Gunga med Galileo - matematik för hela kroppen

Pendrill, Ann-Marie

Published in:
Nämnaren: tidskrift för matematikundervisning

2012

Ann-Marie Pendrill

Gunga med Galileo – matematik för hela kroppen

På en lekplats eller i en nöjespark finns möjlighet att påtagligt uppleva begrepp från fysik och matematik med den egna kroppen. Med hjälp av tidsmätningar kan man få förståelse för gungans pendelrörelse och även en matematisk modell. Innehållet presenterades på Matematikbiennalen i Umeå.

Det berättas att Galileo Galilei som liten satt i katedralen i Pisa och såg den stora oljelampan svänga. Han upptäckte att det tog lika lång tid för ljuskronan att svänga fram och tillbaka när den gjorde stora svängningar som när svängningsrörelsen efter hand blev allt mindre.

◇ Gå till en lekplats och prova om det stämmer. Om det finns två likadana gungor kan du dra ut dem olika långt, släppa dem samtidigt och jämföra när de kommer tillbaka till vändläget igen. Finns det bara en gunga kan du ta mobiltelefonens stoppur till hjälp.

Tiden som det tar för pendeln, dvs ljuskronan, gungan eller något annat, att gunga fram och tillbaka kallas *svängningstid* eller *period*. Galileo upptäckte alltså att svängningstiden, vi kan benämna den T, är oberoende av *utslagsvinkeln* eller *amplituden*. Detta gäller egentligen bara för små vinklar, men är en överraskande god approximation för de vinklar som är aktuella i en gunga – prova!

Två barn som gungar bredvid varandra i likadana gungor kan tävla i att gunga högst, men de kan också tycka om att gunga tvilling när de hela tiden följs åt i gungningen och gungar lika högt. Då har deras pendelrörelse samma period och amplitud, men också samma *fas*. Fas innebär att båda passerar lägsta punkten samtidigt och kommer samtidigt till vändlägena fram och bak. Barn kan också prata om att gunga syskon när ett barn gungar framåt medan det andra gungar bakåt, de gungar i motfas. För den som ska putta på två barn som gungar är fas ett mycket påtagligt begrepp, det är lättare att putta på om barnen gungar i fas än i motfas.

Period, amplitud och fas är begrepp som karaktäriserar alla typer av svängningsrörelser, t ex en vikt på en fjäder, oron (balanshjulet) i en klocka, en bräda som guppar i vattnet eller atomernas vibrationer i en molekyl. Svängningsrörelser ger ett exempel på hur fysiken är fattig på ekvationer men rik på fenomen, det vill säga att samma matematiska beskrivning kan användas för många olika situationer. Matematiken gör det möjligt att använda kunskap från ett område i helt nya sammanhang.

Tidmätning och svängningstid

Att svängningstiden är oberoende av amplituden kallas *isokronism*. Det är en viktig egenskap som gör det möjligt att använda en pendel för att mäta tid. Med pendeln kan man mäta kortare tider än vad som är möjligt att mäta med solur och vattenur. Galileos observationer av den svängande ljuskronan banade alltså väg för klockan.

Galileo märkte också att svängningstiden berodde på pendelns längd. Han kunde använda en liten pendel och variera längden för att hitta en period som svarade mot pulsen för en patient. Längden blev till tid. Det finns en gammal kanon som illustrerar hur svängningstiden varierar med längden:

> *Stora klockor säga tick, tack, tick, tack*
> *Mindre klockor säga ticke-tacke-ticke-tacke*
> *Men den allra minsta klockan säger*
> *ticke-tacke-ticke-tacke-ticke-tacke-ticke-tacke tick.*

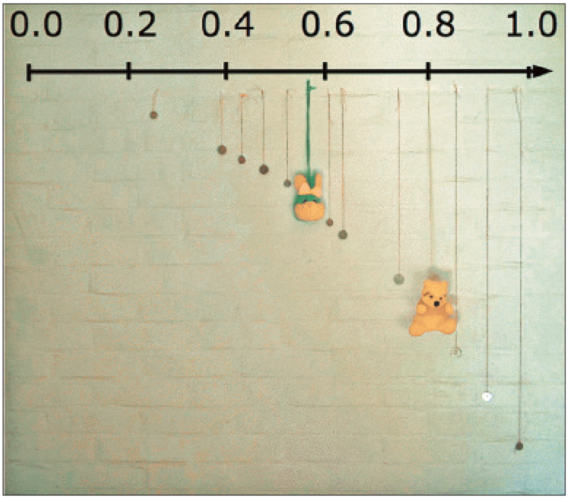
Hur påverkas svängningstiden av längden? Prova några undersökningar med enkel utrustning:

- Vad händer med tvillinggungandet om ett av barnen ställer sig upp?
- Häng ett föremål i ett 1 m långt snöre och låt det gunga. Hur lång tid tar det för en svängning fram och tillbaka?
- Mät perioden för något annat föremål med samma pendellängd.
  Hur lång blir perioden om man halverar snörets längd?
  Hur lång blir perioden om man låter snörets längd vara 25 cm?

