



# LUND UNIVERSITY

## Teoretisk beräkning av temperaturförlopp i hårdnande betong vid gjutning vintertid på kallt underlag.

Claesson, Johan

*Published in:*  
Nordisk Betong

1972

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*

Claesson, J. (1972). Teoretisk beräkning av temperaturförlopp i hårdnande betong vid gjutning vintertid på kallt underlag. *Nordisk Betong*, (1), 1-16.

*Total number of authors:*

1

### General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117  
221 00 Lund  
+46 46-222 00 00

**Teoretisk beräkning  
av temperaturförlopp i hårdnande  
betong vid gjutning vintertid  
på kallt underlag**

**Theoretical Calculation of Variation  
in Temperature with Time in Hardening Concrete  
Poured on Cold Base in Winter-Time**

JOHAN CLAEISSON

Särtryck ur Nordisk Betong Nr. 1, 1972

# Teoretisk beräkning av temperaturförlopp i hårdnande betong vid gjutning vintertid på kallt underlag.

*Theoretical Calculation of Variation in Temperature with Time in Hardening Concrete Poured on Cold Base in Winter-Time*

Johan Claesson

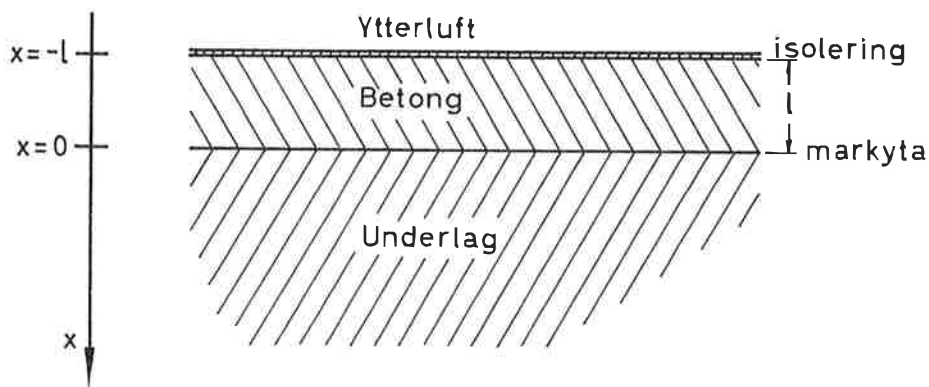
Denna studie har gjorts med anslag från Statens Råd för Byggnadsforskning. Problemet har föreslagits av professor Bergström, LTH, som under arbetet givit många goda råd och annan hjälp.

Vid betonggjutning vintertid skall man undvika att det börjar frysa i betongen innan denna har hunnit hårdna tillräckligt. Det är då av intresse att kunna förutsäga temperaturförloppet i betongen under olika betingelser. I denna artikel presenteras exakta matematiska lösningar i några enkla idealiserade fall. I artikeln utelämnas härledningar, längre formler och redogörelser för motsvarande datorprogram. Detta återfinnes i en arbetsrapport från institutionen för matematisk fysik, LTH, [1].

## *Behandlad problemtyp*

Det är bara i de allra enklaste fallen som det är möjligt att få fram exakta matematiska uttryck för temperaturfördelningen vid olika tidpunkter. I övriga fall kan problemet lösas numeriskt med differensapproximationer av värmeledningsekvationen. Vi begränsar oss i denna undersökning till endimensionella problem. Vi har då ett skikt betong med tjockleken  $l$  placerat på ett fast underlag, exempelvis berggrund. För att motverka nedkylningen från den kalla luften finns ett isolerande skikt mellan betong och luft. Detta har värmeövergångstalet  $H$  ( $J/m^2, s, ^\circ C$ ). Se figur 1.

Betongens begynnelsestemperatur är  $V_1$  och underlaget har begynnelsestemperaturen  $V_2$ . Luftens temperatur är  $V_0$  (ofta  $V_0 = V_2$ ). Vi bortser således från tidsvariationer i lufttemperaturen och från att temperaturen i underlaget kan variera med djupet vid begynnelsestidpunkten. Vi antar också att underlaget ej innehåller något vatten så att det inte kan ske någon frysning i detta. Detta betyder att vår lösning gäller för gjutning på bland annat berggrund och en



Figur 1: Det behandlade problemets geometri. Ett lager betong,  $0 > x > -l$ , gjutes på ett kallt underlag,  $x > 0$ . Mot den kalla luften finns en isolering vid  $x = -l$  ● *Geometry of the problem under consideration. A layer of concrete,  $0 > x > -l$ , is poured on a cold base,  $x > 0$ . The concrete is protected from cold air by thermal insulation at  $x = -l$ .*

torr sand- eller grusbädd. Värmeledningsförmågan i betong betecknas  $\lambda_1$  (J/m, s, °C), dess specifika värme  $c_1$  (J/kg, °C) och dess densitet  $\rho_1$  (kg/m<sup>3</sup>). Motsvarande data för underlaget betecknas  $\lambda_2$ ,  $c_2$  respektive  $\rho_2$ .

Vi antar att betongen under hårdnandet utvecklar värme enligt uttrycket  $A \cdot e^{-\beta t}$ , där  $A$  och  $\beta$  är konstanter och  $t$  är tiden. Detta betyder att i ett litet tidsintervall  $\Delta t$  från tiden  $t$  till tiden  $t + \Delta t$  utvecklas per volymenhet betong värmemängden  $A \cdot e^{-\beta t} \cdot \Delta t$ . Vid användandet av denna formel har vi försummat att värmeutvecklingen strängt taget beror på temperaturförloppet. Denna approximation diskuteras närmare under rubriken: "Ett exempel: . . ." nedan.

Man har som krav att temperaturen i betongen ej får sjunka till 0°C, så att den börjar frysa, förrän efter det att  $TT$ -faktorn har uppnått ett givet för betongtypen karakteristiskt värde. Om temperaturen i en punkt i betongen varierar enligt funktionen  $v(t)$ , så definieras  $TT$ -faktorn för denna punkt vid tiden  $t$  genom:

$$TT(t) = \int_0^t (10 + v(t')) dt'$$

### Matematisk formulering

Temperaturen i betongen,  $-l < x < 0$ , betecknas  $v_1(x, t)$  och i underlaget,  $x > 0$ ,  $v_2(x, t)$ . Här är  $t$  tiden och  $x$  anger djupet enligt figur 1. Index 1 avser hela tiden betongen och index 2 underlaget. För  $v_1(x, t)$  och  $v_2(x, t)$  gäller värmeledningsekvationen:

$$-l < x < 0, t > 0: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{Ae^{-\beta t}}{\lambda_1}$$

Detta är den endimensionella värmeledningsekvationen då man har en värme-  
produktion  $A \cdot e^{-\beta t}$  ( $\text{J}/\text{m}^3, \text{s}$ ).

