i,j}$ som kan genereras med klammer




$[B_{i,i+1}, B_{i+1,i+2}] = B_{i,i+2}$

$\Downarrow$

$[B_{i,i+1}, B_{i+1,i+3}] = B_{i,i+3}$

$\Downarrow$

osv

$\Rightarrow \forall B_{i,j} \in LA(B_{i,i+1})$

Eftersom $B_{i,j}$ är bas för $so(n)$ är $LA(B_i) = so(n)$.

(♣) uppnåelig $\Longleftrightarrow \forall Q \in SO(n) \; \exists \; u_i(t)$,

$i = 1, \dots, n-1$, $0 \le t \le 1$ (säg) så

$Q = \Phi(1)$ Euler: $Q = \prod g_i^j(\theta_i^j)$

$g_i^j(\theta_i^j) = e^{\theta_i^j B_i}$ dvs med lämpligt val av $\{u_i(t)\}$ (endast en $\neq 0$ i taget) blir

$\Phi(t) = Q$

(13)

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B} = I$$

2\. TAG $e^{A} = e^{B} = I$

VÄLJ T.EX.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2n\pi & 0 \\ -2n\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k\pi \\ 0 & -2k\pi & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{A+B} = I \Rightarrow \lambda_i(A+B) = 2m\pi \cdot i \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2n\pi & 0 \\ 2n\pi & \lambda & -2k\pi \\ 0 & 2k\pi & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\pi^2(n^2+k^2)\lambda = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \ \pm i \cdot 2\pi\sqrt{n^2+k^2} \quad \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

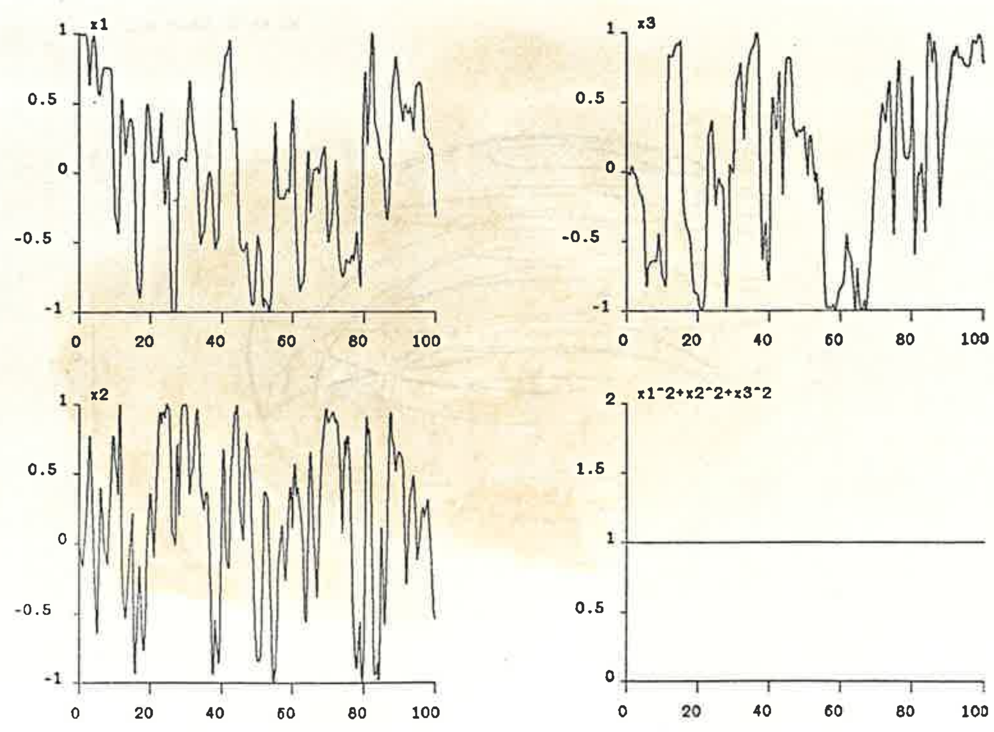
TAG T.EX. $n=3 \quad k=4$

2.4 Det linjära systemet $\dot{x} = Ax + Bu = Ax + (B_1 \dots B_m)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, $x(0) = x_0$ är ekvivalent med det bilinjära

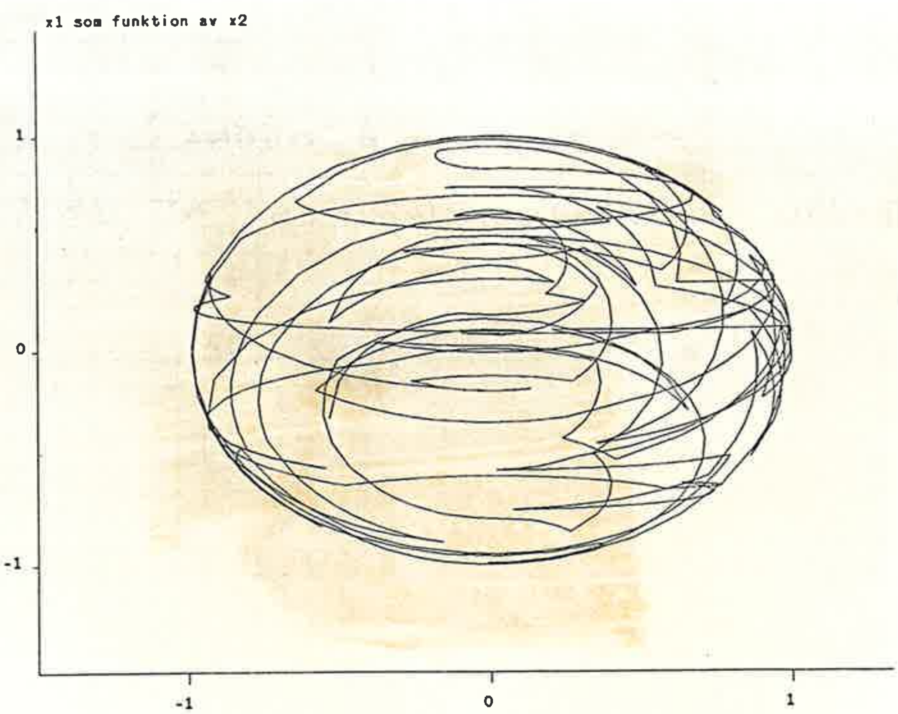
$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\hat{x} + \sum_{i=1}^{m} u_i \begin{pmatrix} 0 & B_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\hat{x}, \qquad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

25

01.29 - 09:16:24 nr: 1
hcopy "Problem 2.5"



(14)




**2.6** $f$ sägs satisfiera ett Lipschitzvillkor i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ om

$\exists L : \quad |f(x,t) - f(y,t)| \leq L\,|x-y|$ då $(x,t), (y,t) \in \Omega$.

<u>Sats</u> Om $f$ är kontinuerlig och satisfierar ett L-villkor i en omgivning av $(x_0, 0)$, så finns ett intervall kring $t=0$, i vilket $(*)$ har entydig lösning.

**2,7** / $\dot{x} = x^2$

Globalt kan inte Lipschitz villkoret uppfyllas
<u>ty</u> för stora $x$ kan $\|x^2 - y^2\|$ göras
hela tiden större än $\|x - y\|$. Men på begränsade
intervall skulle det kanske kunna gå!

Insikt i svårigheten fås genom att "lösa" eku.

$\frac{dx}{x^2} = dt \qquad -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t \quad \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$

$x(t) \to \infty$ då $t \to \frac{1}{x_0}$ — Finite escapetime.

Dock: Lokalt uppfylls ett L-villkor $\Rightarrow$ lokal existens och entydighet

---

2.8 Sats ~~A~~ Om $K$ $\exists$ så

$$\|f(x,t)-f(y,t)\| \le K\|x-y\| \quad \forall (x,t),(y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$\|f(x_0,t)\|$ begr för alla $x_0$

så existerar ent. lsg för (*) $\forall t$.

B Räcker visa $\|x(t)\| < h(t)$ $t \to \infty$

$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Kan också anta $x(0)$ stort. Då

$$\|f(x,t)\| \le \|f(x,t)-f(y,t)\| + \|f(y,t)\| \underset{y=0}{\le}$$

$$= \|f(x,t)-f(0,t)\| + \|f(0,t)\|$$

$$\le K\|x\| + L \le K'\|x\| \quad \text{om } \|x\| \text{ stort}$$

Vidare $\frac{d}{dt}\|x\|^2 = 2x^T f \le 2K'\|x\|^2$

så $\|x\|^2 \le \|x(0)\|^2 e^{2K't}$

---

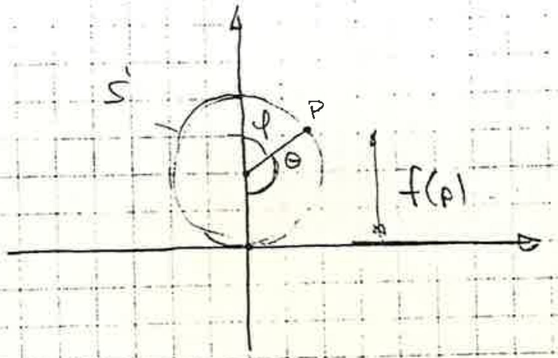
$$\dot{x} = f(x,t) = \left(A(t) + \sum^m u_i(t) B_i(t)\right) x$$

$$\|f(x,t)-f(y,t)\| \le mK\|x-y\|$$

med $K \ge \max\left(\sup\|A(t)\|,\ \sup\|u_i(t)B_i(t)\|\right)$

2.9

16




$S^1 = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$

$f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f((x,y)) = y$

$f$ differentiable ?

Enought to check on a set of charts $(U_i, \varphi_i)$ that covers $S^1$, since all charts are compatible

$U_1 : S^1$ − lowest point

take $\theta$ as coordinate

$h_1 : U_1 \longrightarrow ]0, 2\pi[$

$U_2 : S^1$ − highest point

$h_2 : U_2 \longrightarrow ]-\pi, \pi[$

$h_1^{-1} : (\sin\theta, 1-\cos\theta)$

$h_2^{-1} : (\sin\theta, 1+\cos\theta)$

$f \circ h_1^{-1} = 1 - \cos\theta$ differentiable !

