Statiskt obestämda fackverk, balkar, ramar

Bengtsson, Åke; Pettersson, Ove

1972

LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY · LUND · SWEDEN · 1972
DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS AND CONCRETE CONSTRUCTION · BULLETIN 25

ÅKE BENGTSSON – OVE PETTERSSON

STATISKT OBESTÄMDA FACKVERK, BALKAR, RAMAR

BYGG *Handbok för hus-, väg- och vattenbyggnad*

Tredje upplagan omfattar följande nio huvuddelar

1 Allmänna grunder

2 Materiallära

3 Konstruktionsteknik

4 Administration och ekonomi

5 Arbetsteknik

6 Husbyggnadsteknik

7 Husbyggnadsplanering

8 Samhällsplanering

9 Väg- och vattenbyggnad

Tryck: Almqvist & Wiksell, Uppsala

Kap 161 Statiskt obestämda fackverk, balkar, ramar

Av civilingenjör Åke Bengtsson och professor Ove Pettersson

Hänvisningar

Balkar, kap 162
Ramar, kap 163
Bågar, kap 164
Fackverk, kap 165
Tabellerna 1:44–1:48

:1 Allmänt

:11 Begreppet statisk obestämdhet

Ett bärverk sägs vara *statiskt bestämt*, om samtliga krafter och moment vid upplag och i godtyckligt vald stång eller godtyckligt valt snitt kan beräknas ur enbart jämviktsekvationer. Om för en bestämning av dessa krafter och moment utöver jämviktsekvationer fordras ytterligare samband, t ex i form av deformationsekvationer, är bärverket *statiskt obestämt* med en grad av statisk obestämdhet, som är lika med antalet erforderliga samband utöver jämviktsekvationerna.

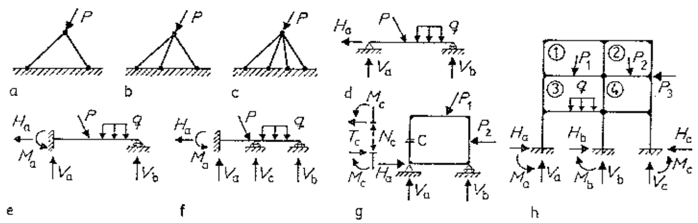


Fig :11 a–h

De båda begreppen detaljförtydligas genom några i fig :11 a–h visade typer av plana bärverk. Det plana fackverket enligt fig :11 a utgör därvid en statiskt bestämd konstruktion med 2 från början obekanta stångkrafter, som bestäms ur planets 2 projektionsekvationer för materiell punkt. För en bestämning av de i fig :11 b och c visade planfackverkens 3 respektive 4 stångkrafter fordras utöver punktens 2 jämviktsekvationer ytterligare 1 respektive 2 samband, varför dessa båda bärverk är 1-falt respektive 2-falt statiskt obestämda. För den fritt upplagda balken enligt fig :11 d bestäms de tre upplagsreaktionskomposanterna H_a, V_a och V_b ur den plana skivans 3 jämviktsekvationer, varpå krafter och moment i godtyckligt valt snitt av balken kan beräknas också ur enbart jämviktsekvationer. Balken är därför statiskt bestämd. Exempel på 1-falt och 2-falt statiskt obestämd balk ger fig :11 e och f, för vilka en bestämning av 4 respektive 5 obekanta upplagsreaktionskomposanter kräver 1 respektive 2 samband utöver den plana skivans 3 jämviktsekvationer. För den fritt upplagda, slutna ramen enligt fig :11 g kan krafter och moment i godtyckligt valt snitt direkt beräknas ur jämviktsekvationer vid kända upplagsreaktionskomposanter H_a, V_a och V_b samt kända snittstorheter N_c, M_c och T_c i ett snitt av ramen. För en bestämning av dessa 6 initiellt obekanta storheter fordras utöver den plana skivans 3 jämviktsekvationer ytterligare 3 samband, varför bärverket är 3-falt statiskt obestämt. För det i fig :11 h visade rambärverket i två fack och tre våningar slutligen möjliggörs en direkt beräkning av krafter och moment i godtyckligt valt snitt ur enbart jämviktsekvationer vid kända upplagsreaktionskomposanter (9 st) och kända snittstorheter N, M och T i ett snitt av varje sluten ramcell ①–④ ($4 \cdot 3 = 12$ st). En bestämning av dessa $9 + 12 = 21$ initiellt obekanta storheter kräver utöver den plana skivans 3 jämviktsekvationer ytterligare 18 samband, varför rambärverket enligt fig :11 h är 18-falt statiskt obestämt.

Vid symmetriskt eller antisymmetriskt utformat och belastat bärverk kan graden av statisk obestämdhet beräkningstekniskt reduceras, om de statiskt obestämda storheterna så införs, att föreliggande symmetri- eller antisymmetriegenskaper utnyttjas. Samma beräkningstekniskt underlättande effekt kan uppnås vid osymmetriskt belastat, symmetriskt utformat, statiskt obestämt bärverk genom en uppdelning av den osymmetriska lasten i en symmetrisk och en antisymmetrisk lastdel. Förfarandet belyses av fig :11 i, av vilken framgår, hur för en 3-falt statiskt obestämd, symmetriskt utformad nolledsram en osymmetrisk last kan uppdelas i ett symmetriskt lastfall, karaktäriserat av 2-falt statisk obestämdhet (normalkraft N_c och böjmoment M_c i hjässymmetrisnittet C), och ett antisymmetriskt lastfall, karaktäriserat av 1-falt statisk obestämdhet (tvärkraft T_c i hjässans antisymmetrisnitt C).

För begreppet *kinematisk obestämdhet* hänvisas till :6.

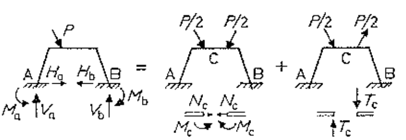


Fig :11 i

:12 Bruks- och brottstadiemetoders tillämpbarhet

I litteraturen redovisade metoder för beräkning av statiskt obestämda fackverk, balkar och ramar kan i stort uppdelas i de båda huvudgrupperna

A Metoder för bruksstadiet
B Metoder för brottstadiet

Metoderna enligt *huvudgrupp* A bygger på förutsättningar om *elastiskt och homogent material, små deformationer samt initiellt plana tvärsnitts bibehållande* med som konsekvens *giltighet av superpositionslagen.* Förutsättningarna gör metoderna med god precision tillämpbara för bestämning av de spänningar och deformationer, som uppträder vid exempelvis stål- och lättmetallkonstruktioner under ordinärt i praktiken verkande laster (brukslaster). Även vid konstruktioner av armerad betong, trä och andra likartade material, som redan vid måttliga spänningar klart avviker från det rent elastiska tillståndet, kan beräkningsmetoderna enligt huvudgrupp A tilllämpas, dock, genom minskad precision, i huvudsak för att ge en grov bild av bruksstadiets spännings- och deformationstillstånd. För betongkonstruktioner tillkommer därvid, utöver avvikelsen från elastiskt material, det förhållandet, att dessa i bruksstadiet normalt karaktäriseras av sprickbildningar i böjdragzonen, vilket kan resultera i en väsentligt annorlunda styvhetsfördelning än den mot helt osprucken sektion svarande, och vilken man för undvikande av alltför mödosamma kalkyler som regel tvingas att räkna med.

Beräkningsmetoderna enligt *huvudgrupp* B, normalt kallade *gränslastmetoder* (ty Traglastmethode, eng limit design) är baserade på *idealiseringar av konstruktionsmaterialens verkliga, ända upp till brott gällande, spännings-töjnings-diagram* och kan användas för en bestämning av den last (gränslast), som svarar mot en konstruktions maximala bärförmåga, samt av till denna hörande *brottsäkerhet* vid i praktiken aktuell belastning. Oftast består därvid idealiseringen i att det verkliga σ-ε-diagrammet approximativt ersätts med ett *idealplastiskt diagram med obegränsad töjbarhet* (jfr :81), vilket medför, att en statiskt obestämd konstruktion vid bestämning av dess gränslast utan kompletterande töjningsberäkningar kan behandlas som fullständigt genomplasticerad i samtliga, för uppkomst av en kinematisk kedja erforderliga snitt. Den praktiska tillämpbarheten av en sådan förenklad behandling är avhängig av aktuellt konstruktionsmaterials verkliga töjningsegenskaper. Vad gäller statiskt obestämda bärverk av *mjukt konstruktionsstål* pekar i litteraturen redovisade undersökningar entydigt på att töjningsförmågan normalt är tillräcklig för att en renodlad gränslastberäkning med god precision skall kunna genomföras. Även för bärverk av *aluminiumlegeringar* är ordinärt förutsättningarna för en tillämpning av renodlad gränslastmetod uppfyllda. Som kriterium härför anges i gällande försöksnorm »Aluminiumkonstruktioner (1966)», att

$$\delta_5[\%] \geqslant \sigma_{0,2}[\mathrm{kp/mm^2}](1{,}15\,\sigma_B/\sigma_{0,2} - 1{,}1) \qquad (1)$$

med δ_5 = normenlig brottöjning, $\sigma_{0,2}$ = spänningsvärde med 0,2 % kvarstående deformation och σ_B = brotthållfasthet för materialet.

För bärverk av *armerad betong* har genom försök gränslastmetodens tilllämpbarhet verifierats för s k under- eller normalarmerade konstruktioner, varmed förstås sådana, som karaktäriseras av att slutgiltigt brott inleds genom sträckgränsens uppnående i armeringen. Vid överarmerade konstruktioner däremot, karaktäriserade av att tvärsnittets maximala momentupptagande förmåga uppnås genom krossning av den tryckta betongzonen utan att flytning i armeringen inträtt, inkommer modifieringar därigenom att då ramverket definitivt störtar samman, har böjmomentet i de hårdast ansträngda snitten genom kraftig krossning i tryckt betongzon sjunkit under det värde, som svarar mot maximalt utnyttjad sektion [54]. Vad slutligen gäller statiskt obestämda bärverk av *trä*, kan för närvarande till följd av ringa underlag i form av experimentella resultat endast tillrådas försiktighet vid den renodlade gränslastmetodens tillämpning.

Det förtjänar i detta sammanhang att understrykas, att vare sig en statiskt obestämd konstruktion dimensioneras enligt någon bruksstadiemetod eller någon gränslastmetod, måste självfallet parallellt *risken för andra brottyper* beaktas. Exempelvis blir framför allt vid stål- och lättmetallkonstruktioner men också vid armerade betong- och träkonstruktioner *stabilitetsfenomenen, knäckning* och *vippning*, inte sällan dimensionerande framför det rena böjtillståndet. För armerade betongkonstruktioner tillkommer härutöver risken för förankrings- och skjuvbrott, varvid är att observera, att de stora kantstukningar, som en gränslastberäkning normalt förutsätter, genom tillhörande minskning av tvärsnittets inre hävarm starkt kan befrämja dessa brott. Avgörande vid en dimensionering kan vidare vara olika former av *nedböjningsbegränsande* föreskrifter. Vid en beräkning enligt fullständig gränslastmetod, varmed förstås, att såväl bestämningen av momentfördelningen som dimensioneringen av det enskilda tvärsnittet sker under förutsättning av fullt utbildad plasticering, måste man alltid parallellt genomföra en kontroll av att inga kvarstående bruksstadienedböjningar av generande art uppkommer.

:2 Castiglianos sats. Arbetsekvationer

:21 Castiglianos sats. Beräkningsprincip

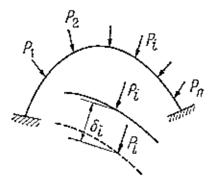


Fig :21

Då ett kraftsystem $P_1, P_2 \ldots P_i \ldots P_n$ påläggs en konstruktion (se fig :21), deformeras denna, varvid krafterna P_i i egen längsriktning får förskjutningar δ_i. För dessa förskjutningar gäller uttrycket

$$\delta_i = \partial W / \partial P_i \tag{1}$$

i vilket $W = W(P_1, P_2 \ldots P_i \ldots P_n)$ (2)

betecknar det inre arbete, som kraftsystemet ger upphov till i konstruktionen (Castiglianos sats, uppställd på 1870-talet).

Ingår i kraftsystemet yttre böjmoment M_i kan deras vinkeländring θ_i i egen rotationsriktning bestämmas ur det analoga sambandet

$$\theta_i = \partial W / \partial M_i \tag{3}$$

Castiglianos sats, ekv (1) och (3), har sin direkta tillämpning på *rörelseberäkningar i elastiska system.* Genom att därvid uttryck uppställs för från början kända deformationer (normalt 0-rörelser), kan satsen vidare användas för *bestämning av övertaliga storheter i statiskt obestämda system.* För den detaljerade tillämpningen hänvisas till :23.

:22 Castiglianos sats. Inre arbete W vid stång- och balksystem

För att underlätta praktiska kalkyler sammanställs nedan uttryck för det inre arbetet W dels vid stångsystem och dels vid ramkonstruktioner, uppbyggda av raka eller enkelkrökta ramdelar.

Inre arbetet W vid stångsystem

$$W = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 L}{EA} \tag{1}$$

med S = stångkraft, L = stånglängd, E = elasticitetsmodul och A = tvärsnittsyta för en stång.

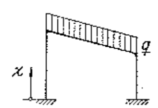


Fig :22a

Inre arbetet W från normalkraft, böjmoment och tvärkraft vid raka ramdelar (fig :22a)

$$W = \frac{1}{2} \int_L \frac{N^2 \mathrm{d}x}{EA} + \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2 \mathrm{d}x}{EI} + \frac{1}{2} \int_L \frac{\varkappa T^2 \mathrm{d}x}{GA} \tag{2}$$

med N, M och T = normalkraft, böjmoment resp tvärkraft i snitt x, E och G = elasticitets- resp skjuvmodul, A = tvärsnittsyta, I = tröghetsmoment, L = ramdelarnas sammanlagda längd samt $\varkappa$ = en tvärsnittskoefficient, som speciellt för rektangulär sektion = 6/5, för cirkulär sektion = 10/9 samt för I- och U-sektioner $\approx A/A_{\text{liv}}$.

Av de i ekv (2) ingående termerna är ordinärt de mot normal- och tvärkrafternas arbeten svarande med god approximation försumbara. Undantag härifrån utgör konstruktioner, som karaktäriseras av att de yttre lasterna i väsentlig grad upptas av normalkrafter (t ex bågkonstruktioner), vid vilka normalkrafternas arbeten måste beaktas, samt konstruktioner, som innehåller korta och höga ramdelar eller skjuvveka element av ex typen spikad balk, vid vilka tvärkrafternas arbeten måste inkluderas.