$$x > 0, t > 0: \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial t}$$

$a_1$  och  $a_2$  är temperaturlledningstal:

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1} \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}$$

Vid tiden  $t = 0$  är temperaturen i betongen  $V_1$  och i underlaget  $V_2$ :

$$\begin{aligned} v_1(x, 0) &= V_1 & -l < x < 0 \\ v_2(x, 0) &= V_2 & x > 0 \end{aligned}$$

Vid gränssytan  $x = 0$  skall temperatur och värmeström vara kontinuerliga. Kravet att temperaturen skall vara kontinuerlig innebär att vi försummar ett eventuellt kontaktmotstånd vid  $x = 0$ . Vi får då villkoren:

$$v_1(0, t) = v_2(0, t), \quad \lambda_1 \left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda_2 \left. \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|_{x=0} \quad t > 0$$

Vid  $x = -l$  skall värmeströmmen över det isolerande skiktet vara lika stor som värmeströmmen i betongen alldeles innanför isoleringen. Detta ger:

$$H(v_1(-l, t) - V_0) = \lambda_1 \left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=-l} \quad t > 0$$

$H$  får anta värden i intervallet  $0 \leq H \leq \infty$  ( $\infty =$  "oändligheten").  $H = 0$  innebär total isolering vid  $x = -l$ , medan  $H = \infty$  innebär att det saknas ett isolerande skikt. Randvillkoret blir då:

$$v_1(-l, t) = V_0 \quad t > 0 \quad (H = \infty)$$

$TT$ -faktorn i en punkt  $x$  i betongen vid tidpunkten  $t$  ges ur:

$$TT(x, t) = \int_0^t (10 + v_1(x, t')) dt' \quad -l \leq x \leq 0, \quad t \geq 0$$

### Diskussion av lösningen

Detta matematiska problem har lösts med hjälp av Laplacetransformer. I [1] finns härledningar och de explicita resultaten i de tre fallen  $H = \infty$ ,  $H = 0$

och  $0 < H < \infty$ . Lösningarna består av en oändlig summa av termer, där varje term innehåller en kombination av "felfunktioner" (error function) för några reella och komplexa argument. I specialfallet  $\lambda_1 \rho_1 c_1 = \lambda_2 \rho_2 c_2$  får vi en enklare lösning utan oändliga summor. Att ur lösningarna få fram temperaturen i en given punkt vid en given tidpunkt kräver i allmänhet en hel del räknearbete. Vi har därför utarbetat datorprogram som utför detta. På dator tar det i det minst gynnsamma fallet mindre än 0.2 sekunder (UNIVAC 1108) att beräkna temperaturen i en godtycklig punkt vid en godtycklig tidpunkt. Dessa program är avsedda att kunna användas utan kunskaper om programmets detaljer. Vid användning krävs enbart en precisering av de olika konstanterna ovan ( $l, H, V_1, \lambda_1$  etc.), samt ett angivande av de punkter och tidpunkter vid vilka temperaturen skall beräknas. Programmet för fallet  $0 < H < \infty$  beräknar också  $TT$ -faktorn i en godtycklig punkt i betongen vid en godtycklig tidpunkt. Programmen beskrivs i [1]. Vi skickar gärna en kopia av programmen på begäran.

### Specialfall: $l = \infty$

I detta grännsfall är betongskiktet oändligt tjockt. Lösningen är av intresse då den med god approximation ger temperaturförloppet under det allra första tidsskedet för det allmänna fallet ( $l$  ändligt) för ett gränsskikt kring  $x = 0$ . Detta beror på att temperaturförloppet i närheten av  $x = 0$  under den allra första tiden bara påverkas av det närmast liggande området. Förhållandena vid  $x = -l$  hinner då inte få någon märkbar inverkan på förloppet kring  $x = 0$ . Lösningen blir i detta specialfall enkel. I [1] visas att temperaturen ges av följande uttryck:

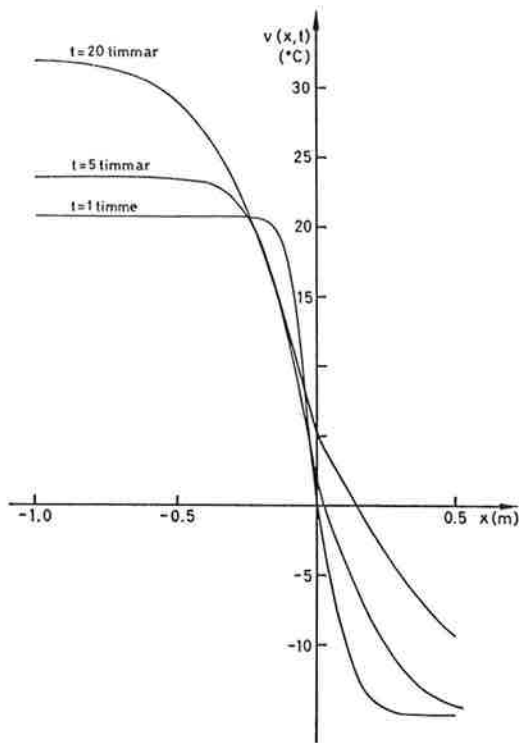
$$v_1(x, t) = \frac{V_1 + \sigma V_2 + c}{1 + \sigma} - c \cdot e^{-\beta t} + \frac{\sigma(V_1 - V_2 + c)}{1 + \sigma} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{-x}{\sqrt{4a_1 t}}\right) +$$

$$+ \frac{\sigma c}{1 + \sigma} \cdot \operatorname{Re}\left\{w_j\left(t, -\frac{x}{\sqrt{a_1}}, \beta\right)\right\} \quad x \leq 0, \quad t > 0$$

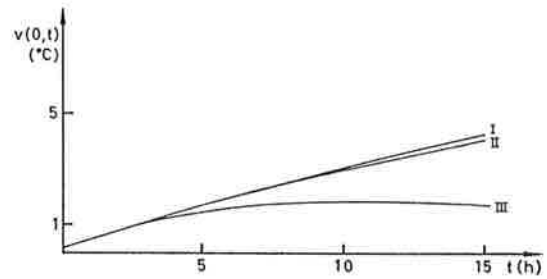
( $\operatorname{Re}$  = "Realdelen av")

$$v_2(x, t) = \frac{V_1 + \sigma V_2 + c}{1 + \sigma} - \frac{V_1 - V_2 + c}{1 + \sigma} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4a_2 t}}\right)$$

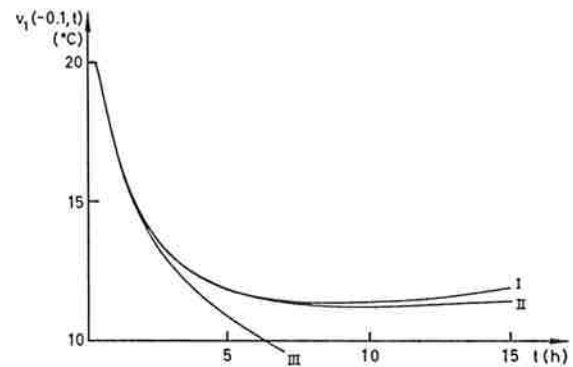
$$- \frac{c}{1 + \sigma} \cdot \operatorname{Re}\left\{w_j\left(t, \frac{x}{\sqrt{a_2}}, \beta\right)\right\} \quad x \geq 0, \quad t > 0$$



Figur 2.



