Stabilization of Affine Systems with Saturating Control

Stabilizatsiya Affinnykh Sistem Ogranichennym Upravleniem

Johansson, Rolf; Krishchenko, A. P.; Sidorov, D. A.; Tkachev, S.B.

ISSN 0280-5316
ISRN LUTFD2/TFRT--7595--SE

Stabilization of Affine Systems with Saturating Control

R. Johansson., A.P. Krishchenko.,
D.A. Sidorov., S.B. Tkachev

Department of Automatic Control
Lund Institute of Technology
June 2001

Department of Automatic Control
Lund Institute of Technology
Box 118
SE-221 00 Lund Sweden

Document name
MASTER THESIS

Date of issue
June 2001

Document Number
ISRN LUTFD2/TFRT--7595--SE

Author(s)
R. Johansson
A.P. Krishchenko., D.A. Sidorov., S.B. Tkachev

Supervisor

Sponsoring organization

Title and subtitle
Stabilization of Affine Systems with Saturating Control. Stabilizatsiya Affinnykh Sistem Ogranichennym Upravleniem (Stabilisering av Affina system med styrsignalmättning).

Abstract
Stabilization of the state of equilibrium of affine system controlled by saturating control is investigated. Saturating stabilizing control is designed by means of rescaling of control laws after linearization of the system under feedback control. A method for estimation of the stabilized region of state space is provided. As an example, a solution to the task of stabilization of the orientation of a space vehicle is given.

Keywords

Classification system and/or index terms (if any)

Supplementary bibliographical information

ISSN and key title
0280-5316

ISBN

Language
Russian

Number of pages
16

Recipient's notes

Security classification

Стабилизация аффинных систем ограниченным управлением

Р.Йохансон, А.П.Крищенко, Д.А.Сидоров, С.Б.Ткачев

Рассматривается задача стабилизации положения равновесия аффинной системы ограниченным управлением. Ограниченное стабилизирующее управление строится с помощью метода масштабирования управления после линеаризации аффинной системы обратной связью. Предлагается метод оценки области стабилизируемости. В качестве примера рассматривается задача стабилизации ориентации космического аппарата.

1 Введение

Для решения задачи стабилизации положения равновесия ограниченным управлением применяются различные подходы. Значительное число результатов получено для линейных систем.

Например, в [1] рассматривается задача глобальной стабилизации линейных систем ограниченным управлением. Предлагаются два типа стабилизирующей обратной связи: в виде линейной комбинации координат текущего состояния и в виде композиции функций насыщения и линейных функций координат текущего состояния.

Другой способ глобальной стабилизации линейных систем со скалярным управлением рассматривается в [2]. Стабилизирующее управление строится с использованием однопараметрических семейств неограниченных стабилизирующих управлений и соответствующих функций Ляпунова. Если эти семейства удовлетворяют определенным условиям, то оказывается, что можно задать такой закон изменения параметра при котором получающееся управление будет стабилизирующим и ограниченным.

В [3] для анализа систем с управлением используется теорема, которая для взаимосвязанных особым образом систем позволяет оценить асимптотическое поведение выхода, зная асимптотическое поведение входа. Эта теорема применяется для построения ограниченной стабилизирующей обратной связи для линейных систем и для каскадов асимптотически устойчивых нелинейных систем и линейных систем.

Задача стабилизации нелинейных систем рассматривается, например, в [4]–[5]. В [4] излагается метод построения стабилизирующей обратной связи и оценки области стабилизируемости для аффинных систем, эквивалентных регулярным системам канонического вида. В [5] изложен метод построения оценок области стабилизируемости с помощью параметрических функций Ляпунова и указан способ выбора значений параметров метода, приводящий к улучшению этих оценок.

В настоящей работе рассматриваются аффинные системы, т.е. системы вида

$$\dot{z} = A(z) + B(z)u, \quad z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbf{R}^n,\ u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbf{R}^m, \tag{1}$$

где $A(z)$ и $B(z)$ функциональные матрицы соответствующих размеров с элементами из $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $A(z_0) = 0$. Для аффинных систем изложен метод построения управления, стабилизирующего положение равновесия $z = z_0$ и удовлетворяющего заданным ограничениям

$$|u_i| \le u_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

где u_i^* — произвольные положительные числа. Под стабилизирующим управлением понимается управление, с которым для любого начального условия $z(0)$ из некоторого $M \subseteq \mathbf{R}^n$ для замкнутой системы выполняется условие $z(t) \to z_0$ при $t \to t_0$.