Inre arbetet W från vridmoment vid raka ramdelar.

För raka ramdelar med *kvasivälvningsfritt* tvärsnitt gäller för W uttrycket

$$W = \frac{1}{2}\int_L \frac{M_v^2\,\mathrm{d}x}{GK_v} \tag{3}$$

med M_v = vridmoment i snitt x, G = skjuvmodul och K_v = vridstyvhetens tvärsnittsfaktor.

Inre arbetet W från normalkraft, böjmoment och tvärkraft vid enkelkrökta ramdelar (fig :22b).

$$W = \frac{1}{2}\int_L \frac{1}{EA}\left(N - \frac{M}{R}\right)^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_L \frac{M^2}{EJ}\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_L \frac{\varkappa T^2}{GA}\mathrm{d}s \tag{4}$$

med de nytillkomna storheterna s = båglängden, R = tyngdpunktsaxelns krökningsradie i snittet s vid obelastad konstruktion och J = med hänsyn till krökningen modifierat tröghetsmoment, bestämt ur formeln

$$J = \int_A \frac{\eta^2\,\mathrm{d}A}{1 - \eta/R} \tag{5}$$

För några vanligen förekommande sektionsformer finns J utvärderat i bl a [9]. För $R/h \geqslant 10$, där h = sektionshöjden, kan den enkelkrökta balken med god approximation behandlas som initiellt rak enligt det av ekv (2) givna, matematiskt mera lätthanterliga W-sambandet. För den inbördes storleken av de i ekv (4) ingående deltermerna gäller i övrigt detsamma som för motsvarande termer i ekv (2).

Angiven form för den mot tvärkraften T svarande W-termen gäller strängt under förutsättning av en skärspänningsfördelning över tvärsnittet, som överensstämmer med den för rak ramdel gällande, en approximation, som för enkelkrökt konstruktion ger praktiskt försvinnande avvikelse för $R/h > 3$.

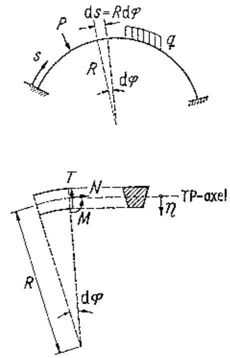


Fig :22b

:23 Tillämpning av Castiglianos sats för beräkning av statiskt obestämd kvantitet

Exemplifierad för ett 1-falt statiskt obestämt rambärverk kännetecknas en tillämpning av Castiglianos sats för en bestämning av statiskt obestämd kvantitet av följande metodik.

Som statiskt obestämd kvantitet införs lämpligen en sådan snitt- eller reaktionsstorhet X_1, vars rörelse i egen riktning δ_{x1} är från början känd i den verkliga konstruktionen. Normalt eftersträvas därvid ett sådant val av X_1, att tillhörande δ_{x1} blir = 0.

För den praktiska utvärderingen av X_1 är det — med exemplifiering för den i fig :23a visade 2-ledsramen — lämpligt att klyva verkligt lastfall med normalkraft N_P, moment M_P och tvärkraft T_P i två statiskt bestämda dellastfall enligt fig :23c och d.

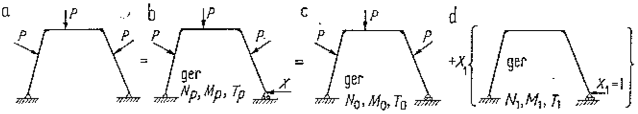


Fig :23 a–d

Av dessa ger det i fig :23c visade med normalkraft N_0, moment M_0 och tvärkraft T_0 renodlat inverkan av den yttre lasten P ($X_1=0$), medan dellastfallet enligt fig :23d omfattar endast inverkan av den statiskt obestämda kvantiteten X_1. Betecknas därvid av $X_1=1$ orsakad normalkraft N_1, moment M_1 och tvärkraft T_1, erhålls ur fig :23 genom direkt addition relationerna

$$N_P = N_0 + X_1 N_1 \qquad M_P = M_0 + X_1 M_1 \qquad T_P = T_0 + X_1 T_1 \tag{1}$$

Insättes dessa i uttrycket för W enligt ekv :22 (2) eller (4) och tillämpas därpå Castiglianos sats, ekv :21(1)

$$\delta_{x1} = \partial W / \partial X_1 \tag{2}$$

erhålls för bestämning av X_1 erforderligt samband.

Speciellt för av *raka delar* uppbyggd ramkonstruktion ger en sådan behandling med Castiglianos sats för X_1 det generella uttrycket

$$\delta_{x1} = \int_L \frac{N_1 N_0 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_0 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_1 T_0 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v0} \,\mathrm{d}x}{GK_v} + $$
$$+ X_1 \left[\int_L \frac{N_1^2 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_1^2 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_1^2 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1}^2 \,\mathrm{d}x}{GK_v} \right] \tag{3}$$

Är därvid i verklig konstruktion $\delta_{x1} = 0$ erhålls

$$X_1 = - \frac{\int_L \frac{N_1 N_0 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_0 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_1 T_0 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v0} \,\mathrm{d}x}{GK_v}}{\int_L \frac{N_1^2 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_1^2 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_1^2 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1}^2 \,\mathrm{d}x}{GK_v}} \tag{4}$$

I ekv (3) och (4) gäller för de olika deltermernas inbördes storlekar vad som ovan anförts i anslutning till ekv :22 (2).

Genom analog tillämpning kan för de statiskt obestämda kvantiteterna $X_1, X_2, X_3 \ldots$ i en flerfalt statiskt obestämd konstruktion med *raka ramdelar* följande ekvationssystem härledas

$$\delta_{x1} = \int_L \frac{N_1 N_0 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_0 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_1 T_0 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v0} \,\mathrm{d}x}{GK_v} + X_1 \left[\int_L \frac{N_1^2 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_1^2 \,\mathrm{d}x}{EI} + \right.$$
$$\left. + \int_L \varkappa \frac{T_1^2 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1}^2 \,\mathrm{d}x}{GK_v} \right] + X_2 \left[\int_L \frac{N_1 N_2 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_2 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_1 T_2 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v2} \,\mathrm{d}x}{GK_v} \right] +$$
$$+ X_3 \left[\int_L \frac{N_1 N_3 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_3 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_1 T_3 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v3} \,\mathrm{d}x}{GK_v} \right] + \ldots \tag{5 a}$$

$$\delta_{x2} = \int_L \frac{N_2 N_0 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_2 M_0 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_2 T_0 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v2} M_{v0} \,\mathrm{d}x}{GK_v} + X_1 \left[\int_L \frac{N_1 N_2 \,\mathrm{d}x}{EA} + \right.$$
$$\left. + \int_L \frac{M_1 M_2 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_1 T_2 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v2} \,\mathrm{d}x}{GK_v} \right] + X_2 \left[\int_L \frac{N_2^2 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_2^2 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_2^2 \,\mathrm{d}x}{GA} + \right.$$
$$\left. + \int_L \frac{M_{v2}^2 \,\mathrm{d}x}{GK_v} \right] + X_3 \left[\int_L \frac{N_2 N_3 \,\mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_2 M_3 \,\mathrm{d}x}{EI} + \int_L \varkappa \frac{T_2 T_3 \,\mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{v2} M_{v3} \,\mathrm{d}x}{GK_v} \right] + \ldots \tag{5 b}$$

					$k=4k_m\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})$	$k=k_m\frac{x}{L^2}(2L-x)$	$k=k_m\frac{x^2}{L^2}$	
—		Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{2}Lik$
—		$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik_m$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
—		$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik_m$	$\frac{1}{12}Lik_m$	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$
—		$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L\{2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2\}$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k_m$	$\frac{1}{6}Lk\{(1+\beta)i_1+(1+\alpha)i_1\}$
$i=4i_m\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})$		$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{7}{15}Li_mk_m$	$\frac{1}{5}Li_mk_m$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)i_mk$
$i=i_m\frac{x}{L^2}(2L-x)$		$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{5}{12}Li_mk$	$\frac{1}{12}Li_m(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Li_mk_m$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{3}{10}Li_mk_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)i_mk$
$i=i_m\frac{1}{L^2}(L^2-x^2)$		$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{1}{4}Li_mk$	$\frac{1}{12}Li_m(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Li_mk_m$	$\frac{11}{30}Li_mk_m$	$\frac{2}{15}Li_mk_m$	$\frac{1}{12}L(5-\alpha-\alpha^2)i_mk$
$i=i_m\frac{x^2}{L^2}$		$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{4}Li_mk$	$\frac{1}{12}Li_m(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Li_mk_m$	$\frac{3}{10}Li_mk_m$	$\frac{1}{5}Li_mk_m$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)i_mk$
$i=i_m\frac{1}{L^2}(L-x)^2$		$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{12}Li_mk$	$\frac{1}{12}Li_m(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Li_mk_m$	$\frac{2}{15}Li_mk_m$	$\frac{1}{30}Li_mk_m$	$\frac{1}{12}L(1+\beta+\beta^2)i_mk$
—		$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}Li\{(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2\}$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik_m$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik_m$	$\frac{1}{3}Lik$

Fig :23e. Integralen $\int_L R_i R_k dx$ för några olika R_i- och R_k-variationer

$$\delta_{x3}=\int_L \frac{N_3 N_0\,\mathrm{d}x}{EA}+\int_L \frac{M_3 M_0\,\mathrm{d}x}{EI}+\int_L \varkappa\frac{T_3 T_0\,\mathrm{d}x}{GA}+\int_L \frac{M_{v3} M_{v0}\,\mathrm{d}x}{GK_v}+$$
$$+X_1\left[\int_L \frac{N_1 N_3\,\mathrm{d}x}{EA}+\int_L \frac{M_1 M_3\,\mathrm{d}x}{EI}+\int_L \varkappa\frac{T_1 T_3\,\mathrm{d}x}{GA}+\right.$$
$$\left.+\int_L \frac{M_{v1} M_{v3}\,\mathrm{d}x}{GK_v}\right]+$$
$$+X_2\left[\int_L \frac{N_2 N_3\,\mathrm{d}x}{EA}+\int_L \frac{M_2 M_3\,\mathrm{d}x}{EI}+\int_L \varkappa\frac{T_2 T_3\,\mathrm{d}x}{GA}+\int_L \frac{M_{v2} M_{v3}\,\mathrm{d}x}{GK_v}\right]+$$
$$+X_3\left[\int_L \frac{N_3^2\,\mathrm{d}x}{EA}+\int_L \frac{M_3^2\,\mathrm{d}x}{EI}+\int_L \varkappa\frac{T_3^2\,\mathrm{d}x}{GA}+\int_L \frac{M_{v3}^2\,\mathrm{d}x}{GK_v}\right]+\ldots \qquad (5\,\mathrm{c})$$

Därvid betecknar:

δ_{x1}, δ_{x2}, δ_{x3} den verkliga konstruktionens deformationer i de statiskt obestämda kvantiteternas X_1, X_2, X_3 riktningar,

N_0, M_0, T_0 och M_{v0} normalkraft, böjmoment, tvärkraft respektive vridmoment av yttre last P i den statiskt bestämda jämförelsekonstruktion, som uppkommer, om samtliga statiskt obestämda kvantiteter sätts $=0$,

N_1, M_1, T_1 och M_{v1} motsvarande snittstorheter i den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen vid last av enbart $X_1=1$,

N_2, M_2, T_2 och M_{v2} motsvarande snittstorheter i den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen vid last av enbart $X_2=1$,

N_3, M_3, T_3 och M_{v3} motsvarande snittstorheter i den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen vid last av enbart $X_3=1$, etc

Sedan de statiskt obestämda kvantiteterna X_1, X_2, X_3 etc lösts ur uppställt ekvationssystem (5), erhålls den verkliga konstruktionens snittstorheter N_P, M_P, T_P och M_{vP} ur de med ekv (1) analoga sambanden

$$\left.\begin{aligned}
N_P&=N_0+X_1N_1+X_2N_2+X_3N_3+---\\
M_P&=M_0+X_1M_1+X_2M_2+X_3M_3+---\\
T_P&=T_0+X_1T_1+X_2T_2+X_3T_3+---\\
M_{vP}&=M_{v0}+X_1M_{v1}+X_2M_{v2}+X_3M_{v3}+---
\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

För att underlätta praktiska tillämpningar av ekv (3), (4) och (5) redovisas i fig :23e integralen $\int_L R_i R_k \mathrm{d}x$ för några olika R_i- och R_k-variationer (Beton-Kalender 1953, s 271–276). I tillämpning på de olika deltermerna i ekv (3), (4) och (5) kan därvid R_i representeras av t ex N_1, M_1, T_1 eller M_{v1} och R_k av N_0, M_0, T_0 eller M_{v0}. För specialfallet $R_i=R_k$ ger tabellen integralerna i de till Castiglianos sats hörande uttrycken för det inre arbetet W — ekv :22 (2) — (4). De i tabellen sammanställda integralvärdena förutsätter balk eller ramdel med konstant sektion.

Beräkningsexempel

Exempel 1. Beräkna stångkrafterna i fackverket enligt fig :23f, om samtliga stänger har samma tvärsnittsyta A och samma elasticitetsmodul E.

Av symmetriskäl kan beräkningen begränsas till att omfatta endast ena hälften (012) av fackverket. På denna hälft verkar i knutpunkten 0 dels en vertikalkraft $P/2$ och dels en obekant horisontalkraft X_1, vilken väljs som konstruktionens statiskt obestämda storhet.