$f \circ h_2^{-1} = 1 + \cos\theta$ — " —

$\Rightarrow$ $f$ differentiable

2.10 $\quad f, g \in \mathcal{V}(0)$ **(17)**

$$[f,g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

(i) $[g,f] = \frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} f = -\left(\frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g\right) = -[f,g]$

(ii) $[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) g - \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) =$

$$= \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} g + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x}\alpha_1 f_1 - \frac{\partial g}{\partial x}\alpha_2 f_2 =$$

$$= \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g]$$

(iii) $[f,[g,h]] + [h,[f,g]] + [g,[h,f]] =$

$$= \left[f, \frac{\partial g}{\partial x} h - \frac{\partial h}{\partial x} g\right] + \left[h, \frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} f\right] + \left[g, \frac{\partial h}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} h\right] =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} h - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} g - \cancel{f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} h} - \cancel{f \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}} + \cancel{f \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} g} + \cancel{f \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}} +$$

$$+ \cancel{\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} g} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} f - \cancel{h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g} - \cancel{h \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}} + \cancel{h \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} f} + \cancel{h \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}} +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} f - \cancel{\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} h} - \cancel{g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} f} - \cancel{g \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}} + \cancel{g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h} + \cancel{g \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}} =$$

$$= 0$$

2.11 a) Yes, open set of $\mathbb{R}^n$

b) No, points on the boundary $\{x_1 = 0\}$ have no ~~nbhd~~ diffeomorf with open set $\subset \mathbb{R}^n$

~~d) [illegible] construction [illegible]~~

**c)** Yes, $\{A : \varphi(A) = 0\}$ $\varphi(A) = \det(A) - \pi$

$\varphi \in C^\infty$ rank $d\varphi = 1$

**d)** Yes, open set of $GL(n)$

**e)** Yes

**f)** Yes

T



# NCS. Problemset 3

3.1
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ub & x(0) = x_0 \\ u_\varepsilon = \eta\left(\delta(t) - \delta(t-\varepsilon)\right) \end{cases}$$

$$\dot{x} = f(x) + b\eta\left(\delta(t) - \delta(t-\varepsilon)\right)$$

$$x(0+) = x_0 + b\eta$$
$$\dot{x}(0+) = f(x(0+)) = f_0 + b\eta f_0' + O(\varepsilon^2)$$
$$\ddot{x}(0+) = f'(x(0+)) \cdot \dot{x}(0+) = f_0' f_0 + O(\varepsilon)$$
$$x(\varepsilon-) = x(0+) + \varepsilon \dot{x}(0+) + \frac{\varepsilon^2}{2}\ddot{x}(0+) + O(\varepsilon^3) =$$
$$= x_0 + b\eta + \varepsilon(f_0 + b\eta f_0') + \frac{\varepsilon^2}{2} f_0' f_0 + O(\varepsilon^3)$$

$$x(\varepsilon+) = x(\varepsilon-) - b\eta = x_0 + \varepsilon(f_0 + b\eta f_0') + \frac{\varepsilon^2}{2} f_0' f_0 =$$
$$= x_0 + \varepsilon\left\{ f(x_0) + \eta[b, f](x_0)\right\} + \frac{\varepsilon^2}{2} f_0' f_0$$

---

3.2 a) $$L_f \lambda = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 \cos x_2 x_3) + \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 \cos x_2 x_3) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 \cos x_2 x_3) =$$

$$= x_1 x_2 \cos x_2 x_3 - x_1 x_3 \sin x_3 \sin x_2 x_3 - x_1 x_2 \sin x_2 x_3$$

---

b) Linjäriteten klar i båda fallen
Återstår att visa (ii). Vi observerar att

$$L_g(\lambda\gamma)(p) = (g(p))(\lambda\gamma) = \lambda(p)(g(p))(\gamma) + \gamma(p)(g(p))(\lambda) =$$
$$= \lambda(p) \cdot L_g\gamma(p) + \gamma(p) \cdot L_g\lambda(p)$$

d.v.s. $L_g(\lambda\gamma) = \lambda \cdot L_g\gamma + \gamma \cdot L_g\lambda$

Inför $f \square g$ genom $L_{f \square g} = L_f L_g$. Då gäller

$$(f \square g(p))(\lambda \gamma) = L_{f \square g}(\lambda\gamma)(p) = L_f L_g(\lambda\gamma)(p) =$$

$$= L_f[\lambda \cdot L_g \gamma + \gamma \cdot L_g \lambda](p) =$$

$$= (L_f\lambda \cdot L_g\gamma + \lambda \cdot L_f L_g \gamma + L_f \gamma \cdot L_g \lambda + \gamma \cdot L_f L_g \lambda)(p) =$$

$$= (L_f\lambda \cdot L_g\gamma + L_f\gamma \cdot L_g\lambda + \lambda \cdot L_{f \square g}\gamma + \gamma \cdot L_{f \square g}\lambda)(p)$$

Detta visar att $f \square g(p)$ inte uppfyller (ii), så $f \square g$ är inte något vektorfält. Dock framgår att $[f,g] = f \square g - g \square f$ är ett vektorfält.

3.2c) $L_f\lambda(p) = (f(p))\lambda = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i}\right)(p)$

$$L_g L_f \lambda(p) = \sum_{i=1}^{n} g_i(p) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_j}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[g_i \frac{\partial f_j}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_j} + g_i f_j \cdot \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi_j \partial \varphi_i}\right]$$

Detta visar att

$$L_f L_g - L_g L_f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[f_i \frac{\partial g_j}{\partial \varphi_i} - g_i \frac{\partial f_j}{\partial \varphi_i}\right]\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_j} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

3.4 $\quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$[f,g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$$

$$[[f,g],g] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kontrollerbarhets-Lie-algebran i 0 består alltså av hela $\mathbb{R}^2$.

$$[g, ad_f^2 g] = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

(d24) *ad.log*

```
(c25) part(d10,1);
 Breakup of expression failed.
 You may try to break it yourself
```

(d25) $V_1 =$

$$-\frac{\sqrt{x_3}\left(\left(-8x_1^2x_2x_3\cos(x_3) - 4x_1^3e^{x_1}x_2x_3^5 + 8x_1^3x_2^{14} + 8x_1^3e^{x_1}\right)\sin(x_3) + 6x_1^{\frac{5}{2}}x_2x_3\sin(x_3) - 4x_1^3e^{x_1}x_3\cos(x_3)\right) + 4x_1^2e^{x_1}x_2x_3^3\sin(x_3) + \sqrt{x_1}\left(x_2^2x_3^3\cos(x_3) + \left(2x_1^2 - 2x_1\right)e^{x_1}x_2x_3^2\right) - 2x_1^2}{4x_1^2x_2^2x_3^{\frac{5}{2}}}$$

```
(c26) part(d10,2);
 Breakup of expression failed.
 You may try to break it yourself
```

(d26) $V_2 =$

$$-\frac{\sqrt{x_1}\left(2e^{x_1}x_2x_3^7\sin(x_3) + \left(\left(52x_2^{15} + (-6x_1 - 12)e^{x_1}x_2\right)x_3^6 - 4x_2^{14}x_3\right)\cos(x_3) - x_2^2x_3^7 + \left(134x_1e^{x_1}x_2^{14} - 12x_1e^{2x_1}\right)x_3^5 + 4x_1x_2^{27} + 8x_1e^{x_1}x_2^{13}\right) + x_2^2x_3^7\cos(x_3) + \left(\left(6x_1^2 + 12x_1\right)e^{x_1}x_2 - 5\right.}{2\sqrt{x_1}x_2x_3^4}$$

```
(c27) part(d10,3);
 Breakup of expression failed.
 You may try to break it yourself
```

(d27) $V_3 =$

$$\frac{\left(-2x_1^2 - 2x_1\right)e^{x_1}x_2x_3^2\sin(x_3) + \sqrt{x_3}\left(-2x_1e^{x_1}x_2^2x_3^3\cos(x_3) + \sqrt{x_1}(2x_1 - 1)e^{x_1}x_2^2x_3^3 + \left(2x_1e^{x_1}x_2^{15} - 2x_1e^{2x_1}x_2\right)x_3^2\right) + \sqrt{x_1}\left(-x_2^2x_3^2\cos(x_3) + \left(-2x_1^2 - 4x_1\right)e^{x_1}x_2^2x_3^6 + \left(4x_1x_2^{15} + (2x_1^2 -\right.\right.}{2x_1x_2^3x_3^3}$$

```
(c28) closefile();
```

Forts

20

$$\cdot_1) e^{x_1} x_2 x_3^2) - 2x_1^2 e^{x_1} x_2 x_3^2 \cos(x_3) - 2x_1 x_2^2 x_3^3 + \left(2x_1^2 e^{x_1} x_2^{14} + x_1^2 e^{2x_1}\right) x_3$$

$$+ 12x_1) e^{x_1} x_2 - 52x_1 x_2^{15}) x_3^6 + 2\sqrt{x_1} e^{x_1} x_2^{14} x_3^{\frac{5}{2}} + 4x_1 x_2^{14} x_3$$

$$+ \left(4x_1 x_2^{15} + \left(2x_1^2 + 4x_1\right) e^{x_1} x_2\right) x_3\big) + \Big(\left(2x_1^2 + 4x_1\right) e^{x_1} x_2^2 x_3^6 + \left(\left(-2x_1^2 - 4x_1\right) e^{x_1} x_2 - 4x_1 x_2^{15}\right) x_3\Big) \cos(x_3) + \left(12x_1^2 e^{2x_1} x_2 - 28x_1^2 e^{x_1} x_2^{15}\right) x_3^5 + x_1 x_2^2 x_3^2 - 24x_1^2 x_2^{28} + 10x_1^2 e^{x_1} x_2^{14} + 4x_1^2 e^{2x_1}$$

$$2x_1 x_2^3 x_3^3$$

2

3.5 a) $\dot{x} = u$

$\dot{y} = v \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + g_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} u + g_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} v$

$\dot{z} = xy$

22

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix} \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

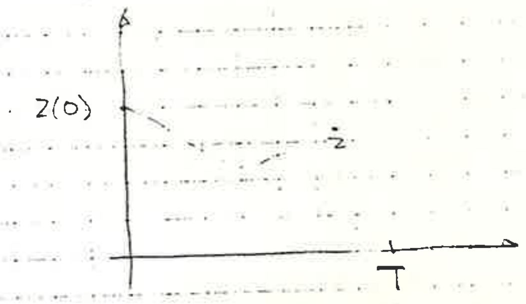
$$[f, g_1] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$[f, g_2] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$[[f, g_2], g_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{span } LA\{f, g_1, g_2\} = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3$$

b)