Сначала в разделе 2 рассмотрена линейная система со скалярным управлением и затем в разделе 3 полученные результаты применены для решения рассматриваемой задачи в аффинном случае. Для найденного в виде обратной связи управления указаны условия, при выполнении которых оно является решением задачи глобальной стабилизации или стабилизации "в большом". В последнем случае найдена оценка области притяжения замкнутой системы. В качестве примера в разделе 4 рассматривается задача стабилизации ориентации космического аппарата.

2 Стабилизация линейной системы со скалярным управлением

Построение ограниченного стабилизирующего управления. Рассмотрим задачу построения глобального стабилизирующего управления для положения равновесия $x = 0$ системы вида

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n,\ \dot{x}_n = w, \tag{3}$$

при наличии ограничения

$$|w| \le w^* \tag{4}$$

на управление. Для построения управления воспользуемся техникой масштабирования управления, изложенной в [2].

Масштабирование управления производится следующим образом. Строится однопараметрическое семейство неограниченных стабилизирующих управлений. Для этого семейства управлений находится семейство функций Ляпунова в виде квадратичных форм с тем же параметром, т.е. управлению с заданным значением параметра соответствует функция Ляпунова замкнутой системы с тем же значением параметра. Задается закон изменения параметра и условия на семейства управлений и функций Ляпунова, при выполнении которых управление с изменяющимся параметром является стабилизирующим. В некоторых случаях с помощью введения такого закона изменения параметра можно добиться ограниченности управления. В частности, для управляемых линейных систем, у которых матрица системы не имеет собственных чисел с положительной действительной частью, в [2] приводятся семейства стабилизирующих управлений и функций Ляпунова, позволяющие получить глобальное ограниченное стабилизирующее управление. Система (3) удовлетворяет этим условиям: если ее записать в виде $\dot{x} = Ax + bu$, то пара (A, b) управляемая, а все собственные числа матрицы A равны нулю. Выпишем для системы (3) указанные семейства стабилизирующих управлений и функций Ляпунова, а также закон изменения параметра.

Рассмотрим управление

$$w = K(s)x, \tag{5}$$

где $K(s) = \psi_n(s)S(s)\xi(s)$, $s \in \mathbf{R}^n$, $\psi_n(s)$ — n-я строка матрицы $\psi(s)$. Матрицы $\psi(s) = \|\psi_{ij}(s)\|$, $S(s)$, $\xi(s) = \|\xi_{ij}(s)\|$ типа $n \times n$ определяются равенствами

$$S(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -s_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -s_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -s_{n-2} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -s_{n-1} & -s_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$s_i > 0,\ i = \overline{1, n},\ s = (s_1, \dots, s_n)\,,$$

$$\xi_{ij}(s) = \begin{cases} 0, \text{ если } j > i \text{ или } i - j \text{ нечетное}, \\ 1, \text{ если } i = j, \\ s_{i-2}\xi_{i-2,1}(s), \text{ если } j = 1,\ i > 1 \text{ и } i \text{ нечетное}, \\ \xi_{i-1,j-1}(s) + s_{i-2}\xi_{i-2,j}(s), \text{ в остальных случаях}, \end{cases} \tag{7}$$

$$\psi_{ij}(s) = \begin{cases} 0, \text{ если } j > i \text{ или } i - j \text{ нечетное}, \\ 1, \text{ если } i = j, \\ -s_1\psi_{i-1,2}(s), \text{ если } j = 1,\ i > 1 \text{ и } i \text{ нечетное}, \\ \psi_{i-1,j-1}(s) - s_j\psi_{i-1,j+1}(s), \text{ в остальных случаях}. \end{cases} \tag{8}$$

Управление (5) является стабилизирующим для системы (3) при любых $s_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ [2].

Зададим вектор s в виде

$$s = s(\mu) = (1/\mu^2, \dots, 1/\mu^2, 1/\mu)^T, \tag{9}$$

т.е. $s_i = 1/\mu^2$, $i = \overline{1, n-1}$, $s_n = 1/\mu$, $\mu > 0$. Такой выбор вектора s далее используется для обеспечения ограниченности управления. В результате получаем однопараметрическое семейство стабилизирующих управлений

$$w(x, \mu) = K(s(\mu))x \tag{10}$$

с параметром μ.