För X_1-s bestämning gäller villkoret, att X_1-s förskjutning i egen riktning δ_{x1} av symmetriskäl måste vara $=0$. Med tillämpning på Castiglianos sats, ekv :21 (1), kan villkoret formuleras

$$\delta_{x1}=\partial W/\partial X_1=0 \qquad (a)$$

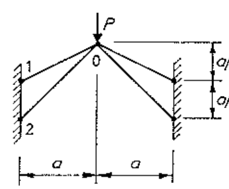


Fig :23f

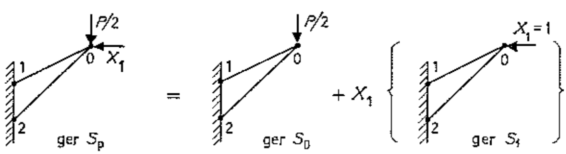


Fig :23g

Beräkningstekniskt är det enligt :23 fördelaktigt att dela upp det verkliga lastfallet med stångkrafter S_P enligt fig :23g i ett delfall med den statiskt obestämda storheten $X_1=0$, mot vilket delfall svarar stångkrafter S_0, och i ett delfall med som enda last den statiskt obestämda storheten X_1, mot vilket delfall svarar stångkrafter XS_1 (S_1 definieras alltså som stångkraften vid last av endast $X_1=1$). För stångkraften i verklig konstruktion S_P ger en sådan uppdelning uttrycket

$$S_P = S_0 + X_1 S_1 \tag{7}$$

Genom insättning härav i ekv :22 (1) erhålls för fackverkets inre arbete W sambandet

$$W = \frac{1}{2}\sum\frac{(S_0+X_1 S_1)^2 L}{EA} \tag{b}$$

vilket tillämpat på det ovan uppställda deformationsvillkoret, ekv (a), för X_1-s bestämning ger ekvationen

$$\delta_{x1} = \partial W/\partial X_1 = \sum\frac{(S_0+X_1 S_1)\,S_1 L}{EA} = \sum\frac{S_0 S_1 L}{EA} + X_1\sum\frac{S_1^2 L}{EA} = 0 \tag{c}$$

varur för X_1 beräknas uttrycket

$$X_1 = -\sum\frac{S_0 S_1 L}{EA}\Big/\sum\frac{S_1^2 L}{EA} \tag{8}$$

En tabellarisk beräkning av i ekv (8) ingående summor ger för det aktuella tillämpningsexemplet följande.

Stång	L	S_0	S_1	$\frac{S_0 S_1 L}{EA}$	$\frac{S_1^2 L}{EA}$	$S_P = S_0 + X_1 S_1$
0 – 1	$\frac{1}{2}\sqrt{5}a$	$+\frac{1}{2}\sqrt{5}P$	$-\sqrt{5}$	$-\frac{5\sqrt{5}Pa}{4EA}$	$\frac{5\sqrt{5}a}{2EA}$	$-0{,}373\,P$
0 – 2	$\sqrt{2}a$	$-\sqrt{2}P$	$+\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{2}Pa}{EA}$	$\frac{2\sqrt{2}a}{EA}$	$-0{,}471\,P$
				$-5{,}62\frac{Pa}{EA}$	$8{,}42\frac{a}{EA}$	

$X_1 = 5{,}62P/8{,}42 = 0{,}667\;P$

Exempel 2. Beräkna för en 1-falt statiskt obestämd balk enligt fig :23h böjmomentvariationen, om balken har efter sin längd konstant sektion. Tvärkraftseffekten på balkens inre arbete W förutsätts försumbar.

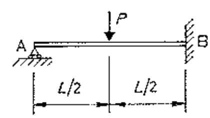


Fig :23h

Med upplagsreaktionen i A som statiskt obestämd storhet X_1, ger en behandling, baserad på ekv (4) — vilken är giltig, då i föreliggande fall $\delta_{x1}=0$ — följande (fig :23i):

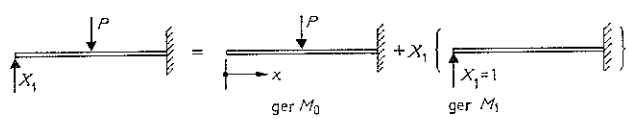


Fig :23i

$$X_1 = -\frac{\int_L \frac{M_0 M_1 \, dx}{EI}}{\int_L \frac{M_1^2 \, dx}{EI}} \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_0 = 0 & \text{för} & 0 \leqslant x \leqslant L/2 \\ M_0 = -P(x - L/2) & \text{för} & L/2 \leqslant x \leqslant L \end{array}\right\} \tag{d}$$

$$M_1 = 1 \cdot x \quad \text{för} \quad 0 \leqslant x \leqslant L \tag{e}$$

$$\int_L \frac{M_0 M_1 \, dx}{EI} = -\frac{P}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^{L} (x - L/2)\, x \, dx = -5PL^3/48EI$$

$$\int_L \frac{M_1^2 \, dx}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^L x^2 \, dx = L^3/3EI$$

$$X_1 = (5/16)\, P$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_P = M_0 + X_1 M_1 = (5/16)\, Px & \text{för} & 0 \leqslant x \leqslant L/2 \\ M_P = M_0 + X_1 M_1 = \frac{1}{2} PL(1 - 11x/8L) & \text{för} & L/2 \leqslant x \leqslant L \end{array}\right\} \tag{f}$$

:24 Arbetsekvationer. Beräkningsprincip

Principen för behandlingen av en statiskt obestämd konstruktion med arbetsekvationer är följande. Konstruktionen överförs till en statiskt bestämd jämförelsekonstruktion. Detta kan ske dels genom uppsnittning på sådant sätt att en eller flera snittkrafter inte längre kan överföras, dels genom borttagande av reaktioner. I stället införs obekanta snittkrafter respektive reaktionskrafter, de så kallade statiskt obestämda. Genom utnyttjande av energisamband är det sedan möjligt att bestämma storleken på de statiskt obestämda så att jämförelsekonstruktionens snitt sluter sig respektive att deformationen i de obekanta reaktionskrafternas riktning blir lika med den statiskt obestämda konstruktionens verkliga deformation, normalt 0.

Antalet statiskt obestämda är för en given konstruktion entydigt bestämt. Valet av de obekanta $X_1 \ldots X_n$ för en n-falt statiskt obestämd konstruktion kan dock göras på många olika sätt. Allmänt gäller att de måste förorsaka n av varandra oberoende spänningstillstånd. Fig :24b–e visar några olika möjligheter att välja de obekanta för den 2-falt statiskt obestämda balken enligt fig :24a. Observera särskilt möjligheten att välja olika statiskt be-

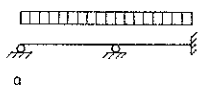


Fig :24a

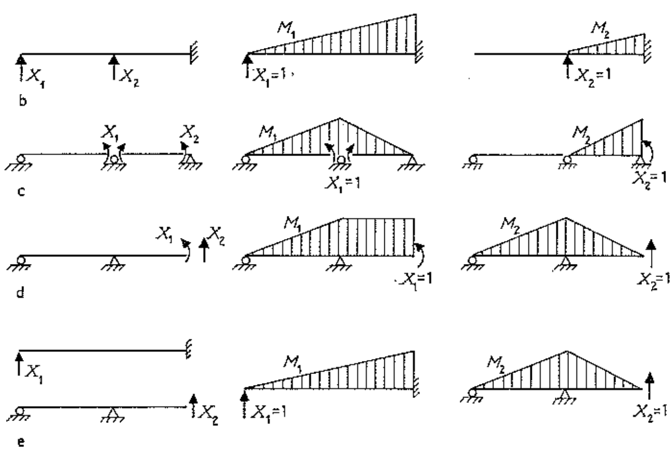


Fig :24b–e

Fig :24f och g

stämda jämförelsekonstruktioner för de olika obekanta (fig :24e). För att minska beräkningsarbetet är det lämpligt att välja jämförelsekonstruktionerna så att inverkan av ett $X_i = 1$ sträcker sig över en så liten del som möjligt av konstruktionen.

För den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen beräknas deformationerna i de punkter och riktningar som definierats av de obekanta. Vid obekanta inre snittkrafter förstås därmed de båda snittytornas relativa deformation. Vid obekanta reaktionskrafter förstås deformationen relativt jämförelsekonstruktionens fasta upplag.

Fig :24f och g visar deformationen av jämförelsekonstruktionen enligt fig :24c för var och en av de obekanta = 1. δ_{ij} anger därvid deformationen (i detta fall = rotationen) i av X_i definierad punkt och riktning p g a $X_j = 1$.

Sedan ovannämnda deformationer beräknats för dels var och en av de obekanta = 1, dels för yttre last verkande på den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen kan n deformationsvillkor formuleras. Deformationerna sätts till sitt verkliga värde, i allmänhet = 0, och därvid erhålls ett lineärt ekvationssystem för de n obekanta $X_1 \ldots X_n$.

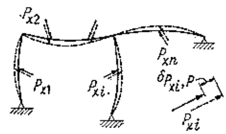


Fig :24h

För deformationsberäkningen utnyttjas energisamband som följer ur lagen om energins oförstörbarhet och superpositionslagens tillämpbarhet. Studeras en godtyckligt vald konstruktion, som under uppkomst av inre spänningar σ_x och τ_x belastats och deformerats enligt de heldragna linjerna i fig :24h av ett likaledes godtyckligt valt kraftsystem P_x ($P_{x1}, P_{x2} \ldots$). Med detta tillstånd som utgångspunkt ges konstruktionen på något sätt, exempelvis genom införande av ett nytt kraftsystem P eller genom uppvärmning, en tvångsdeformation till det i fig :24h streckmarkerade läget. Det under denna förflyttning konstanta P_x-systemet uträttar därvid ett yttre arbete $W^y_{Px,P}$, för vilket gäller sambandet

$$W^y_{Px,P} = \sum_1^n P_{xi}\,\delta_{Pxi,P} \tag{1}$$

varvid $\delta_{Pxi,P}$ betecknar tvångsförskjutningen av kraften P_{xi} i dess egen riktning.

Samtidigt uppkommer i konstruktionen ett *inre arbete* $W^i_{Px,P}$ från de mot P_x-systemet svarande inre spänningarna σ_x och τ_x, då dessa med konstant värde medföljer de till tvångsförskjutningen hörande inre deformationerna. Ur lagen om energins oförstörbarhet följer, *att dessa yttre och inre arbeten skall vara lika,* dvs

$$W^i_{Px,P} = \sum_1^n P_{xi}\,\delta_{Pxi,P} \tag{2}$$

Väljs som P_x-system en enhetslast i den sökta deformationens riktning kan ekv (2) skrivas

$$W^i_{Px,P} = 1 \cdot \delta_{Px,P} \tag{3}$$

:25 Inre arbetet vid stång- och balksystem

För att tillrättalägga behandlingen med arbetsekvationer för praktiska kalkyler sammanställs nedan uttryck för det inre arbetet $W^i_{Px,P}$ för stångsystem samt för rambärverk uppbyggda av raka och enkelkrökta ramdelar.

Inre arbetet $W^i_{Px,P}$ *vid stångsystem, tvångsdeformerat av kraftsystem P och genom uppvärmning* (jfr 165:3)

$$W^i_{Px,P} = \Sigma(S_x S_P L/EA) + \Sigma S_x \alpha t L \tag{1}$$

där S_x = stångkraft från P_x-systemet, S_P = stångkraft från P-systemet, L = stånglängd, E = elasticitetsmodul, A = stångsektion, α = längdutvidgningstal och t = temperaturhöjning för den enskilda stången.

Inre arbetet $W^i_{Px,P}$ för rambärverk av raka ramdelar, tvångsdeformerat av kraftsystem P och genom uppvärmning

Vid en temperaturfördelning för den enskilda ramdelen enl fig :25a gäller

$$W^i_{Px,P} = \int_L \frac{N_x N_P \,dx}{EA} + \int_L \frac{M_x M_P \,dx}{EI} + \int_L \frac{\varkappa T_x T_P \,dx}{GA} + \int_L \frac{M_{vx} M_{vP} \,dx}{GK_v} + \int_L N_x \alpha(t_0 + \beta x)\,dx + \int_L M_x \alpha\gamma \,dx \qquad (2)$$

där N_x, M_x, T_x, M_{vx} = normalkraft, böjmoment, tvärkraft respektive torsionsmoment från P_x-systemet, N_P, M_P, T_P, M_{vP} dito från P-systemet, E, G = elasticitets- respektive skjuvmodul, A = tvärsnittsarea, I = tröghetsmoment, K_v = vridstyvhetens tvärsnittsfaktor, x = längskoordinat, L = ramdelarnas sammanlagda längd och $\varkappa$ = den i anslutning till ekv :22 (2) beskrivna tvärsnittskonstanten.

För den inbördes storleken av de i ekv (2) ingående deltermerna gäller oförändrat vad som ovan anförts för deltermerna i den analoga ekv :22 (2). De i ekv (2) ingående integralerna finns tabellerade i fig :23e för ett antal vanligt förekommande lastfall.

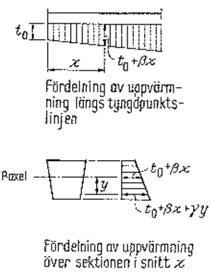


Fig :25a

Inre arbetet $W^i_{Px,P}$ för rambärverk av enkelkrökta ramdelar, tvångsdeformerat av kraftsystem P och genom uppvärmning

Vid en temperaturfördelning för den enskilda ramdelen enligt fig :25b gäller

$$W^i_{Px,P} = \int_L \frac{1}{EA}\left(N_x - \frac{M_x}{R}\right)\left(N_P - \frac{M_P}{R}\right) ds + \int_L \frac{M_x M_P \,ds}{EJ} + \int_L \varkappa \frac{T_x T_P \,ds}{GA} + \int_L N_x \alpha(t_0 + \beta s)\,ds + \int_L M_x \alpha\gamma \,ds \qquad (3)$$

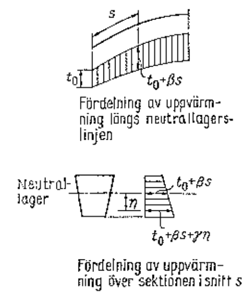


Fig :25b

med de i förhållande till ekv (2) nytillkomna storheterna s = båglängden, R = tyngdpunktsaxelns krökningsradie i snitt s vid obelastad konstruktion och J = enkelkrökta balkens modifierade tröghetsmoment, bestämt genom ekv :22 (5).

För $R/h \geqslant 10$, där h = sektionshöjden, kan ekv (3) med god approximation ersättas med det matematiskt mera lätthanterliga sambandet för rak ramdel enligt ekv (2). För den inbördes storleken av de i ekv (3) ingående deltermerna gäller i allt väsentligt detsamma som för motsvarande deltermer i ekv :22 (2).

:26 Tillämpningar av arbetsekvationer

:261 Deformationsberäkning vid statiskt bestämd konstruktion

Vertikaldeformationen i konsoländen för den statiskt bestämda konstruktionen enligt fig :261a under lasten P kan bestämmas på följande sätt.

