



# LUND UNIVERSITY

## Fasavancerande kompenserig

Leden, Bo

1976

*Document Version:*  
Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*  
Leden, B. (1976). *Fasavancerande kompenserig*. (Technical Reports TFRT-7112). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

*Total number of authors:*  
1

### General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:  
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117  
221 00 Lund  
+46 46-222 00 00

TFRT- 7112

FASAVANCERANDE KOMPENSERING

B. LEDEN

Report 7645(C) September 1976  
Department of Automatic Control  
Lund Institute of Technology

**TILLHÖR REFERENSBIBLIOTEKET**

**UTLANAS EJ**

## FASAVANCERANDE KOMPENSERING

B. Leden

### SAMMANFATTNING

Kompensering erfordras ofta i ett servosystem med höga prestanta för att realisera en önskad frekvenskurva. Direkta syntesmetoder för bestämning av en fasavancerande kompensering presenteras. Speciellt studeras problemet att snabba upp ett givet system då dess stabilitets-egenskaper skall bebehållas. Syntesen utföres i frekvensplanet.

## SYNTES AV FASAVANCERANDE KOMPENSERING

Vi skall behandla en frekvensanalytisk metod för syntes av en fas-  
avancerande kompensering. Denna antages vara given på formen

$$G_k(s) = N \frac{s + b}{s + bN} \quad (1)$$

och införd i serie med det öppna systemets överföringsfunktion  $G_0(s)$ , Fig. 1.

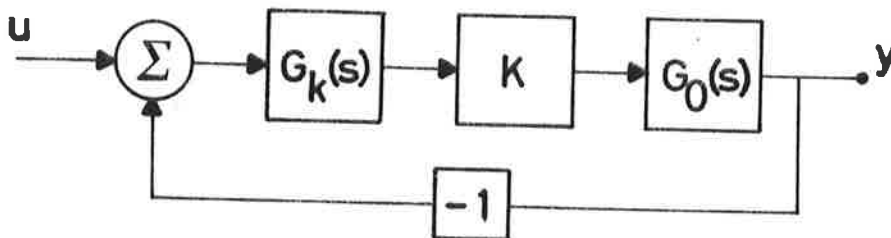


Fig. 1. - Blockschema över seriekompenserat system

Systemspecifikationerna är givna i tidsplanet. Vi antager att systemets stigtid skall minskas med en faktor  $a$  varvid dess stabilitets-  
egenskaper i stort sett skall bibehållas. För en stor klass av system innebär specifikationen i frekvensplanet att det kompenserade systemets skärfrekvens blir

$$\omega_c = a \omega_{c_{okomp}} \quad (2)$$

där  $\omega_{c_{okomp}}$  betecknar det okompenserade systemets skärfrekvens.

Systemets stabilitetsegenskaper antages karakteriserade m.h.a. dess översläng  $M_0$ . Då syntesen utföres i frekvensplanet är det nödvändigt att översätta överslängens  $M_0$  till någon storhet i detta plan. Diskussionen nedan tjänar detta ändamål.

I Nicholsdiagrammet finns kurvskarorna  $|G_0/(1+G_0)| = M$  inritade. Kurvskarorna med  $M > 1$  bildar slutna kurvor. Den punkt på  $M$ -kurvan

som har maximal fasmarginal  $\dagger \phi_m$  är av speciellt intresse. Enligt appendix A gives punkten  $(|G_0|_m, \phi_m)$  av

$$|G_0|_m = M / \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\phi_m = \arcsin(1/M)$$

(3)

där M anger aktuell M-kurva. Vinkeln  $\phi_m$  ligger i intervallet  $[0, \pi/2]$ . Orten för maximal fasmarginal för konstant M samt en frekvenskurva återfinnes i Fig. 2.