Figur 3.



Figur 4.

Figur 2–18: Exempel på beräknade temperaturförlopp i betong och underlag. Geometri enligt figur 1. Data enligt tabell 1. ● *Examples of calculated time graphs of the temperature in the concrete and in the base. For geometry, see Fig. 1. For data, see Table 1.*

Vi har följande beteckningar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\lambda_2 c_2 \rho_2}{\lambda_1 c_1 \rho_1}} \quad c = \frac{A}{\beta c_1 \rho_1}$$

$erf(\alpha)$  är felfunktionen (error function):

$$erf(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-s^2} ds$$

$erf(\alpha)$  är definierad även för komplexa  $\alpha$ -värden. Denna funktion finns tabellerad i exempelvis [3] för reella  $\alpha$ . I [3] finns också en variant av  $erf$  tabellerad för komplexa  $\alpha$ .

$$w_j(t, \alpha, \beta) = e^{-\beta t} \cdot e^{-i\alpha\sqrt{\beta}} \left( 1 - erf\left(\frac{\alpha}{\sqrt{4t}} - i\sqrt{\beta t}\right) \right)$$

Vid  $x = 0$  får vi följande enklare uttryck på temperaturen:

$$v_1(0, t) = v_2(0, t) = \frac{\sigma V_2 + V_1}{1 + \sigma} + \frac{c}{1 + \sigma} (1 - e^{-\beta t})$$

Tabell 1: Använda data i figurerna 2-18. Betong:  $\lambda_1 = 1.8 \text{ J/m, s, } ^\circ\text{C}$   $\rho_1 = 2400 \text{ kg/m}^3$   $c_1 = 960 \text{ J/kg, } ^\circ\text{C}$   $V_1 = +20^\circ\text{C}$ . Underlag:  $\lambda_2 = 3.5 \text{ J/m, s, } ^\circ\text{C}$   $\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3$   $c_2 = 750 \text{ J/kg, } ^\circ\text{C}$   $V_2 = -15^\circ\text{C}$ .

Figur	$l$ (m)	$H$ (J/m <sup>2</sup> , s, °C)	$V_0$ (°C)	$A$ (J/m <sup>3</sup> , s)	$\beta \cdot 10^5$ (s <sup>-1</sup> )
2	$\infty$	-	-	473	0.610
I	$\infty$	-	-	”	”
3, 4 II	0.5	1.0	-15	”	”
III	0.25	1.0	”	”	”
5	0.25	0	”	”	”
6	0.25	0.5	”	”	”
7	0.25	1.0	”	”	”
8	0.25	2.0	”	”	”
9	0.3	1.0	”	”	”
10	0.5	1.0	”	”	”
11	0.5	$\infty$	0	”	”
		0	-15	”	”
		0.25	”	”	”
12, 13	0.25	0.5	”	”	”
		0.75	”	”	”
		1.0	”	”	”
		2.0	”	”	”
		0	”	”	”
		0.25	”	”	”
14, 15	0.3	0.5	”	”	”
		0.75	”	”	”
		1.0	”	”	”
		2.0	”	”	”
*16	0.25	1.0	”	”	”
*17	0.25	1.0	”	*	*
18	0.25	1.0	”	541	0.696

\* För fallen 16 och 17 har temperaturförloppet beräknats numeriskt enligt metoden med differensapproximationer av värmeledningsekvationen. I fall 16 sker värmeutvecklingen i betongen enligt uttrycket  $A \cdot e^{-\beta t}$ . I fall 17 har ett exaktare experimentellt uttryck utnyttjats enligt [2].



Ett datorprogram som beräknar  $v_1(x, t)$  och  $v_2(x, t)$  för detta specialfall finns i [1]. Ett exempel visas i figur 2. I diagrammet anges temperaturfördelningen i betong och underlag vid olika tidpunkter. Data enligt tabell 1. Detta innebär gjutning med en normal betong på granitberggrund. Vidare är begynnelse-temperaturen för berget  $V_2 = -15^\circ\text{C}$  och för betongen  $V_1 = +20^\circ\text{C}$ .

I figurerna 3 och 4 illustreras användbarheten av detta specialfall  $l = \infty$  som approximation av temperaturförloppet kring  $x = 0$  under ett begynnelse-skede för ett ändligt skikt. Vi har data för betong och underlag enligt tabell 1. I diagrammen anges temperaturförloppet i tre fall: (I)  $l = \infty$ , (II)  $l = 0.5\text{ m}$ , (III)  $l = 0.25\text{ m}$ . Vi har i de tre fallen  $V_1 = +20^\circ\text{C}$  och  $V_2 = -15^\circ\text{C}$ . I de två fallen med ändligt  $l$  har vi  $H = 1.0\text{ J/m}^2\text{ s, }^\circ\text{C}$  och  $V_0 = -15^\circ\text{C}$ . I figur 3 anges temperaturförloppet i gränssytan  $x = 0$  och i figur 4 temperaturförloppet 10 cm in i betongen ( $x = -0.1\text{ m}$ ). Ur figurerna framgår att fallen  $l = +\infty$  och  $l = 0.5$  stämmer bra överens ända upp till 15 timmar, medan vi får klara avvikelser efter cirka 3 timmar i fallet  $l = 0.25$ .

*Villkor:  $V_1 > \sigma(-V_2)$*

Gränssytan mellan betong och underlag antar enligt ovanstående temperaturen  $\frac{\sigma V_2 + V_1}{1 + \sigma}$  vid  $t = 0$  och växer sedan. Om  $\sigma V_2 + V_1 < 0$  gäller ej vår beräkning men vi kan konstatera att vi får en nedfrysning som börjar omedelbart. Man får således följande första villkor: För att undvika omedelbar nedfrysning i gränsskiktet mot det kalla underlaget måste gälla att  $V_1 > \sigma(-V_2)$ , där  $V_2$  är underlagets och  $V_1$  betongens begynnelse-temperatur samt  $\sigma = \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2 / \lambda_1 c_1 \rho_1}$ . Detta gäller också vid mer realistiska tredimensionella fall, ty även här blir värmeströmmen i gränsskiktet mot det kalla underlaget endimensionell under den allra första tiden.