Konstruktionen tänks belastad med en enhetslast $X_1 = 1$ verkande i den sökta deformationens δ riktning (fig :261b). Påförs därefter lasten P deformeras konsoländen δ och lasten X_1 uträttar därvid ett yttre arbete (fig :261c)

$$W^y_{x1,P} = X_1 \delta = \delta \qquad (1)$$

Eftersom det yttre arbetet är lika med det samtidigt uppkommande inre arbetet $W^i_{x1,P}$ enligt ekv :24 (1), (2) och (3) erhålls

$$\delta = W^i_{x1,P} \qquad (2)$$

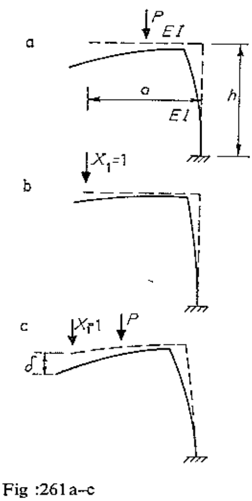


Fig :261a–c

Momenten av $X_1 = 1$ respektive P framgår av fig :261 d och e. Försummas normal- och tvärkraftsarbetena erhålls enligt ekv :25 (2) för ramen enligt fig :261 a

$$\delta = W^i_{x1,P} = \int_L \frac{M_x M_P \,\mathrm{d}x}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\int_{\frac{a}{2}}^{a} (-x)\frac{Pa}{2}\left(1 - \frac{2x}{a}\right)\mathrm{d}x \right.$$

$$\left. + \int_0^h (-a)\left(-\frac{Pa}{2}\right)\mathrm{d}x\right] = (Pa^3/2EI)[5/24 + h/a] \quad (3)$$

Enligt ekv (2) kan alltså deformationen i en punkt av en last P beräknas som det inre arbete som spänningarna av en tänkt last $X_1 = 1$, verkande i den sökta deformationens punkt och riktning, uträttar när de medföljer i den av P orsakade deformationen.

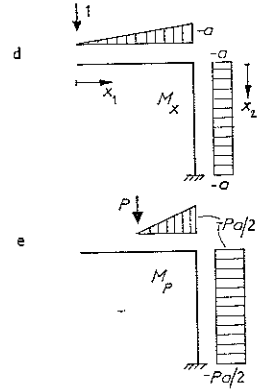


Fig :261 d och e

:262 Beräkning av statiskt obestämda kvantiteter i flerfalt statiskt obestämda konstruktioner

Beräkningsprincipen illustreras genom tillämpning på balk i tre fack med konstanta böjstyvheten EI och belastad med 2 punktlaster (fig :262 a). Balken är 2-falt statiskt obestämd och som obekanta storheter väljs dels upplagsreaktionen vid upplag B (X_1) dels stödmomentet vid C (X_2). Sedan stödet B borttagits och momentled införts vid C erhålls den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen (fig :262 b). Belastas denna med den yttre lasten respektive med lastfallen $X_1 = 1$ och $X_2 = 1$ erhålls deformationer och momentfördelning enligt fig :262 c–e. Försummas tvärkraftsarbetet kan de i fig :262 c–e markerade deformationerna i de obekantas riktningar beräknas ur följande uttryck

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{10} &= \int_L \frac{M_1 M_0}{EI}\,\mathrm{d}x \\
\delta_{20} &= \int_L \frac{M_2 M_0}{EI}\,\mathrm{d}x \\
\delta_{11} &= \int_L \frac{M_1 M_1}{EI}\,\mathrm{d}x \\
\delta_{12} = \delta_{21} &= \int_L \frac{M_1 M_2}{EI}\,\mathrm{d}x \\
\delta_{22} &= \int_L \frac{M_2 M_2}{EI}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Formuleras villkoren att vertikaldeformationen vid B och relativa vinkeländringen vid C skall vara 0 erhålls

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 &= -\delta_{10} \\
\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 &= -\delta_{20}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Som framgår av ekv (1) är $\delta_{21} = \delta_{12}$. Ekvationssystemet (2) är därför symmetriskt. Ur ekv (2) kan X_1 och X_2 beräknas. Den resulterande momentfördelningen över konstruktionen kan sedan erhållas enligt

$$M_P = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \quad (3)$$

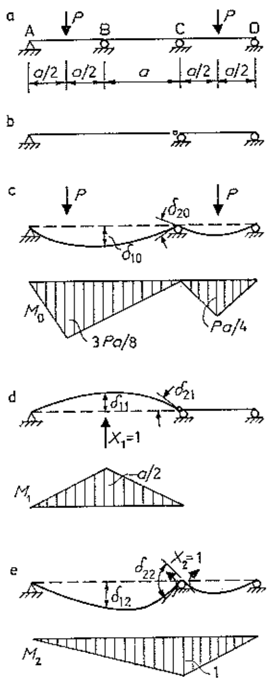


Fig :262 a–e

Genom analog tillämpning som ovan kan följande ekvationssystem för en n-falt statiskt obestämd konstruktion härledas

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \ldots \delta_{1n} X_n = -\delta_{10} \\
&\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \ldots \delta_{2n} X_n = -\delta_{20} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \ldots \delta_{nn} X_n = -\delta_{n0}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Här är

$$\delta_{ij} = \int_L \frac{N_i N_j}{EA} \mathrm{d}x + \int_L \frac{M_i M_j}{EI} \mathrm{d}x + \int_L \frac{\varkappa T_i T_j}{GA} \mathrm{d}x + \int_L \frac{M_{vi} M_{vj} \mathrm{d}x}{GK_v}$$

$$\delta_{i0} = \int_L \frac{N_i N_0 \mathrm{d}x}{EA} + \int_L \frac{M_i M_0 \mathrm{d}x}{EI} + \int_L \frac{\varkappa T_i T_0 \mathrm{d}x}{GA} + \int_L \frac{M_{vi} M_{v0} \mathrm{d}x}{GK_v}$$

$$+ \int_L N_i \alpha(t_0 + \beta x) \mathrm{d}x + \int_L M_i \alpha\gamma \mathrm{d}x$$

Därvid betecknar

δ_{ij} deformationen hos den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen i punkt och riktning definierad av X_i p g a $X_j = 1$

δ_{i0} deformationen hos den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen i punkt och riktning definierad av X_i p g a yttre last och uppvärmning

N_i, M_i, T_i och M_{vi} snittkrafter av $X_i = 1$.

De statiskt obestämda $X_1 \ldots X_n$ erhålls genom att ekvationssystemet (4) löses och de resulterande snittkrafterna kan sedan beräknas ur de med ekv (3) analoga sambanden

$$\left.\begin{aligned} N_P &= N_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i N_i \\ M_P &= M_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i M_i \\ T_P &= T_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i T_i \\ M_{vP} &= M_{v0} + \sum_{i=1}^{n} X_i M_{vi} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

:263 Deformationsberäkning vid statiskt obestämd konstruktion

Sedan snittkraftsfördelningen N_P, M_P, T_P är känd kan deformationen i en godtyckligt vald punkt och riktning beräknas genom studium av en lämpligt vald statiskt bestämd jämförelsekonstruktion.

Balken enligt fig :263a är belastad med jämnt utbredd last på mittspannet. Den därav orsakade momentfördelningen framgår av fig :263b. Deformationen i punkt A söks. Denna kan dock även beräknas som deformationen i punkt Ā hos den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen enligt fig :263c, som belastats med ett P-system som utgör den resulterande statiskt obestämda snittkraftsfördelningen enligt fig :263b.

Deformationen hos en statiskt obestämd konstruktion kan alltså sedan snittkraftsfördelningen bestämts enligt :262 beräknas för en lämpligt vald statiskt bestämd jämförelsekonstruktion på det sätt som beskrivits under :261. Som resulterande deformation erhålls därvid förskjutningar och rotationer relativt jämförelsekonstruktionens fasta upplag.

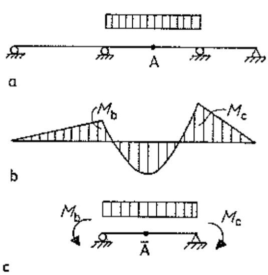


Fig :263 a–c

:27 Beräkningsexempel

Exempel 1. Deformationsberäkning i statiskt bestämd konstruktion. Beräkna för den i fig :27a visade, fritt upplagda cirkelbågen med efter sin utsträckning konstant sektion horisontalrörelsen δ_h i glidlagret.

Vid P_x-system av *en* kraft $P_{x1} = 1$, verkande i den sökta rörelsens riktning (fig :27b), gäller för δ_h sambandet, jfr ekv :25 (3),

$$\delta_h = \int_L \frac{1}{EA} \left(N_1 - \frac{M_1}{R} \right) \left(N_P - \frac{M_P}{R} \right) \mathrm{d}s + \int_L \frac{M_1 M_P \mathrm{d}s}{EJ} + \int_L \frac{\varkappa T_1 T_P \mathrm{d}s}{GA} \quad \text{(a)}$$

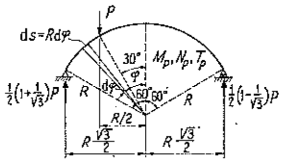


Fig :27a

I aktuellt fall beräknas ur fig :27 a

$$N_P = -(P/2)(1+1/\sqrt{3})\sin\varphi;\quad M_P = \tfrac{1}{2}(1+1/\sqrt{3})(\sqrt{3}/2-\sin\varphi)\,PR;$$
$$T_P = (P/2)(1+1/\sqrt{3})\cos\varphi \quad \text{för} \quad 60° \geqslant \varphi \geqslant 30° \tag{b}$$
$$N_P = (P/2)(1-1/\sqrt{3})\sin\varphi;\quad M_P = \tfrac{1}{2}(1-1/\sqrt{3})(\sqrt{3}/2+\sin\varphi)\,PR;$$
$$T_P = -(P/2)(1-1/\sqrt{3})\cos\varphi \quad \text{för} \quad 30° \geqslant \varphi \geqslant -60° \tag{c}$$

och ur fig :27 b

$$N_1 = \cos\varphi;\quad M_1 = (\cos\varphi - \tfrac{1}{2})R;\quad T_1 = \sin\varphi \quad \text{för varje } \varphi \tag{d}$$

vilket för de i ekv (a) ingående integralerna ger

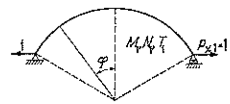


Fig :27b

$$\int_L \frac{1}{EA}\left(N_1 - \frac{M_1}{R}\right)\left(N_P - \frac{M_P}{R}\right) ds = -\frac{\pi}{24EA}(2\sqrt{3}-1)\,PR;$$
$$\int_L \frac{M_1 M_P\, ds}{EJ} = (1/24EJ)(6\sqrt{3}+\pi-2\pi\sqrt{3})\,PR^3;\quad \int_L \frac{T_1 T_P\, ds}{GA} = PR/4GA \tag{e}$$

Insatt i ekv (a) ger detta för den sökta horisontalrörelsen uttrycket

$$\delta_h = (PR^3/24EJ)[6\sqrt{3}+\pi-2\pi\sqrt{3}-\pi(2\sqrt{3}-1)\alpha+6\beta]$$
$$= 0{,}1105(PR^3/EJ)(1-2{,}92\alpha+2{,}26\beta) \tag{f}$$

i vilket

$$\alpha = J/AR^2;\quad \beta = \varkappa EJ/GAR^2 \tag{g}$$

Exempel 2. Flerfalt statiskt obestämd ramkonstruktion. Beräkna momentdiagrammet för den i fig :27c visade 3-falt statiskt obestämda 0-ledsramen, om samtliga ramdelar har konstant och lika sektion. Med god approximation bortses därvid från de för föreliggande konstruktion och lastfall praktiskt betydelselösa inre arbetena av normal- och tvärkrafter.

Som statiskt obestämda kvantiteter införs i den vänstra fasta inspänningen horisontalreaktion X_1, vertikalreaktion X_2 samt inspänningsmoment X_3 enligt fig :27d.

Deformationssambanden enligt ekv :262 (4) kan skrivas

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3 &= -\delta_{10}\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3 &= -\delta_{20}\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3 &= -\delta_{30}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Eftersom endast momentarbete medtas gäller därvid

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j\, dx}{EI} \quad \text{och} \quad \delta_{i0} = \int \frac{M_i M_0\, dx}{EI}$$

För den valda statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen erhålls (fig :27d och e)

$$\left.\begin{aligned} &M_0=0;\ M_1=-x_1;\ M_2=0;\ M_3=1 && \text{för } 0\leqslant x_1\leqslant L/2\\ &M_0=-(1/8)qx_2^2;\ M_1=-\tfrac{1}{2}(L+\sqrt{3}x_2);\ M_2=\tfrac{1}{2}x_2;\ M_3=1 && \text{för } 0\leqslant x_2\leqslant L/2\\ &M_0=-(1/32)q(L+2\sqrt{3}x_3)^2;\ M_1=-(1/4)(2L+\sqrt{3}L-2x_3); &&\\ &M_2=(1/4)(L+2\sqrt{3}x_3);\ M_3=1 && \text{för } 0\leqslant x_3\leqslant L\sqrt{3}/2\\ &M_0=-\tfrac{1}{2}qL^2;\ M_1=-\tfrac{1}{2}(L-2x_4);\ M_2=L;\ M_3=1 && \text{för } 0\leqslant x_4\leqslant L/2\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

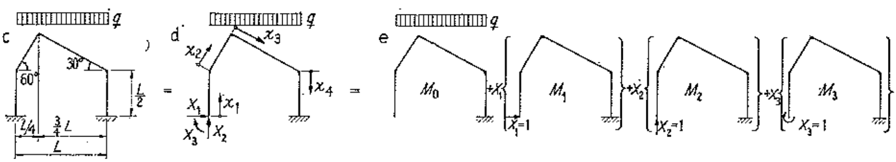


Fig :27c–e

varvid sådana böjmoment, som framkallar dragspänningar i rambärverkets innersida, betecknats positiva. För de i ekv (a) ingående koefficienterna erhålls