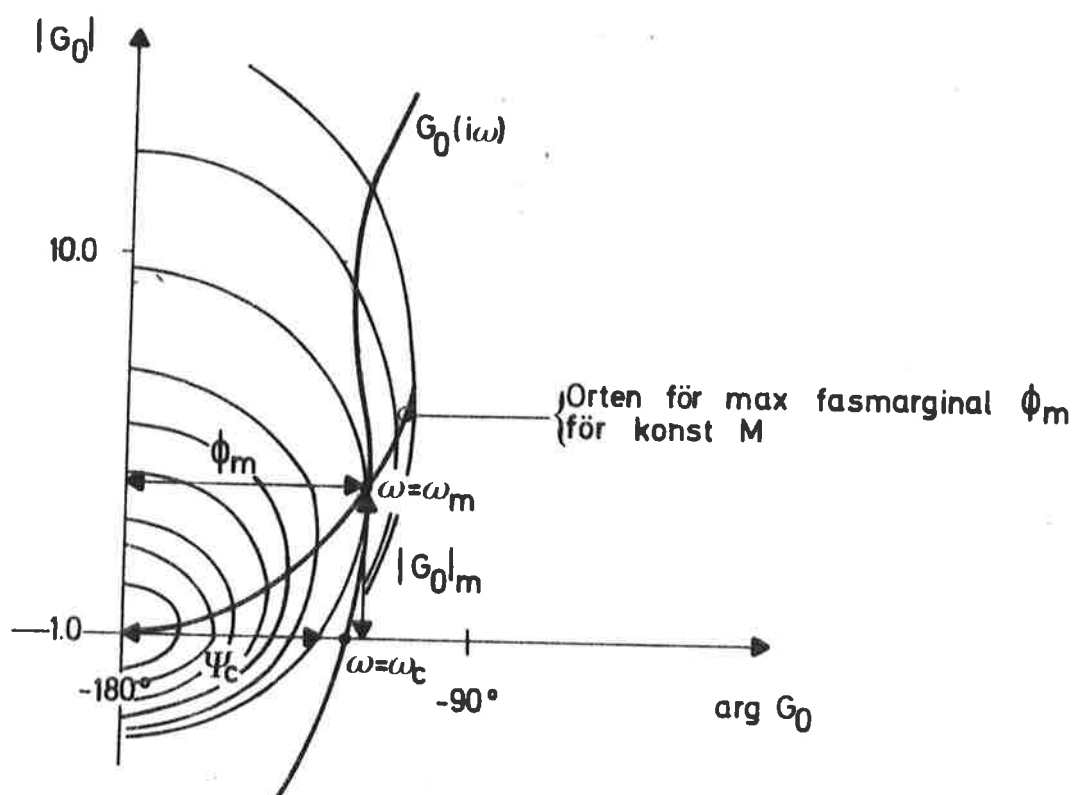


Fig. 2 - Nicholsdiagram visande orten för maximal fasmarginal  $\phi_m$  för konstant M samt en frekvenskurva.

$\dagger$  Med fasmarginal avses i detta P.M.  $\pi + \arg G_0(i\omega)$  för en godtycklig frekvens  $\omega$ . I läroboken definieras fasmarginalen endast för skärfrekvensen  $\omega_c$ .

Enligt appendix A gives vidare M-kurvans fasmarginal  $\psi_c$  då  $|G_0| = 1$  av

$$\psi_c = \arccos(1 - 1/(2M^2)) \quad (4)$$

där M anger aktuell M-kurva. Vinklarna  $\phi_m$  och  $\psi_c$  avläses bekvämt i ett Nicholsdiagram, Fig. 2.

