



LUND UNIVERSITY

Stabilisering av plattformar med enaxliga gyroskop

Sammanfattning av licentiatavhandling i regleringsteknik vid Kungliga Tekniska Högskolan

Åström, Karl Johan

1960

Document Version:

Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Åström, K. J. (1960). *Stabilisering av plattformar med enaxliga gyroskop: Sammanfattning av licentiatavhandling i regleringsteknik vid Kungliga Tekniska Högskolan*. Kungliga Tekniska Högskolan, KTH / Royal Institute of Technology.

Total number of authors:

1

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

STABILISERING AV PLATTFORMAR MED ENAXLIGA GYROSKOP

Sammanfattning av licentiatavhandling i regleringsteknik

vid

Kungl. Tekniska Högskolan

av

Karl-Johan Åström

Rättelser:

sid 20:

$$\gamma_0 = \beta^2 + 2\xi\beta p$$

skall vara

$$\tau_0 = (\beta^2 + 2\xi\beta p) p^{-2}$$

sid 24:

egen frekvensen

skall vara

perioden

STABILISERING AV PLATTFORMAR MED ENAXLIGA GYROSKOP

Sammanfattning av licentiatavhandling i regleringsteknik

vid

Kungl. Tekniska Högskolan

av

Karl-Johan Åström

Avhandlingen innehåller följande arbeten:

- (a) K-J Åström Characteristics of a Stable Platform.
TTN-Gruppen Rapport 591201

- (b) K-J Åström A Schuler-tuned three-gyro platform system.
TTN-Gruppen Rapport 591202

- (c) K-J Åström Inertial navigation systems with three
single axis gyros and a physical pendulum.
TTN-Gruppen Rapport 600203

INNEHÅLL

1. SAMMANFATTNING AV TIDIGARE RESULTAT. FORMULERING AV PROBLEM-STÄLLNINGEN

2. SYNTES AV PLATTFORM STABILISERAD TILL INERTIALSYSTEMET
 - 2.1 Enaxligt system
 - 2.2 Treaxligt system
 - 2.21 Plattformens rörelseekvation
 - 2.22 Systemets stabilitet
 - 2.23 Syntes av treaxligt system

3. SYNTES AV VERTIKALINDIKERANDE PLATTFORMAR

4. SAMMANFATTNING

REFERENSER

1. SAMMANFATTNING AV TIDIGARE RESULTAT. FORMULERING AV PROBLEMSTÄLLNINGEN

Med stabilisering av en plattform till ett koordinatsystem avses att arrangera ett system så att plattformens orientering kommer att sammanfalla med det valda koordinatsystemet.

Det koordinatsystem till vilket man önskar stabilisera plattformen kan vara bundet t.ex. till inertialsystemet eller till jorden.

Såvitt framgår av den öppna litteraturen är plattformar uteslutande uppbyggda på följande sätt:

Plattformen, som utgöres av ett mekaniskt fundament, är med hjälp av ett system av kardanringar frigjord från underlagets vridningsrörelser. I kardanringarnas knutpunkter finns servomotorer med vars hjälp moment kan appliceras på plattformen. Plattformens avvikelser från den önskade referensen avkännes med gyroskop placerade på plattformen. Signalerna från gyroskopen filtreras och distribueras till momentmotorerna på sådant sätt att plattformen strävar att bibehålla den önskade referensen.

De gyroskop som användes är en- eller tvåaxliga. Plattformar med den största stabiliseringsnoggrannheten är hittills baserade på enaxliga gyroskop.

Servosystemet för en plattform med tvåaxliga gyroskop är ett rent följeservo. Syntes av system baserade på enaxliga gyroskop är mer komplicerat, dels p g a att gyrots dynamik ingår i servokretsen och dels p g a de korskopplingar som orsakas av gyroskopets ofullkomligheter. Vid system baserade på enaxliga gyroskop kan dessutom gyroskopens reaktionsmoment utnyttjas för stabiliseringen, något som, såvitt bekant, ej diskuterats i den tillgängliga litteraturen. Det moderna enaxliga gyroskopet har utvecklats efter idéer, framför allt av professor C.S. Draper (1) vid MIT, Boston, Mass., USA.

Plattformar med enaxliga gyroskop har bl.a. konstruerats av professor Draper vid MIT och finns kommersiellt tillgängliga. En mångfald analyser av dessa typer av plattformar har publicerats.

Se t.ex. Draper, Wrigley, Grohe (1), Draper, Woodbury (2), Chandler och Canon (3), Mitsutomi (4) och Gorczycki (5). I dessa arbeten har konventionella servotekniska metoder applicerats på analys av plattformservon. Det fundamentala problemet är att

plattformen skall bibehålla sin orientering oberoende av de störmoment som påverkar densamma.

De syntesmetoder som presenteras i ref (1), (2), (3), (4) och (5) är baserade på analyser av enaxliga system. I ref (3) anges några olika metoder att utföra detta. Tekniken går ut på att välja en överföringsfunktion från gyroskop till momentmotor så att de störmoment som verkar på plattformen ger tillräckligt små vinkelfel hos plattformen. Några systematiska försök att anknyta syntesen till de regleringstekniska standardmetoderna har ej funnits. Ofta har gyrots reaktionsmoment försummats. För ett speciellt fall har dock i ref (3) inverkan av gyrots reaktionsmoment påtalats. Någon systematisk metod att utnyttja gyrots reaktionsmoment vid servodimensioneringen har ej givits.

Ett enaxligt gyroskop mäter ej enbart vridningen kring sin inaxel utan ger även signal då det vrides kring utaxeln. Denna utaxelkänslighet ger upphov till korskopplingar mellan de olika kanalerna i ett treaxligt system. I ett treaxligt system erhålles korskopplingar även av andra orsaker, t.ex. av sekundära reaktionsmoment från gyroskopet, asymmetri hos plattformens tröghetsellipsoid, plattformens totalspin etc. Den korskoppling som orsakas av gyroskopens utaxelkänslighet finns i ett specialfall behandlad i ref (3). Där konstateras att korskopplingen minskar systemets stabilitetsmarginal, samt även att effekten är beroende på gyrosnurrornas rotationsriktning. Samma sak konstateras även av Mayer (6). Några systematiska undersökningar av inverkan av utaxelkänsligheten har ej hittats i den tillgängliga litteraturen. Detta är mycket naturligt då en storleksordningsmässig uppskattning visar att de sekundära reaktionsmomenten ligger avsevärt under friktionsnivån för utförda plattformar.

Då författaren, i slutet av år 1958, började de undersökningar som ligger till grund för avhandlingens första del skulle följande problem lösas;

Angiv en systematisk metod för att dimensionera plattformssystem med enaxliga gyroskop. Metoden skall vara tillämpbar såväl på "klassiska" Draper-system med små signalgyroskop som på system där gyrots reaktionsmoment aktivt bidrager vid stabiliseringen.

För att lösa detta problem måste bl.a. följande delproblem besvaras:

Hur påverkas det treaxliga systemet av korskopplingar orsakade av gyrots utaxelkänslighet, gyronas sekundära reaktionsmoment etc?

Det var dessutom önskvärt att plattformens rörelseekvationer uppställdes så fullständigt som möjligt så att diverse detaljproblem av stor komplicitet vid ett eventuellt projekt skulle kunna behandlas på matematikmaskin. Tänkbara problem var t.ex. inverkan av icke-linjära termer i rörelseekvationer, nonortogonalitet hos gyroskopens inaxlar etc.