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta_{11} &= \int \frac{M_1 M_1}{EI}\,dx = 0{,}8060\ L^3/EI \\
\delta_{12} = \delta_{21} &= \int \frac{M_1 M_2}{EI}\,dx = -0{,}5387\ L^3/EI \\
\delta_{13} = \delta_{31} &= \int \frac{M_1 M_3}{EI}\,dx = -1{,}2288\ L^2/EI \\
\delta_{10} &= \int \frac{M_1 M_0}{EI}\,dx = 0{,}1879\ qL^4/EI \\
\delta_{22} &= \int \frac{M_2 M_2}{EI}\,dx = 0{,}8893\ L^3/EI \\
\delta_{20} &= \int \frac{M_2 M_0}{EI}\,dx = -0{,}3948\ qL^4/EI \\
\delta_{23} = \delta_{32} &= \int \frac{M_2 M_3}{EI}\,dx = 1{,}1038\ L^2/EI \\
\delta_{33} &= \int \frac{M_3 M_3}{EI}\,dx = 2{,}3660\ L/EI \\
\delta_{30} &= \int \frac{M_3 M_0}{EI}\,dx = -0{,}4447\ qL^3/EI
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(c)}
$$

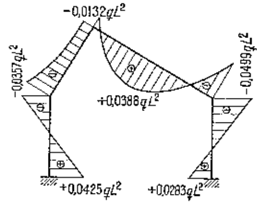


Fig :27f

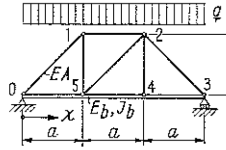


Fig :27g

Insätts dessa värden i ekvationssystem (a) och löses detta erhålls

$X_1 = 0{,}1564qL \qquad X_2 = 0{,}4859qL \qquad X_3 = 0{,}0425qL^2$ (d)

För de resulterande böjmomenten M_P erhålls enligt ekv :262 (5) uttrycket

$M_P = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3$ (e)

ur vilket genom insättning av ekv (b) och (d) erhålls

$$
\begin{aligned}
M_P &= (0{,}0425 - 0{,}1564x_1/L)\,qL^2 && \text{för } 0 \leqslant x_1 \leqslant L/2 \\
M_P &= [-0{,}0357 + 0{,}1075x_2/L - 0{,}1250(x_2/L)^2]\,qL^2 && \text{för } 0 \leqslant x_2 \leqslant L/2 \qquad \text{(f)} \\
M_P &= [-0{,}0132 + 0{,}2825x_3/L - 0{,}3750(x_3/L)^2]\,qL^2 && \text{för } 0 \leqslant x_3 \leqslant L\sqrt{3}/2 \\
M_P &= (-0{,}0499 + 0{,}1564x_4/L)\,qL^2 && \text{för } 0 \leqslant x_4 \leqslant L/2
\end{aligned}
$$

Det tillhörande momentdiagrammet återfinns i fig :27f

Exempel 3. Statiskt obestämd, kombinerad stång- och ramkonstruktion. Beräkna momentdiagrammet för balken 0–3 vid den i fig :27g visade spännbockskonstruktionen, om normal- och tvärkrafternas inre arbeten i balken försummas. Balken förutsätts ha efter sin längd konstant $E_b I_b$ och samtliga stänger konstant och lika EA.

Konstruktionen är 2-falt statiskt obestämd och överförs till en statiskt bestämd jämförelsekonstruktion genom att stängerna 0–1 och 2–3 frigörs från sina infästningar vid 0 respektive 3. Som statiskt obestämda kvantiteter införs stångkrafterna X_1 respektive X_2 (fig :27h).

Deformationssambanden enligt ekv :262 (4) kan i detta fall skrivas

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 &= -\delta_{10} \\
\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 &= -\delta_{20}
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(a)}
$$

där

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \sum \frac{S_i S_j L}{EA} + \int \frac{M_i M_j}{EI}\,dx \\
\delta_{i0} &= \sum \frac{S_i S_0 L}{EA} + \int \frac{M_i M_0}{EI}\,dx
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(b)}
$$

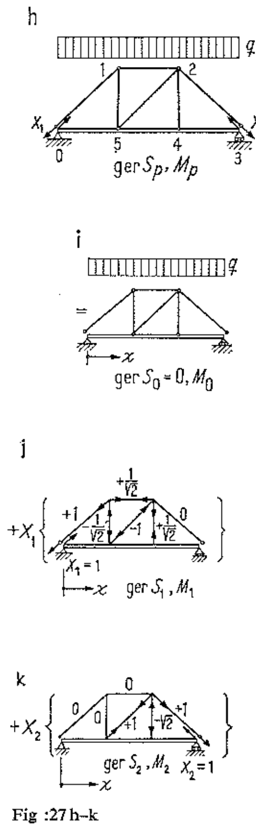


Fig :27h–k

I den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen är stångkrafterna p g a yttre last $S_0 = 0$ (se fig :27 i). Böjmomenten av detta lastfall framgår av ekv (c). Stångkrafterna av lastfallen $X_1 = 1$ respektive $X_2 = 1$ framgår av fig :27 j och k och böjmomenten i balken av ekv (d)

$$M_0 = \tfrac{1}{2}qx(3a-x) \tag{c}$$

$$\left.\begin{aligned} &M_1 = x/\sqrt{2} \text{ för } 0 \leqslant x \leqslant a;\ M_1 = (1/\sqrt{2})(2a-x) \text{ för } a \leqslant x \leqslant 2a; \\ &M_1 = 0 \text{ för } 2a \leqslant x \leqslant 3a \\ &M_2 = 0 \text{ för } 0 \leqslant x \leqslant a;\ M_2 = (1/\sqrt{2})(x-a) \text{ för } a \leqslant x \leqslant 2a; \\ &M_2 = (1/\sqrt{2})(3a-x) \text{ för } 2a \leqslant x \leqslant 3a \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

De i δ-uttrycken enligt ekv (b) ingående summa- och integraltermerna beräknas enligt nedan (e) och (f)

Stång	L	S_1	S_2	$S_1^2 L$	$S_2^2 L$	$S_1 S_2 L$	$S_P = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2$
0 – 1	$a\sqrt{2}$	$+1$	0	$a\sqrt{2}$	0	0	$-1{,}397\,qa$
1 – 2	a	$+1/\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}a$	0	0	$-0{,}988\,qa$
2 – 3	$a\sqrt{2}$	0	$+1$	0	$a\sqrt{2}$	0	$-1{,}357\,qa$
1 – 5	a	$-1/\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}a$	0	0	$+0{,}988\,qa$
2 – 4	a	$+1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}a$	$2a$	$-a$	$+0{,}931\,qa$
2 – 5	$a\sqrt{2}$	-1	$+1$	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	$-a\sqrt{2}$	$+0{,}040\,qa$
			Σ	$(2\sqrt{2}+\frac{2}{3})a$	$2(\sqrt{2}+1)a$	$-(1+\sqrt{2})a$	

(e)

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{M_1 M_0\,\mathrm{d}x}{E_b I_b} = \int \frac{M_2 M_0\,\mathrm{d}x}{E_b I_b} = 11\sqrt{2}\,qa^4/24E_b I_b \\ &\int \frac{M_1^2\,\mathrm{d}x}{E_b I_b} = \int \frac{M_2^2\,\mathrm{d}x}{E_b I_b} = a^3/3E_b I_b \\ &\int \frac{M_1 M_2\,\mathrm{d}x}{E_b I_b} = a^3/12E_b I_b \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

Koefficienterna i ekvationssystemet (a) beräknas enligt (b) varefter X_1 och X_2 erhålls. De resulterande stångkrafterna S_P och böjmomenten M_P kan därefter bestämmas enligt ekv (g)

$$\left.\begin{aligned} &S_P = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 \\ &M_P = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

För de speciella siffervärdena: $a = 4$ m, $A = 10$ cm^2,

$I_b = 40\,000$ cm^4; $E_b = E$ beräknas

$X_1 = -1{,}397qa$; $X_2 = -1{,}357qa$

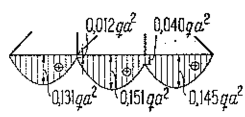


Fig :27 l

S_P enligt sista kolumnen i (e)

$$\left.\begin{aligned} &M_P = (0{,}512x/a - 0{,}500x^2/a^2)\,qa^2 \text{ för } 0 \leqslant x \leqslant a \\ &M_P = (-1{,}016 + 1{,}528x/a - 0{,}500x^2/a^2)\,qa^2 \text{ för } a \leqslant x \leqslant 2a \\ &M_P = (-2{,}880 + 2{,}460x/a - 0{,}500x^2/a^2)\,qa^2 \text{ för } 2a \leqslant x \leqslant 3a \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

Det tillhörande momentdiagrammet återfinns i fig :27 l

Exempel 4. Beräkna böj- och vridmoment för konstruktionen enligt fig :27m. Elementen har konstanta EI och GK_v och konstruktionen är centriskt belastad med punktlasten P. Konstruktionen är 3-falt statiskt obestämd men med utnyttjande av symmetrin kan den behandlas som 1-falt statiskt obestämd (se fig :27n).

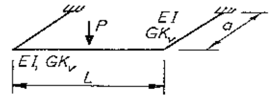


Fig :27m

Böj- och vridmoment av yttre last för den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen framgår av fig :27o och inverkan av $X=1$ av fig :27p.

Deformationssambandet som anger att rotationen i symmetrisnittet är 0 kan skrivas (jfr ekv :262 (4))

$$X\left(\int \frac{M_1 M_1}{EI}\,dx + \int \frac{M_{v1} M_{v1}}{GK_v}\,dx\right) = -\int \frac{M_1 M_0}{EI}\,dx - \int \frac{M_{v1} M_{v0}}{GK_v}\,dx \qquad \text{(a)}$$

De i ekv (a) ingående integralsambanden beräknas enligt (b)

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{M_1 M_1}{EI}\,dx = L/2EI \\ &\int \frac{M_{v1} M_{v1}}{GK_v}\,dx = a/GK_v \\ &\int \frac{M_1 M_0}{EI}\,dx = -PL^2/16EI \\ &\int \frac{M_{v1} M_{v0}}{GK_v}\,dx = -PaL/4GK_v \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Insätts dessa värden i ekv (a) kan X beräknas

$$X = \frac{PL^2/16EI + PaL/4GK_v}{L/2EI + a/GK_v} \qquad \text{(c)}$$

För speciellt $GK_v/EI = 0{,}8$ och $L/a = 2$ erhålls $X = 0{,}1944\ PL$

Resulterande böjmoment och vridmoment framgår av fig :27q resp r.

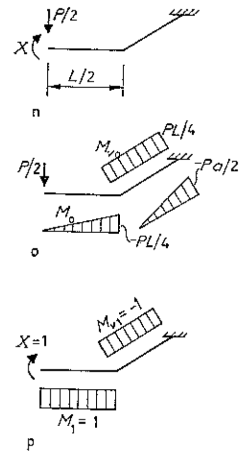


Fig :27n–p

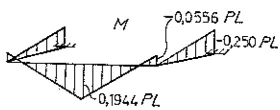


Fig :27q

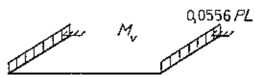
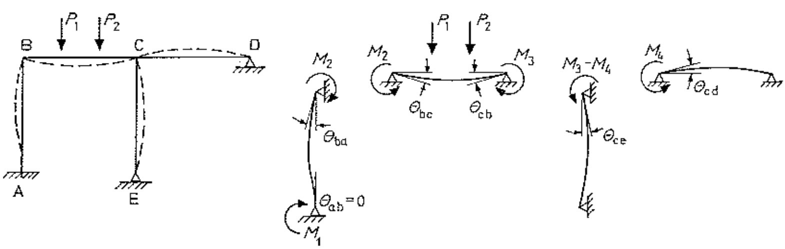


Fig :27r

:3 Elasticitetsekvationer

:31 Beräkningsprincip

Principen för en behandling av en statiskt obestämd ramkonstruktion med elasticitetsekvationer är följande. Under införande av från början obekanta snittmoment skärs konstruktionen upp i ramhörnen till enkla raka ramdelar som deformationsstuderas var för sig. Uttryck tecknas för de olika ramdelarnas stödvinkeländringar, varpå för de obekanta snittmomentens bestämning erforderliga samband erhålls dels ur *jämviktsekvationer*, dels ur de *deformationsvillkor*, som kan härledas ur förhållandet, att samtliga i ett ramhörn böjstyvt anslutna ramdelar där måste följas åt i deformation, dvs få samma stödvinkeländring Θ. Förfarandet illustreras något mera detaljerat av fig :31a för rambärverk med *fixa knutpunkter*, varmed förstås, att samtliga knutpunkter endast rotationsdeformeras, och av fig :31b för rambärverk med *förskjutbara knutpunkter*, dvs knutpunkter som vid deformationen utsätts för såväl rotations- som translationsrörelse.



Deformationsvillkor:
$\theta_{ab} = 0$; $\theta_{ba} = \theta_{bc}$;
$\theta_{cb} = \theta_{cd} = \theta_{ce}$

Fig :31a. Ram med fixa knutpunkter

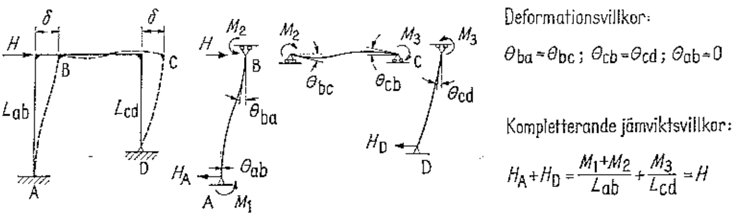


Fig :31b. Ram med förskjutbara knutpunkter

För att en ramberäkning med elasticitetsekvationer snabbt skall kunna genomföras, fordras från början kännedom om de stödvinkeländringar, som uppkommer vid tvåsidigt fritt upplagd ramdel dels av ett stödmoment M = 1 (*balkkonstanter*) och dels av den aktuella yttre lasten (*lastkonstanter*). Dessa stödvinkeländringar beskrivs närmare i :32.

Beräkningsmetoden innebär att inverkan av normal- och tvärkraftsarbetet liksom effekten av krökningar och excentriciteter hos tyngdpunktslinjen försummas. Dessa approximationer är normalt godtagbara med tillfredsställande noggrannhet.