*Uppskattning av nedfrysningens storlek då  $V_1 < \sigma(-V_2)$*

Om  $V_1 + \sigma V_2 < 0$  gäller ej vår lösning, ty vi har vid härledningen förutsatt, att det inte förekommer någon frysning i betongen. Vi får i detta fall en nedfrysning av betongens gränsskikt. Om  $V_1$  ej ligger alltför långt under gränsen  $\sigma(-V_2)$  kommer emellertid detta nedfrysade skikt att efterhand smältas igen på grund av värmeutvecklingen i betongen. Det kan vara av intresse att få en uppfattning om hur pass omfattande nedfrysningen av betongens gränsskikt blir för ett sådant fall. Vi gör för att få fram en matematisk lösning följande antagande: Det nedfrysade skiktet antages under hela nedfrysningstiden vara

så tunnt att vi vid beräkning av temperaturförloppet kan försumma dess tjocklek. Vi får då det enklare villkoret att temperaturen vid  $x = 0$  under hela nedfrysningstiden skall vara  $0^\circ\text{C}$ . Man kan i detta fall beräkna den från  $x = 0$  totalt utströmmande värmemängden under tiden 0 till  $t$ . Detta uttryck dividerat med  $\rho_1 \cdot L_1$ , där  $L_1$  är smältvärmets för det i betongen ingående vattnet (J/kg betong), ger då approximativt tjockleken på det nedfrysta området vid tiden  $t$ ,  $d_{fr}(t)$ . Härledningen finns i [1] för fallet  $l = \infty$ . Detta betyder att resultatet gäller vid gjutning av så tjocka skikt att förhållandena vid  $x = -l$  ej hinner nämnvärt påverka skiktet vid  $x = 0$  under hela den aktuella nedfrysningstiden. Vi får

$$d_{fr}(t) \simeq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{a_1} \cdot A}{\rho_1 L_1} \sqrt{t} \left( t_0 - \frac{t}{3} \right) \quad t_0 = \frac{-(V_1 + \sigma V_2)}{2c\beta}$$

$$\text{Förutsättning: } \frac{-(V_1 + \sigma V_2)}{c} < \frac{1}{6}$$

Tjockleken på det nedfrysta skiktet växer från  $d_{fr}(0) = 0$  till ett maximalt värde då  $t = t_0$  och sjunker sedan till 0 för  $t = 3t_0$ .

För fallen enligt figurerna 2–18, som gäller gjutning med en normalbetong på ett granitunderlag, gäller att  $\sigma = 1.3$ . Om berggrunden har begynnelse-temperaturen  $-15^\circ\text{C}$ , skall då för  $V_1$  gälla att  $V_1 > 1.3 \cdot 15 = 19.5^\circ\text{C}$ . Antag däremot såsom exempel att begynnelsetemperaturen i betongen bara är  $+18^\circ\text{C}$ . Vi antar att betongen innehåller 7.4 viktsprocent vatten. Vi får då:

$$L_1 = 0.074 \cdot 80 \cdot 4186 \text{ J/kg}$$

$$t_0 \simeq 1.1 \text{ timmar}$$

$$d_{fr}(t_0) \simeq 0.3 \text{ cm}$$

I detta speciella fall får vi således en nedfrysning av betongens gränsskikt mot underlaget under de tre första timmarna och det nedfrysta området blir maximalt ungefär 3 mm tjockt.

### *Ett exempel: En normal betong mot berggrund*

Vid gjutning på kallt underlag riskerar man frysning i betongen av två skäl. För det första kan man få en nedfrysning som börjar omedelbart. Villkoret för att undvika detta är enligt ovan att  $V_1 + \sigma V_2 > 0$ . För det andra får vi förr eller senare en nedkylning till  $0^\circ\text{C}$ , då effekten av den omgivande kalla luften och marken börjar slå igenom. För att komma åt detta måste man beräkna hela temperaturförloppet. För att illustrera hur man med lösningarna och datorprogrammen i [1] kan beräkna temperaturförlopp och  $TT$ -faktor, har vi genomfört detta i ett speciellt fall. Vi betraktar gjutning på en granitberggrund

med följande data:

$$\lambda_2 = 3.5 \text{ J/m, s, } ^\circ\text{C} \quad \rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3 \quad c_2 = 750 \text{ J/kg, } ^\circ\text{C}$$

För betongen har vi använt följande data:

$$\lambda_1 = 1.8 \text{ J/m, s, } ^\circ\text{C} \quad \rho_1 = 2400 \text{ kg/m}^3 \quad c_1 = 960 \text{ J/kg, } ^\circ\text{C}$$

Den totala värmeutvecklingen i en punkt i betongen är en funktion av  $TT$ -faktorn för samma punkt enligt [2], där detta funktionssamband ges för standardcement. Vi approximerar denna funktion med ett exponentialuttryck:

$$f(TT) \simeq A_1 \{1 - e^{-\beta_1 \cdot TT}\} \quad (\text{J/kg cement})$$

Värmeutvecklingen,  $h(x, t)$ , per sek. och  $\text{m}^3$  betong blir då:

$$h(x, t) = C_c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{f(TT)\} \simeq C_c \cdot A_1 \cdot \beta_1 e^{-\beta_1 \cdot TT} \cdot (10 + v_1)$$

$C_c = \text{kg cement/m}^3 \text{ betong}$

För att få fram ett hanterligt uttryck på värmeutvecklingen approximeras  $v_1(x, t)$  med ett lämpligt medelvärde  $U_m$ .

Vi får då:

$$v_1(x, t) \simeq U_m, \quad TT(x, t) \simeq (10 + U_m) \cdot t$$

$$h(x, t) \simeq C_c \cdot A_1 \cdot \beta_1 \cdot (10 + U_m) \cdot e^{-\beta_1 \cdot (10 + U_m) \cdot t} = A \cdot e^{-\beta t}$$

där således

$$A = C_c \cdot A_1 \cdot \beta_1 (10 + U_m) \quad \beta = \beta_1 (10 + U_m)$$

Problemet är nu att välja lämpligt värde på  $U_m$  i olika fall. Antag att vi är intresserade av temperaturfördelningen vid tiden  $t_0$ . Vi väljer då  $U_m$  så att vår approximativa  $TT$ -faktor och medelvärdet av den beräknade  $TT$ -faktorn blir ungefär lika:

$$(10 + U_m) \cdot t_0 \simeq \frac{1}{l} \int_{-l}^0 TT(x', t_0) dx'$$

eller

$$U_m \simeq \frac{1}{l} \int_{-l}^0 \frac{TT(x', t_0)}{t_0} dx' - 10$$

Med detta val av  $U_m$  blir den totalt utvecklade värmemängden i betongen vid tiden  $t_0$  approximativt korrekt. För att få fram ett lämpligt  $U_m$  måste man

iterera sig fram. Man gissar först ett rimligt medelvärde. Sedan beräknas  $TT$ -faktorn i olika punkter vid tiden  $t_0$  och härur medelvärdet på  $TT$ -faktorn. Formeln ovan ger sedan vilket värde på  $U_m$  som borde ha valts. Om detta värde och vårt gissade värde ej överensstämmer hyggligt får man försöka med ett nytt värde osv.