$$\dot{z} = -\frac{z(0)}{t} = x \cdot y$$

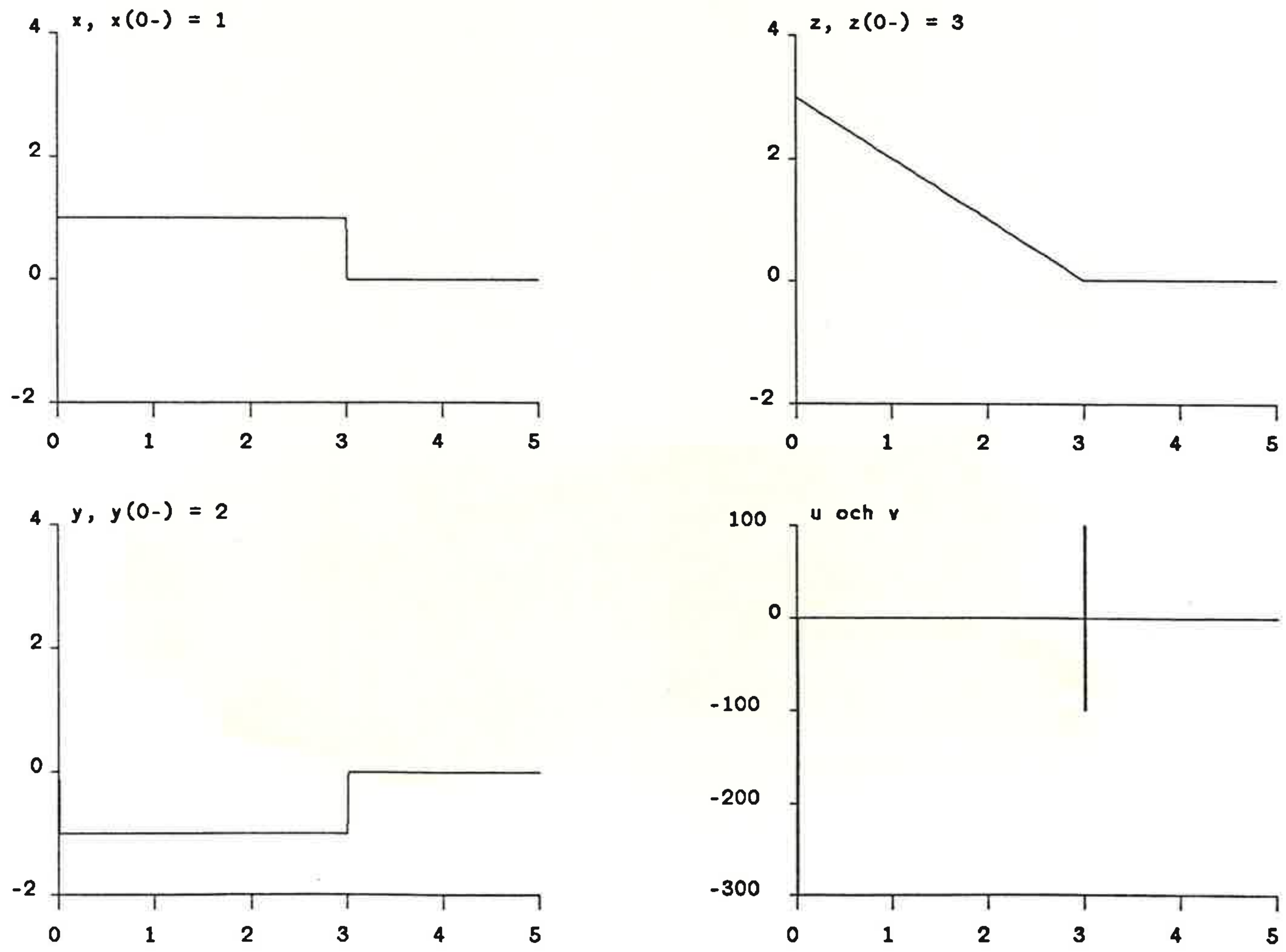
sätt $x(0^+) = 1$

$$y(0^+) = -\frac{z(0)}{t}$$

$$\Rightarrow \quad u = (1 - x(0^-))\,\delta(t) - \delta(t-T)$$

$$v = \left(-\frac{z(0)}{T} - y(0^-)\right)\delta(t) + \frac{z(0)}{T}\,\delta(t-T)$$

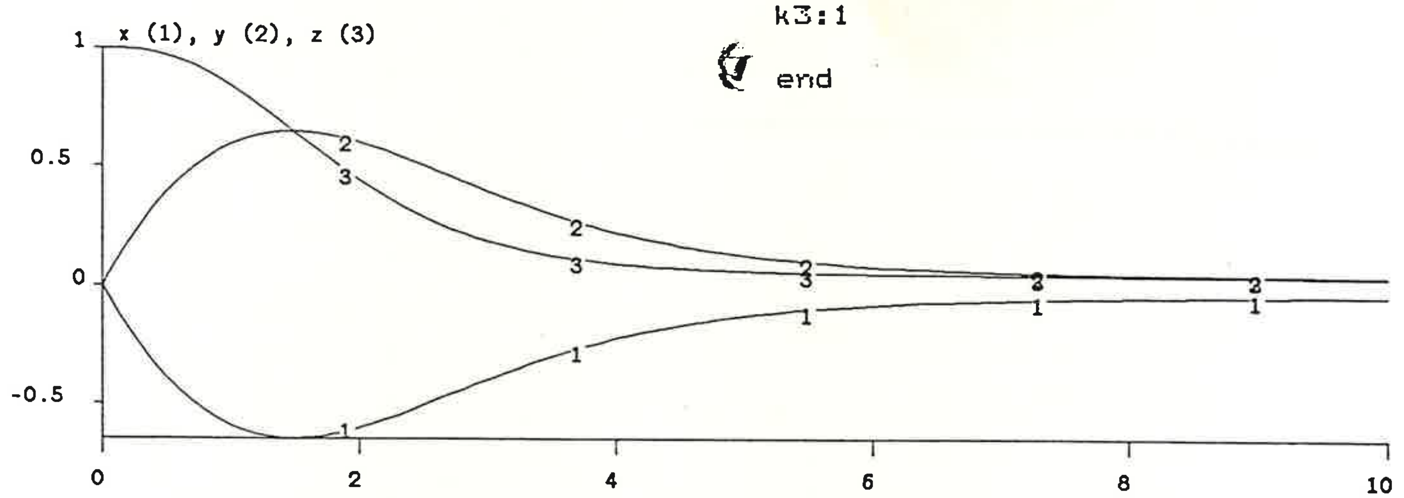
```
continuous system prob3x5b

time t

state  x  y  z
der    dx dy dz

initial

x = x0
y = y0
z = z0

sort

dx = u
dy = v
dz = x*y

delta  = if t>eps then 0 else 1/eps
deltatt = if t<tt then 0 else if t<tt+eps then 1/eps else 0

u = (1-x0)*delta - deltatt
v = -(z0/tt+y0)*delta + z0/tt*deltatt

x0:1
y0:2
z0:3

tt:5
eps:0.01

end
```

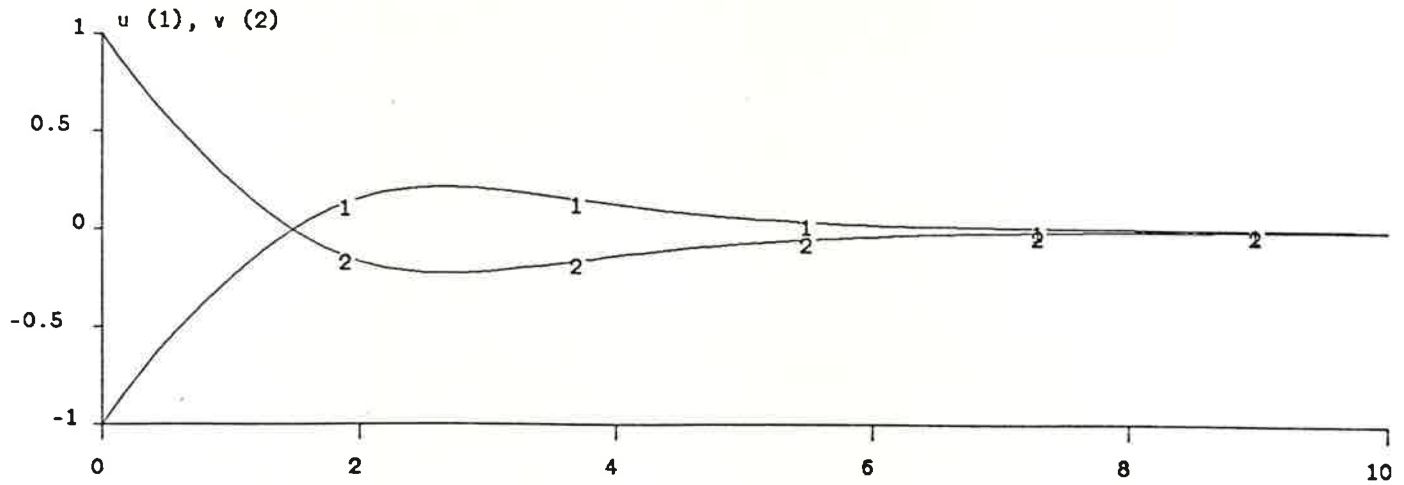


24

```
continuous system prob3x5b

time t

state  x  y  z
der    dx dy dz

dx = u
dy = v
dz = x*y

u = -k1*x-k3*z*sign(z)
v = -k2*y+k3*z

k1:1
k2:1
k3:1

end
```

.02.05 - 16:18:12 nr: 2
hcopy "Problem 3.5c, x(0)-0, y(0)=0, z(0)=1"



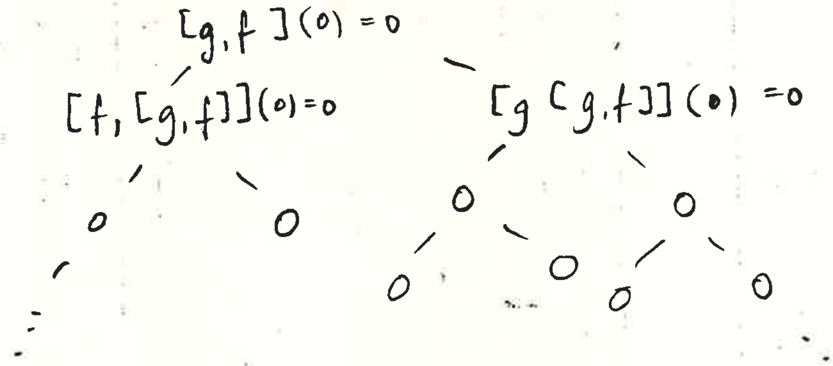



3.6 $f = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^n \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ger

$$ad_g^k f = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n!}{(n-k)!} x_1^{n-k} \end{pmatrix} \Rightarrow ad_g^k f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{k,n} \end{pmatrix}$$

$$[f, ad_g^k f] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

"Lie-trädet" ser alltså ut såhär i $x=0$:




$$ad_g^n f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tydligen är rang $LA\{f,g\}(0) = 2$, men $ad_g^n f$ kan ligga godtyckligt långt bort i trädet.

## 3.7

```
//[C] = lie(A,B)
//
// inputs   A, B : square matrices of same size
// output      C : the commutator (Lie-bracket) between of A and B

C = A*B - B*A;
```

```
//[C] = ad(A,k,B)
//
// inputs   A, B : square matrices of same size
//             k : nonnegative integer
//
//                   k
// output      C : ad (B) = [A,[A,[ ... [A,B] ... ]]]
//                   A        \              /
//                             ---- k ----

if k=0, c=b; else c=lie(a,ad(a,k-1,b));
```

27

# Problem set 4

4.1 Det följer av def på reguljär punkt att det finns en öppen omgivning $U$ sådan att $\dim \Delta(p) = \ell$ för alla $p$ i $U$. Tag en godt punkt $q$ i detta $U$ och en omgivning $U_1 \subset U$ samt $\tau_i$ $i \in I$ sådan att

$$\Delta(q) = \operatorname{span}\{\tau_i \; i \in I\}. \quad \forall q \in U_1 .$$

Använd nu Gram-Schmidt (med $C^\infty$ funkt) på $\tau_i$ till att konstruera $C^\infty$ vektorfält $\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_\ell$ som är ortonormerade i varje punkt i $U_1$. Ett ~~godt~~ vektorfält $\tau$ kan då skrivas

$$\tau(q) = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\left(\tilde{\tau}_i(q), \tau(q)\right)}_{c_i(q)} \tau_i(q)$$

Eftersom $c_i(q)$ är skalärpr. mellan två $C^\infty$-vektorfält blir de $C^\infty$-funktioner i $U_1$.