:32 Balkkonstanter och lastkonstanter

A Balkkonstanter α_a^0, α_b^0 och β_{ab}^0

Med en ramdels *balkkonstanter* förstås de stödvinkeländringar som uppkommer, om ramdelen som tvåsidigt fritt upplagd balk över det ena eller andra stödet angrips av ett böjmoment $M=1$ (fig :32a). Följande beteckningar införs

α_a^0 = stödvinkeländringen i A vid $M=1$ i A

α_b^0 = stödvinkeländringen i B vid $M=1$ i B

β_{ab}^0 = stödvinkeländringen i B vid $M=1$ i A

β_{ba}^0 = stödvinkeländringen i A vid $M=1$ i B

Enligt Maxwells sats gäller därvid $\beta_{ba}^0=\beta_{ab}^0$

Balkkonstanterna kan genomgående redovisas under formen

$$\alpha_a^0 = C_a L/3EI_0;\ \alpha_b^0 = C_b L/3EI_0;\ \beta_{ab}^0 = \beta_{ba}^0 = C_{ab} L/6EI_0 \qquad (1)$$

där I_0 betecknar tröghetsmomentet i ett valt snitt av balken samt C_a, C_b och C_{ab} = dimensionslösa koefficienter, som entydigt bestäms av votutformningen.

1 C-tal för balk med konstant tröghetsmoment

$C_a = C_b = C_{ab} = 1$

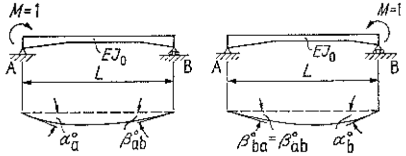


Fig :32a

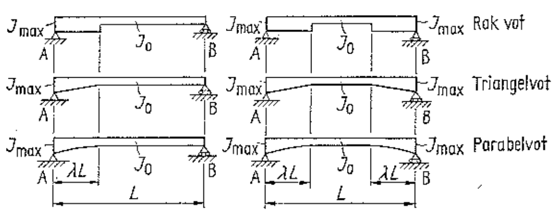


Fig :32b

2 C-tal för balk med raka, triangulära eller paraboliska voter

a Ensidig vot eller tvåsidiga, symmetriska voter. För vottyper enligt fig :32b är C_a, C_b och C_{ab} redovisade i diagramform i tabell 1:44, varvid som parametrar använts relativa votlängden λ och förhållandet I_0/I_{max} mellan minsta och största tröghetsmoment.

Diagrammen gäller oinskränkt endast för balk av elastiskt, homogent material och med rektangulär sektion, men kan med tillfredsställande noggrannhet användas även vid extrem sektionsutformning. Exempelvis blir skillnaden mellan C-talen för rektangulär sektion och I-sektion normalt $<1{,}5\,\%$.

I-värdet för armerade betongkonstruktioner beräknas i allmänhet under förutsättning av elastiskt, homogent material utan hänsyn tagen till sprickbildningen i böjdragzonen eller till krypningen, vilket medför att man får endast en grov bild av bruksstadiets momentfördelning. Ofta kan man erhålla en bättre uppfattning om verkligheten genom en enkel överslagsberäkning baserad på förväntad uppsprickningsfigur (jfr exempel 2 i :34). Hänsyn till krypningen kan tas genom införande av en skenbar E-modul (jfr 333: 342).

b Speciella vottyper. Vid komplicerade utformningar av balkar med raka, triangulära eller paraboliska voter kan genom tillämpning av satserna i 162: 412 uppställas enkla samband för C-talen, i vilka som enda storheter ingår de enligt *a* ovan angivna C-talen för de renodlade votutförandena. I fig :32c–e anges några sådana samband, vilka är *generellt giltiga för varje vottyp.*

$$C_a = C_a^A + C_b^B - 1$$
$$C_b = C_b^A + C_a^B - 1$$
$$C_{ab} = C_{ab}^A + C_{ab}^B - 1$$

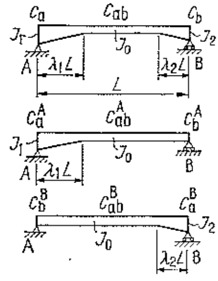


Fig :32c. C-tal för balk med tvåsidiga, osymmetriska voter

$$C_a = C_b = \frac{1}{4}\left[2\left(C_a^A + C_b^C\right) + C_b^A + C_a^C + C_{ab}^A + C_{ab}^C\right] - 1$$
$$C_{ab} = \frac{1}{2}\left[C_b^A + C_a^C + C_{ab}^A + C_{ab}^C\right] - 1$$

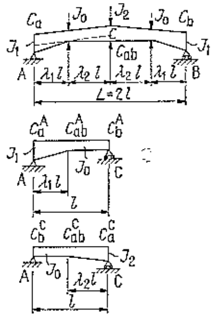


Fig :32 d. C-tal för balk med tvåsidiga. symmetriska mitt- och sidovoter

$$C_a = \left(C_a^{I} - n_1\right)\left(\frac{L_1}{L}\right)^3 + n_1 C_a^{II}$$
$$C_b = \left(\lambda_2^2 C_a^{I} + \lambda_2 C_{ab}^{I} + C_b^{I}\right)\frac{L_1}{L} + n_1\left(C_b^{II} + \lambda_2^3 - 1\right)$$
$$C_{ab} = \left(2\lambda_2 C_a^{I} + C_{ab}^{I}\right)\left(\frac{L_1}{L}\right)^2 + n_1\left(C_{ab}^{II} - 2\lambda_2^3 + 3\lambda_2^2 - 1\right)$$

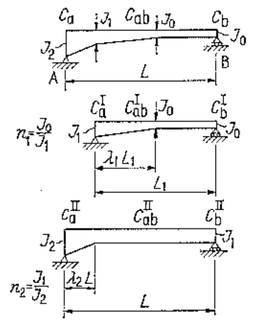


Fig :32e. C-tal för balk med dubbel, ensidig vot

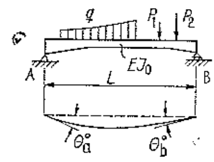


Fig :32f

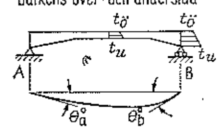


Fig :32 g

3 C-tal för godtyckligt utformad balk

α_a^0, α_b^0 och β_{ab}^0 är enligt ovan stödvinkeländringarna på grund av $M=1$ vid det ena eller andra upplaget. Dessa stödvinkeländringar bestäms t ex på sätt som anges i 162: 412.

B Lastkonstanter Θ_a^0 och Θ_b^0

En ramdels *lastkonstanter* definieras som de stödvinkeländringar Θ_a^0 och Θ_b^0 som ramdelen under förutsättning av tvåsidig fri uppläggning erhåller från den aktuella yttre lasten (fig :32f) eller annan inverkan (fig :32 g och h).

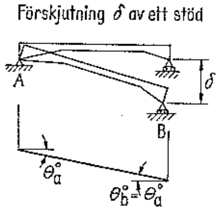


Fig :32h

1 Θ_a^0 och Θ_b^0 för balk med konstant tröghetsmoment

$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_a^0 6EI/L = w_a$; $\Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0 6EI/L = w_b$

w_a resp w_b erhålls ur tabell 1:38

2 Θ_a^0 och Θ_b^0 för balk med raka, triangulära eller paraboliska voter

a Ensidig vot eller tvåsidiga, symmetriska voter. För *punktlast P* och *jämnt resp triangulärt fördelad last q* anges Θ_a^0 och Θ_b^0 i tabell 1:45 med användning av följande redovisningsteknik

$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = K_a PL$; $\Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = K_b PL$ resp $\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \text{konst}\cdot K_a qL^2$; $\Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \text{konst}\cdot K_b qL^2$

För diagrammens och formlernas giltighet hänvisas till vad som ovan anförts i avsnitt **A** 2*a*.

Speciellt för *jämnt fördelad last* och *tvåsidiga, symmetriska voter* blir

$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = qL^2/4$

Vid *stödförskjutning* enligt fig :32h blir $\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = 6\delta EI_0/L^2 C_{ab}$ och $\Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = -6\delta EI_0/L^2 C_{ab}$

Vid *temperaturskillnad* $(t_u - t_ö)$ mellan en balks under- och översida enligt fig :32g beräknas Θ_a^0 och Θ_b^0 enligt 162:412.

b Tvåsidiga, osymmetriska voter. I fig :32i och j anges för tvåsidiga, osymmetriska voter de tillhörande *K*-talen, i vilka som enda storheter ingår de i *a* ovan angivna *K*-talen och de i **A** 2*a* ovan angivna *C*-talen för de renodlade vottyperna. Sambanden gäller *generellt för varje vottyp.*

3 Θ_a^0 och Θ_b^0 för godtyckligt utformad balk

Θ_a^0 och Θ_b^0 beräknas enligt 162:412.

Speciellt vid *jämnt fördelad last* och *tvåsidiga, symmetriska voter* blir

$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = qL^2/4$

Vertikal stödförskjutning δ enligt fig :32h ger $\Theta_a^0 = \delta/L$ och $\Theta_b^0 = -\delta/L$

:33 Beräkningsexempel

Exempel 1. Ram med fixa knutpunkter

Beräkna momentdiagrammet för den i fig :33a visade trefalt statiskt obestämda ramkonstruktionen, om samtliga ramdelar har konstant sektion.

Under införande av snittmoment M_1, M_2 och M_3 skärs konstruktionen upp enligt fig :33b i enkla, tvåsidigt fritt upplagda ramdelar, vars stödvinkeländringar beräknas, lämpligen med användning av formelsammanställningen i tabell 1:38 ($\Theta_a^0 = w_a L/6EI$; $\Theta_b^0 = w_b L/6EI$).

$$K_a = \frac{1}{C_{ab}}\left[C_{ab}^A K_a^A + C_{ab}^B K_b^B - \frac{b}{L}\left(1 - \frac{b^2}{L^2}\right)\right]$$

$$K_b = \frac{1}{C_{ab}}\left[C_{ab}^A K_b^A + C_{ab}^B K_a^B - \frac{a}{L}\left(1 - \frac{a^2}{L^2}\right)\right]$$

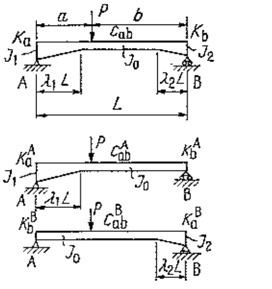


Fig :32i. *K*-tal för balk med tvåsidiga, osymmetriska voter och belastad med punktlast

$$K_a = \frac{1}{C_{ab}}\left[C_{ab}^A K_a^A + C_{ab}^B K_b^B - 1\right]$$

$$K_b = \frac{1}{C_{ab}}\left[C_{ab}^A K_b^A + C_{ab}^B K_a^B - 1\right]$$

För specialfallet symmetrisk utformning gäller: $K_a = K_b = 1$

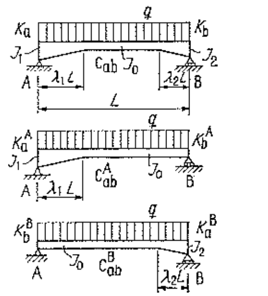


Fig :32j. *K*-tal för balk med tvåsidiga, osymmetriska voter och belastad med jämnt fördelad last

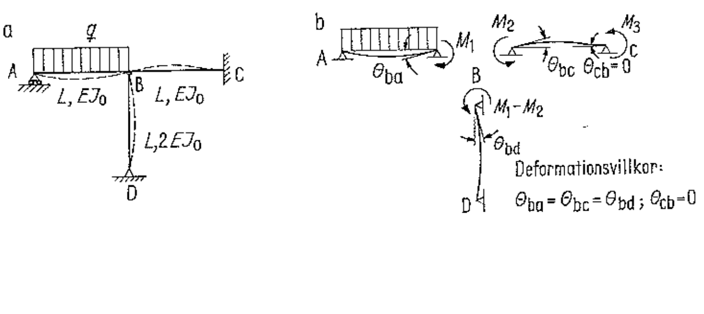


Fig :33a och b

För de obekanta snittmomentens bestämning erforderliga samband erhålls ur deformationsvillkoren (se fig :33b). Ur dessa beräknas för delen BC

$\Theta_{cb} = 0 = M_2L/6EI_0 - M_3L/3EI_0$, varav $M_3 = \frac{1}{2}M_2$ (a)

För övriga stödvinkeländringar erhålls uttrycken

$\Theta_{ba} = qL^3/24EI_0 - M_1L/3EI_0$, $\Theta_{bc} = M_2L/3EI_0 - M_3L/6EI_0 = M_2L/4EI_0$ och

$\Theta_{bd} = (M_1 - M_2)L/3 \cdot 2EI_0 = (M_1 - M_2)L/6EI_0$

vilka insatta i deformationsvillkoren $\Theta_{bc} = \Theta_{bd}$ resp $\Theta_{ba} = \Theta_{bc}$ ger

$M_2 = (2/5)M_1$ (b) $8M_1 + 6M_2 = qL^2$ (c)

Ur ekv (a), (b) och (c) beräknas

$M_1 = (5/52)qL^2$; $M_2 = (1/26)qL^2$; $M_3 = (1/52)qL^2$.

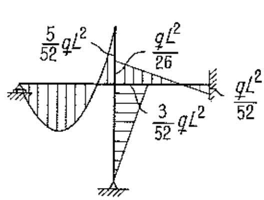


Fig :33c

Momentdiagrammet visas i fig :33c, varvid böjmomentet genomgående avsatts på den ramdelssida, i vilken det framkallar dragspänning.

Exempel 2. Ram med förskjutbara knutpunkter

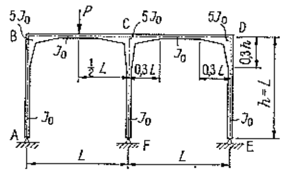


Fig :33d

Beräkna momentdiagrammet för lastfallet enligt fig :33d. Den osymmetriskt placerade lasten medför, att knutpunkterna B, C och D vid ramens deformation kommer att få en horisontell förskjutning δ, vilken måste inkluderas vid bestämningen av stödvinkeländringarna Θ för de i B, C och D anslutande ramdelarna. I övrigt innebär en *direkt* momentberäkning för ramkonstruktionen enligt fig :33d på sätt som framgår av fig :31b inga principiella skillnader i förhållande till den behandling, som redovisats ovan i exempel 1 för ram med fixa knutpunkter.

I stället för en direkt momentberäkning genomförs nedan momentbestämningen för det i fig :33d visade lastfallet i etapper. I ett *första beräkningssteg* studeras därvid det momenttillstånd, som uppkommer, om förskjutningen av knutpunkterna B, C och D genom något yttre tvång förhindras (beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter). I ett *andra beräkningssteg* studeras därefter renodlat effekten av den knutpunktsförskjutning, som konstruktionen får då detta yttre tvång avlägsnas, varpå konstruktionens verkliga moment erhålls genom överlagring, med hänsyn tagen till tecken, av de båda beräkningsstegens delmoment. Fördelen med en sådan, i etapper uppdelad momentberäkning framför en direkt momentbestämning är i här aktuellt fall obetydlig, men blir väsentlig i sådana fall då en och samma konstruktion måste undersökas för ett flertal dellaster.