Замкнутая система (3), (10) является линейной и стационарной. В качестве ее функции Ляпунова можно взять квадратичную форму

$$V(x, \mu) = \frac{\eta}{\mu^2} x^T \xi^T(s(\mu)) D(s(\mu)) \xi(s(\mu)) x, \tag{11}$$

где постоянная $\eta > 0$, а $D(s(\mu)) = \operatorname{diag}(s_1 \cdot \ldots \cdot s_{n-1}, s_2 \cdot \ldots \cdot s_{n-1}, \dots, s_{n-1}, 1)$.

Квадратичная форма (11) положительно определена, а ее производная в силу замкнутой системы (3), (10) неположительна. Следовательно, μ–параметрическому семейству стабилизирующих управлений (10) соответствует μ–параметрическое семейство (11) функций Ляпунова.

Оказывается [2], что функции (11) обладают следующим свойством: при любом $\mu_0 > 0$ и $x \in \{x|V(x,\mu_0) > 1\}$ уравнение $V(x,\mu) = 1$ относительно μ имеет единственное решение, принадлежащее полуинтервалу $[\mu_0, +\infty)$. Оно позволяет, фиксировав $\mu_0 > 0$, определить закон изменения параметра μ, полагая

$$\mu = \mu(x) = \begin{cases} \mu_0, \text{ при } V(x,\mu_0) \le 1, \\ \text{решение уравнения } V(x,\mu) = 1 \text{ из интервала } [\mu_0, +\infty), \text{ при } V(x,\mu_0) > 1. \end{cases}$$

Такому выбору значения параметра μ в текущем состоянии x соответствует нелинейная обратная связь

$$w(x,\mu(x)) = K(s(\mu(x)))x, \tag{12}$$

которая, согласно [2], ограничена в $\mathbf{R}^n$ и глобально стабилизирует нулевое положение равновесия системы (3). При этом функцию

$$V(x) = \begin{cases} V(x,\mu_0), \text{ при } V(x,\mu_0) \le 1, \\ \mu(x), \text{ при } V(x,\mu_0) > 1 \end{cases}$$

можно рассматривать в качестве функции Ляпунова замкнутой системы (3), (12) [2], хотя при $\mu_0 \ne 1$ она не является непрерывной в точках множества $\{x \in \mathbf{R}^n | V(x,\mu_0) = 1\}$.

Условия выполнения ограничений. Для учета ограничений (4) на управление воспользуемся параметром η. Для этого найдем наибольшее значение модуля управления (12). Решению этой задачи препятствует громоздкое представлением функций $w(x,\mu)$ и $V(x,\mu)$. Следующее утверждение, позволяет записать $w(x,\mu)$ и $V(x,\mu)$ в более удобном виде.

Теорема 1. При любом $\mu > 0$ справедливы равенства

$$w(x,\mu) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{k}_j}{\mu^{n-j+1}} x_j, \quad V(x,\mu) = \eta \sum_{i,j=1}^{n} \frac{V_{ij}}{\mu^{2n-i-j+2}} x_i x_j,$$

где V_{ij} и $\tilde{k}_j$ — некоторые константы, не зависящие от μ [6].

В слагаемые в выражении для функции $V(x,\mu)$ параметр μ входит в знаменатель и притом в степени больше или равной 2. Поэтому из отмеченного свойства этой функции немедленно следует, что уравнение $V(x,\mu) = 1$ имеет единственное положительное решение, которое обозначим через $\overline{\mu}(x)$. Можно показать, что при $x \ne 0$ выполнено неравенство

$$\dot{\overline{\mu}}(x) \Big|_{(3), w=w(x,\overline{\mu}(x))} \le 0.$$

Воспользуемся теоремой 1 при нахождении максимума $|w(x,\mu(x))|$. Представим пространство состояний в виде объединения двух множеств — множества $E_0 = \{x|V(x,\mu_0) \le 1\}$, в точках которого $\mu(x) = \mu_0$, и множества $E_1 = \{x|V(x,\mu_0) > 1\}$, где $\mu(x)$ определяется как решение уравнения $V(x,\mu) = 1$.