2. SYNTES AV PLATTFORM STABILISERAD TILL INERTIALSYSTEMET

2.1 Enaxligt system

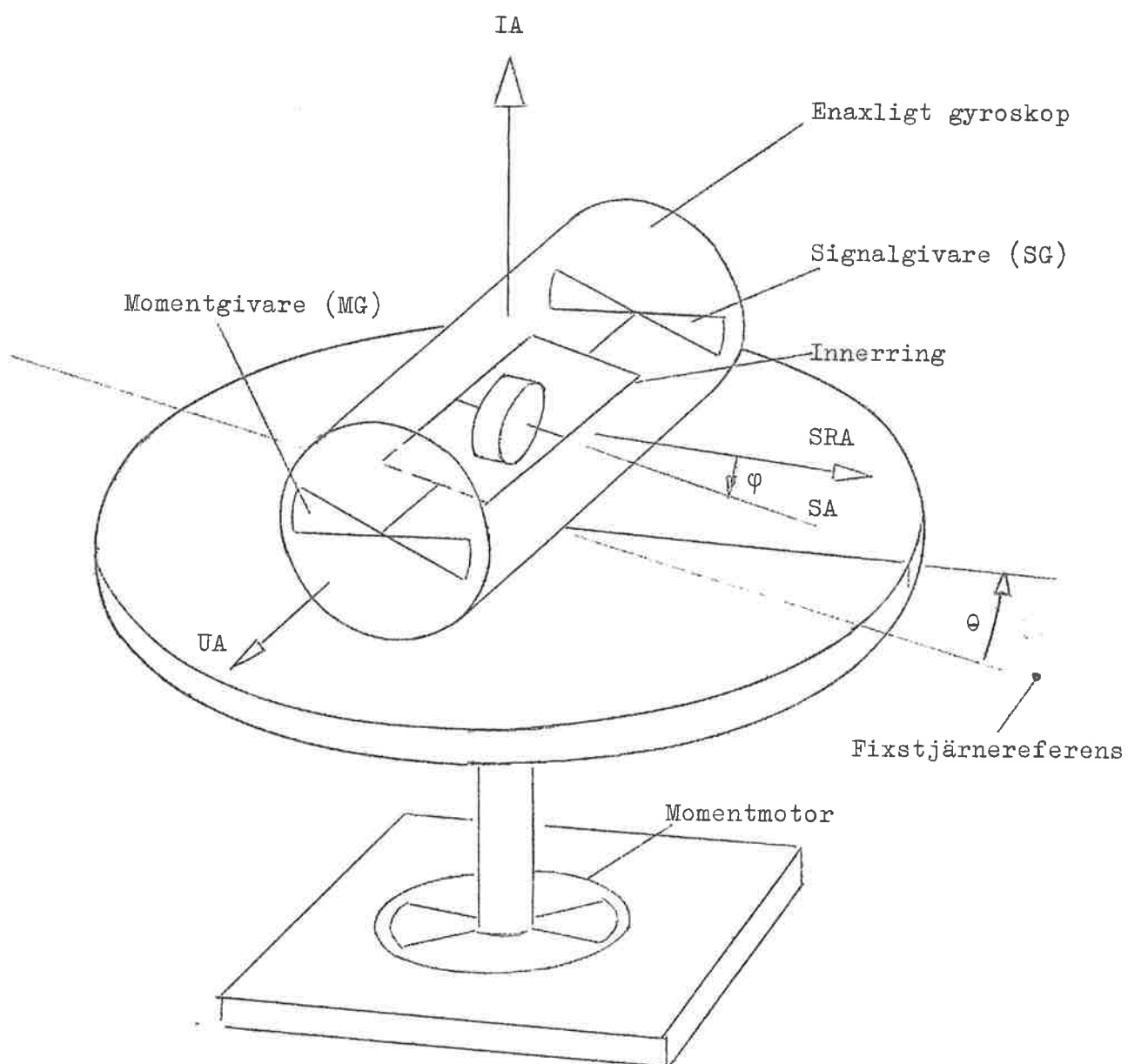
Vi behandlar först det enaxliga fallet där systemets fysikaliska egenskaper lätt kan överblickas. Syntesproblemet för det enaxliga systemet är löst i avhandlingens första del (a).

Fig. 1 visar en schematisk bild av det enaxliga systemet mekaniska uppbyggnad. Plattformen är vridbar kring en vertikal axel. På plattformen har ett enaxligt gyroskop placerats. Gyroskopets inaxel är parallell med plattformens vridningsaxel. Plattformens vridningar ger upphov till en vridning (φ) av gyrots innerring kring dess utaxel. Gyrots utsignal (φ) avkännes, filtreras, förstärkes och tillföres plattformens momentmotor, som ger ett moment på plattformen av sådan riktning att plattformens rörelse motverkas. Gyrots utsignal kan även tillföras gyroskopets momentgivare (MG).

Fig. 2 visar signalflödesdiagrammet för den enaxliga plattformen.

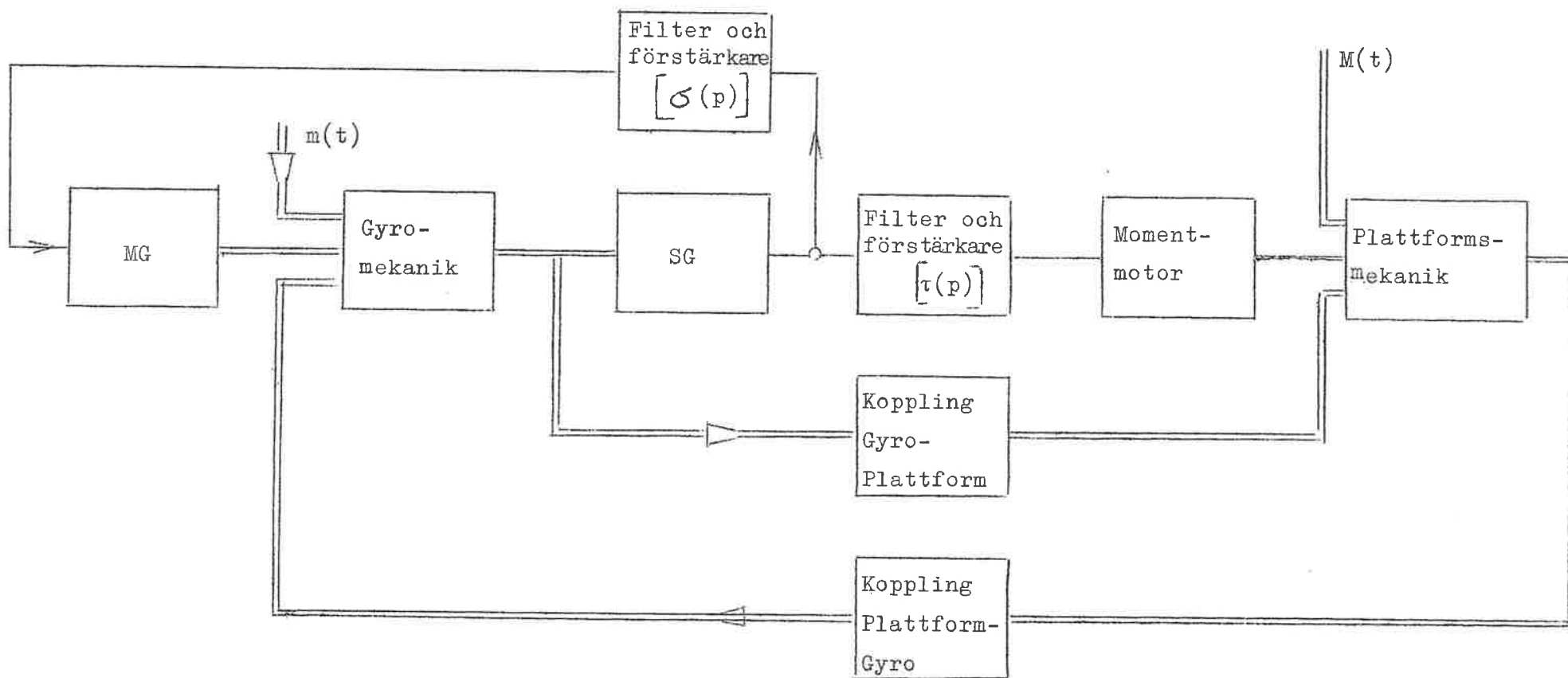
Inför följande beteckningar

ω_0	gyrorotorns vinkelhastighet
J	gyrorotorns tröghetsmoment m a p spinaxeln
aJ	tröghetsmomentet för gyrots innerring, inkl. gyrorotor, m a p utaxeln
bJ	tröghetsmomentet för plattformen m a p vridningsaxeln



IA inaxel
 UA utaxel
 SA spinaxel
 SRA spinreferensaxel

Figur 1. Förenklad bild av enaxlig gyroplattform



Figur 2. Signalflödesdiagram för enaxlig gyroplattform

$J \zeta(p)$	överföringsfunktionen från gyrots utsignal φ till moment verkande på gyrots innerring. (Momentet överföres via viskös friktion och gyrots momentgivare)
$J \tau(p)$	överföringsfunktionen från gyrots utsignal till moment verkande på plattformen. (Momentet överföres via plattformens momentmotor)
$J M(t)$	störmoment verkande på plattformen
$J m(t)$	störmoment verkande på gyrots innerring
φ	gyrots utsignal
θ	plattformens orienteringsvinkel

Plattformens rörelseekvation kan efter linearisering skrivas

$$b p^2 \left[1 + Y_o \right] \theta(p) = M(p) + \frac{b}{\omega_o p} Y_o m(p) \quad (1)$$

där

$$Y_o = \frac{\omega_o}{abp} \cdot \frac{\omega_o p + \tau(p)}{p^2 + \zeta(p)}$$

För härledning av ekvation (1) hänvisas till avhandlingens första del (a). Ekvationen kan illustreras med blockschemat i fig. 3.