10/10

2) Klart att det är öppet ty om $p$ är reguljär punkt är $\forall p$ i en öppen omgivning det också. Att de reguljära punkterna är täta följer nu: Tag godt punkt $p$ och godt liten omgivning $U$ runt $p$. Låt $d_{max} = \max_{q \in U} \dim \Delta(q)$ och $q_0$ en punkt där detta antas. $q_0$ är då en reguljär punkt ty i en omgivning $V$ är dimensionen minst $d_{max}$ men def. på $d_{max} \Rightarrow \dim$ är $= d_{max}$ i $V$. Detta visar tätheten

10/10

Efter Jubileumsfest

28

4.3 $\Delta$ en-dimensionell distribution på $M$

Det finns ett vektorfält $f$ så att

$$\Delta(p) = sp\{f(p)\} \qquad p \in M$$

smooth : $f(p) \in C^\infty$

regular : $f(p) \neq 0 \quad \forall p \in M$

involutive : trivialt $[f,f] = 0$

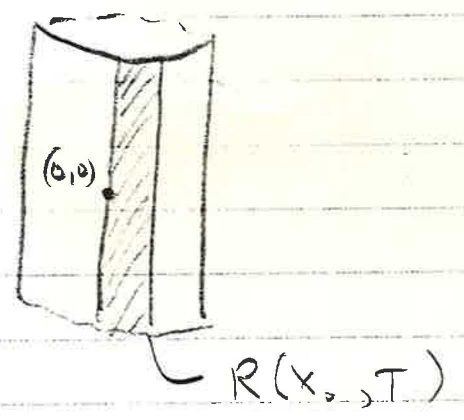
Med egenskaper enligt ovan beskrivs $\Delta$ av en diffekvation

$$\dot{x} = f(x) \qquad *$$

Frobenius $\Rightarrow$ det finns en entydig lösning till $*$

4.4 Antag utan inskränkning att $x_0 = (0,0)$.

$R(x_0,T) = \{(z,\theta) : \theta = T\}$



loc acces. Ja $UR(x_0,T) = S^1 \times \mathbb{R}$ öppen

loc acces at time T Nej $R(x_0,T) = \{T \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}$ ej öppen

loc reach Ja $UR(x_0,T) = S^1 \times \mathbb{R} \ni x_0$ öppen

loc reach at time T Nej

small time loc reach. Nej $\bigcup_{0 \le T \le T_0} R(x_0,T) = \{0 < \theta < T_0\} \times \mathbb{R}$

innehåller ej $x_0$ för $T_0 < 2\pi$.

---

4.5 $\dot{x} = f(x) + \sum u_i g_i(x)$

OM VI HADE HAFT $u_0 f(x)$ ISTÄLLET FÖR $f(x)$ SÅ HADE VI DIREKT KUNNAT APPLICERA CHOW'S SATS. ISTÄLLET HAR VI ATT "DRIFTSFLÖDET" $\Phi_t^f$ ÄR PERIODISKT. VI KAN DÅ UTNYTTJA "VIKNINGSEFFEKTEN" FÖR ATT "GÅ BAKÅT I TIDEN" GENOM ATT KÖRA KNAPPT EN PERIOD I $f$-FLÖDET.

Notera att vi kan generera även "doglegs" på detta viset.

---

4.7 Symmetri:

"Om": $f(-x) + \sum \tilde{u}_i \tilde{g}_i(-x) = A(-x) + \sum \tilde{u}_i b_i =$

$= -(Ax + \sum u_i b_i)$ med $\tilde{u}_i = -u_i$ <u>OK</u>

$P = \langle f, g_i \mid g_i \rangle = \text{span}\,[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$

(visat tidigare)

$R = P + \text{sp}\{Ax\} = P$ om $\text{rang}\,[B \ldots A^{n-1}B] = n$

(forts)

7.6) $\dot{x} = B_1 x + \sum_{2}^{n-1} u_i B_i x \qquad x(0) \in SO(n)$

För att visa att detta är "globally reachable" använd sats 6.8 (BM)

$g \in SO(n) \Longrightarrow \quad g = \underbrace{g_1(\theta_1^{n-1}) \ldots g_{n-1}(\theta_{n-1}^{n-1})}_{g^{n-1}} \cdot \ldots \underbrace{g_1(\theta_1^2) g_2(\theta_2^2)}_{g^2} \; \underbrace{g_1(\theta_1^1)}_{g^1}$

för några $\theta_i^j$. Def. av $g_i$ i BM.

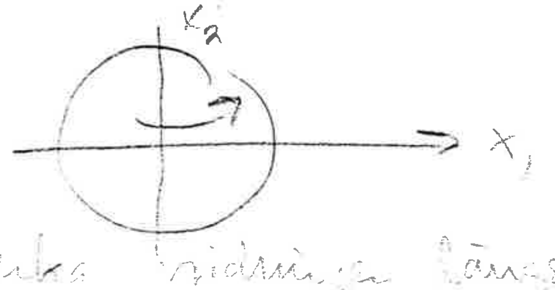
Välj nu $u_i$ som $\delta$-pulser vid lämpliga tidpunkter $\tau_i^j$ som ligger $2\pi$ från varandra (utom då man styr längs $B_1$. På så sätt kommer drivtermen hörande till $B_1$ att vrida "precis ett varv" mellan $\delta$-pulserna). I formler:

$$u_j = \sum_{k=j}^{n-1} \theta_j^k \, \delta(t - \tau_j^k) \qquad j = 2, \ldots, n-1$$

där $\tau_{j-1}^k - \tau_j^k = 2\pi \quad j = 2, \ldots n-1 \; ; \; \tau_k^k - \tau_1^{k-1} = \theta_1^k \; ; \; \tau_1^1 = 0$

tar $\tau_i^{i+1} - \tau_1^i = 2\pi$ och $\tau_1^{i-1} - \tau_i^i = \theta_1^i$.

Systemet är inte time-T reachable, ses enkelt för ex $n=3$
$B_i$ = vridning kring $x_i$-axeln. $\quad i = 1, 2$




Man kan ej påverka vridningen längs $x_1$ $\Rightarrow$ det tar minim

31

4.8 $\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = xv - yu \end{cases}$

a) $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -y \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$

$$[g_1, g_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

INGA FLER KLAMRAR $\neq 0$

$\text{span LA}\{f, g_1, g_2\}(0) = \mathbb{R}^3$

b) $f \equiv 0 \overset{\text{CHOW}}{\Longrightarrow}$ LOKALT STYRBART KRING 0

(PÅ TID OCKSÅ (SKALNING AV INSIGNALERNA))

c) MED LJAPUNOV-FUNKTIONEN

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

HITTAR MAN STYRLAGEN

$$\begin{cases} u = -x - \dfrac{z^2}{x - zy} \\ v = -y - \dfrac{z^2}{y + xz} \end{cases}$$

$$\left( \Rightarrow \dot{V} = -x^2 - y^2 - 2z^2 \right)$$

SIMULERING + EFTERTANKE $\Rightarrow$ MODIFIERAD STYRLAG: $\begin{cases} u = -x + 100yz - \dfrac{z^2(x - yz)}{(x - yz)^2 + 0.1} \\ v = -0.1y - 10xz - \dfrac{z^2(y + xz)}{(y + xz)^2 + 0.1} \end{cases}$

"Endast om"

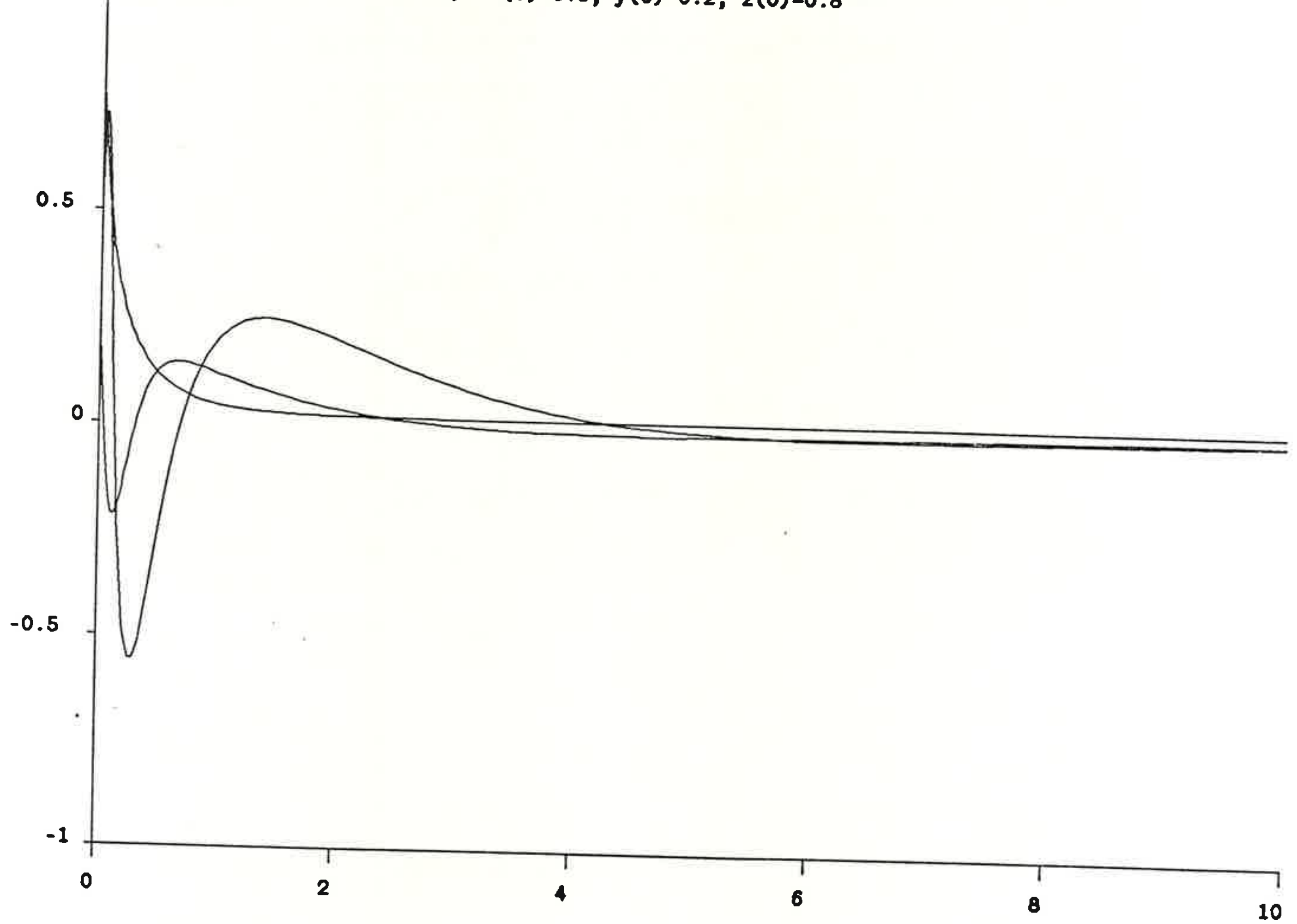
forts 4.7

antingen (i) $R = P \Rightarrow \dim R(0) < n$

eller (ii) $R \supsetneq P \Rightarrow R(0) \subset \{\xi_1, \dots, \xi_n : \xi_n \geq 0\}$ något val av koord.