Studera nu frekvenskurvan  $G_0(i\omega)$  i Fig. 2. Vi önskar relatera skärfrekvensen  $\omega_c$  till den frekvens  $\omega_m$  då frekvenskurvan passerar punkten  $(|G_0|_m, \phi_m)$ . Låt frekvenskurvan ha lutningen -20 dB/dek kring frekvensen

$\omega_c$ . Då gäller

$$\frac{\log |G_0|_m - \log 1}{\log \omega_m - \log \omega_c} = -1 \quad (5)$$

En enkel omskrivning av Ekv. (5) ger

$$\omega_m = \frac{1}{|G_0|_m} \omega_c = \cos \phi_m \cdot \omega_c \quad (6)$$

För ett reproducerande servosystem av 2:a ordningen existerar ett entydigt samband mellan överslängen  $M_0$  och resonanstoppen  $M_p$ , då  $M_0 \in [e^{-\pi}, 1]$ . Sambandet kan specificeras genom att ange den maximala fasmarginalen  $\phi_m$  för den M-kurva med  $M = M_p$  som systemets frekvenskurva tangerar. Detta samband återfinnes i appendix B och lyder

$$\phi_m = 2 \arctg\left(\frac{1}{\pi} \arctan(1/M_0)\right) \quad M_0 \in [e^{-\pi}, 1] \quad (7)$$

Villkoret  $M_0 \in [e^{-\pi}, 1]$  garanterar att  $\phi_m$  tillhör intervallet  $[0, \pi/2]$  och därmed att M-kurvan med  $M = M_p$  bildar en sluten kurva. Ekv. (7) relaterar överslängen  $M_0$  till en storhet i frekvensplanet  $\phi_m$ .

Vi är nu mogna att ange en metod för dimensionering av en fasavancerande kompensering. Målet för syntesen är att införa kompenseringen så att ej någon kraftig resonanstopp erhålles i det slutna systemets överföringsfunktion. Detta uppnås genom att kompenseringen väljes så att frekvenskurvan för det kompenserade systemet följer en M-kurva i området  $[\omega_m, \omega_c]$ . Därmed erhålles en flack resonanstopp. För en stor klass av system blir därvid det kompenserade systemets transienta egenskaper acceptabla.

Kompenseringen (1) ger maximal fasavancering vid frekvensen  $b\sqrt{N}$ . Kriteriet ovan uppfylles för många system genom att kompenseringen väljes så att den maximala fasavanceringen uppträder i intervallet  $[\omega_m, \omega_c]$ . Vidare bestämmes den fasavancerande kompenseringen så att det kompenserade systemets fasmarginal och fasmarginalen för M-kurvan med  $M = M_p$  sammanfaller. Då frekvenskurvan förutsättes följa M-kurvan med  $M = M_p$  nära skärfrekvensen  $\omega_c$  är valet rimligt. Metoden nedan erhålles nu för dimensionering av en fasavancerande kompensering.

Syntesmetod: Vid syntes av en fasavancerande kompensering  $N(s+b)/(s+bN)$  bestämmes parametrarna  $b$  och  $N$  enligt

$$b\sqrt{N} \in [\omega_m, \omega_c]$$

$$\varphi(\omega_c) = \psi_c \quad (8)$$

där  $\varphi(\omega_c)$  betecknar det kompenserade systemets fasmarginal.

De lägre värdena på frekvensen  $b\sqrt{N}$  användes då det okompenserade systemets fasminskning är svag kring  $\omega = \omega_c$ . Exempelvis kan nämnas att valet  $b\sqrt{N} = \omega_m$  i viss mening kan visas optimal då det öppna systemet utgöres av en dubbelintegrator. För system med kraftig fasminskning kring  $\omega = \omega_c$  är det tillämpligt att välja  $b\sqrt{N} = \omega_c$ . Vidare kan en krypande tendens i det kompenserade systemets stegsvar minskas genom att välja ett högre värde på frekvensen  $b\sqrt{N}$ . För vissa system med mycket kraftig fasavgång

Kring  $\omega = \omega_c$  kan valet  $b\sqrt{N} > \omega_c$  t.o.m. vara nödvändigt för att helt eliminera en krypande tendens i stegsvaret.