Syntesproblemet för en enaxlig plattform kan formuleras på följande sätt:

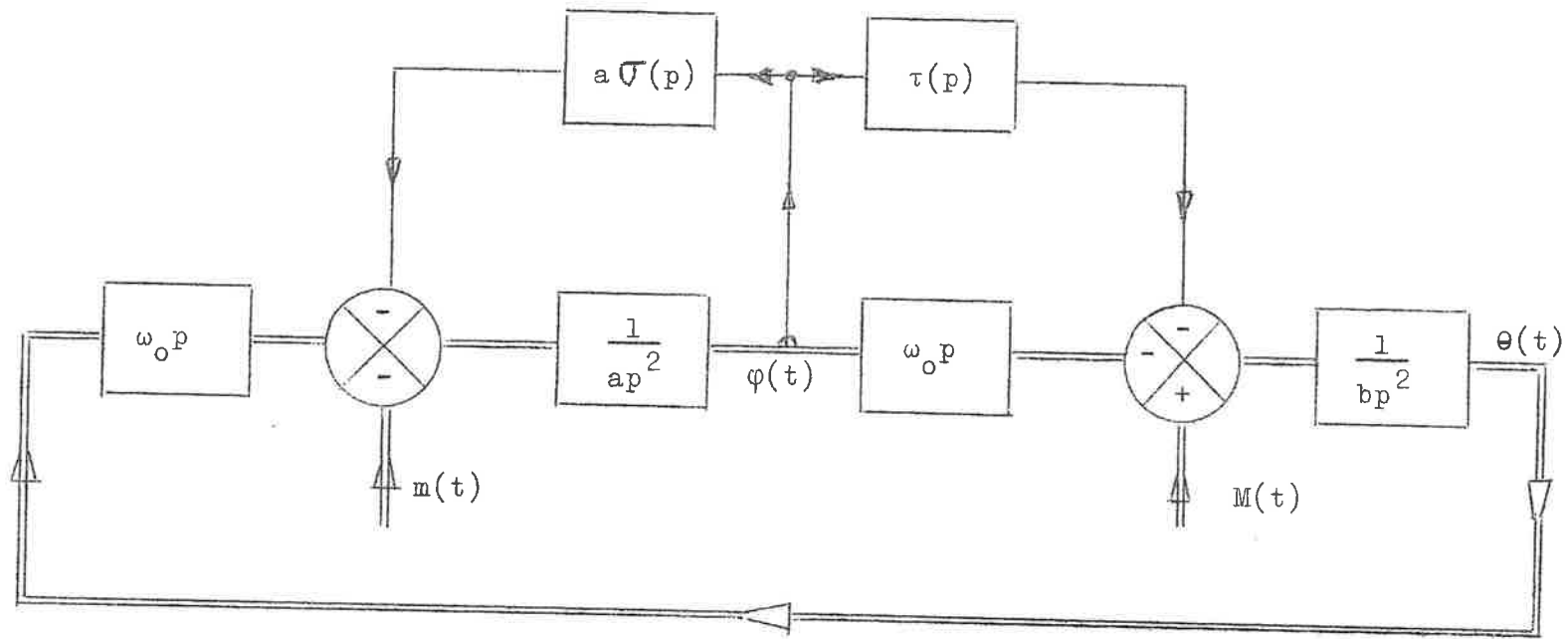
Problem

Bestäm överföringsfunktionerna $\zeta(p)$ och $\tau(p)$ så att plattformens stabiliseringsfel hålles inom tolerabla gränser vid de störningar som normalt verkar på plattformen.

I avhandlingens första del (a) anges följande metod för att lösa detta problem.

1. Bestäm överföringsfunktionen $Y_o(p)$ så att störningarna dämpas på ett tillfredsställande sätt.
2. Bestäm sedan överföringsfunktionen $\zeta(p)$ och $\tau(p)$ ur relationen

$$\frac{\omega_o}{ab} \cdot \frac{\tau(p) + \omega_o p}{p \left[p^2 + \zeta(p) \right]} = Y_o(p)$$



Figur 3. Blockschema för enaxlig gyroplattform

Synpunkter på val av överföringsfunktionen $Y_o(p)$

Om de specifikationer som ställes på systemet är tillräckligt detaljerade kan överföringsfunktionen $Y_o(p)$ bestämmas med någon optimeringsmetod. Detta är t.ex. fallet om störningarna $m(t)$ och $M(t)$ är svagt stationära, stokastiska processer. Vid optimeringsförfarandet får hänsyn tagas till begränsningar hos de komponenter, såsom momentmotorer o.dyl., som måste ingå i systemet.

I allmänhet finns endast ofullständiga uppgifter om de störningar som verkar på systemet. De specifikationer som kan ställas på systemet är då ej tillräckliga för att entydigt bestämma överföringsfunktionen $Y_o(p)$. Man får då välja $Y_o(p)$ fritt inom ramen för de specifikationer som givits. Detta är en ofta förekommande situation inom regleringstekniken och ett stort antal metoder för dess lösning har utvecklats. Standardmetoderna förutsätter att specifikationerna ges i form av värden på vissa systemparametrar såsom felkonstanter, bandbredd etc.

Vi skall göra några enkla överläggningar som visar hur de primära kraven på stabiliseringsnoggrannheten hos systemet kan överföras till sådana specifikationer som behövs för att regleringsteknikens standardmetoder skall kunna tillämpas.

Exempel 1

Välj

$$Y_o(p) = A_1$$

och antag att störmomentet $m(t) \equiv 0$. Systemets rörelse-ekvation (1) lyder då

$$b(1 + A_1) \ddot{\theta} = M$$

För en observatör som analyserar systemet genom att applicera moment på plattformen har denna således samma egenskaper som en stel kropp med tröghetsmomentet

$$b(1 + A_1)J \quad \left[\text{kg m}^2 \right]$$

Genom att välja $Y_o(p)$ så att den innehåller en faktor A_1 kan således plattformens tröghetsmoment skenbart ökas med beloppet $A_1 J b$. Denna effekt kan utnyttjas bl.a. för Schuleravstämningen på ett sätt som författaren utvecklat tillsammans med civing Folke Hector, se avsnitt 3.

Exempel 2

Välj

$$Y_o(p) = \frac{A_2}{p}$$

och antag att störmomentet $m(t) \equiv 0$.

Systemets rörelseekvation lyder då

$$b \ddot{\theta} + A_2 b \dot{\theta} = M$$

För en observatör som analyserar systemet genom att applicera moment på plattformen har denna således samma egenskaper som en stel kropp med tröghetsmomentet bJ vars vridningsrörelser relativt inertialsystemet är dämpade med ett moment $A_2 Jb\dot{\theta}$ [Nm].

Exempel 3

Välj

$$Y_o(p) = A_3 \cdot \frac{1}{p^2}$$

och antag att störmomentet $m(t) \equiv 0$.

Plattformens rörelseekvation (1) kan då skrivas

$$b \ddot{\theta} + A_3 b \theta = M$$

För en observatör som analyserar systemet genom att applicera moment på plattformen har denna således samma egenskaper som en stel kropp med tröghetsmomentet bJ som, med avseende på vridningsrörelser, är fjäderfjättrad till inertialsystemet. Fjättringen är linjär och har fjäderkonstanter.

$$A_3 Jb \text{ [Nm/rad]}$$

Dessa enkla exempel ger en fysikalisk tolkning av överföringsfunktionen $Y_o(p)$ och motiverar följande definition:

Definition 1

En enaxlig plattform säges vara bunden till inertialsystemet eller fixstjärnebunden om

$$Y_o(p) \Rightarrow \frac{A_n}{p^n} \quad p \rightarrow 0, \quad A_n \neq 0$$

för något $n \geq 2$.

Enligt exempel 3 motsvarar $n=2$ att plattformen är fjäderfjättrad till inertialsystemet, $n > 2$ innebär ännu fastare koppling mellan plattformen och inertialsystemet. Definitionen innebär således att en plattform för att vara fixstjärnebunden åtminstone måste vara fjäderfjättrad till inertialsystemet.

Definitionen medför att följande krav måste ställas på servosystemets felkoefficienter

$$K_p = \infty$$

$$K_v = \infty$$

För en plattform som är fjäderfjättrad till inertialsystemet gäller följande samband mellan fjättringskonstanten k [Nm/rad] och servosystemets accelerationskonstant K_a

$$k = J \cdot b \cdot K_a$$

Hittills har störmomentet $m(t)$ på gyrots innerring försumrats. Följande sats, som är en omedelbar konsekvens av definition 1, säger något om dess inverkan.

Sats 1

För en fixstjärnebunden plattform gäller för överföringsfunktionen från störmoment $m(t)$ till plattformens vridningsvinkel

$$\frac{\theta(p)}{m(p)} \Rightarrow \frac{1}{\omega_o p} \quad p \rightarrow 0$$

Satsen innebär således att ett konstant obalansmoment på gyroskopets innerring ger ett vinkelfel hos plattformen som växer linjärt med tiden. Fenomenet brukar kallas gyrodrift och beror på att gyroskopet reagerar på samma sätt för ett obalansmoment kring dess utaxel som för en vinkelhastighet längs inaxeln.