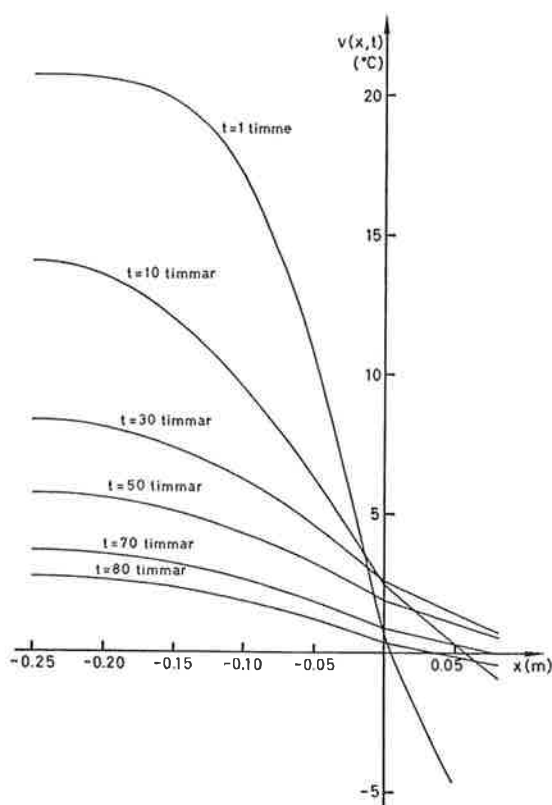
För fallen i figurerna 2–16 har vi något godtyckligt ansatt  $U_m$  till  $+4^\circ\text{C}$ . Vår betong antages innehålla 280 kg cement per  $\text{m}^3$ . Vi får då enligt formler ovan och från [2]:

$$A = 473 \text{ J/m}^3, \text{ s} \quad 1/\beta = 1.64 \cdot 10^5 \text{ s} \simeq 1.9 \text{ dygn}$$

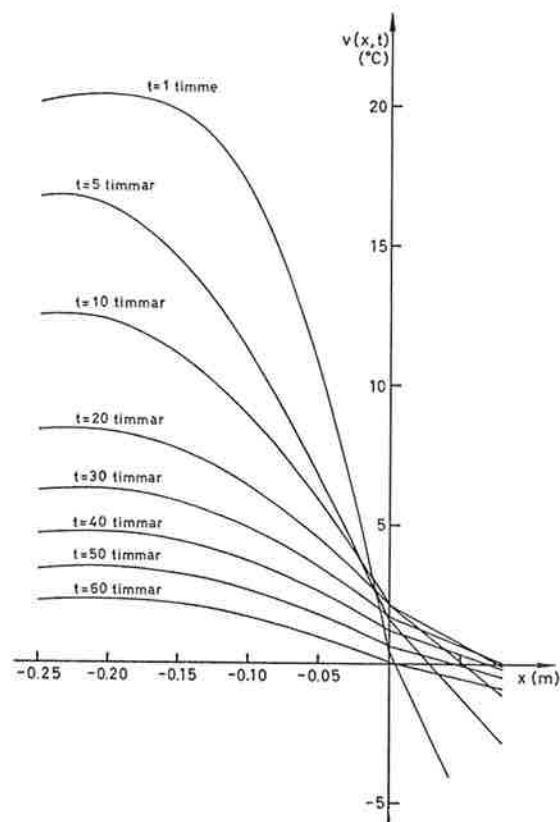
Berggrund och ytterluft antages ha temperaturen  $-15^\circ\text{C}$ . I vårt fall blir  $\sigma = 1.3$ . Således skall gälla  $V_1 > 1.3 \cdot 15^\circ\text{C}$ . Vi sätter betongens begynnelsestemperatur till  $+20^\circ\text{C}$ . Vi har då:

$$V_0 = -15^\circ\text{C} \quad V_1 = +20^\circ\text{C} \quad V_2 = -15^\circ\text{C}$$

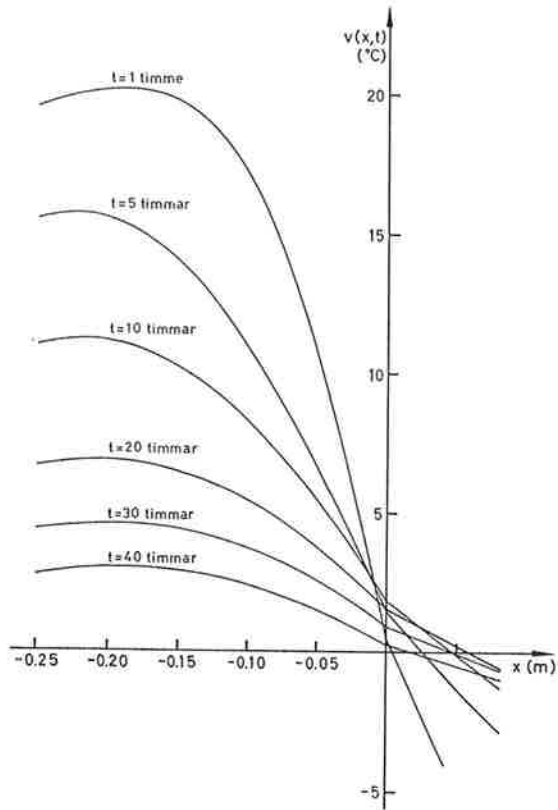
I figurerna 5, 6, 7 och 8 finns för detta fall temperaturfördelningen i betongen och en bit ner i underlaget för några tidpunkter, då tjockleken är  $l = 0.25 \text{ m}$  och isoleringen är  $H = 0, 0.5, 1.0$  respektive  $2.0$ . I figurerna 9 och 10 finns motsvarande resultat för tjockare skikt betong:  $l = 0.30$  respektive  $0.50$  samt



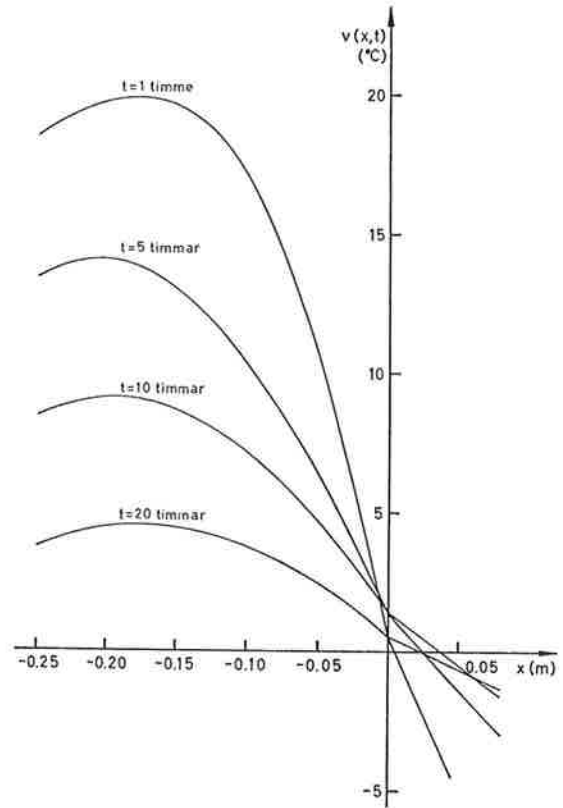
Figur 5.