Сначала рассмотрим задачу оптимизации на множестве E_0. Функция $w(x,\mu(x))$ на множестве E_0 линейная, так как $\mu(x)=\mu_0$ на E_0. Поэтому ее модуль достигает наибольшего значения на E_0 в точке границы этого множества. Следовательно, задачу поиска наибольшего значения модуля управления на рассматриваемом множестве E_0 можно записать следующим образом:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{k}_i}{\mu_0^{n-i+1}}x_i\right|\to\max,\quad \eta\sum_{i,j=1}^{n}\frac{V_{ij}}{\mu_0^{2n-i-j+2}}x_ix_j=1.$$

На множестве E_1 управление $w(x,\mu(x))$ нелинейное, так как $\mu(x)$ зависит от x. В этом случае задачу поиска наибольшего значения функции $|w(x,\mu(x))|$ можно представить как задачу поиска наибольшего значения функции $|w(x,\mu)|$, зависящей от $n+1$ переменных $x_1,\ldots,x_n,\mu$, при ограничениях:

$$\eta\sum_{i,j=1}^{n}\frac{V_{ij}}{\mu^{2n-i-j+2}}x_ix_j=1,\quad x\in E_1.$$

Ограничение в виде равенства появляется вследствие того, что при $V(x,\mu_0)\geq 1$ значение μ определяется как решение уравнения $V(x,\mu)=1$.

Теперь рассмотрим задачу поиска наибольшего значения модуля управления во всем фазовом пространстве. После замены переменных

$$y_i=\begin{cases} x_i/\mu_0^{n-i+1}, & \text{при } x\in\{x|V(x,\mu_0)\leq 1\},\\ x_i/\mu^{n-i+1}, & \text{при } x\in\{x|V(x,\mu_0)>1\},\end{cases}\qquad i=\overline{1,n}$$

задачи поиска наибольшего значения модуля указанного управления на множествах E_0 и E_1 можно объединить в одну задачу:

$$\begin{cases}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{k}_iy_i\right|\to\max,\\ \eta\sum\limits_{i,j=1}^{n}V_{ij}y_iy_j=1.\end{cases}\tag{13}$$

В данной задаче наибольшее значение модуля управления совпадает с наибольшим значением самого управления и, следовательно, знак модуля в (13) можно опустить. В результате приходим к задаче на условный экстремум.

Теорема 2. Пусть $k=(\tilde{k}_1,\ldots,\tilde{k}_n)^T$, $y=(y_1,\ldots,y_n)^T$, $V=(V_{ij})$ — положительно определенная симметричная матрица порядка n. Наибольшее значение функции $f(y)=k^Ty$ на множестве $\eta y^TVy=1$ равно

$$f_{\max}=\frac{\sqrt{k^TV^{-1}k}}{\sqrt{\eta}}.$$

Доказательство. Линейная функция $f(y)$ в точках $(n-1)$-мерного эллипсоида $\eta y^TVy=1$ принимает наибольшее и наименьшее значения, которые отличаются лишь знаком и достигаются в точках, симметричных относительно начала системы координат. Эти точки являются точками условного экстремума. Поэтому, составим функцию Лагранжа $L=k^Ty+\lambda(\eta y^TVy-1)$ задачи на условный экстремум и запишем необходимые условия существования решения в виде $k^T + 2\lambda\eta y^T V = 0$, $\eta y^T V y - 1 = 0$. Выразив из первого уравнения $y^T = -0.5 k^T V^{-1}/(\lambda\eta)$ и подставив во второе уравнение находим $\lambda = \pm 0.5\sqrt{k^T V^{-1} k/\eta}$ и две точки $y^T = \mp k^T V^{-1}/\sqrt{\eta k^T V^{-1} k}$, в одной из них функция $f(y)$ достигает своего условного максимума $f_{\max}$.

Обозначим через $\tilde{w}(\eta)$ найденное согласно теореме 2 наибольшее значение модуля управления (12):

$$\tilde{w}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \hat{V}_{ij}\tilde{k}_i\tilde{k}_j},$$

где $\hat{V}_{ij}$ — элементы матрицы V^{-1}. Отметим, что $\tilde{w}(\eta)$ не зависит от μ_0. Для определения значений параметра η, гарантирующих выполнение условия (4), получаем неравенство $\tilde{w}(\eta) \leq w^*$, откуда

$$\eta \geq \frac{1}{(w^*)^2}\sum_{i,j=1}^{n} \hat{V}_{ij}\tilde{k}_i\tilde{k}_j. \tag{14}$$

Таким образом, при значении параметра η, удовлетворяющем неравенству (14), управление $w(x, \mu(x))$, во-первых, стабилизирует систему (3) и, во-вторых, удовлетворяет ограничению (4) на управление.