Undersökningarna av svängningstid kan utvidgas till fler längder på snörena. Resultatet kan åskådliggöras genom att göra en linje med värden på svängningstider, och hänga upp varje pendel vid det värde som svarar mot svängningstiden.

Till dessa experimentella undersökningar av hur längd, L, och massa, M, påverkar svängningstiden kan man också lägga tankeexperimentet: vad skulle hända med en gunga på månen, där tyngdaccelerationen, g, bara är en sjättedel av jordens?

Under en hel period passerar gungan den lägsta punkten två gånger. Hur beror svängningstiden (perioden) på pendelns längd? Tidsskalan visar tiden i sekunder för en halv period för danska 1, 2, och 5-kronor och mjuk leksak i snöre.



Matematik med enheter

Fysikaliska storheter som längd, tid, massa och tyngdacceleration skrivs som en produkt av ett tal och en enhet (som i dessa fall är m, s, kg, m / s²). Enheterna i höger- och vänsterledet av en ekvation måste vara desamma. Detta kan utnyttjas för att ta fram formeln för samband mellan de olika variablerna genom så kallad dimensionsanalys eller enhetsanalys. Man gör då en ansats där man gissar att T kan uttryckas med hjälp av en dimensionslös konstant C och potenser av de övriga variablerna som man tror påverkar, t ex

$$T = CM^aL^bg^c$$

Man manipulerar sedan exponenterna för de olika storheterna tills dess att produkten av de ingående enheterna, i detta fall tid (s), längd (m) och massa (kg), blir desamma på båda sidorna om likhetstecknet. I vårt fall mäts tiden T i sekunder (s), så även högerledet måste uttryckas i sekunder. Nedan visas hur det kan gå till.

”Dimensionen” massa, med enheten kg, finns bara i uttrycket för massan – som alltså inte kan påverka svängningstiden. Detta resultat, som kommer fram både från en enhetsanalys och från de experimentella undersökningarna, kan vara överraskande. Det är en av många konsekvenser av den så kallade *ekvivalensprincipen*, att den tunga massan (i m**g**) är densamma som den tröga massan (i m**a**). Detta leder till att rörelser som bara drivs eller bromsas av tyngdkraften inte beror på massan. Den mest kända illustrationen av detta är att samtidigt släppa två föremål och låta dem falla mot marken. Vid fritt fall påverkas föremål bara av tyngdkraften, d v s **F** = m**g**. Enligt Newtons andra lag gäller då att **a** = F / m = **g**, oberoende av massan m.

Dimensionen längd, med enheten m, finns både i L och i g, och dimensionen tid (s) både i T och i g. Villkoret att enheterna ska vara desamma på båda sidor leder till sambandet (jämför med uttrycket ovan)

$$T = CM^0L^{0,5}g^{-0,5} = C\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Konstanten C kan tas fram genom experiment eller genom att man härleder formeln för pendelns rörelse.

Det visar sig att en pendel med längden 1 m har en svängningstid mycket nära 2 sekunder. Den är med god approximation en ”sekundpendel” som alltså svänger fram på en sekund och tillbaka på den andra sekunden. Detta föreslogs som en tidig definition av metern. Samtidigt kan vi ur formeln se begränsningarna i denna definition: svängningstiden beror på tyngdaccelerationen, g. Eftersom g varierar över jordens yta skulle en meterdefinition baserad på sekundpendeln leda till att meterns längd skulle bero på var på jorden man befann sig. Sambandet visar också hur mycket längre svängningstiden skulle bli på månen.

Idealisering, verklighet och matematik

Matematiken är ett självklart verktyg för att studera kraft och rörelse. Med en pendel för tidmätning kunde Galileo studera rörelser på ett mycket mer detaljerat sätt än vad som tidigare var möjligt. Pendeln är ett utmärkt exempel på hur *idealiseringen* av verkligheten möjliggör en matematisk behandling (Wigner, 1960). I matematikens tänkta pendel är snöret masslöst och oelastiskt, upphängningen är friktionsfri och massan i snörets ände är samlad i en punkt. Dessa ideala snören och massor påverkas naturligtvis inte heller av luftmotstånd. De enda krafter som verkar på den punktformiga massan är då tyngdkraften och kraften från det spända, oelastiska snöret som håller massan i en cirkelbana. Trots dessa overkliga idealiseringar är matematiken användbar för att beskriva rörelsen för ett barn i en bildäcksgunga på en lekplats.