A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter

Den horisontella förskjutningen av knutpunkterna B, C och D kan förhindras exempelvis genom att konstruktionen i D kompletteras med en fasthållningsstång (jfr fig :33e). För den på detta sätt kompletterade ramen erhålls efter uppskärning i enkla ramdelar enligt fig :33f följande momentberäkning.

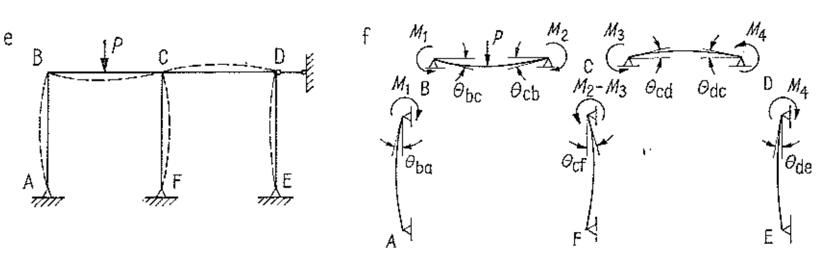


Fig :33e och f

Balkkonstanter α^0 och β^0, lastkonstanter Θ^0 samt stödvinkeländringar Θ

AB: $\lambda = 0{,}3$; $n = I_0/I_{max} = 0{,}2$; $C_b = 0{,}617$;

$\alpha_b^0 = C_b L/3EI_0 = 0{,}206L/EI_0$ (jfr tabell 1:44); $\Theta_{ba} = M_1\alpha_b^0$

$= 0{,}206 M_1 L/EI_0$ (a)

BC: $\lambda = 0{,}3$; $n = 0{,}2$; $C_b = C_c = 0{,}609$; $C_{bc} = 0{,}815$;

$\alpha_b^0 = \alpha_c^0 = C_b L/3EI_0 = 0{,}203L/EI_0$; $\beta_{bc}^0 = C_{bc}L/6EI_0 = 0{,}136L/EI_0$ (jfr tabell 1:44)

$\Theta_b^0 = \Theta_c^0 = 0{,}3925 PL\beta_{bc}^0 = 0{,}0534 PL^2/EI_0$ (jfr tabell 1:45)

$\Theta_{bc} = \Theta_b^0 - M_1\alpha_b^0 - M_2\beta_{bc}^0 = 0{,}0534PL^2/EI_0 - 0{,}203M_1L/EI_0 - 0{,}136M_2L/EI_0$ (b)

$\Theta_{cb} = \Theta_c^0 - M_1\beta_{bc}^0 - M_2\alpha_c^0 = 0{,}0534PL^2/EI_0 - 0{,}136M_1L/EI_0 - 0{,}203M_2L/EI_0$ (c)

CD (jfr ramdel BC): $\Theta_{cd} = 0{,}203M_3L/EI_0 - 0{,}136M_4L/EI_0$ (d)

$\Theta_{dc} = 0{,}136M_3L/EI_0 - 0{,}203M_4L/EI_0$ (e)

DE (jfr ramdel AB): $\Theta_{de} = 0{,}206M_4L/EI_0$ (f)

CF (jfr ramdel AB): $\Theta_{cf} = 0{,}206(M_2 - M_3)L/EI_0$ (g)

Deformationsvillkor

B: $\Theta_{ba} = \Theta_{bc}$, som tillsammans med ekv (a) och (b) ger

$0{,}409M_1 + 0{,}136M_2 = 0{,}0534PL$ (h)

C: $\Theta_{cb} = \Theta_{cf}$ och $\Theta_{cd} = \Theta_{cf}$, vilka tillsammans med ekv (c), (d) och (g) ger

$0{,}136M_1 + 0{,}409M_2 - 0{,}206M_3 = 0{,}0534PL$ (i)

$0{,}206M_2 - 0{,}409M_3 + 0{,}136M_4 = 0$ (j)

D: $\Theta_{dc} = \Theta_{de}$, som tillsammans med ekv (e) och (f) ger

$0{,}136M_3 - 0{,}409M_4 = 0$ (k)

Ur ekv (h)–(k) beräknas

$M_1 = 0{,}0825PL$; $M_2 = 0{,}1445PL$; $M_3 = 0{,}0818PL$; $M_4 = 0{,}0272PL$ (l)

Det tillhörande momentdiagrammet, i vilket momenten genomgående avsatts på den ramdelssida, som har dragspänning, framgår av fig :33g. De mot denna momentfördelning svarande horisontalreaktionerna i upplagen H_A, H_F och H_E, också angivna i fig :33g, har en högerriktad resultant $H = 0{,}0470P$, vilken för ramens jämvikt fordrar en lika stor, vänsterriktad fasthållningskraft Z från den i knutpunkten D applicerade stången.

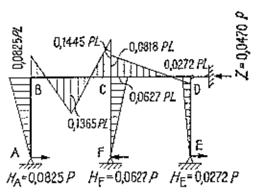


Fig :33g

B Korrektion för knutpunktsförskjutning

Den verkliga konstruktionen (fig :33d) erhålls ur den under *A* behandlade genom att fasthållningsstången i punkten D borttas. Effekten härav är identisk med effekten av en i D verkande, högerriktad, horisontell knutpunktslast $H = 0{,}0470P$ (fig :33h), vilken är lika stor men motriktad fasthållningskraften Z.

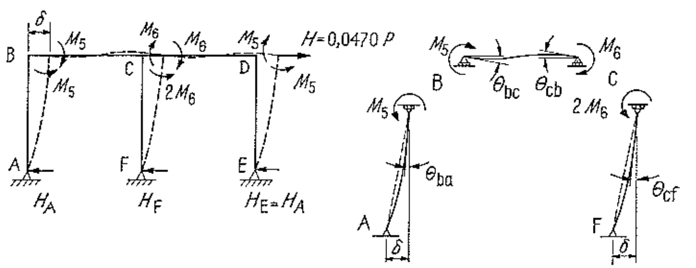


Fig :33h

Denna renodlade knutpunktslast H ger ramen en med avseende på C antisymmetrisk deformationsfigur och därmed också ett antisymmetriskt momenttillstånd. Det antal obekanta snittmoment, som måste införas vid ramkonstruktionens uppskärande i enkla ramdelar, begränsas därigenom till två, i fig :33h betecknade M_5 och M_6. För dessas bestämning gäller deformationsvillkoren

$$\Theta_{ba} = \Theta_{bc}; \qquad \Theta_{cb} = \Theta_{cf} \tag{m}$$

Då emellertid uttrycken för de i ekv (m) ingående stödvinkeländringarna Θ kommer att innehålla den ännu så länge obestämda horisontalförskjutningen δ av knutpunkterna B, C och D, blir ekv (m) inte ensamma tillräckliga för problemets lösning. Återstående kompletterande samband kan erhållas ur jämviktskravet för verkande horisontalkrafter

$$H = Z = H_A + H_E + H_F = 2H_A + H_F = (2/L)(M_5 + M_6) \text{ eller}$$

$$M_5 + M_6 = \tfrac{1}{2} ZL \tag{n}$$

Ur fig :33h beräknas för stödvinkeländringarna uttrycken

$$\Theta_{ba} = \delta/L - M_5 \alpha_b^0 = \delta/L - 0{,}206 M_5 L/EI_0 \tag{o}$$

$$\Theta_{bc} = M_5 \alpha_b^0 - M_6 \beta_{bc}^0 = 0{,}203 M_5 L/EI_0 - 0{,}136 M_6 L/EI_0 \tag{p}$$

$$\Theta_{cb} = -M_5 \beta_{bc}^0 + M_6 \alpha_c^0 = -0{,}136 M_5 L/EI_0 + 0{,}203 M_6 L/EI_0 \tag{q}$$

$$\Theta_{cf} = \delta/L - 2M_6 \alpha_b^0 = \delta/L - 0{,}412 M_6 L/EI_0 \tag{r}$$

vilka insatta i deformationsvillkoren (m) ger

$$0{,}409 M_5 - 0{,}136 M_6 = \delta EI_0/L^2 \quad \text{och} \quad -0{,}136 M_5 + 0{,}615 M_6 = \delta EI_0/L^2 \tag{s}$$

Ur ekv (n) och (s) beräknas slutligen med beaktande av att enligt beräkningsetapp A $Z = 0{,}0470P$

$$M_5 = 0{,}290ZL = 0{,}0136PL; \; M_6 = 0{,}211ZL = 0{,}0099PL; \; \delta = 0{,}00421PL^3/EI_0 \tag{t}$$

varpå den verkliga konstruktionens moment erhålls genom överlagring av de under A beräknade, för fixa knutpunkter gällande momenten och av de ovan bestämda korrektionsmomenten från knutpunktsförskjutningen (exempelvis erhålls för momentet i ramhörnet B, $M_B = M_1 - M_5 = 0{,}0825PL - 0{,}0136PL = 0{,}0689PL$). Det slutgiltiga momentdiagrammet framgår av fig :33i.

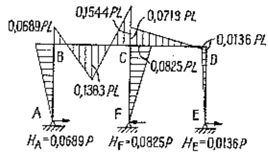


Fig :33i

:34 Clapeyrons ekvation för beräkning av kontinuerlig balk

Genom direkt tillämpning av elasticitetsekvationer på en kontinuerlig balk enligt fig :34a kan för de böjmoment M_K, M_L och M_M, som uppträder över tre på varandra följande upplag K, L resp M, följande samband härledas (för specialfallet votlös balk uppställt av Clapeyron 1857)

$$M_K \beta_{kl}^0 + M_L(\alpha_l^0 + \alpha_m^0) + M_M \beta_{mn}^0 = -(\Theta_l^0 + \Theta_m^0) + y(1/L' + 1/L'') \tag{1}$$

där α^0, β^0 och Θ^0 erhålls enligt :32 (jfr fig :34b). Speciellt för *votlös balk* ger ekv (1)

$$M_K L'/E'I' + 2M_L(L'/E'I' + L''/E''I'') + M_M L''/E''I'' = -(w_l L'/E'I' +$$
$$+ w_m L''/E''I'') + 6y(1/L' + 1/L'') = -6(\Theta_l^0 + \Theta_m^0) + 6y(1/L' + 1/L'') \tag{1a}$$

där w_l och w_m erhålls ur tabell 1: 38.

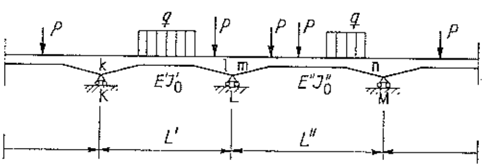


Fig :34a

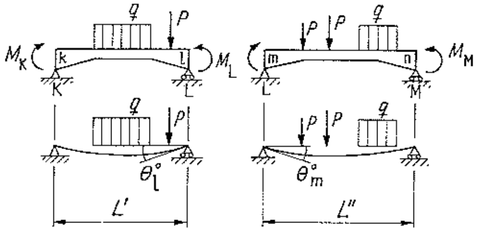


Fig :34 b

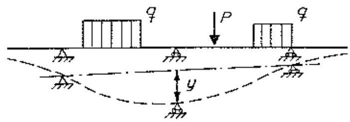


Fig :34 c

Ekv (1) och (1a) förutsätter att stödmoment M och stödvinkeländringar Θ^0 räknas positiva, då de har de i fig :34 b visade riktningarna. Den sista termen i ekv (1) och (1a) beaktar inverkan av vertikala stödförskjutningar, varvid y enligt fig :34 c betecknar vertikal förskjutning av stödet L, räknad positiv nedåt och refererad till förbindningslinjen mellan de eventuellt vertikalförskjutna stöden K och M.

Exempel 1. Beräkna momentdiagrammet för den i fig :34 d visade kontinuerliga balken, om denna har efter hela sin längd konstant styvhet EI.

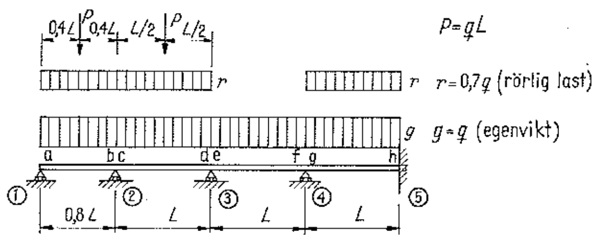


Fig :34 d

Facken ①–②–③

För lastkonstanterna Θ_b^0 och Θ_c^0 beräknas med hjälp av w_a- och w_b-talen i tabell 1: 38 (jfr :32 **B 1**)

$$\Theta_b^0 = (g+r)(0{,}8L)^3/24EI + P(0{,}8L)^2/16EI = 0{,}0763qL^3/EI;$$

$$\Theta_c^0 = (g+r)L^3/24EI + PL^2/16EI = 0{,}1333qL^3/EI$$

varpå ekv (1 a) för momenten M_2 och M_3 över stöd ② resp ③ ger sambandet ($M_1 = 0$)

$$2M_2(0{,}8L/EI + L/EI) + M_3L/EI = -6\cdot(0{,}0763+0{,}1333)qL^3/EI;$$

$$3{,}6M_2 + M_3 = -1{,}258qL^2 \qquad \text{(a)}$$

Analogt erhålls för *facken* ②–③–④ resp *facken* ③–④–⑤

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = -1{,}050qL^2 \qquad \text{(b)}$$

$$M_3 + 4M_4 + M_5 = -0{,}675qL^2 \qquad \text{(c)}$$

Fack ④–⑤ *+ fast inspänning i* ⑤

För tillämpning av Clapeyrons ekvation ersätts enligt fig :34 e den fasta inspänningen i ⑤ med en oändligt böjstyv balkdel ⑤–⑥. Ett sådant arrangemang förändrar inte den ursprungliga konstruktionens statiska verkningssätt. Ekv (1 a) ger

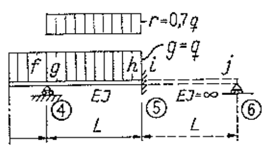


Fig :34 e

$$\Theta_h^0 = (g+r)L^3/24EI = 0{,}0708qL^3/EI; \; \Theta_i^0 = 0$$

$$M_4L/EI + 2M_5(L/EI + L/\infty) = -6\cdot 0{,}0708qL^3/EI; \; M_4 + 2M_5 = -0{,}425qL^2 \text{(d)}$$

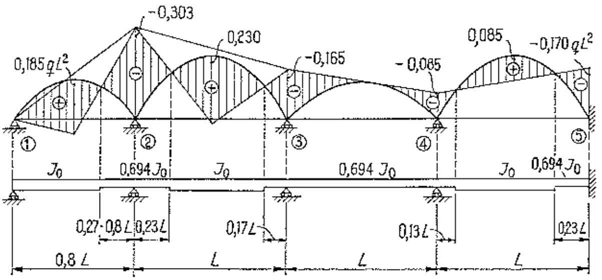


Fig :34f

Lösning av ekv (a), (b), (c) och (d) ger

$M_2 = -0{,}303qL^2$; $M_3 = -0{,}165qL^2$; $M_4 = -0{,}085qL^2$; $M_5 = -0{,}170qL^2$

varpå för det sökta momentdiagrammet erhålls det i fig :34f visade utseendet. Som positiva har därvid räknats sådana moment, som ger dragspänning i den kontinuerliga balkens underkant.