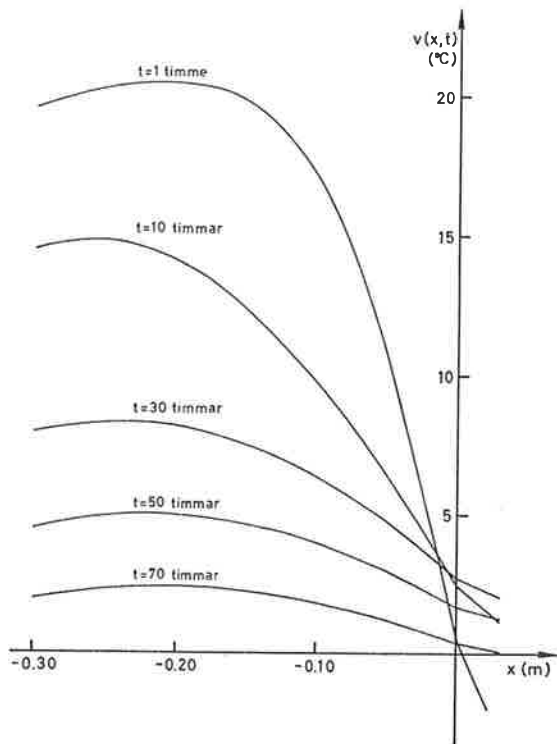
Figur 6.



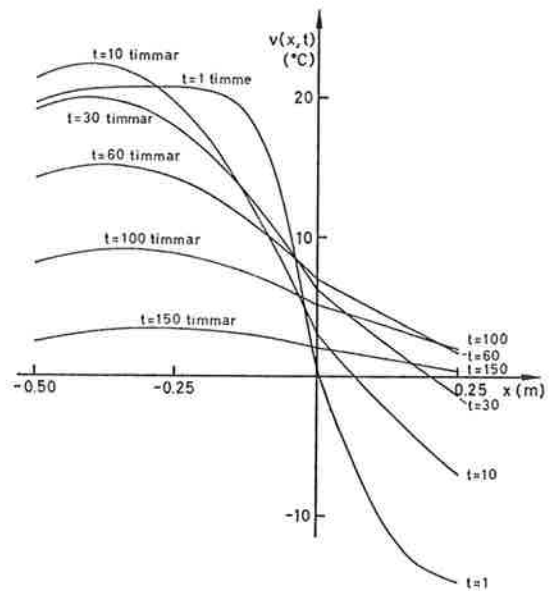
Figur 7.



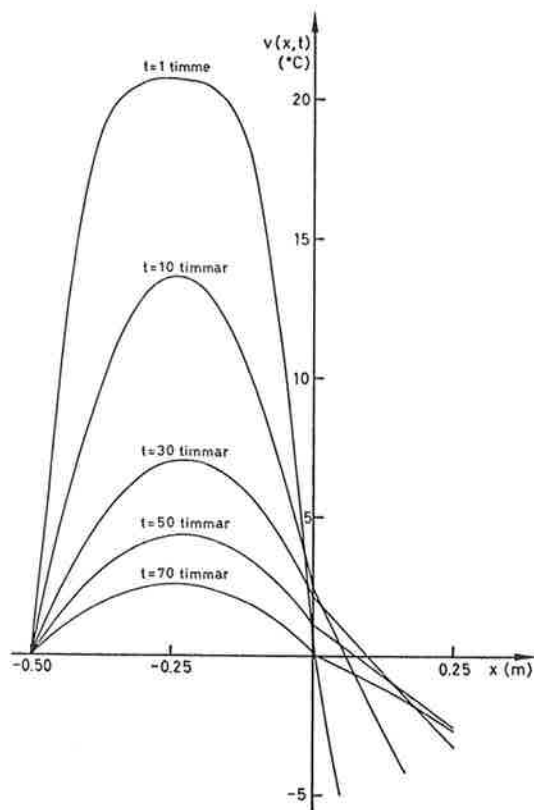
Figur 8.



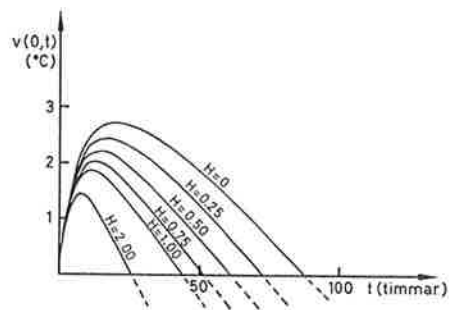
Figur 9.



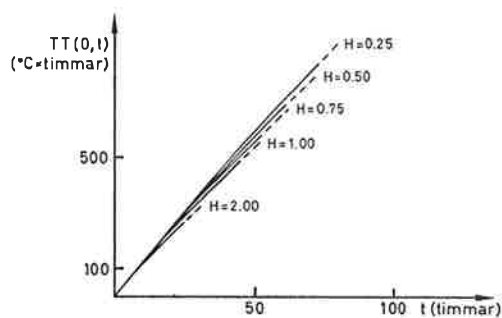
Figur 10.



Figur 11.



Figur 12.



Figur 13.

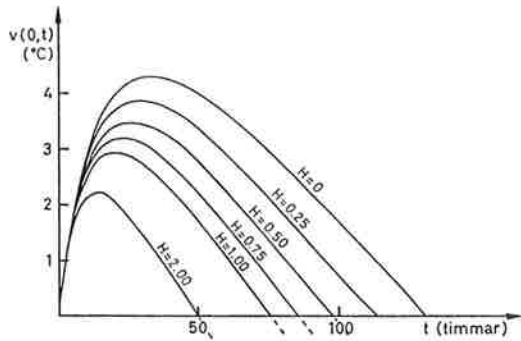
$H = 1.0$ . I figur 11 har vi  $H = \infty$ , dvs. det saknas en isolering mot luften. Då får  $V_0$  ej vara negativ utan vi har satt  $V_0 = 0^\circ\text{C}$ . Vidare är här  $l = 0.5$  m.