87.02.16 - 01:36:49 nr: 2
hcopy

States x, y and z in (4.9c). x(0)=0.5, y(0)=0.2, z(0)=0.8



$Q^{\perp}$ skall vara invariant under f och g.

$$L_f c_j = (f_1 \ldots f_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial c_{j1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial c_{jn}}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial c_{j1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial c_{jn}}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{=0} + c_j \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{A} = c_j A$$

$$L_f c_j A = \ldots = c_j A^2$$

$$L_f c_j A^r = \ldots = c_j A^{r+1}$$

$$L_{g_i} c_j = 0$$

$$\Rightarrow Q = \ker\{C, CA, \ldots CA^n, \ldots\} = [\text{Cayley-Hamilton}]$$

$$= \ker\{C, CA, \ldots CA^{n-1}\} = \text{nollrummet till}$$

matrisen $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$

Vi ser att $b_i$ inte påverkar Q oberoende av värdet på $u_i$. Alltså är observerbarhet utan insignaler ekvivalent med observerbarhet med godtyckliga insignaler

5.3

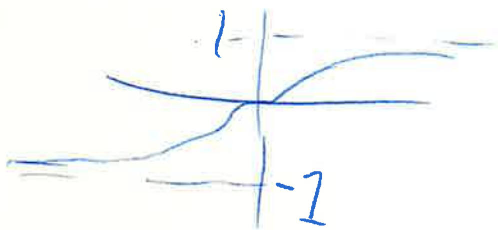
Tag först

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad n \geq 2$$
$$\tilde{Y} = Cx$$

med $(A, C)$ obsbart. Sätt sen

$$Y = \varphi(\tilde{Y})$$

$$\varphi(s) = \operatorname{sign}(s)\, e^{-\frac{1}{s}}$$




$\varphi : R \to (-1, 1)$ injektion, $C^\infty$

Därför globalt obsbart.
Klart att med $x(0) \in \ker C$
så är

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j Y(t) = 0 \qquad j = 0, 1, \ldots$$

5.4

A second Lie algebra associated with a control problem arises in connection with questions of observability (or indistinguishability, etc.). Consider the control problem

$$\dot{x} = f(x) + \sum_i u_i g_i(x)$$

where x takes on values in a differentiable manifold X and suppose we observe $y = h(x(t))$ where y takes values in a differentiable manifold Y and h is a mapping from X into Y. We want to deduce information about x from the observation of y. Assuming enough smoothness we can differentiate y. If, for example, $u(\cdot) = 0$, then

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i = h_1(x) \\ \ddot{y} &= \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Sigma \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i\right) f_j = \sum_j^n \frac{\partial h_1}{\partial x_j} f_j = h_2(x) \end{aligned} \qquad (7)$$

etc. We may think of this in the following way. The vector $(h, h_1, h_2, \ldots, h_n)$ maps X into $T^{n-1}Y$, the (n-1)st jet bundle over Y.

Are two or more initial states in the manifold X compatible with these observations? If

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \neq 0 ,$$

then in view of the inverse function theorem we can assert that in some neighborhood of the true initial state there are no other points which give rise to the same response. However that does not preclude the possibility that there are some other points some distance away in the manifold X which give rise to exactly the same y's.

36

We want to now code the information about observability in a different way, one that is compatible with the way we will be looking at the conditional density equation. The vector field associated with the free motion is $F = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. The formal adjoint of this linear operator is the operator $F^* = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f_i$, not a differential operator. $F^*$ can be thought of as operating on the space $C^\infty(X)$ of all infinitely differentiable functions defined on the manifold $X$.

A function $h(.) \in C^\infty(X)$ also defines a linear operator on $C^\infty(X)$, namely "multiplication by $h(.)$". This maps $\phi \in C^\infty(X)$ to $h\phi \in C^\infty(X)$.

Thus we can form the Lie algebra of operators generated by the two operators $-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f_i$ and $h(\cdot)$. We propose to call this the little observability algebra. This algebra contains the commutator $[h(\cdot), -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f_i] = -\sum_i f_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = -h_1$. It also contains $h_2, h_3, \ldots$ A sufficient condition for local observability around the free motion is that the little observability algebra contains $n$ functions whose Jacobian is nonsingular.

5.5 $\dot{x} = N_0 x + u N_1 x$ har enl. sid 81 Isidori

$$\Omega_0^\perp = \bigcap_{k=0}^{n-1} \bigwedge_{j_1 \ldots j_k = 0}^{1} \ker(C N_{j_1} \ldots N_{j_k}) = Q$$

$$\begin{pmatrix} C \\ CN_1 \\ CN_1N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

detta visar att $Q = 0$ med $u(t)$ godt.

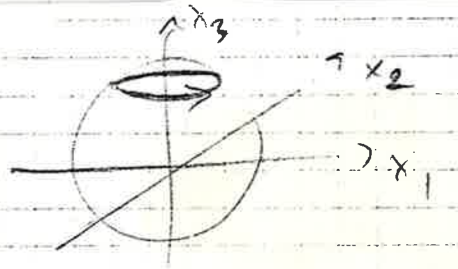
Med $u(t) \equiv 0$ fås

$$\begin{pmatrix} C \\ CN_0 \\ CN_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dvs $Q = \{(x_1, x_2, 0) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

Systemet är observerbart med insignal ej observerbart utan.

Tolkning i figur: Man kan bara se $x_3$ i utsignalen. Eftersom $N_0$ "snurrar runt $x_3$ axeln" finns ingen möjlighet att skilja på punkter på cirkeln $x_3 = \text{konst}$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$




Genom att med $u \neq 0$ "snurra kring $x_2$ axeln" kan man avgöra var på cirkeln man är.



**5.6**

$$\dot{x} = f(x) + u g(x) \qquad u = \begin{cases} u_0 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$$y = h(x)$$

$$\dot{y} = (L_f + u_0 L_g) h = L_f h + u_0 L_g h$$

$\boxed{\text{evak. i } x = x_0,\ t = 0+}$

$L_f h$ är ober av $u_0$ så den bryr vi oss naturligtvis ej om. Relativ grad 1 $\Leftrightarrow$ märker steget i $\dot{y}$ $\Leftrightarrow$ $L_g h \neq 0$

Antag ej, dvs $L_g h = 0$. Då:

$$\ddot{y} = (L_f + u_0 L_g) \underbrace{L_f h}_{\dot{y}} = L_f L_f h + u_0 L_g L_f h$$

Som innan är vi inte intresserade av $L_f L_f h$.

Relativ grad 2 $\Leftrightarrow$ $L_g L_f h \neq 0$.

O.s.v. Alltså:

Relativ grad $r$ $\Leftrightarrow$

$$L_g L_f^j h = 0 \qquad j = 0, 1, \ldots, r-$$
$$L_g L_f^{r-1} h \neq 0$$

I det linjära fallet blir villkoret

$$c A^j b = 0 \qquad j = 0, \ldots, r-2$$
$$c A^{r-1} b \neq 0$$

# Problemset 6

(38)

(6.1) $\frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v^2/c^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\right)\dot v = \frac{m_0 \dot v}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = (f =) u$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}}_{f} + \underbrace{\frac{1}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g} u \\ \lambda(x,v) = x \end{cases}$$

$\phi_t^f(x,v) = (x+vt, v)$

$Q_t(x,v) = x+vt \qquad g_1 \circ \phi_t^f(x) = \frac{1}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\frac{\partial}{\partial v}$

$P_t'(x,v) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}_{= a \text{ (def.)}}$

$W_1(t,\tau_1) = L_{a(-\tau_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v})}(x+vt) = a(t-\tau_1)$

$W_2(t,\tau_2,\tau_1) = L_{a(-\tau_2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v})}\, a(t-\tau_1) = a\frac{1}{m_0}\frac{3}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\frac{2}{c^2}v = \underline{\frac{3v}{m_0^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2(t-\tau_1)}$

$\vdots$

$$x(t) = W_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{\tau_k}\cdots\int_0^{\tau_2} W_{1_k \ldots 1_1}(t,\tau_k,\ldots,\tau_1)\, u(\tau_k)\ldots u(\tau_1)\, d\tau$$

$$= x_0 + v_0 t + \overbrace{\frac{1}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}^{\text{relativistic mass}^{-1}}\int_0^t (t-\tau_1)\, u(\tau_1)\, d\tau_1 +$$

$$+ \frac{3v}{m_0^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\int_0^t\int_0^{\tau_2}(t-\tau_1)\, u(\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 \; +$$

$$+ O(t^4)$$

Klassisch: $m\ddot x = f \qquad x(t) = x(0) + \dot x(0)t + \frac{1}{m}\int_0^t\int_0^\sigma f(s)\,ds\,d\sigma$

$= x(0) + \dot x(0)t + \frac{1}{m}\int_0^t (t-\sigma) f(\sigma)\, d\sigma$

(6.2) Fliess serier kan i allmänhet ej med Picard-iteration [illegible] gälla men [illegible] till detta för bilineära system $f = Ax \quad g_i = N_i x$

Picard iteration ger:

$$x_0(t) \equiv x_0$$

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t \left( f(x_k(\tau)) + g(x_k(\tau))u(\tau) \right) d\tau$$

$$= x_0 + \int_0^t \left(A + \sum N_i u_i(\tau)\right) x_k(\tau)\, d\tau = \ldots =$$

$$= x_0 + \int \ldots \int \left(A + \sum N_{i_1} u_{i_1}(\tau_1)\right)\left(A + \sum N_{i_2} u_{i_2}(\tau_2)\right) \cdots \left(A + \sum N_{i_k} u_{i_k}(\tau_k)\right) d\tau_1 \ldots d\tau_k\, x_0$$

$$= c_0 + \sum_{j=0}^{k} \sum_{i_0 \ldots i_j = 0}^{m} c(i_j \ldots i_0) \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^{\tau_2} u_{i_1}(\tau_1) \ldots u_{i_k}(\tau_k)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k}_{E_{i_k \ldots i_0}(t)}$$

där identifiering mellan de två sista leden ger

$$c_0 = x_0$$

$$c(i_j \ldots i_0) = N_{i_j} \ldots N_{i_0} x_0 \qquad (N_0 = A)$$

detta överensstämmer med sid 91 Isidori!