3 Стабилизация аффинной системы

Относительно системы (1) будем предполагать, что она эквивалентна системе канонического вида [7]:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2,\ \ldots,\ \dot{x}_{n_1-1} = x_{n_1},\ \dot{x}_{n_1} = f_1(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{1j}(x)u_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1} = x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+2}, \ldots, \dot{x}_{n_1+\ldots+n_m} = f_m(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{mj}(x)u_j, \end{array} \tag{15}$$

где $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $n_1 + \ldots + n_m = n$, $f_i, g_{ij} \in C^\infty(X)$, $i, j = \overline{1, m}$.

Под эквивалентностью в данном случае понимается, что в $\mathbf{R}^n$ существует такая невырожденная замена переменных $x = \Phi(z)$, $\Phi(\mathbf{R}^n) = X$, что в новых переменных аффинная система (1) запишется в виде системы (15). Всегда можно считать, что $\Phi(z_0) = 0$. Условия существования замены переменных $x = \Phi(z)$ приводятся в [7].

Отметим, что если управление $u = u(x)$ стабилизирует положение равновесия $x = 0$ системы (15), то управление $u = u(\Phi(z))$ стабилизирует положение равновесия z_0 системы (1).

Обозначим $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$, $G(x) = \|g_{ij}(x)\|_{m\times m}$. Система (15) канонического вида называется регулярной в области O, если $\det G(x) \neq 0$ в O.

Регулярная система канонического вида (15) линеаризуется введением вспомогательного управления $w = (w_1, \ldots, w_m)^T = F(x) + G(x)u$:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2,\ \ldots,\ \dot{x}_{n_1-1} = x_{n_1},\ \dot{x}_{n_1} = w_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1} = x_{n_1+\ldots+n_{m-1}+2},\ \ldots,\ \dot{x}_{n_1+\ldots+n_m} = w_m. \end{array} \tag{16}$$

Система (16) распадается на m независимых линейных подсистем, вида (3). Поэтому для каждой из этих подсистем ограниченное стабилизирующее управление может быть построено по схеме, изложенной в предыдущем разделе. Таким образом, фиксировав постоянные w_1^*, ..., w_m^* для системы (16) получаем глобальное стабилизирующее управление $w = (w_1, \ldots, w_m)^T = w(x)$, удовлетворяющее ограничениям

$$|w_i| \leq w_i^*, \quad i = \overline{1, m}. \tag{17}$$

Покажем, что при выполнении некоторых условий постоянные w_i^* можно выбрать так, что соответствующие значения

$$u(x) = G^{-1}(x)(w(x) - F(x)) \tag{18}$$

исходных управлений удовлетворяют заданным ограничениям (2).

Теорема 3. Пусть аффинная система (15) канонического вида регулярна на множестве $O \subseteq X \subseteq \mathbf{R}^n$ и на этом множестве выполнены следующие три условия.

1. Существуют такие постоянные $m_{1i}, m_{2i} \in \mathbf{R}$, что элементы $\hat{g}_{ij}(x)$ матрицы $G^{-1}(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$-u_i^* < m_{1i} \leq \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_{ij}(x) f_j(x) \leq m_{2i} < u_i^*, \quad i = \overline{1, m}.$$

2. Существуют такие положительные постоянные g_i, что $\sum\limits_{j=1}^{m} |\hat{g}_{ij}(x)| \leq g_i$, $i = \overline{1, m}$.

3. Постоянные w_i^* из (17) выбраны так, что $\sum\limits_{i=1}^{m} w_i^* \leq u^{**}$, где

$$u^{**} = \min_{i=1\ldots m} \left[\frac{1}{g_i} min(u_i^* - m_{2i}, u_i^* + m_{1i}) \right].$$

Тогда для управления (18) ограничения (2) выполнены при $x \in O$.

Доказательство. Обозначим $\tilde{u}_i = \min(u_i^* - m_{2i}, u_i^* + m_{1i})$. Из третьего условия теоремы следует, что

$$\sum_{j=1}^{m} |w_j| \leq \frac{\tilde{u}_i}{g_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

С учетом второго условия получаем

$$\tilde{u}_i \geq \sum_{j=1}^{m} |\hat{g}_{ij}(x)| \sum_{j=1}^{m} |w_j| \geq \sum_{j=1}^{m} |\hat{g}_{ij}(x) w_j| \geq \left| \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_{ij}(x) w_j \right|$$

и поэтому

$$-\tilde{u}_i \leq \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_{ij}(x) w_j \leq \tilde{u}_i,$$

$$m_{2i} - u_i^* \le \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_{ij}(x) w_j \le m_{1i} + u_i^*.$$

Используя первое условие находим, что

$$-u_i^* \le \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_{ij}(x) w_j - \sum_{j=1}^{m} \hat{g}_{ij}(x) f_j(x) \le u_i^*.$$

Тогда из (18) следует, что $|u_i| \le u_i^*$, $i = \overline{1, m}$, что и требовалось доказать.