I figurerna 5–10 framgår att den kallaste delen i betongen hela tiden är gränsområdet  $x = 0$ . Figur 12 anger speciellt temperaturförloppet i  $x = 0$  då  $l = 0.25$  m för olika  $H$ . Motsvarande  $TT$ -faktor som funktion av tiden finns i figur 13. Figurerna 14 och 15 ger motsvarande resultat då  $l = 0.3$  m. Ur diagrammen framgår att temperaturen är positiv under ett antal timmar  $t_+$  enligt tabell 2.

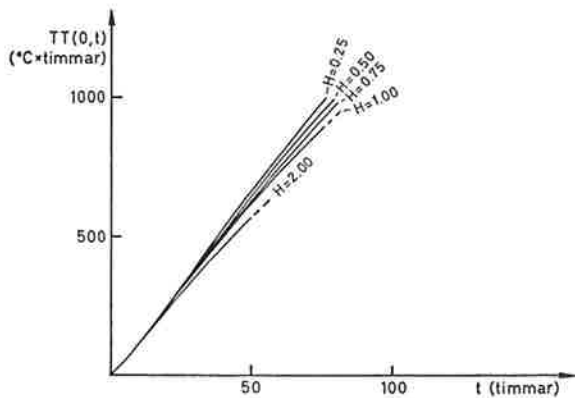
För betong av typ K 300 har man kravet att det ej får börja frysa i denna förrän efter det att  $TT$ -faktorn har uppnått värdet  $30 \text{ dygn} \times ^\circ\text{C} = 720 \text{ tim} \times ^\circ\text{C}$ . Vi bör således för vårt ovanstående exempel för  $l = 0.25$  ha en isolering vars värmeövergångstal  $H$  är mindre än  $0.45 \text{ J/m}^2, ^\circ\text{C}$ , s. Om betongskiktet är  $0.3$  m tjockt bör  $H$  vara mindre än  $1.4 \text{ J/m}^2, \text{ s}, ^\circ\text{C}$  i detta exempel.

### Numerisk lösning

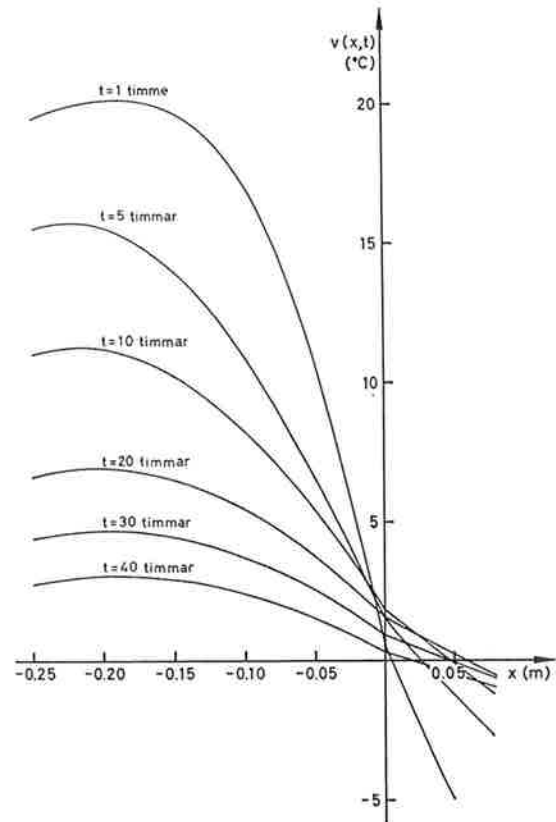
Man kan också lösa vårt värmeledningsproblem numeriskt med differensapproximationer av de partiella derivatorna. Vi har ett dataprogram som beräknar temperaturerna även på detta sätt. Beräkningarna tillgår schematiskt



Figur 14.



Figur 15.



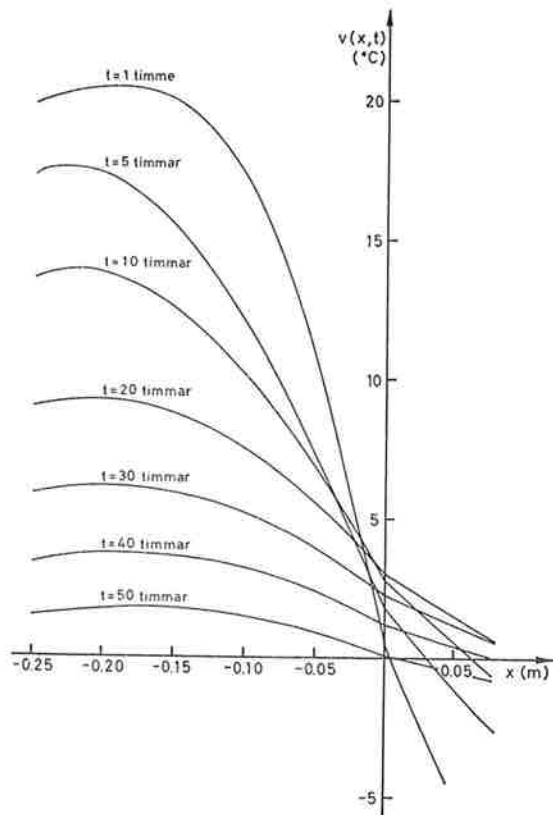
Figur 16.

uttryckt på följande sätt: Temperaturfördelningen vid en tidpunkt approximeras med värden i ett antal gitterpunkter. De nya temperaturerna ett tidssteg senare beräknas ur dessa värden. Man räknar sig framåt tidssteg för tidssteg.

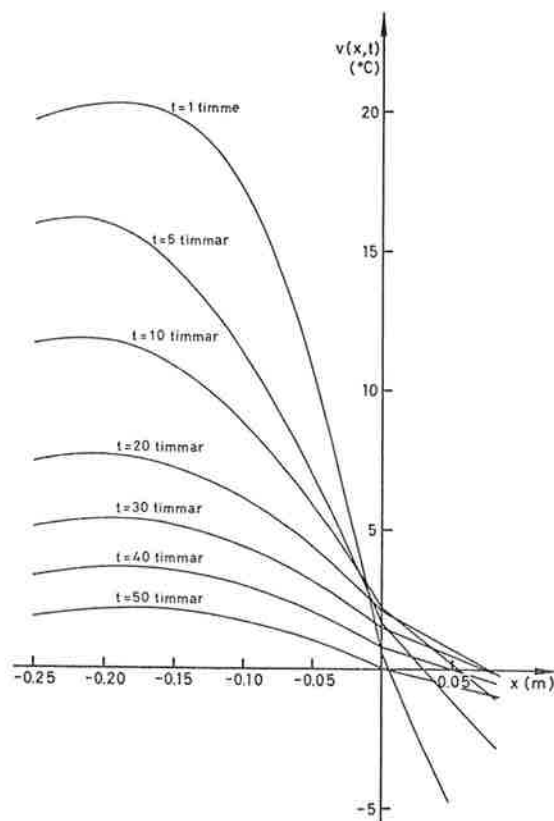
Ju tätare man gör indelningen av området i gitterpunkter, desto noggrannare blir lösningen. För att få en uppfattning om noggrannheten av den numeriska lösningen har vi räknat igenom samma fall som finns exakt i figur 7. Betong-

Tabell 2: *TT*-faktorns värde då frysningsen i betongen börjar för fallen enligt figurerna 12–15.  $t_+$  anger antalet timmar innan det börjar frysa i betongen.  $TT(0, t_+)$  är *TT*-faktorns värde vid  $x = 0$  då frysningsen börjar.