En vridning av plattformen på ett föreskrivet sätt relativt inertialsystemet utföres genom att applicera moment på gyrots innerring med hjälp av momentgivaren. Enligt sats 1 kommer då plattformens vridningsvinkel väsentligen att vara proportionell mot det pålagda momentets tidsintegral. Detta har medfört att en stabiliserad plattform i amerikansk litteratur ofta kallas "integrating drive".

De förberedande undersökningarna har således givit en inblick i systemets verkningsätt och givit riktlinjer för val av överföringsoperatör $Y_0(p)$. Sammanfattningsvis har följande resultat erhållits.

1. Vinkelfel orsakade av störmoment på plattformen kan göras godtyckligt små genom lämpligt val av $Y_0(p)$.
2. Vinkelfel orsakade av störmoment på gyrots innerring kan endast i mycket ringa omfattning påverkas genom val av $Y_0(p)$.^{***}

Synpunkter på val av $\sigma(p)$ och $\tau(p)$ sedan Y_0 bestämts

Sedan överföringsfunktionen $Y_0(p)$ bestämts erhålles $\sigma(p)$ och $\tau(p)$ ur relationen

$$\frac{\omega_0}{ab} \cdot \frac{\tau(p) + \omega_0 p}{p[p^2 + \sigma(p)]} = Y_0$$

Det är således möjligt att fastlägga endera $\sigma(p)$ eller $\tau(p)$ godtyckligt och sedan bestämma den återstående ur ovanstående relation. Termen $\omega_0 p$ i täljaren härrör från gyrots reaktionsmoment. Denna term medför att det är möjligt att välja $\tau(p) \equiv 0$, vilket motsvarar ett system utan momentmotorer. I detta fall utnyttjas således gyrot både som signalgivare och momentmotor. Detta ställer mycket stora krav på komponenterna. Gyroskop av denna typ med hög noggrannhet finns ej tillgängliga. Ett system av detta slag har även vissa andra nackdelar

^{***} Gyroskopet har en viss vibrationskänslighet. Då vibrationernas transmission till gyroskopet påverkas av valet av Y_0 kan störmomentens storlek variera med Y_0 .

som beröres i ref. 11. Även om det kan vara ofördelaktigt att använda gyroskopens reaktionsmoment för plattformsstabiliseringen kan det innebära vissa fördelar att låta gyroskopens reaktionsmoment sköta en del av stabiliseringen. Gyrots reaktionsmoment verkar ju direkt på plattformen utan att fördröjas i tidskonstanter i servomotorer o.dyl. Genom att på detta sätt utnyttja gyroskopet kan i vissa fall servosystemets kompensering snät förenklas. Detta förutsätter anpassning mellan plattformens mekaniska egenskaper och servosystemets bandbredd.

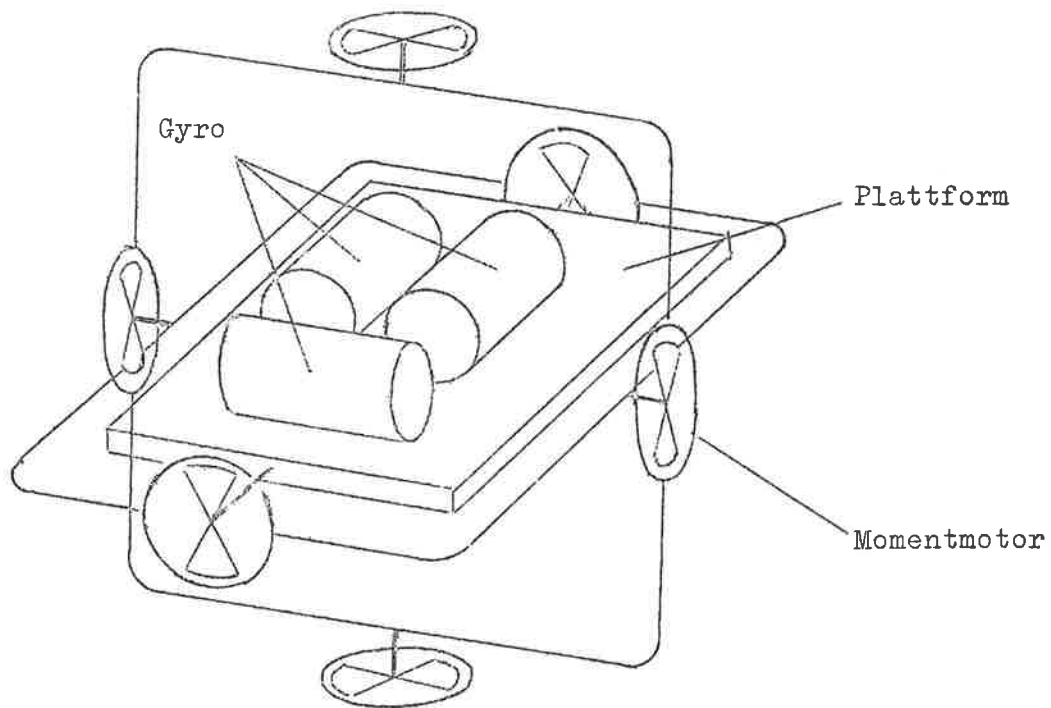
Med den av författaren utvecklade metoden för syntes av en enaxlig plattform, för vilken här i korthet redogjorts, kan således plattformsstabiliseringsproblemet återföras på det klassiska regleringstekniska problemet att bestämma en överföringsfunktion för ett system med givna specifikationer. Syntes av system, där gyrots reaktionsmoment aktivt bidrager vid stabiliseringen, erbjuder med den angivna metoden inga svårigheter.

2.2 Treaxliga system

2.21 Plattformens rörelseekvation

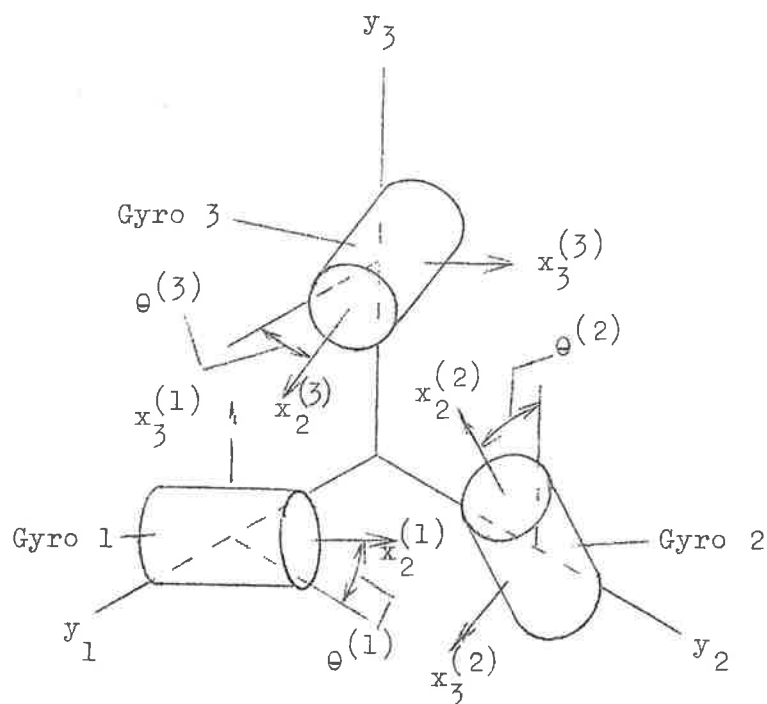
Figur 4 visar ett treaxligt system. Plattformen är lagrad i underlaget med ett system av kardanringar. Plattformens vridningar avkännes med tre enaxliga gyroskop. Gyroskopens ut signaler avkännes, filtreras, förstärkes och distribueras till momentmotorer i kardanringarnas knutpunkter, dessutom kan gyroskopens ut signaler tillföras gyronas momentgeneratorer.

Innan en syntesmetod kan anges för den treaxliga plattformen måste inverkan av de korskopplingar mellan kanalerna i ett treaxligt system analyseras. Detta problem behandlas uttömmande i avhandlingens första del (a). De fullständiga rörelseekvationerna för en plattform med tre identiska gyroskop med godtycklig placering härledes. Det antages att plattformen och gyroskopet är stela och vidare att överföringsfunktionerna från gyronas ut signaler till moment på plattformens momentmotorer och gyroskopens momentgivare är rationella funktioner, dvs att motsvarande filter är linjära och tidsinvarianta.



Figur 4.

Antages gyroskopens inaxlar vara ortogonala så kan gyronas orientering anges med tre vinklar $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ och $\theta^{(3)}$. Se figur 5.