(6.3) $y(t) = w_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{m} \int_0^t \int_0^{\tau_k} \ldots \int_0^{\tau_2} w_{i_k \ldots i_1}(t, \tau_k, \ldots, \tau_1) u_{i_k}(\tau_k) \ldots$

$u_{i_1}(\tau_1)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k$

Fördröj alla insignaler en tid $T$ $\quad u_i'(t) = \begin{cases} u_i(t-T) \\ 0 \end{cases}$

$$y'(t+T) = w_0(t+T) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1 \cdots i_k = 1}^{m} \int_0^{t+T} \int_0^{\tau_k} \cdots \int_0^{\tau_2} w_{i_k \cdots i_1}(t+T, \tau_k, \ldots, \tau_1) \cdot$$

$$\cdot\, u_{i_k}(\tau_k) \cdots u_{i_1}(\tau_1)\, d\tau_1 \cdots d\tau_k = w_0(t+T) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1 \cdots i_k = 1}^{m} \int_T^{t+T} \int_T^{\tau_k} \cdots$$

$$\cdots \int_T^{\tau_2} w_{i_k \cdots i_1}(t+T, \tau_k, \ldots, \tau_1)\, u_{i_k}(\tau_k - T) \cdots u_{i_1}(\tau_1 - T)\, d\tau_1 \cdots d\tau_k =$$

$$= \left[\tau_i' = \tau_i - T\right] = w_0(t+T) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1 \cdots i_k = 1}^{m} \int_0^{t} \int_0^{\tau_k - T} \cdots \int_0^{\tau_2 - T}$$

$$\cdot\, w_{i_k \cdots i_1}(t+T, \tau_k'+T, \ldots, \tau_1'+T)\, u_{i_k}(\tau_k') \cdots u_{i_1}(\tau_1')\, d\tau_1' \cdots d\tau_k'$$

Vi vill att $y(t) = y'(t+T)$ vilket innebär

$$\begin{cases} w_0(t) = w_0(t+T) & \forall T \\ w_{i_k \cdots i_1}(t+T, \tau_k+T, \ldots, \tau_1+T) = w_{i_k \cdots i_1}(t, \tau_k, \ldots, \tau_1) \end{cases}$$

2.12.a $\quad w_0(t) = h_j(x^0)$

2.12.b $\quad w_i(t, \tau_1) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{g_i} L_f^n h_j(x^0) \dfrac{(t-\tau_1)^n}{n!}$

2.12.c $\quad w_{i_2 i_1}(t, \tau_1, \tau_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} L_{g_{i_1}} L_f^{n_1} L_{g_{i_2}} L_f^{n_2} h_j(x^0) \dfrac{(t-\tau_2)^{n_2} (\tau_2-\tau_1)^{n_1}}{n_2!\, n_1!}$

Fliess: Tidsinvariant om varje koefficient hörande till icke-tidsinvariant integral $= 0$. De enda integraler som ej är tidsinvarianta i-a-samband är uppenbarligen $\int d\xi_{i_k} \cdots d\xi_{i_0}$ där strängen $(i_k, \ldots, i_0)$ slutar med nollor. Dvs $c(i_k, \ldots, i_0) = 0$ då $i_0 = 0$

6.4 VILLKORET ATT $\max |u_i(t)| < 1$ KAN BYTAS UT MOT $\max |u_i(\tau)| < C$ (GODTYCKLIG KONSTANT $> 0$) DET ENDA SOM ÄNDRAS ÄR ATT

$$\left| \sum^{n} c(i_n \ldots i_0) \int_0^t d\xi_{i_n} \ldots d\xi_{i_0} \right| \leq K\left(M(m+1)t \cdot C\right)^{k+1}$$

ISTÄLLET. VÄLJ $T = \frac{\varepsilon}{C}$ ISTÄLLET FÖR $T = \varepsilon$ $(0 \leq t \leq T)$.

---

6.5 $g(s) = \frac{1}{s} e^{-s} \Rightarrow y(t) = y(1) + \int_0^{t-1} u(\tau)\, d\tau \quad , t > 1$

För $t > 1$ kan detta skrivas som en <u>Volterra serie</u> där $m = 1$ och

$$w_0(t) = y(1)$$

$$w_1(t,\tau) = \begin{cases} 1 & \text{då } \tau < t-1 \\ 0 & \text{" } t-1 \leq \tau \leq t \end{cases}$$

$$w_{11} = w_{111} = \ldots = 0$$

Däremot kan vi inte ge en Fliess-utveckling, eftersom i så fall insignalen måste integreras ända fram till tiden $t$.

6.8 Symbolisk beräkning av Volterrakärnorna kräver att man kan beräkna flödet svarande mot drifttermen. Detta är det enda kritiska momentet. Går t ex alltid för bilinjära system upp till och med ordnng 4. Numerisk beräkning kräver derivator, vilket är vanskligt.

Notera att beräkningarna kan organiseras så att man hela tiden fortsätter att räkna på sina gamla resultat.

6.9 Saknas

$c(i_k \dots i_1 i_0) = L_{g_{i_0}} \dots L_{g_{i_k}} h_j$

6.6

$$\begin{cases} h_j = c_j x \\ \nabla h_j = c_j \\ g_{i_k}(x) = \begin{cases} b_{i_k} & i \neq 0 \\ Ax & i = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$L_{g_{i_k}} h_j = \begin{cases} c_j b_{i_k} & i_k \neq 0 \\ c_j A x^0 & i_k = 0 \end{cases}$$

$$L_{g_{i_{k-1}}} L_{g_{i_k}} h_j = \begin{cases} 0 & i_k \neq 0,\ i_{k-1} \text{ godtyckl.} \\ & (\text{ty } \nabla(c_j b_{i_k}) = 0 \text{ ty ober av } x \\ (c_j A) A x^0 & i_k = 0,\ i_{k-1} = 0 \\ c_j A b_{i_{k-1}} & i_k = 0,\ i_{k-1} \neq 0 \end{cases}$$

$$L_{g_{i_1}} \dots L_{g_{i_k}} h_j = \begin{cases} c_j A^k x^0 & i_k = \dots = i_1 = 0 \\ c_j A^{k-1} b_{i_1} & i_k = \dots = i_2 = 0 \quad i_1 \neq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$L_{g_{i_0}} \dots L_{g_{i_k}} h_j = \begin{cases} c_j A^{k+1} x^0 & i_k = \dots = i_0 = 0 \\ c_j A^k b_{i_0} & i_k = \dots = i_1 = 0 \quad i_0 \neq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

#

43

6.7 $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}}_{f} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{g} u$

$y = \underbrace{x_2}_{h}$

<u>Volterra</u>

$L_f h = (0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = x_1^2$

$L_f^2 h = (2x_1 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = 0$

$L_g h = (0 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$L_g L_f h = (2x_1 \;\; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x_1$

$L_f L_g L_f h = (2 \;\; 0) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = 0$

$L_g^2 L_f h = (2 \;\; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$

$L_g^3 L_f h = 0$

$L_f L_g^2 L_f h = 0$

$w_0(t) = x_2^0 + x_1^{0\,2} t$

$w_1(t) = 2x_1^0 \, (t - \tau_1)$

$w_{11}(t) = 2 \, (t - \tau_2)$

$w_{111}(t) = 0$

$\vdots \quad = 0$

$$y(t) = x_2^0 + x_1^{0\,2} t + \int_0^t 2x_1^0 (t-\tau_1)\, u(\tau_1)\, d\tau_1 + \int_0^t \int_0^{\tau_2} 2(t-\tau_2)\, u(\tau_1)\, u(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2$$

Fliess

$c(\emptyset) = x_2^0$

$c(0) = L_f h(x^0) = x_1^{0\,2}$

$c(01) = L_g L_f h(x^0) = 2x_1$

$c(001) = L_g^2 L_f h(x^0) = 2$

alla andra $c$ är lika med $0$

$$y(t) = c(\emptyset) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_k = 0}^{1} c(i_k \dots i_0) \int_0^t d\xi_{i_k} \dots d\xi_{i_0} =$$

$$= x_2^0 + x_1^{0\,2} \int_0^t d\xi_0 + 2x_1^0 \int_0^t d\xi_0 d\xi_1 + 2 \int_0^t d\xi_0 d\xi_0 d\xi_1 =$$

$$= x_2^0 + x_1^{0\,2} t + 2x_1^0 \int_0^t \int_0^\tau u(\theta)\, d\theta\, d\tau + 2 \int_0^t \int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} u(\theta)\, d\theta\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$u(\tau_1)$

$10/10$

6.10

$$\dot{x} = Ax + uBx$$

$$z = e^{-At}x$$

$$\dot{z} = -Ae^{-At}x + e^{-At}\dot{x} = \cancel{-Ae^{-At}x} + \cancel{e^{-At}Ax} +$$

$$+\, e^{-At}uBx = e^{-At}uBx$$

$$z(t) = \phi(t,0)\, z(0)$$

$$\phi(t,0) = \exp\left(\int_0^t e^{-A\tau}Bu\, d\tau\right)$$

$$x(t) = e^{At}z(t) =$$

$$= e^{At}\left(I + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{-A\tau_1}Bu(\tau_1)\int_0^{\tau_1} e^{-A\tau_2}Bu(\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1 + \right.$$

$$\left. \cdots \right) x(0) =$$

$$= \underbrace{e^{At}}_{w_0(t)} x(0) + \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}B}_{w_1(t,\tau)} u(\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^{\tau_1} \underbrace{e^{A(t-\tau_1)}Bu(\tau_1)e^{A(t-\tau_2)}}_{w_{11}(t,\tau_1,\tau_2)} Bu(\tau_2)\,d\tau_2\,d\tau_1 + \cdots$$

6.11 T. ex. $\dot{x} = u + vx^3 = ug_1(x) + vg_2(x)$

$\dim LA\{g_1, g_2\} = \infty$

6.11 TAG T.EX.

alt

$$\begin{cases} \dot{x} = u x^2 \\ y = x \end{cases}$$

och $x(0) > 0$

OM $u = u_0 \neq 0$ KONSTANT SÅ $y(t) \to \infty$ DÅ $t \to t_0$ FÖR NGT $t_0 < \infty$.

DETTA I-U-BETEENDE KAN OMÖJLIGEN ERHÅLLAS FRÅN NÅGOT BILINJÄRT SYSTEM.

6.12 TAG T.EX.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad (*)$$ antag minimalt

BILINJÄRT REALISERAD (SOM I GAMMAL ÖVN.):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (y = Cx)$$

ALLA BILINJÄRA REALISERINGAR $\overset{\text{AV } (*)}{}$ MÅSTE ALLTSÅ INNEHÅLLA MINST ETT ONÖDIGT TILLSTÅND.

6.13 **Sats** Låt

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i\, g_i(x) = \sum_{i=0}^{m} u_i\, g_i(x) \qquad x(0) = x^0$$
$$y_j = h_j(x)$$

ha F-serien

$$y_j(t) = c(\phi) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0,\dots,i_k=0}^{m} c(i_k,\dots,i_0) \cdot \int_0^t d\xi_{i_k} \cdots d\xi_{i_0}$$

konvergent då $0 \le t \le T$ om $|u_i| \le 1$.