$H$ (J/m <sup>2</sup> , s, °C) =		0	0.25	0.5	0.75	1.0	2.0
$l = 0.25$ (m)	$t_+$ (timmar) . . . . .	87	73	61	51	43	25
	$TT(0, t_+)$ (tim. $\times$ °C) . . .	–	830	690	560	470	270
$l = 0.3$ (m)	$t_+$ (timmar) . . . . .	132	114	98	86	76	50
	$TT(0, t_+)$ (tim. $\times$ °C) . . .	–	–	1180	1030	900	570



Figur 17.



Figur 18.

skiktet var i detta fall 25 cm tjockt. I betongen har vi 10 gitterpunkter och i underlaget totalt 25 stycken. Tidsstegets längd var 2 minuter. Resultatet finns i figur 16. En jämförelse mellan figurerna 7 och 16 ger att den numeriska beräkningmetoden för detta fall ger ett fel på högst  $0.15^{\circ}\text{C}$ .

En mycket väsentlig fördel med den numeriska lösningsmetoden är att man utan större svårigheter kan räkna med det exaktare uttrycket på värmeutvecklingen i betongen. Vi har då använt det experimentella uttrycket  $f(TT)$  på värmeutvecklingen som funktion av  $TT$ -faktorn, som finns i [2]. Resultatet för samma fall som i figurerna 7 och 16 finns i figur 17.

Resultaten i figurerna 7 och 17 skiljer sig nu ganska avsevärt. Enligt figur 7 tar det 43 timmar innan det börjar frysa i betongen, medan det enligt det riktigare numeriska fallet enligt figur 17 tar 50 timmar. Denna diskrepans beror på att vi valt ett olämpligt  $U_m$ . Vi hade valt  $U_m = 4.0^{\circ}\text{C}$ . För att få fram ett bättre värde på  $U_m$  beräknar vi för  $U_m = 3.0, 4.0, 5.0, 6.0$  och  $7.0^{\circ}\text{C}$  medelvärdet av  $TT$ -faktorn för tiden  $t_0 = 50$  timmar. Detta ger ett beräknat lämpligt värde på  $U_m$  enligt formel i avsnittet "Ett exempel...":  $U_m = 5.2, 5.5, 5.8, 6.1$  respektive  $6.3$ . Vi bör således välja  $U_m = 6.0^{\circ}\text{C}$ . Detta ger nya värden på  $A$  och  $\beta$ :

$$A = 541 \text{ J/m}^3, \text{ s}$$

$$\beta = 0.696 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Resultatet för detta fall finns i figur 18.



Figurerna 17 och 18 stämmer väl överens för tiden kring 50 timmar. Frysningen börjar i båda fallen efter 50 timmar. Störst diskrepans har vi efter ungefär 20 timmar. Den analytiska lösningen enligt figur 18 ligger för lågt beroende på att den totala värmeutvecklingen har underskattats. Vi har ju beräknat värmeutvecklingen efter att temperaturen i betongen hela tiden är  $6.0^{\circ}\text{C}$  medan temperaturen i betongen i verkligheten är större och därigenom är värmeutvecklingen också större.

Att räkna igenom ett sånt här fall med den numeriska metoden tar på dator (UNIVAC 1108) i storleksordningen 20 sekunder. För den analytiska lösningen tar det ungefär 0.1 sekunder att beräkna temperaturen och  $TT$ -faktorn i en punkt vid en tidpunkt. Dessa olika datorprogram skall användas för beräkning av  $TT$ -faktorn i betongen då det börjar frysa i denna. Det räcker således ofta för våra syften att beräkna temperatur och  $TT$ -faktor vid  $x = 0$  för ett par tidpunkter. Således kräver den analytiska lösningen mindre datortid. I gengäld krävs extra beräkningar för att få fram lämpliga  $U_m$  för olika fall.

### *Vidareutveckling*

Vi planerar en artikel där de ovan omtalade datorprogrammen utnyttjas för beräkning av temperaturförlopp i hårdnande betong i ett antal tekniskt representativa fall. Syftet är att i diagramform ange minimal begynnelsestemperatur i betongen för att undvika för tidig frysning i denna för olika värden på konstanterna  $V_2$ ,  $l$ ,  $H$  osv. Vi arbetar även på motsvarande tvådimensionella problem. Vi håller på att utarbeta datorprogram för numerisk beräkning för detta fall. Som ett komplement till studierna av det endimensionella problemet håller vi också på att studera temperaturförloppet vid kanter och hörn som gränsar till det kalla underlaget.

### *Summary*

*This article presents analytical solutions which represent the variation in temperature with time in hardening concrete. A layer of concrete is assumed to be poured on a cold base in winter-time. Thermal insulation is supposed to be placed above the concrete layer in order to protect it from cold air. The problem studied in the present article is considered to be one-dimensional. The generation of heat in the concrete is assumed to be uniform through out the concrete layer, and to decrease in accordance with an exponential function with time. When the concrete is poured on a cold base, the boundary layer of concrete in contact with the base may be exposed to freezing, which starts immediately. The condition that shall be*

*satisfied in order to prevent this freezing is stated in the article. Furthermore, the article gives an approximate expression for determining the thickness of the frozen concrete boundary layer on the assumption that the above-mentioned condition is nearly, although not completely, satisfied. The calculated temperature-time graphs for some cases are exemplified in the article. These results are also compared with the corresponding results of numerical calculations carried out by means of the calculus of finite differences. Deductions, detailed formulae, and instructions for the preparation of the relevant computer programmes are to be found in a separate report.*

### *Referenser:*

- [1] *J. Claesson*: Analytiska lösningar och program för beräkning av temperaturförlopp i hårdnande betong. Arbetsrapport från institutionen för matematisk fysik, LTH.
- [2] *Sven G. Bergström*: Materialproblem vid vinterbetongarbeten, Svenska forskningsinstitutet för cement och betong vid KTH.
- [3] *Abramowitz-Stegun*: Handbook of Mathematical Functions. Dover.

Eventuella diskussionsinlägg skall vara huvudredaktionen tillhanda senast den 1.6.1972

Johan Claesson, tekn. lic.  
Avd. för Matematisk Fysik, LTH  
Lund