Den som sitter i en gunga känner sig inte som en punktpartikel. De varierande krafter som behövs för accelerationen i gungrörelsen känns i hela kroppen. Newtons andra lag, $a = F / m$, visar att acceleration inte bara är en matematisk abstraktion utan mycket påtaglig för den kropp som accelereras. Hastighet och acceleration är vektorer som har storlek och riktning. Acceleration är inte bara fartändring, kroppen märker detta genom den stora upplevda tyngden längst ned under gungandet, när farten har maximum men rörelsen ändrar riktning. Det som kroppen känner kan också mätas och åskådliggöras på annat sätt, t ex genom en liten slinky eller ett spiraldjur.

Kropp och acceleration – fysik och matematik

Newtons lagar talar om kroppars rörelse, som sedan beskrivs matematiskt. För en fysiker är det självklart att en ”kropp” kan vara just en människokropp, men det är inte lika tydligt i läroböcker. Inte minst är det sällsynt med diskussioner av mänskliga upplevelserna av krafter som verkar på den egna kroppen och att koppla dessa krafter till rörelse. Det är då inte så konstigt att studenter inte alltid själva gör denna koppling.

Under en räkneövning satt en grupp förstaårsstudenter och diskuterade kraften längst ned i en gunga. En av studenterna (A) tyckte att accelerationen borde vara noll, eftersom gungan då har störst rörelseenergi och högst fart. En annan student (B) tyckte att detta inte kunde stämma eftersom man känner sig tyngst i bottenläget. De bad om hjälp för att reda ut situationen. Jag har använt denna dialog som utgångspunkt för diagnosfrågor för nya studenter och det är förstås stora variationer i hur studenter svarar på en öppen fråga:

- Accelerationen är noll i nedersta punkten, precis som student A säger. I lägsta punkten börjar gungan stiga. Accelerationen blir då riktad bakåt i stället för framåt som tidigare.
- Accelerationen i nedersta punkten är vinkelrät mot v. Då gäller att den totala accelerationen i nedersta punkten är $a_c = v^2 / r$. Normalkraften, N, måste då motverka g och ge upphov till centripetalaccelerationen (d v s N är stor).
- Man känner sig tyngst i botten för att hastigheten är störst och man får högst centripetalacceleration och därmed stor normalkraft.
- Accelerationen är noll. Tyngden kommer av en centripetalkraft som måste vara stor nog att hålla dig kvar i cirkelrörelsen.
- Accelerationen pekar rakt uppåt. Student A har rätt om man ser på accelerationen i sidled. Student B har också rätt eftersom gungan inte skulle fara uppåt om ingen kraft sköt den uppåt.

Ur svaren ser vi exempel på studenter som inte automatiskt kopplar ihop acceleration med kraft, andra som håller på att utveckla en förståelse för vektorer och de som har en klar bild av hur kraft och acceleration hänger samman.

Prova själv

Gå till en lekplats eller nöjespark. Blunda och känn efter vilka krafter som verkar på den egna kroppen. Hur trycker gungans säte på den som åker? Ta med enkel utrustning för att illustrera krafterna. Med digitalkamerans korta videosekvenser kan rörelsen sparas för en matematisk analys. Det som kroppen känner är verkligt! Ta vara på den egna kroppens upplevelser som hjälp för att förstå begreppet acceleration, med alla dess vektoregenskaper.

Fler exempel på undersökningar på en lekplats finns i de två sistnämnda referenserna.

LITTERATUR

Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959. *Communications on pure and applied mathematics* 13: 1–14.

Matthews M. R. (2004). Idealization and Galileo's pendulum discoveries: historical, philosophical and pedagogical considerations. *Science and Education* 13: 689–715.

Pendrill, A-M. & Williams, G. (2005). Swings and slides. *Physics Education* 40: 527–533. Se också *Lekplatsfysik*. Tillgänglig 2011-12-19 på www2.fysik.org/experiment_och_annat/lekplatsfysik/

Naturskolebladet 71: 2011. Tillgänglig 2011-12-19 på www.naturskolan.lund.se/blad/blad71-lekplatsfysik/blad71.htm