Figur 5

Inför

$\bar{\Omega}$ plattformens vinkelhastighet

φ_i i-gyroskopets utsignal

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

J gyrorotorns tröghetsmoment

ω_0 gyrorotorns vinkelhastighet

aJ tröghetsmomentet för gyrots innerring m a p utaxeln

$JM(t)$ störmoment verkande på plattformen

$Jm_i(t)$ störmoment verkande på i-gyroskopets innerring

$$\bar{m}(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ m_3(t) \end{pmatrix}$$

θ_i i-gyroskopets orienteringsvinkel (Se fig. 5)

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta^{(1)} & \sin \theta^{(1)} \\ \sin \theta^{(2)} & 0 & \cos \theta^{(2)} \\ \cos \theta^{(3)} & \sin \theta^{(3)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{W}(p) = \frac{\omega_0}{a} \mathbb{I} - p \mathbb{L}$$

$aJ \sigma_{ij}(p)$ överföringsfunktionen från j-gyrots utsignal till moment verkande på i-gyrots innerring

$$\mathbb{S}(p) = \begin{pmatrix} p^2 + \sigma_{11}(p) & \sigma_{12}(p) & \sigma_{13}(p) \\ \sigma_{21}(p) & p^2 + \sigma_{22}(p) & \sigma_{23}(p) \\ \sigma_{31}(p) & \sigma_{32}(p) & p^2 + \sigma_{33}(p) \end{pmatrix}$$

$J \tau_{ij}(p)$ överföringsfunktionen från j-gyrots utsignal till i-komponenten av det styrmoment som appliceras på plattformen

$$\mathbb{T}(p) = \begin{pmatrix} \tau_{11}(p) & \tau_{12}(p) & \tau_{13}(p) \\ \tau_{21}(p) & \tau_{22}(p) & \tau_{23}(p) \\ \tau_{31}(p) & \tau_{32}(p) & \tau_{33}(p) \end{pmatrix}$$

$J B$ plattformens, inklusive sina rörliga delar fastlåsta i resp. nolläge, tröghetsmatris

$$\mathbb{F}(p) = p\mathbb{B} + \omega_0(\mathbb{L} - \tilde{\mathbb{L}})$$

$$\mathbb{G}(p) = \mathbb{T}(p) + \omega_0 D \mathbb{I} + a p^2 \tilde{\mathbb{L}}$$

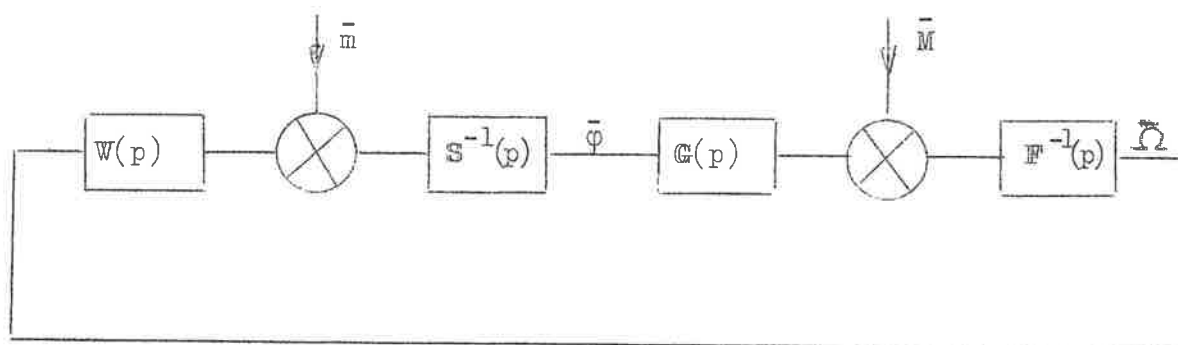
$$\mathbb{K}(p) = \mathbb{F}(p) + \mathbb{G}(p) \mathbb{S}^{-1}(p) \mathbb{W}(p)$$

Försummas termer av andra ordningen i φ_i och Ω_i så kan plattformens rörelseekvation skrivas

$$\mathbb{K}(p) \bar{\Omega} = \bar{M} + \frac{1}{a} \mathbb{G}(p) \mathbb{S}^{-1}(p) \bar{m} \quad (2)$$

Jämför ekvation (1) för det enaxliga systemet. Matrisen $\mathbb{K}(p)$ innehåller förutom plattformens tröghetsmatris, termer som beror på plattformens spin, vilket är vektorsumman av gyroskopens rörelsemängdsmoment, samt termer som beror på gyroskopens reaktionsmoment samt de moment som erhålles från plattformens momentmotorer. De sistnämnda termerna är analoga till termen $Y_0(p)$ i ekvation (1).

Plattformens rörelseekvation kan illustreras med matrisblockschemat i fig. 6.



Figur 6.

Om inga korskopplingar funnes i systemet skulle matrisen $\mathbb{K}(p)$ vara diagonal. Ekvation (2) kan då uppdelas i tre ekvationer av typ (1) och syntesproblemet återföres på det enaxliga fallet. En annan möjlighet är att fastlägga att $\mathbb{K}(p)$ skall vara diagonal samt att sedan bestämma hur signalerna skall distribueras inom systemet för att uppnå detta. En syntesmetod av detta slag leder dock till onödigt komplicerade system.

Innan syntesproblemet vidare diskuteras skall några speciella problem analyseras.

Definition 1 och sats 1 från föregående avsnitt kan omedelbart överföras till det treaxliga fallet. Detta är utfört i avhandlingens del (a).

2.22 Systemets stabilitet

För att systemet skall vara stabilt för störningar $\bar{m}(t)$ och $\bar{M}(t)$ fordras

Definition 2

En fixstjärnebunden plattform säges vara stabil om ekvationen

$$\det \left\{ p \mathbb{K}(p) \right\} = 0 \quad (3)$$

ej har några poler i högra halvplanet eller på imaginära axeln och ekvationen

$$\det \left\{ p \mathbb{S}(p) \mathbb{G}^{-1}(p) \mathbb{K}(p) \right\} = 0 \quad (4)$$

ej har några poler i högra halvplanet och endast enkelpoler på imaginära axeln.

Av sats 1 i generaliserad form framgår att ekvation (4) alltid har ett nollställe i origo för en fixstjärnebunden plattform, varför vi ej kan kräva mer än som angivits.

I avhandlingens första del (a) anges några stabilitetskriterier för systemet.

Innan resultaten presenteras skall ett exempel diskuteras.

Exempel 4

Antag att plattformservot är "perfekt" i den meningen att det alltid förmår att hålla gyroutslagen identiskt noll.

Gyrots signalekvation lyder (se (a), ekv. 6.1)

$$\mathbb{S}(p) \bar{\varphi} = \mathbb{V}(p) \bar{\Omega} - \frac{1}{a} \bar{m}$$

Antagandet om perfekt servosystem ger

$$\mathbb{V}(p) \bar{\Omega} = \frac{1}{a} \bar{m}$$

Systemet är således endast känsligt för störmoment verkande på gyrots innerring.

Om systemet skall vara stabilt med avseende på dessa störningar fordras att ekvation

$$\det \left\{ p \mathbb{V}(p) \right\} = 0 \quad (5)$$

ej har några rötter i högra halvplanet. Beräknas determinanten erhålles

$$\det V = \left(\frac{\omega_o}{\varepsilon} \right)^3 + \frac{\omega_o (s-3)}{2a} p^2 - \ell p^3$$

där

$$s = (\sin \theta^{(1)} - \cos \theta^{(3)})^2 + (\sin \theta^{(2)} - \cos \theta^{(1)})^2 + \\ + (\sin \theta^{(3)} - \cos \theta^{(2)})^2$$

$$\ell = \sin \theta^{(1)} \sin \theta^{(2)} \sin \theta^{(3)} + \cos \theta^{(1)} \cos \theta^{(2)} \cos \theta^{(3)}$$

Talen s och ℓ kallas "spinnnumber" resp. "output axis orientation number" och har enkla fysikaliska tolkningar.

Se (a), sid. 11-12.

Av ekvation (5) framgår således att systemet är stabilt endast under förutsättning av

$$\ell = 0$$

$$s \geq 3$$

Detta innebär att gyroskopen skall ha utaxlarna i samma plan och i övrigt vara så orienterade att vektorsumman av gyroskopens rörelsemängdsmoment är större än $\sqrt{3} \cdot J \omega_0$.

Om villkoret ej är uppfyllt kommer störmoment verkande på gyroskopens innerringar att ge vinkelfel hos plattformen som växer exponentiellt med tiden.

Det angivna villkoret beror på antagandet om ortogonalitet hos gyroskopens inaxlar. Antages små avvikelser från ortogonalitet erhålles liknande villkor där ℓ dock tillåtes ligga i ett intervall omkring origo. Se avhandlingens första del (a), sid. 53-55.

I avhandlingens del (a) angives flera stabilitetskriterier, bl.a. följande tillräckliga villkor.