För alla $T_0 < T$ och $\varepsilon > 0$ finns då bilinjärt system

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \sum_{1}^{m} u_i B_i \tilde{x} = \sum_{0}^{m} u_i B_i \tilde{x} \qquad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^0$$
$$\tilde{y}_j = c_j \tilde{x}$$

så

$$|y_j(t) - \tilde{y}_j(t)| < \varepsilon \qquad 0 \le t \le T_0$$

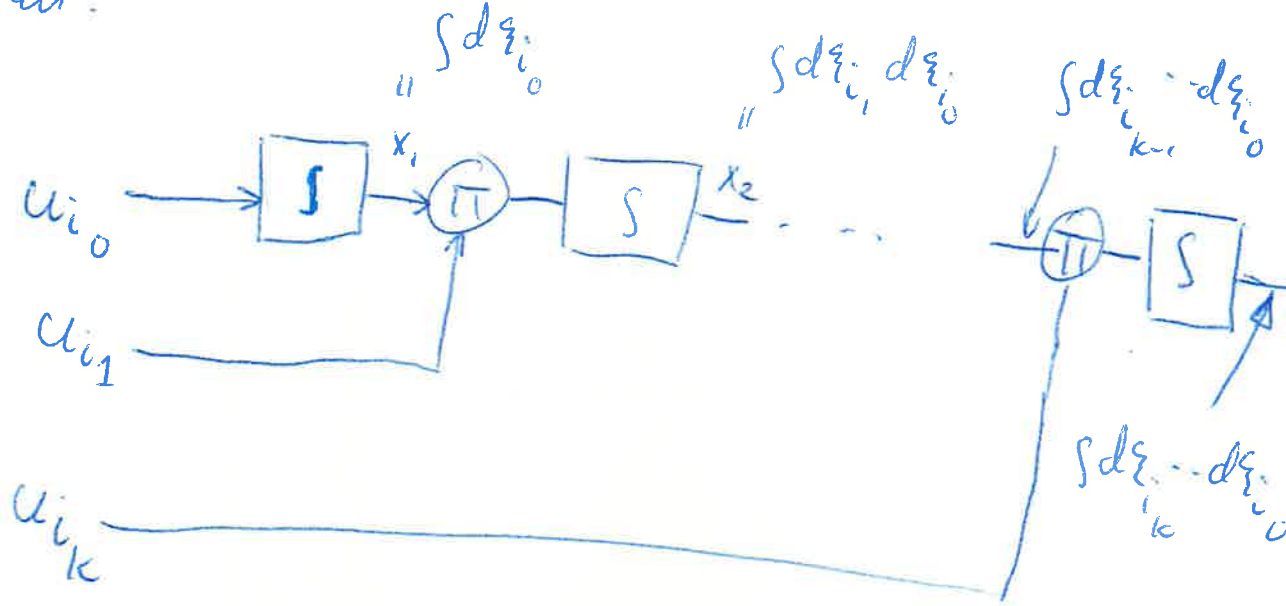
för alla $u_i(\cdot)$ satisfierande $|u_i(t)| \le 1 \quad 0 \le t \le T_0$

---

B Av Lemma III.1.8 och (bevisat för) L III.1.3 följer att $y_j(t)$ kan approximeras likformigt (i u) med trunkerade F-serier. Satsen följer nu av nästa lemma

<u>Lemma</u> $\int_0^t d\xi_{i_k} \cdots d\xi_{i_0}$ kan realiseras bilinjärt.

<u>B</u>



7.1 Steps:

(i): $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{f}_1\\ \bar{f}_2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

(ii): $\rightarrow \begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \bar{f}_2\end{pmatrix} + \bar{u}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

(iii): $\rightarrow \begin{pmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

---

Step (i): $\bar{x} = \gamma(x)$

$$\dot{\bar{x}} = \gamma_* f \circ \gamma^{-1}(\bar{x}) + u\,\gamma_* g \circ \gamma^{-1}(\bar{x})$$

Finding $\gamma$ such that $\gamma_* g \circ \gamma^{-1} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ is exactly the problem of finding coordinates $\gamma = \gamma(x)$ such that $g$ takes the form $\frac{\partial}{\partial \gamma_1}$. By Frobenius, (since $sp\{g\}$ trivially is involutive) (if non-zero), or since $\dot{x} = g(x)$ has a solution, there is such a $\gamma$. Explicitly, let $\gamma(t)$ satisfy $\dot{\gamma} = g(\gamma)$, $\gamma(0) = \gamma^0$. Then, for a point $p$ on the trajectory $\{\gamma(t)\ t \in \mathbb{R}\}$ define $\gamma_1(p)$ to be the $t$ such that $\gamma(t) = p$ (makes sense at least in a neighborhood)

Now take $\gamma_2$ similarly, corresponding e.g. to the differential equation $\dot{x} = \begin{pmatrix}-g_2\\ g_1\end{pmatrix}$

Step (ii) $\bar{u} = \bar{f}_1 + u$

Step (iii) $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{u} = \dfrac{v - \partial \bar{f}_2 / \partial \bar{x}_2 \cdot \bar{f}_2}{\partial \bar{f}_2 / \partial \bar{x}_1}$

A simple computation shows that

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Now note</u>: (i) works if and only if $g(x) \neq 0$ $x \in U$. If the construction for $\gamma_i$ does not work in whole of, then there is a periodic orbit to $\dot{x} = g(x)$ within $U$. By Poincare-Bendixon theory, $g$ has a zero in $U$. Possible to solve explicitly if we can solve $\dot{x} = g(x)$ and invert the solution explicitly.

(ii) trivial

(iii) The formula for $v$ crashes iff $\partial \bar{f}_2 / \partial \bar{x}_1 = 0$ for some $x \in U$. It is easy to see ~~(to~~ that this is equivalent to $\det\left( g(x), [f, g](x) \right) = 0$ since the property is coordinate-independent. But if $\partial \bar{f}_2 / \partial \bar{x}_1 \neq 0$ for all $x \in U$, this means that $\bar{f}_2$ is either increasing or decreasing as a fn of $x_1$, for all $x_2$. Therefore, u.t.c. step (iii) is a diffeo.

7.2 $\det(g(x), [f,g](x)) = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -x_2 \end{bmatrix} = -x_2$

ej globalt styrbart, ej globalt lin.bart

~~För~~ En approximation

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) + u\tilde{g}(x) \qquad (*)$$

måste gälla att också kvantiteten

$\det\left[g(x), [f,g](x)\right] = -x_2$

approximeras. Därför måste speciellt

$\det\left[\tilde{g}(x), [f,g](x)\right)$ anta både positiva

och negativa värden $\Rightarrow$ har nollställe

$\Rightarrow$ $(*)$ ej globalt lin.bart.

---

7.6. <u>Sats</u> $\dot{x} = f(x,u)$ linjäriserbart

omm $f(x,u) = \tilde{f}(x) + \varphi(x,u)\tilde{g}(x)$

där $u \mapsto \varphi(x,u)$ bij. för alla $x$ och

$\dot{x} = \tilde{f}(x) + u\tilde{g}(x)$

linjäriserbart

7.3 $\dot{x} = f(x) + \sum u_i g_i(x)$

$y_j = h_j(x)$

Exakt linjärisering innebär att utnyttja följande operationer

(i) $u_i = \alpha_i(x) + v_i$ återkoppling

(ii) $u_i = \beta_{ij}(x)\, v_j$ byte av koordinater i insignalrummet

(iii) $z = \varphi(x)$ byte av koordinater i tillståndsrummet

så att vi får ett nytt system som är linjärt.

$\dot{z} = Az + \sum b_i v_i$

$y_j = c_j x$

Av operationerna (i)-(iii) kan (i) betraktas som gain-scheduling. $\alpha_i(x)$ är en regulator var coefficienter beror på (ett olinjärt sätt) på tillståndet

7.5

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$cb \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} b \cap \ker c = \{0\} \overset{\text{SISO}}{\Rightarrow} \operatorname{Im} b + \ker c = \mathbb{R}^n$$

ALGORITM:

$V^0 = \ker c$

$V^1 = \ker c \cap A^{-1}(\operatorname{Im} b + \ker c) = \ker c$

$\therefore\ V^*_{\ker c} = \ker c$

7.4 Lemma IV.2.4

$$\Omega_0 = K^\perp$$

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + L_f(G^\perp \cap \Omega_{k-1}) + \underbrace{\sum L_{g_i}(G^\perp \cap \Omega_{k-1}}_{}$$

försvinner i det linjära fallet fy ~~fast~~ $g_i$ konst $G^\perp$, $\Omega_{k-1}$ linjära

Linjärt:

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + ((\operatorname{Im} B)^\perp \cap \Omega_{k-1})A$$ (tolka kodisk som spännt upp av radvektorer)

$$\Omega_k^\perp = \Omega_{k-1}^\perp \cap [(\operatorname{Im} B + \Omega_{k-1}^\perp)^\perp A]^\perp \overset{(*)}{=}$$

$$= \Omega_{k-1}^\perp \cap A^{-1}(\operatorname{Im} B + \Omega_{k-1}^\perp)$$

Alltså: $\Omega_k^\perp = V^k$

Isidoris alg dual till den vanliga linjära

(*): Lemma $(V^\perp A)^\perp = A^{-1}V$

B: $x \in VL \iff V^\perp A x = 0 \iff Ax \in V$

$\iff x \in A^{-1}V$

# Fickparkering med hjälp av Lie-klamrar

Bo Bernardsson

## 1. Fem tolkningar av vektorfält.

Antag att $\Omega$ är öppen i $R^n$. Låt $F(\Omega)$ vara mängden av oändligt deriverbara funktioner på $\Omega$. Ett vektorfält kan uppfattas som en funktion $X : \Omega \to R^n$ , det hänger samman med

a) ett system av diff. ekv.

$$\frac{dx}{dt} = X(x)$$

b) ett flöde $\Phi_t : \Omega \to \Omega$ , $t \in R$ där $y(t) = \Phi_t(x)$ är lösningen till

$$\frac{dy}{dt} = X(y) \qquad y(0) = x$$

c) Riktningsderivatan

$$X\, f(x) = \frac{d}{dt} f(\Phi_t(x))|_{t=0}$$

d) En derivation $X$ av algebran $F(\Omega)$. Obs oberoende av koordinat-system, finns i Isidori.

e) En partiell diff operator $X = \sum X_j \frac{\partial}{\partial x^j}$

$(a) \to (b)$ : satsen om lösning av diff.ekv.

$(b) \to (c)$ : direkt

$(c) \to (d)$ : direkt

$(d) \to (e)$ : proposition

$(e) \to (a)$ : direkt

## 2. Trotters produktformel

Följande sats ger snygg geometrisk tolkning av Lie-klammern mellan två vektorfält:

$$\Phi_t^{[X,Y]} = \lim_{n\to\infty} (\Phi^Y_{-\sqrt{\frac{t}{n}}} \Phi^X_{-\sqrt{\frac{t}{n}}} \Phi^Y_{\sqrt{\frac{t}{n}}} \Phi^X_{\sqrt{\frac{t}{n}}})^n$$

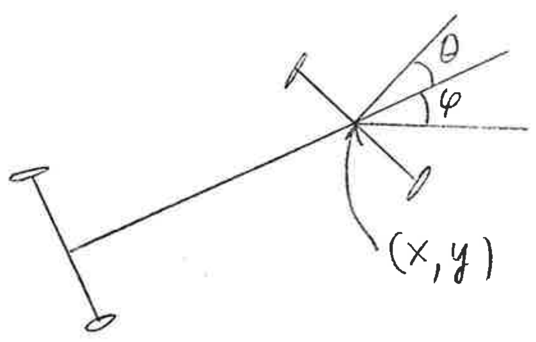
55

vi har sett den i formen

$$\Phi^Y_{-\varepsilon}\Phi^X_{-\varepsilon}\Phi^Y_{\varepsilon}\Phi^X_{\varepsilon} = I + \varepsilon^2[X,Y] + o(\varepsilon^2)$$

## 3. En bilmodell

En bils tillstånd kan beskrivas med fyra koordinater $(x, y, \varphi, \theta) \in R \times R \times S^1 \times [-\theta_{max}, \theta_{max}] = M$.




$\varphi$- bilens riktning.

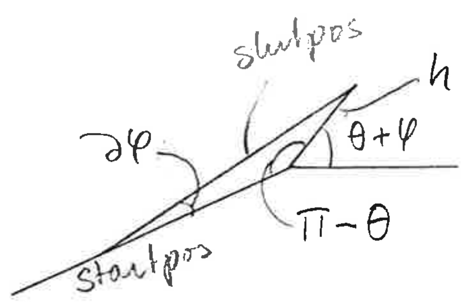
$\theta$- hjulens riktning i förhållande till bilen.