Пусть условия теоремы выполняются на множестве $O \subseteq \mathbf{R}^n$. Обозначим через Q компоненту связности множества O, содержащую положения равновесия $x = 0$. Рассмотрим два случая: $Q = \mathbf{R}^n$ и $Q \ne \mathbf{R}^n$. Если $Q = \mathbf{R}^n$, то построив стабилизирующее управление для системы (16), удовлетворяющее ограничению (17), по формуле (18) получаем стабилизирующее управление для системы (15), удовлетворяющее ограничению (2). Отметим, что в этом случае $Q = \mathbf{R}^n = X$ и положение равновесия исходной аффинной (1) системы глобально стабилизируется управлением

$$u(\Phi(z)) = G^{-1}(\Phi(z))(w(\Phi(z)) - F(\Phi(z))). \qquad (19)$$

Если $Q \ne \mathbf{R}^n$, то и $O \ne \mathbf{R}^n$, а вне множества O доказанная теорема не гарантирует выполнения ограничений (2) на управление. Поэтому в этом случае нужно найти такое множество $Q' \subseteq Q$, что для всех $x_0 \in Q'$ траектория замкнутой системы, выходящая из x_0 лежит в O (достаточно, чтобы она содержалась в Q').

Для этого рассмотрим систему (16). Обозначим $\hat{x}_i = (x_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1}, \ldots x_{n_1+\ldots+n_i})^T$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим $v(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\mu}_i(\hat{x}_i)$. Так как $v(x) > 0$, $\dot{v}(x)\Big|_{(16), w_i = w_i(\hat{x}_i, \overline{\mu}_i(\hat{x}_i))} \le 0$ при $x \ne 0$, то множество Q' можно искать в виде $Q' = \{x | v(x) < C\}$. Выполнения условия $Q' \subseteq Q$ можно добиться, если положить $C = \min\limits_{x \in \partial Q} v(x)$, т.е. выбрать минимальную константу уровня функции $v(x)$, при которой поверхность уровня $v(x)$ имеет общие точки с границей ∂Q множества Q. В переменных z оценка области стабилизируемости задается неравенством $v(\Phi(z)) < C$.

Если удается построить множество $Q_1 \times \ldots \times Q_m \subseteq Q$, $Q_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$, $i = \overline{1, m}$, то множество Q' можно построить другим способом, а именно в виде $Q' = Q'_1 \times \ldots \times Q'_m$, где $Q'_i = \{\hat{x}_i | \overline{\mu}_i(\hat{x}_i) < C_i\}$. Константы C_i находим по формуле $C_i = \min\limits_{\hat{x}_i \in \partial Q_i} \overline{\mu}_i(\hat{x}_i)$. Тогда $Q'_i \subseteq Q_i, i = \overline{1, m}$, следовательно, $Q' \subseteq Q$. В переменных z оценка области стабилизируемости задается системой неравенств, которую можно представить в виде $\overline{\mu}_i(\hat{x}_i) < C_i$, $i = \overline{1, m}$, где $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)^T = \Phi(z)$.

Таким образом, получена оценка области стабилизируемости. Остается указать величины μ_{0i} для определения управлений, соответствующих полученным оценкам. Если использовался первый способ построения Q', то достаточно выбрать $\mu_{0i} \le \min\limits_{x \in \{x | v(x) = C\}} \overline{\mu}_i(\hat{x})$, а если использовался второй способ, то — $\mu_{0i} \le C_i$.

Отметим, что и в случае $Q \ne \mathbf{R}^n$ положение равновесия исходной аффинной (1) системы стабилизируется управлением (19).

В результате получаем стабилизирующее управление, удовлетворяющее ограничению, и оценку области притяжения соответствующей замкнутой системы.

4 Пример

Применим описанную выше технику для построения алгоритма стабилизации положения космического аппарата (КА) в его движении вокруг центра масс и нахождения оценки области стабилизируемости. Рассмотрим случай, когда можно не учитывать действие внешних моментов на КА. Для описания движения КА вокруг центра масс используем единичные кватернионы $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^4$, $\Lambda^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. В этом случае уравнения движения КА имеют вид [8]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \tag{20}$$

$$I\dot{\omega} + [\omega, I\omega] = u, \tag{21}$$

где ω — вектор угловой скорости, $\circ$ — умножение кватернионов, I — матрица инерции КА, $[.,.]$ — векторное произведение, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ — вектор управляющих моментов. Будем предполагать, что на управляющие моменты наложены ограничения $|u_i| \leq u_i^*$, $i = \overline{1,3}$.