Lemma 1

En fixstjärnebunden plattform är stabil om

- (i) Ekvationen $\det \{p\mathbb{K}(p)\} = 0$ saknar nollställen i slutna högra halvplanet
- (ii) Gyrona orienteras på sådant sätt att $\ell = 0$ och $s \geq 3$
- (iii) Funktionen $\det [\mathbb{K}(p) - \mathbb{H}(p)] = 0$ ej har några poler i högra halvplanet

De två sista villkoren garanterar att störningar verkande på gyrots innerring ej orsakar exponentiellt växande vinkelfel hos plattformen.

De erhållna resultaten kan självfallet specialiseras till traditionella plattformar med små signalgyroskop. För dessa orsakas korskopplingen i allmänhet endast av de enaxliga gyroskopens utaxelkänslighet.

Avsnitt 8.2 i avhandlingens del (a) behandlar detta fall. För plattformar, där den enda korskoppling som förekommer orsakas av gyroskopens utaxelkänslighet, gäller

$$\mathbb{K}(p) = b p^2 (1 + Y_0) \mathbb{I} - \frac{ab}{\omega_0} Y_0 \mathbb{I}$$

Insättes detta i Def. 1 och 2 erhålles:

Lemma 2

En plattform där enda korskopplingen orsakas av gyroskopens utaxelkänslighet är stabil om och endast om

- (i) Ekvation $\det \{ p\mathbf{K}(p) \} = 0$
ej har några rötter i slutna högra halvplanet
- (ii) Funktion $Y_0(p)$ ej har några poler i högra halvplanet

Stabilitet hos ekvation (3) ger således tillsammans med det svaga villkoret (ii) för detta speciella fall stabilitet hos ekv. (4).

I avhandlingens första del (a) diskuteras utförligt en rad exempel på plattformar av detta slag. Det visas att det är möjligt att ange korskopplingen med korskopplingskoefficienten

$$\gamma = \frac{a\beta}{\omega_0}$$

där

- β det slutna systemets odämpade resonansfrekvens
- ω_0 gyrorotorns vinkelhastighet
- a kvoten mellan tröghetsmomentet för gyrots innerring och rotor.

Vidare visas att för tillräckligt små värden på korskopplingskoeff. γ är plattformen stabil oberoende av gyroskopens orientering.

Se (a), sid. 44.

För några speciella fall har det kritiska värdet på korskopplingskoefficienten, då systemet blir instabilt, bestämts.

Det fall då

$$Y_0(p) = (\beta^2 + 2\xi\beta p) p^{-2}$$

har behandlats fullständigt med analytiska metoder. Ett slutet uttryck på det kritiska värdet γ_0 har angivits. Detta kritiska värde är beroende av gyroskopens orientering och det visar sig att för fallet

$$l = 0$$

$$s \geq 3$$

är systemet stabilt för samtliga värden på korskopplingskoefficienten.

För system av högra ordningstal än som ovan angivits är de analytiska uttrycken för γ_0 svåröverskådliga. I avhandlingens del (a) har visats hur Evans root-locus metod kan användas för att analysera hur systemets egenskaper varierar med korskopplingskoefficienten γ .

2.23 Syntes av treaxlig plattform

Analysen av det treaxliga systemet bildar grunden till den syntesmetodik som presenteras i avsnitt 10 i avhandlingens första del (a).

Syntesen sker i stora drag på följande sätt:

1. Välj en $\mathbb{K}(p)$ matris som uppfyller specifikationerna
2. Syntetisera ett system som har den önskade $\mathbb{K}(p)$ matrisen
3. Undersök om det är möjligt ändra $\mathbb{K}(p)$ matrisen inom ramen för specifikationerna, så att systemet blir lättare att instrumentera.

Syntesmetoden koncentreras således på att eliminera de fel som orsakas av momentstörningen på plattformen. Enligt sats 1 kan störningar verkande på gyroskopens innerringar endast i ringa utsträckning påverkas. Vid syntesen måste man dock alltid se till att systemet är stabilt med avseende på störmoment på gyroskopens innerringar. Såsom framgår av stabilitetsanalysen får vi särskilja två fall

(i) System med kraftgyroskop

De korskopplingar som erhålles i systemet kan medföra att plattformen är instabil med avseende på störmoment på gyroskopens innerringar. Instabiliteten beror, såsom visats i analysen, på gyroskopens orientering och kan undvikas genom att placera gyroskopet så att utaxlarna ligger i samma plan och att plattformens totalspin $\geq \sqrt{3} J \omega_0$.

(ii) System där korskopplingen uteslutande orsakas av gyroskopens utaxelkänslighet

I detta fall kan korskopplingen anges med korskopplingskoefficienten

$$\gamma = \frac{a\beta}{\omega_0}$$

För små värden på korskopplingskoefficienten γ är systemet stabilt oberoende av gyroskopens orientering (se avhandlingen, del (a), sid 44).

Det kritiska värde på korskopplingskoefficienten då instabilitet uppträder beror dock av gyroskopens orientering.

Ett litet värde på korskopplingskoefficienten medför endast att systemets dämpning minskas något.

Om systemet är stabilt med avseende på momentstörningar på gyroskopens innerringar kan fel orsakade av dessa störningar uppskattas med hjälp av sats 1.

För en närmare diskussion av felens egenskaper hänvisas till avsnitt 9 i avhandlingens del (a) samt till referens (7).

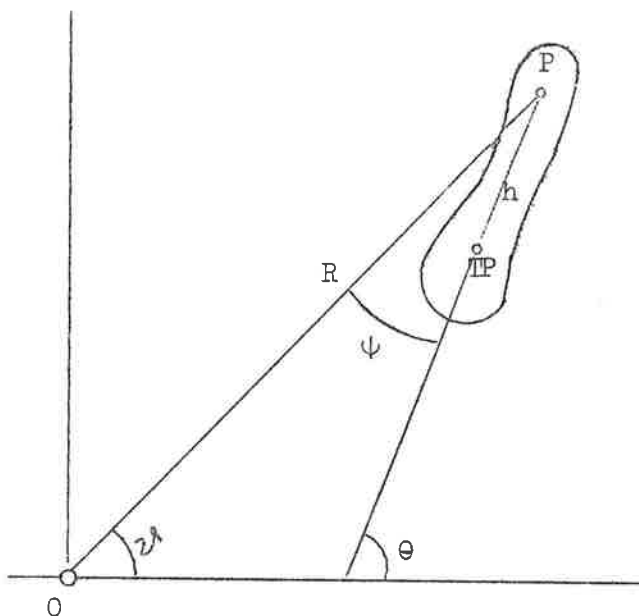
3. SYNTES AV VERTIKALINDIKERANDE PLATTFORMAR

Ett mycket viktigt specialfall av plattformstabilisering är, då det koordinatsystem till vilket plattformen är stabiliserad, har en axel sammanfallande med den lokala g -vektorns riktning. Plattformar stabiliserade på detta sätt kallas vertikalindikerande eller Schuler-avstämda. Denna form av stabilisering behandlas i avhandlingens andra och tredje delar (b) resp. (c).

En fysikalisk pendel vars upphängningspunkt är i vila anger i stationärt tillstånd vertikalens riktning. Det visades av Schuler (8) att det är möjligt att få pendeln att indikera vertikalen även då pendelns upphängningspunkt förflyttas, om pendeln dimensionerades på lämpligt sätt. Effekten skall demonstreras med ett enkelt exempel.

Exempel

Betrakta en fysikalisk pendel vars upphängningspunkt P förflyttas i ett sfäriskt symmetriskt gravitationsfält med centrum i O . Rörelsen antages vara plan och sådan att avståndet mellan gravitationsfältets centrum och upphängningspunkt är konstant. Upphängningspunktens hastighet antages dessutom vara avsevärt mindre än "satellithastigheten", \sqrt{Rg} .



Figur 7

Inför beteckningar enligt fig. 7. Antages vinkeln ψ vara liten kan systemets lineariserade rörelseekvation skrivas

$$J_p \ddot{\psi} + mgh \psi = (mRh - J_p) \dot{\alpha} \quad (6)$$

där

$$\begin{aligned} J_p &= mk^2 && \text{pendelns tröghetsmoment} \\ mh &&& \text{pendelns obalans} \\ g &&& \text{tyngdaccelerationen} \\ \psi &&& \text{vertikalindikeringsfelet} \end{aligned}$$

Ekvationen kan illustreras med blockschemat i fig. 8.