Lösningsgången enligt syntesmetoden (8) kan sammanfattas i följande punkter:

- o beräkna  $\omega_c$ ,  $\phi_m$ ,  $M$ ,  $\Psi_c$ ,  $\omega_m$  ur Ekv. (2), (7), (3), (4), (6) i nämnd ordning.
- o välj  $b\sqrt{N}$ .
- o bestäm  $N$  ur fasvillkoret  $\varphi(\omega_c) = \Psi_c$  genom att använda typkurvorna för nätet  $N(s+b)/(s+bN)$ .
- o beräkna  $b$ .
- o justera slutligen kretsförstärkningen  $K$  så att önskad skärfrekvens erhålles.

Efter val av  $b\sqrt{N}$  i (8) är lösningen till syntesproblemet entydig



## REFERENSER:

1. Axelby, G. S.: Synthesis of Feedback Control Systems with the Minimum Lead needed to realize a Specified Frequency Response, Westinghouse Electrical Corporation.
2. Chesnut, H., Mayer R. W.: Servomechanisms and Regulating System Design, Wiley, New York, 1959.

## Appendix A

I frekvensplanet gives beloppet av kvoten mellan utsignalen och insignalen för ett enkelt återkopplat system av

$$M = \left| \frac{G_0(i\omega)}{1 + G_0(i\omega)} \right| \quad (\text{A1})$$

där  $G_0(i\omega)$  är det öppna systemets överföringsfunktion. En uppdelning av  $G_0(i\omega)$  i real- och imaginär del ger

$$G_0(i\omega) = x + iy \quad (\text{A2})$$

där  $x = \text{Re } G_0(i\omega)$  och  $y = \text{Im } G_0(i\omega)$ . Insättning av Ekv. (A2) i (A1) ger

$$M = \left| \frac{x + iy}{1 + x + iy} \right| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 + 2x + x^2 + y^2}} \quad (\text{A3})$$

Kvadrerad och omordnad kan Ekv. (A3) skrivas

$$\left(x + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{M^2-1}\right)^2$$

Orten för konstant belopp är således en familj av cirklar i  $G_0(i\omega)$ -planet med centra i  $(-M^2/(M^2-1), 0)$  och radie  $M/(M^2-1)$ . Cirklarna benämnes M-cirklar. En sådan cirkel med  $M > 1$  samt enhetscirkeln återfinnes i Fig. A1.

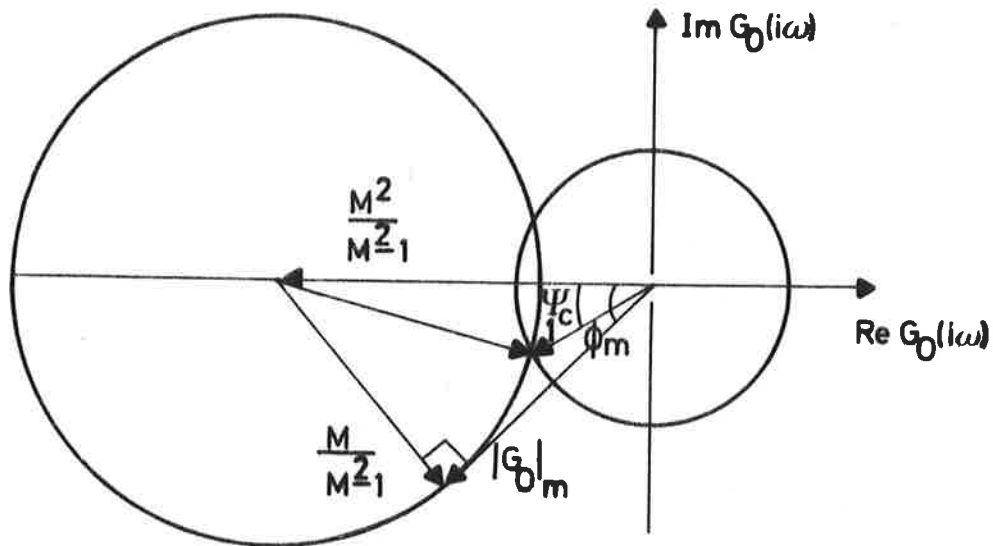


Fig. A1. - En  $M$ -cirkel med  $M > 1$  samt enhetscirkeln i  $G_0(i\omega)$ -planet