Без ограничения общности можно считать, что требуется стабилизировать положение КА, описываемое кватернионом $\Lambda^* = (1, 0, 0, 0)$.

Приведем систему (20)-(21) к каноническому виду. Уравнение (20) имеет первый интеграл $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T = \Lambda$. Ограничимся рассмотрением области, где $\lambda_0 > 0$. В этом случае можно исключить из (20) первое уравнение, а для вычисления λ_0 использовать первый интеграл:

$$\lambda_0 = \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}.$$

Введем обозначения:

$$L = 1/2 \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в рассматриваемой области $\det L = \lambda_0/2 \neq 0$ и поэтому существует обратная матрица L^{-1}. С учетом введенных обозначений из (20) получаем

$$\dot{\lambda} = L\omega. \tag{22}$$

Далее, дифференцируя (22), находим

$$\ddot{\lambda} = \dot{L}\omega + L\dot{\omega}.$$

Выражая $\dot{\omega}$ из (21), получаем

$$\ddot{\lambda} = \dot{L}\omega + LI^{-1}\left(u - [\omega, I\omega]\right).$$

Выражая ω из (22), получаем систему канонического вида

$$\ddot{\lambda} = \dot{L}L^{-1}\dot{\lambda} - LI^{-1}\left[L^{-1}\dot{\lambda}, IL^{-1}\dot{\lambda}\right] + LI^{-1}u. \tag{23}$$

Система (23) при $\lambda_0 \neq 0$ регулярна. Поэтому при $\lambda_0 > 0$ систему (20)-(21) можно записать в виде эквивалентной регулярной системы канонического вида (23). При этом положению равновесия Λ^* системы (20)-(21) соответствует положение равновесия $\lambda = (0,0,0)^T$ системы (23). Таким образом, приходим к задаче стабилизации положения равновесия $\lambda = 0$ для системы (23) канонического вида. Введение вспомогательного управления

$$w = (w_1, w_2, w_3)^T = F(\lambda, \dot{\lambda}) + G(\lambda, \dot{\lambda})u,$$

где

$$F(\lambda, \dot{\lambda}) = \dot{L}L^{-1}\dot{\lambda} - LI^{-1}\left[L^{-1}\dot{\lambda}, IL^{-1}\dot{\lambda}\right], \quad G(\lambda, \dot{\lambda}) = LI^{-1},$$

систему (23) преобразует в систему вида (16): $\ddot{\lambda}_i = w_i$, $i = 1, 2, 3$.

Для каждого из уравнений этой системы находим функции

$$V_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i, \mu_i) = \eta_i \left(\frac{\lambda_i^2}{\mu_i^4} + \frac{\dot{\lambda}_i^2}{\mu_i^2}\right),$$

$$\mu_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i) = \begin{cases} \mu_{0i}, \text{ при } V_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i, \mu_{0i}) \leq 1, \\ \text{решение } V_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i, \mu_i) = 1, \text{ при } V_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i, \mu_{0i}) > 1, \end{cases}$$

и формулы для стабилизирующей обратной связи

$$w_i = w_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i, \mu_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i)) = -\frac{\lambda_i}{\mu_i^2(\lambda_i, \dot{\lambda}_i)} - \frac{\dot{\lambda}_i}{\mu_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Согласно (14) $\eta_i \geq 2/(w_i^*)^2$, где постоянные w_i^* задают ограничения на вспомогательные управления: $|w_i| \leq w_i^*$, $i = 1, 2, 3$.

Для нахождения постоянных w_i^*, μ_{0i}, $i = 1, 2, 3$ и оценки области стабилизируемости используем теорему 3. В случае рассматриваемой системы (23) канонического вида аналитическая проверка выполнения условий этой теоремы и нахождение соответствующих постоянных затруднены сложной структурой функции F. Поэтому вычисления проводились численно по прямоугольной сетке, заполняющей в $\mathbf{R}^6$ прямой параллелепипед с центром в точке $(\lambda, \dot{\lambda}) = (0, 0)$. При этом учитывалось ограничение $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 < 1$. В результате были фиксированы множество O и постоянная u^{**}. Это позволило вычислить $\eta_i = 2/(u^{**}/3)^2$, $i = 1, 2, 3$.