Antag att pendeln indikerar vertikalen vid starten, dvs

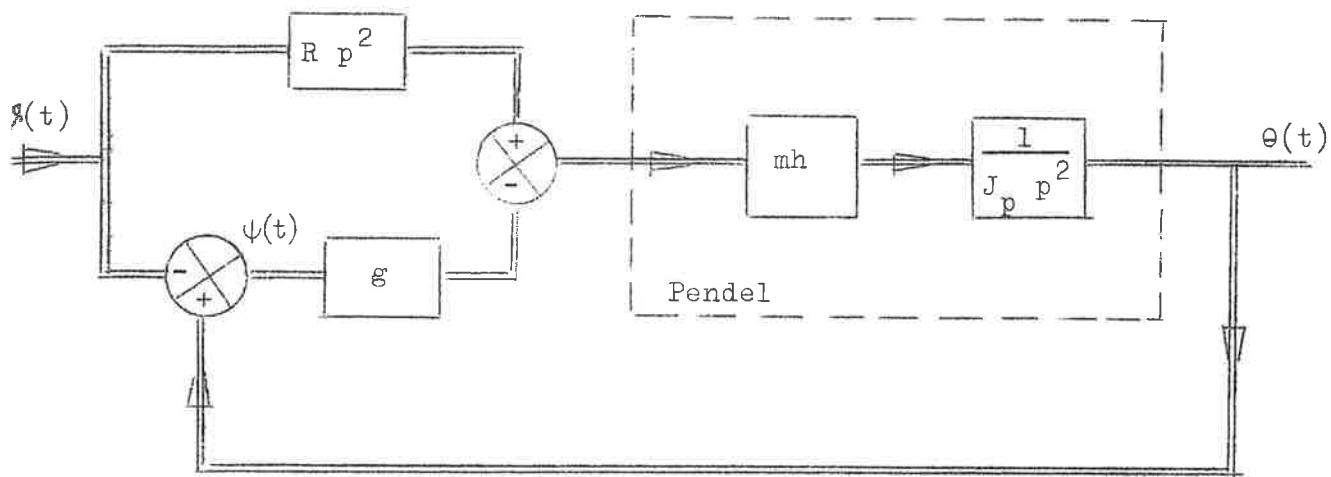
$$\psi(t) = 0$$

Enligt ekvation (6) erhålles

$$\psi(t) = 0$$

om

$$mRh = J_p = mk^2 \quad (7)$$



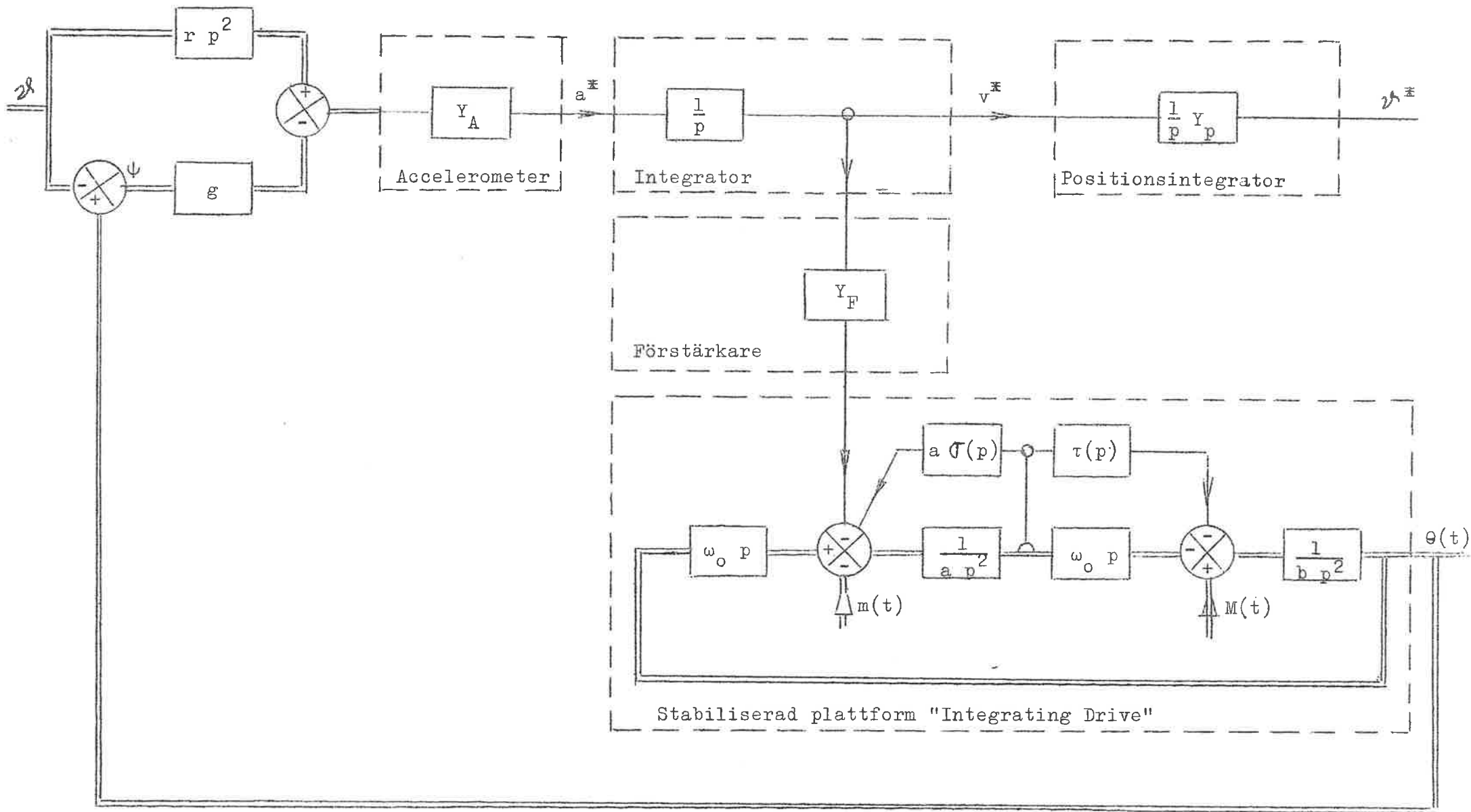
Figur 8.

Dvs om pendeln dimensioneras enligt ekv (7) så kommer den att indikera vertikalen oavsett farkostens rörelser. Pendeln säges vara Schuler-avstämd. En Schuler-avstämd pendel har ~~egenfre-~~ ^{perioden} kvansen

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} \approx 84,4 \text{ minuter}$$

Tyvärr kan man ej dimensionera en pendel som uppfyller Schulers villkor då dess dimensioner blir orimliga. Detta medförde att Schuleravstämningen länge betraktades som ett kuriosum. Omkring år 1940 väcktes ånyo intresset för Schulers idéer i samband med utvecklingen av navigeringssystem. Denna utveckling leddes av professor Draper och hans team vid Instrumentation Laboratory MIT. Schuler-avstämning studerades ingående av Wrigley, m.fl. (9), (10) och (11). Undersökningarna resulterade i konstruktion av Schuler-avstämda plattformar, vilka utgör en fundamental del i navigeringssystemen.

Den "filosofi" för syntes av vertikalindikerande plattformar som utvecklats vid MIT kan beskrivas på följande sätt. Man önskar syntetisera ett system med de egenskaper som anges av ekvation (6) eller med MIT-terminologi "ekvation (6) skall instrumenteras". Ett sätt att göra detta är följande. En accelerometer monteras på en plattform, därmed är pendeln med obalans i fig. 8 "instrumenterad". Det återstår sedan att "instrumentera" de två integrationer som motsvaras av den enkla pendelns tröghetsmoment i fig. 8.



Figur 9. Blockschema för enaxligt vertikalindikerande system av Draper-typ

Detta utföres genom att integrera accelerometersignalen och tillföra den så erhållna signalen till gyroskopets momentgivare. Fig. 9 visar blockschemat för systemet. De vertikalindikerande plattformar som utvecklats i USA är uteslutande baserade på den beskrivna principen.