Låt  $\phi_m$  beteckna  $M$ -cirkelns maximala fasmarginal samt  $|G_0|$  avståndet mellan origo och den punkt på cirkeln där den maximala fasmarginalen uppnås. Vinkeln  $\phi_m$  tillhör intervallet  $[0, \pi/2]$ . Enkla räkningar och Fig. A1 ger

$$\sin \phi_m = \frac{M/(M^2-1)}{M^2/(M^2-1)} = 1/M$$

$$|G_0|_m = \sqrt{\left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 - \left(\frac{M}{M^2-1}\right)^2} = \frac{M}{\sqrt{M^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-1/M^2}} = 1/\cos \phi_m \quad (\text{A5})$$

Vidare betecknas  $\psi_c$   $M$ -cirkelns fasmarginal då  $|G_0| = 1$ . Fig. A1 och cosinusteoremet ger

$$\left(\frac{M}{M^2-1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{M^2}{M^2-1} \cdot \cos \psi_c \quad (\text{A6})$$

Efter reduktion av Ekv. (A6) erhålles

$$\cos \psi_c = 1 - 1/(2M^2) \quad (\text{A7})$$

## Appendix B

Betrakta ett reproducerande servosystem av 2:a ordningen

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} \quad \zeta \in [0,1] \quad (B1)$$

där  $\zeta$  är systemets relativa dämpning samt  $\omega_0$  dess egenfrekvens. Systemets översläng  $M_0$  och resonanstopp  $M_p$  som funktion av relativa dämpningen  $\zeta$  ges av

$$M_0 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \zeta \in [0,1] \quad (B2)$$

resp

$$M_p = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} & \zeta \in (0, 1/\sqrt{2}] \\ 1 & \zeta > 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad (B3)$$

Om beskrivning av Ekv. (B3) ger då  $\zeta \in (0, 1/\sqrt{2}]$

$$\zeta^4 - \zeta^2 + \frac{1}{4M_p^2} = 0$$

$$\zeta^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 1/M_p^2} \quad \zeta \in (0, 1/\sqrt{2}] \quad (B4)$$

Låt  $\phi_m$  beteckna den maximala fasmarginalen för den M-cirkel med  $M = M_p$  som frekvenskurvan för det öppna systemet (B1) tangerar. Insättning av Ekv. (A5) i (B4) ger

$$\zeta^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \phi_m} = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi_m) = \sin^2 \frac{\phi_m}{2}$$

$$\zeta = \sin \frac{\phi_m}{2} \quad \phi_m \in [0, \pi/2] \quad \zeta \in [0, 1/\sqrt{2}] \quad (B5)$$

Systemets översläng  $M_0$  som funktion av vinkeln  $\phi_m$  erhålles genom insättning av Ekv. (B5) i (B2)

$$M_0 = e^{-\pi \operatorname{tg} \frac{\phi_m}{2}} \quad \phi_m \in [0, \pi/2] \quad (\text{B6})$$

Resonanstoppen  $M_p$  som funktion av överslängen  $M_0$  erhålles ur Ekv. (A5) och (B6)

$$M_p = \frac{1}{\sin\left(2 \arctg \frac{1}{\pi \ln \frac{1}{M_0}}\right)} \quad M_0 \in [e^{-\pi}, 1] \quad (\text{B7})$$

Funktionen existerar endast i intervallet  $[e^{-\pi}, 1]$  vilket är en direkt följd av Ekv. (B3)