Затем была построена оценка области стабилизируемости в виде множества $Q' = Q_1' \times Q_2' \times Q_3'$, и найдены наибольшие значения C_i постоянных μ_i, $i = 1, 2, 3$.

При моделировании были фиксированы значения $\mu_{0i} < C_i$.

Ниже приводятся результаты моделирования процесса стабилизации около положения $\Lambda^* = (1, 0, 0, 0)$ КА с матрицей инерции

$$\begin{pmatrix} 176068 & 0 & 0 \\ 0 & 408656 & 0 \\ 0 & 0 & 401248 \end{pmatrix}$$

при ограничениях на управления $|u_i| \leq 50$ Н/м, $i = 1, 2, 3$. В качестве начального положения при моделировании использовались значения:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,0385 \\ -0,0576 \\ -0,2697 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0,0030 \\ -0,0019 \\ -0,0009 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1а, 1б, 1в изображены соответствующие проекции траектории системы, большие эллипсы ограничивают множества Q_i', а меньшие эллипсы заданы уравнениями $V_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i, \mu_{0i}) = 1$, $i = 1, 2, 3$. Внутри этих эллипсов соответствующие компоненты вспомогательного управления являются линейной стационарной обратной связью, так как на этих множествах $\mu_i(\lambda, \dot{\lambda}) \equiv \mu_{0i}$.

Графики координат кватерниона, угловой скорости и исходного управления показаны на рис. 2а, 2б, 2в.

Работа выполнена при поддержке гранта 99–01–00863 РФФИ и грата поддержки ведущих научных школ 00–15–96137.

Список литературы

[1] H.J. Sussmann, E.D. Sontag, Y. Yang. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls //IEEE Trans. Automat. Contr. – 1994. – V. 39. – N. 12. – P. 2411– 2425.

[2] P. Morin, R.M. Murray, L. Praly. Nonlinear rescaling of control laws with application to stabilization in the presence of magnitude saturation //Preprints of 4-th IFAC, NOLCOS'98. – University of Twente, Enchede, The Netherlands. – 1998. – V.3. – P.690–696.

[3] A.R. Teel. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation //IEEE Trans. Automat. Contr. – 1996. – V. 41. – N. 9. – P. 1256–1270.

[4] Волынский В.В., Крищенко А.П. Оценка областей стабилизируемости нелинейных систем //Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33. – N 11. – С. 1441–1450.

[5] В.А. Каменецкий. Синтез ограниченного стабилизирующего управления для нелинейных управляемых систем //Автоматика и телемеханика. – 1995. – N 1. – С. 43–56.

[6] Сидоров Д.А., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных систем ограниченным управлением //Нелинейная динамика и управление. – 2000. – С. 111–128.

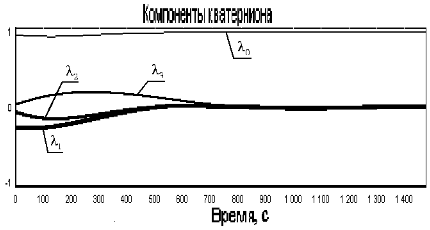
[7] Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления //Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 258. – Т. 4. – С. 805–809.

[8] В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. // М.: Наука. – 1973. – 320 с.

Рис. 1а

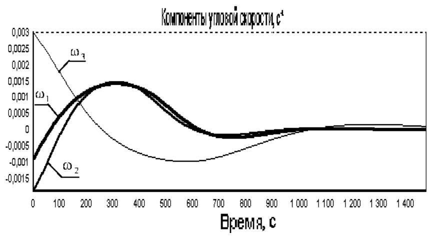
Рис. 1б

Рис. 1в



Компоненты кватерниона
Время, с

Рис. 2а



Компоненты угловой скорости, с⁻¹
Время, с

Рис. 2б

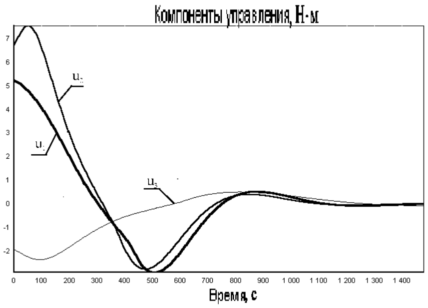

Компоненты управления, Н·м
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
u_3
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1 000
1 100
1 200
1 300
1 400
Время, с

Рис.2в