I början av år 1959 sammanträffade författaren med civing F. Hector vid Philips Teleindustri. Under samtal mellan honom och författaren föddes därvid tanken på ett nytt sätt att syntetisera ett vertikalstabiliserat system. Se ref. (15). Schuleravstämning erhålles genom att plattformen förses med en obalans samt återkopplas så att den får ett stort skenbart tröghetsmoment, se blockschema i fig. 10. Redan i exempel 1 visades att plattformen kunde ges ett stort skenbart tröghetsmoment genom lämpligt val av $Y_0(p)$. Enligt exempel 1 gäller

$$J_s = (1 + A) J_b$$

Schuleravstämningvillkoret lyder

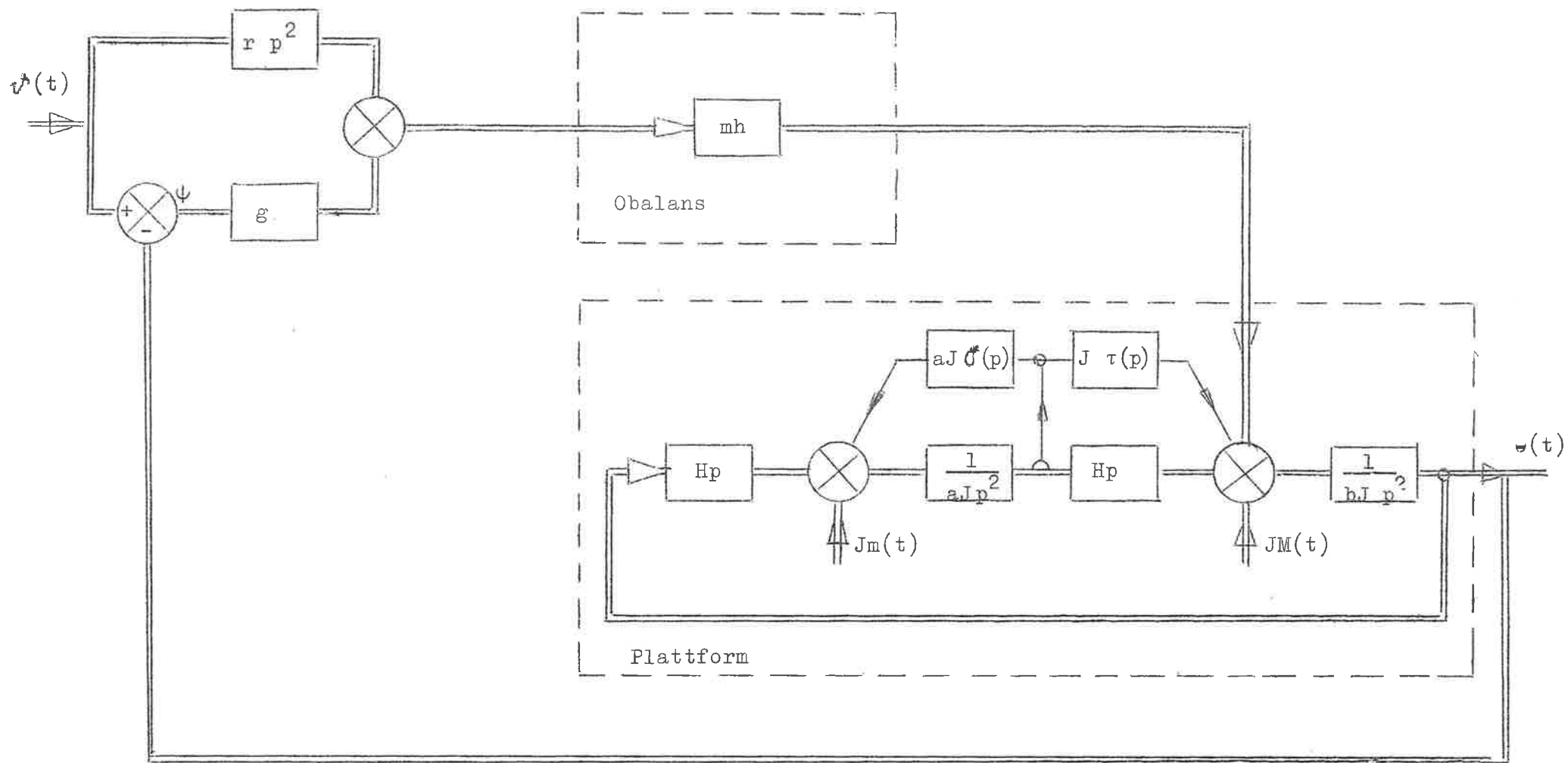
$$Y_0(p) = A = \frac{mRh}{bJ} - 1$$

Det beskrivna systemet är en elektromekanisk analogi till den fysikaliska pendeln. Genom att vi i denna analogi har flera fria parametrar till vårt förfogande kolliderar ej Schuleravstämningvillkoret med vad som är praktiskt utförbart. Ett enaxligt system på denna princip har testats av civing F. Hector. Det föreslagna systemet har presenterats för professor Draper med medarbetare, då det bekräftades att systemet var unikt. Se professor Markey (12) och (13).

Avhandlingens andra och tredje delar (b) och (c) behandlar analys och syntes av en vertikalstabiliserad plattform baserad på de sistnämnda ideerna.

I avhandlingens tredje del (c) gives en allmän översikt av olika sätt att bygga upp systemet. Den erforderliga komponentnoggrannheten uppskattas ur analyser av enaxliga system. Slutligen ges några synpunkter på konstruktion av ett komplett navigeringssystem enligt den angivna principen.

På basis av undersökningarna göres en jämförelse mellan "klassiska" system av Draper-typ och det föreslagna systemet.



Figur 10. Blockschema för enaxligt vertikalindikerande system baserat på plattform med stort skenbart tröghetsmoment

Resultatet av undersökningen är i korthet:

1. Det föreslagna systemet kräver inga accelerometrar och även i övrigt färre komponenter.
2. Integration av accelerometersignalerna i Draper-systemet ersätts i det föreslagna systemet med en derivation. (Det är som bekant avsevärt lättare att derivera lågfrekventa signaler än att integrera desamma).
3. Gentemot Draper-systemet har det föreslagna systemet nackdelen att det är känsligare för störmoment på plattformen. Så måste t.ex. lagringen för inner-roll och pitch-ringarna ha låg friktion.

Avhandlingens andra del (b) behandlar syntesproblemet mer utförligt. Där visas att den metodik som användes för syntes av fixstjärnebundna plattformar även kan användas för syntes av vertikalstabiliserade plattformar.

I avhandlingens andra del (b) har stabilitetsteorem för vertikalstabiliserade plattformar angivits.

4. SAMMANFATTNING

I avhandlingen presenteras en enhetlig syntesmetod för stabiliserade plattformar med enaxliga gyroskop. Metoden är användbar såväl för fixstjärne- som för vertikalstabiliserade plattformar. Syntesmetoden kan användas för plattformar med samtliga typer av enaxliga gyroskop, såväl deriverande, proportionella som integrerande gyroskop. Dessutom har syntesmetoden anpassats för dimensionering av plattformar där gyroskopets reaktionsmoment aktivt bidrager vid stabiliseringen. Behandlingen möjliggör i samtliga fall en överblick av inverkan av korskopplingar i systemet.

Det har påvisats att för plattformar med tunga gyroskop måste gyroskopen placeras på speciellt sätt för att det kompletta systemet skall vara stabilt för momentstörningar på gyroskopens innerringar.

Dessutom analyseras ett nytt sätt att syntetisera vertikalavstämda plattformar som författaren utvecklat i samarbete med civing F. Hector.

Experimentellt arbete i samband med plattformstabilisering kräver avsevärd insats både i fråga om pengar och arbete. (Ett bra gyroskop kostar c:a 50.000 kr.)

Flera av de resultat som presenteras i avhandlingen är av sent datum varför några experimentella resultat f.n. ej är tillgängliga.

REFERENSER

1. Draper, C.S.
Wrigley, W.
Grohe, L.R. "The floating integrating gyro and its application to geometrical stabilization on moving bases"
SMF Fund Paper, No FF-13, NY 1955
2. Draper, C.S.
Woodbury, R.B. "Geometrical stabilization Based on servodriven Gimbals and Integrating Gyro Units"
(Agard Symposium Paper, Venice, Italy)
MIT Instrumentation Lab, Cambridge, Mass., 1956
3. Chandler, D.P.
Cannon, R.H. Jr "Platform stabilization"
4. Mitsutomi, T. "Characteristics and stabilization of an Inertial Platform"
IRE, PGANE, June 1958, 95-105
5. Gorczycki, E. "Dynamic Considerations Relating to the behaviour of Inertial Stabilized Platforms"
J. Aeronautical Sciences, Feb. 1957,
pp 130-138
6. Mayer, A. "Analysis of Gyro Orientation"
IRE, PGAC, Dec. 1958, p 93-101
7. Åström, K-J. "Drift hos gyroplattformar"
TTN-Gruppen Rapport 590601

8. Schuler, M. "Die Störung von Pendel- und Kreisel-
apparaten durch die Beschleunigung der
Fahrzeuges"
Phys. Z. 24, 1923
9. Wrigley, W. "An investigation of Methods available
for indicating the Direction of the
Vertical from Moving Bases"
Sc.D. Thesis MIT, Cambridge, Mass. 1941.
10. Wrigley, W. "Schuler Tuning Characteristics in
Navigation Instruments"
J. of the Inst. of Navigation, Dec. 1950
11. Wrigley, W. "Indication of the Vertical from Moving
Houston, F.E. Bases"
Whitman, H.R. (Inst. of Navigation Paper)
MIT, Cambridge, Mass. 1956
12. Markey, W. Privat kommunikation
13. Markey, W. Bok om tröghetsnavigering under utgivning
14. Åström, K-J. "Enaxliga vertikalindikerande system"
TTN-Gruppen, Rapport 590801
15. Åström, K-J. and "Vertical indication with a physical pen-
Hector, F. dulum based on electromechanical synthesis
of a high moment of inertia"
Report 590802 of the TTN-Group