Bilen kan röra sig i $M$ längs två vektorfält

1) Styr $= \frac{\partial}{\partial\theta}$

2) Kör: För att ta reda på uttrycket använder jag b) i förra avsnittet.

$$\text{Kör} = \cos(\theta+\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta+\varphi)\frac{\partial}{\partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \varphi}$$



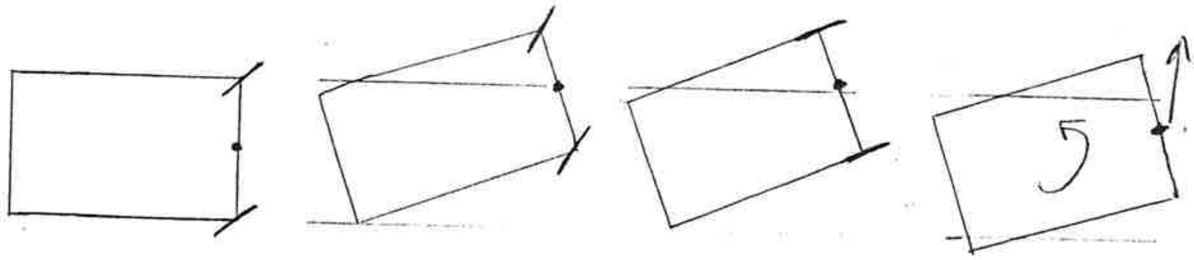

$\partial x = h\cos(\theta+\varphi)$

$\partial y = h\sin(\theta+\varphi)$

$\frac{\sin\partial\varphi}{h} = \frac{\sin(\pi-\theta)}{1} \Rightarrow \partial\varphi \approx h\sin\theta$

Nu räknar man enkelt ut

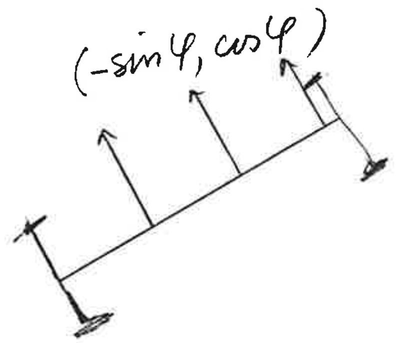
$$[\text{Styr, Kör}] = [\frac{\partial}{\partial\theta}, \cos(\theta+\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta+\varphi)\frac{\partial}{\partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}]$$
$$= -\sin(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi+\theta)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi} = \text{Knixa}$$



Sätt

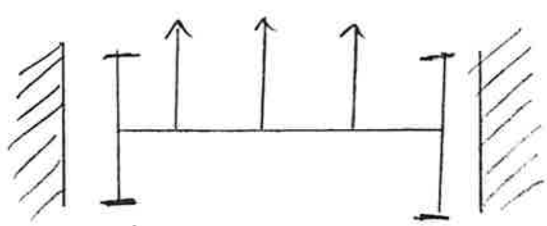
$$\text{Glid} = -\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\text{Rotera} = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$\varphi_t^{Glid} = (x + t(-\sin(\varphi)), y + t\cos(\varphi), \varphi, \theta)$$

En enkel räkning ger [Knixa,Kör] = Glid.




Detta visar följande :

THEOREM 1 **Inversa fickparkeringssatsen.** Man kan komma ut ur en lucka om den är större än bilen. Algoritmen kan beskrivas : Knixa, Kör, -Knixa (" This requires a cool head "), -Kör (upprepas).



SIAM J. CONTR. & OPTIM. sept. -83

Artikel av Hector J. Sussman

Referat av Anders Rantzer.

(A) $\frac{dx}{dt} = f_0(x) + u f_1(x)$, $|u(t)| \leq A$, $x \in M$, $f_0, f_1 \in C^\infty$

$R(x_0, t) = \{$pkter som kan nås på tid $\leq t\}$

<u>Definition</u> Small time local controllable (STLC) from $x_0$

$\forall t > 0$: $R(x_0, t)$ innehåller öppen omgivn. till $x_0$.

Hermes Local controllability condition (HLCC) at $x_0$:

(HLCC1) $x_0$ är en regulär jämviktspunkt d.v.s

$\exists \bar{u} \in \mathbb{R}$: $|\bar{u}| < A$, $f_0(x_0) + \bar{u} f_1(x_0) = 0$

(HLCC2) $\dim \mathrm{Lie}(f_0, f_1)(x_0) = \dim M$

(HLCC3) $\mathcal{S}^k(f_0 + \bar{u} f_1, f_1)(x_0) = \mathcal{S}^{k+1}(f_0 + \bar{u} f_1, f_1)x_0$,

för udda $k$, där

$\mathcal{S}^k(f_0, f_1) = \mathrm{span}\{$monom i $\mathrm{Lie}(f_0, f_1)$ med högst $k$ st. $f_1\}$

$$\left.\begin{cases} \text{HLCC1} \\ \text{HLCC2} \\ \text{HLCC3} \end{cases}\right. \text{ i } x_0 \;\Rightarrow\; \text{STLC i } x_0 \;\overset{f_0,\,f_1 \text{ analytiska}}{\Rightarrow}\; \begin{cases} \text{HLCC1} \\ \text{HLCC2} \\ [f_1,[f_0,f_1]](x_0) \in \mathcal{P}^1(f_0+\bar{u}f_1,\, f_1) \end{cases}$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{cases} \text{HLCC1} \\ \dim \mathcal{P}^1(f_0+\bar{u}f_1,\, f_1)(x_0) = \dim M \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \text{Linjäriseringen i } (x_0,u) \text{ är styrbar}$$

Beteckningar:

Betrakta insignaler $u : [0, T(u)] \to \mathbb{R}^m$.

Betrakta $f_0$ och $f_1$ som differentialoperatorer.

Inför den trunkerade Fliessutvecklingsoperatorn

$$\mathrm{Ser}_N(u)(f) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i_1 \dots i_k = 0}^{1} \Big[ f_{i_1} \cdots f_{i_k} \cdot \int_0^{T(u)} \int_0^{\tau_k} \cdots \int_0^{\tau_2} u_{i_k}(\tau_k) \dots u_{i_1}(\tau_1)\, d\tau_1 \dots d\tau_k \Big]$$

Inför $\pi(f, u, x_0)$ som beteckning för sluttillståndet vid tiden $T(u)$ då begynnelsetillståndet är $x_0$ och insignalen är $u$.

(I) För "utsignaler" $\phi : M \to \mathbb{R}$ gäller

$$\phi(\pi(f, u, x_0)) = \mathrm{Ser}_N(u)(f)(\phi)(x_0) + \mathcal{O}(T(u)^{N+1})$$

(Konvergens hos Fliessutvecklingen)

(II) Det finns en linjärkombination, $g$, av "Lie-monom" med jämnt antal $f_1$ i sig, sådant att för varje $g_\eta$ i en omgivning av $g$, finns styckvis konstant insignal $u_\eta$ med

$$\mathrm{Ser}_N(u_\eta)(f) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} g_\eta^{\,k}$$

där högerledet tolkas så att varje term med fler än N faktorer ignoreras.

Ex.
$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = x^3 + y^2 \end{cases} \qquad |u| \le 1 \,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z)(0) = 0 \qquad (1)$$

Systemet satisfierar inte HLCC3 ty

$$[f_1, [f_0, [f_0, [f_0, f_1]]]](0) = -2\frac{\partial}{\partial z} \notin \mathcal{S}^1(f_0, f_1)(x_0) .$$

Däremot är systemet STLC i $x_0$.

<u>Grov skiss av beviset</u>:

Sätt $N = 4$.

Välj $g$ enligt (II) ~~och~~ sätt för små $\eta$:

$$g_\eta = g + \eta_1 f_1 + \eta_2 [f_1, f_0] + \eta_3 [f_1 [f_1, [f_1, f_0]]]$$

Det visar sig att $T(u_\eta)$ har ett värde $T$ oberoende av $\eta$.

(I) ger

$$\phi(\pi(t, u_\eta, 0)) = \mathrm{Ser}_4(u_\eta)(f)(\phi)(0) + O(T^5)$$

Inför $u_\eta^\delta(t) = u_\eta(\frac{t}{\delta})$ med $T(u_\eta^\delta) = \delta T(u_\eta) = \delta T$.

Då gäller

$$\mathrm{Ser}_4(u_\eta^\delta)(f) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} g_\eta^{\delta\, k}$$

med $g_\eta^\delta = g_0^\delta + \eta_1 \delta f_1 + \eta_2 \delta^2 [f_1, f_0] + \eta_3 \delta^4 [f_1, [f_1, [f_1, f_0]]]$

där även $g_0^\delta$ har uteslutande "jämna" termer (jfr (II))

Om $B$ är ett tillräckligt litet klot kring origo, kan vi för ett godt. $(y_1, y_2, y_3) \in B$, sätta

$\eta(y, \delta) = (y_1 \delta^3, y_2 \delta^2, y_3)$ och $v_{\delta, y} = u^{\delta}_{\eta(y,\delta)}$ så att

$$\emptyset(\pi(f, v_{\delta,y}, 0)) = Ser_4(v_{\delta,y})(f)(\emptyset)(0) + O(\delta^5) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big[g_0^{\delta} + \delta^4\big(y_1 f_1 + y_2[f_1, f_0] + y_3[f_1, [f_1, [f_1, f_0]]]\big)\Big](\emptyset)(0) +$$

$$+ O(\delta^5) =$$

$$= \emptyset(0) + \delta^4\big(y_1 f_1 \emptyset(0) + y_2[f_1, f_0]\emptyset(0) + y_3[f_1, [f_1, [f_1, f_0]]]\emptyset(0)\big) +$$

$$+ O(\delta^5)$$

Genom att låta $\emptyset$ vara koordinatfunktionerna ser vi att

$$\pi(f, v_{\delta,y}, 0) = \delta^4\big(y_1 f_1(0) + y_2[f_1, f_2](0) + y_3[f_1, [f_1, [f_1, f_0]]](0)\big) +$$

$$+ O(\delta^5)$$

där $f_1$ och $f_2$ åter betraktas som funktioner.
Eftersom $\text{span}\{f_1, [f_1, f_2], [f_1, [f_1, [f_1, f_0]]]\} = \mathbb{R}^3$

hade vi varit klara om det inte hade varit för termen $O(\delta^5)$.

Denna term har dock ingen betydelse vilket kan visas m.h.a ett enkelt resonemang om likformig konvergens

Ex. $\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = x^3 + y^2 \end{cases}$ $\quad |u| \leq 1 \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x,y,z)(0) = 0$

$$\underline{f_0} = x\frac{\partial}{\partial y} + (x^3+y^2)\frac{\partial}{\partial z} \qquad f_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[f_1, f_0] = \frac{\partial}{\partial y} + 3x^2\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\underline{[f_1,[f_1,f_0]]} = 6x\frac{\partial}{\partial z} \qquad [f_0,[f_1,f_0]] = -2y\frac{\partial}{\partial z}$$

$$[f_1,[f_1,[f_1,f_0]]] = 6\frac{\partial}{\partial z} \qquad \underline{[f_1,[f_0,[f_1,f_0]]]} = 0$$

$$\underline{[f_0,[f_1,[f_1,f_0]]]} = 0 \qquad [f_0,[f_0,[f_1,f_0]]] = -2x\frac{\partial}{\partial z}$$

$$[f_1,[f_0,[f_0,[f_1,f_0]]]] = -2\frac{\partial}{\partial z}$$