Exempel 2. Bestäm motsvarande momentdiagram för den kontinuerliga balken i exempel 1 utförd som T-balk i armerad betong med hänsyn tagen till den uppsprickning av betongens böjdragzon, som karaktäriserar en ordinär bruksstadieberäkning. För kalkylen förutsätts verksamma sektioner enligt fig :34g och h med en schematiserad armering, som i varje snitt med positivt moment består av 8 ϕ 19 i balkunderkant och i varje snitt med negativt moment av 8 ϕ 19 i balköverkant.

Jfr kap 333

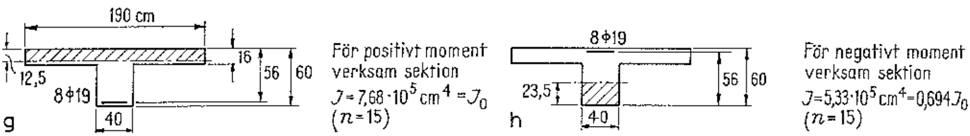


Fig :34g och h

Problemet består approximativt i en beräkning av det momenttillstånd, som uppträder i en kontinuerlig balk med en tröghetsmomentvariation enligt den undre delen av fig :34f. Approximationen ligger däri, att som momentnollpunkter valts de punkter, som i exempel 1 framräknats under förutsättning av längs hela balken konstant styvhet.

Sedan α^0, β^0 och Θ^0 bestämts enligt :32, beräknas momenten enligt ekv (I). Härvid erhålls det i fig :34i redovisade momentdiagrammet. Detta har momentnollpunkter, vars lägen något avviker från de, som antogs vid kalkylens början. Avvikelsen är dock så pass obetydlig, att den inte motiverar en ytterligare upprepad kalkyl. Av en jämförelse mellan diagrammen i fig :34f och i framgår, att betongens uppsprickning i böjdragzonen medför en inte oväsentlig momentomlagring, vilken speciellt för maximimomentet M_2 innebär en reduktion med ca 11 %.

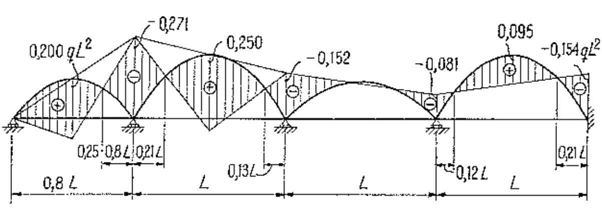


Fig :34i

Exempel 3. Beräkna böjmomentet M_2 över mellanstödet ② för en enligt fig :34j utformad och belastad kontinuerlig balk, om vid lastens påförande a) stödet ②, b) stödet ① vertikalt förskjuts en distans δ.

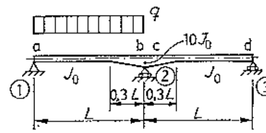


Fig :34j

Balkkonstanter α^0 och β^0 samt lastkonstanter θ^0

$\lambda = 0{,}3$; $n = I_0/I_{max} = 0{,}1$ för såväl del ①–② som del ②–③

$C_b = C_c = 0{,}535$; $C_{ab} = C_{cd} = 0{,}870$ (jfr tabell 1:44)

$\alpha_b^0 = C_b L/3EI_0 = 0{,}535L/3EI_0 = \alpha_c^0$

$\beta_{ab}^0 = C_{ab}L/6EI_0 = 0{,}870L/6EI_0 = \beta_{cd}^0$

$\theta_b^0/\beta_{ab}^0 = 0{,}910qL^2/4$ (jfr tabell 1:45)

$\theta_b^0 = (0{,}910qL^2/4)(0{,}870L/6EI_0) = 0{,}792qL^3/24EI_0$

$\theta_c^0 = 0$

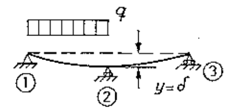


Fig :34k

Fall a Vertikal förskjutning δ av stöd ②

Stödförskjutningen ger enligt fig :34k $y=\delta$ varpå genom insättning i ekv (1) av storheter enligt ovan erhålls

$$2M_2 \cdot 0{,}535L/3EI_0 = -0{,}792qL^3/24EI_0 + 2\delta/L$$

Härur beräknas för sökt stödmoment M_2 värdet

$$M_2 = -0{,}0923qL^2 + 5{,}61\delta EI_0/L^2 \qquad \text{(a)}$$

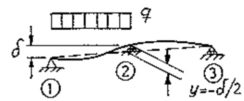


Fig :34l

Fall b Vertikal förskjutning δ av stöd ①

Analogt beräknas $y = -\delta/2$ (jfr fig :34 l)

$$M_2 = -0{,}0923qL^2 - 2{,}81\delta EI_0/L^2 \qquad \text{(b)}$$

:4 Primärmomentmetoden

:41 Beräkningsprincip

Primärmomentmetoden eller *Efsens metod*, vilken framlades första gången år 1931 i en doktorsavhandling av dansken Axel Efsen [15b], är en systematiserad bruksstadiemetod.

Vid rambärverk med *fixa knutpunkter* är den principiella beräkningsgången följande; jfr fig :41a–c. Aktuellt lastfall (fig :41a) uppdelas i ett antal dellastfall, vardera karaktäriserat av yttre last på endast *en* av konstruktionens balk- eller ramdelar (fig :41b och c). För varje sådant dellastfall beräknas de inspänningsmoment, *primärmoment M'*, som, under förutsättning av elastisk inspänning i anslutande rampartier, uppkommer i den belastade ramdelens ändpunkter. Mot dessa primärmoment svarar för de anslutande rampartierna angrepp av numeriskt lika stora, motriktade moment, vilka inom dessa rampartier ger upphov till *fördelade* och *överförda moment*. Sedan för de olika dellastfallen primärmoment och samtliga tillhörande fördelade och överförda moment bestämts, erhålls det verkliga lastfallets momenttillstånd genom en direkt överlagring av momenttillstånden för de olika dellastfallen.

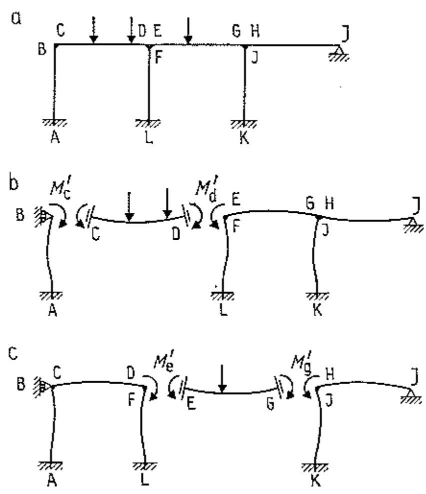


Fig :41a–c

Vid rambärverk med *förskjutbara knutpunkter* uppdelas lämpligen beräkningen enligt :33 exempel 2, :47 och :57 i de båda etapperna:

a Momentberäkning under förutsättning av fixa knutpunkter
b Korrektion för renodlad knutpunktsförskjutning

Beräkningsgång

A Fixa knutpunkter (utan knutpunktsförskjutning $= uk$)

1 Bestämning av balkkonstanter α^0 och β^0 samt lastkonstanter Θ^0 (se :32)
2 Bestämning av momentöverföringstal (m-tal) (se :43)
3 Bestämning av fördelningstal (μ-tal) (se :44)
4 Beräkning av primärmoment M' (se :45)
5 Beräkning av fördelade moment M^f och överförda moment $M^ö$ (se :46)
6 Beräkning av resulterande moment i balkändarna $M = M^{uk} = M' + \Sigma(M^f + M^ö)$

Sedan de resulterande momenten i en ramdels båda ändar bestämts enligt ovan, kan övriga snittkrafter i ramdelen och ramdelens deformationer beräknas för ramdelen betraktad som enkel tvåstödsbalk, belastad av resulterande momenten M^{uk} och yttre lasten. Se 162:41

B Förskjutbara knutpunkter (med knutpunktsförskjutning $= mk$) (jfr :33 exempel 2, :47 och :57)

1 Beräkning enligt 1–6 ovan av resulterande moment utan knutpunktsförskjutning M^{uk}

2 Beräkning av fasthållningskrafterna Z_1, Z_2, Z_3 osv vid momenttillståndet M^{uk} enligt 1 (se :47)

3 Beräkning enligt 1 och 2 av momenten $M^{\delta_1=1}$ och horisontalkrafterna $H_1^{\delta_1=1}$, $H_2^{\delta_1=1}$, $H_3^{\delta_1=1}$ osv vid knutpunktsförskjutningen $\delta_1 = 1$ i motsatt riktning mot Z_1 (jfr :47) samt beräkning av motsvarande moment och horisontalkrafter vid knutpunktsförskjutningarna $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 1$ osv i motsatt riktning mot Z_2 resp Z_3 osv (jfr :47)

4 Beräkning av de verkliga förskjutningarna δ_1, δ_2, δ_3 osv ur sambanden

$$Z_1 = \delta_1 H_1^{\delta_1=1} + \delta_2 H_1^{\delta_2=1} + \delta_3 H_1^{\delta_3=1} + \ldots$$

$$Z_2 = \delta_1 H_2^{\delta_1=1} + \delta_2 H_2^{\delta_2=1} + \delta_3 H_2^{\delta_3=1} + \ldots$$

— — — — — — — — — — — —

(Jfr :47)

5 Beräkning av momenten M^δ vid de verkliga förskjutningarna δ_1, δ_2, δ_3 osv ur sambandet

$$M^\delta = \delta_1 M^{\delta_1=1} + \delta_2 M^{\delta_2=1} + \delta_3 M^{\delta_3=1} + \ldots$$

(Jfr :47)

6 Beräkning av resulterande moment vid knutpunktsförskjutning $M^{mk} = M^{uk} + M^\delta$ (jfr :47)

Teckenregler

För att hålla nere risken för teckenfel väljs som genomgående teckenregel för den ovan redovisade beräkningen av i balkändarna angripande moment (*primärmoment* samt *fördelade* och *överförda moment*), att dessa *räknas positiva*, då de är *riktade medsols* (+). Detta innebär att

1 *Tecknet bibehålls vid momentöverföring* ($M_b = m_b M_a$)
2 *Tecknet växlas vid momentfördelning* ($M_c = -\mu_{bc} M_b$)

Vid den slutgiltiga redovisningen av en ramkonstruktions momentdiagram övergår man lämpligen till därvid konventionella teckenregler.

För krafter och förskjutningar vid rambärverk med förskjutbara knutpunkter införs vidare följande teckenregler:

3 *Fasthållningskrafterna* (Z) *räknas positiva, om de är riktade åt vänster* (+)
4 *Horisontalkrafterna* (H) *räknas positiva, om de är riktade åt höger* (+)
5 *Förskjutningarna* (δ) *räknas positiva, om knutpunkterna förskjuts åt höger* (+)

:42 Balkkonstanter och lastkonstanter

Dessa beräknas enligt :32.

:43 Momentöverföringstal (m-tal)

A Allmänt

En balks (ramdels) momentöverföringstal beskriver hur ett i den ena balkänden angripande moment överförs till den motsatta balkänden. För en ur en ramkonstruktion godtyckligt utvald balk AB (fig :43 a) definieras det till momentöverföring från A till B hörande momentöverföringstalet m_b som det moment, som uppkommer i ändpunkten B vid belastning av $M=1$ i den som fritt upplagd räknade ändpunkten A (fig :43 b).

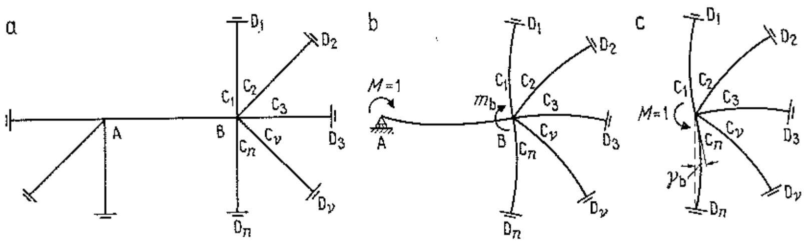


Fig :43 a–c

För momentöverföringstalet m_b gäller *generellt* uttrycket

$$m_b = \beta^0_{ab}/(\alpha^0_b + \gamma_b) \tag{1}$$

i vilket α^0_b och β^0_{ab} är de genom ekv :32(1) definierade balkkonstanterna och γ_b betecknar den vinkeländring, som erhålls i knutpunkten B för det där anslutande rampartiet, då detta enligt fig :43 c belastas med ett moment $M=1$. För denna vinkeländring kan följande samband härledas

$$\gamma_b = 1 \Big/ \sum_1^n \frac{1}{\alpha_{c_\nu}} \tag{2}$$

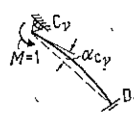


Fig :43 d

i vilket α_{c_ν} betecknar den stödvinkeländring som för ramdelen $C_\nu D_\nu$ uppkommer i den som fritt upplagd räknade ändpunkten C_ν, då denna angrips av ett moment $M=1$ (se fig :43 d).

Generellt gäller för α_{c_ν} uttrycket

$$\alpha_{c_\nu} = \alpha^0_{c_\nu} - m_{d_\nu}\beta^0_{c_\nu d_\nu} \tag{3}$$

i vilket $\alpha^0_{c_\nu}$ och $\beta^0_{c_\nu d_\nu}$ betecknar balkkonstanter för balken $C_\nu D_\nu$ samt m_{d_ν} momentöverföringstalet för balkänden D_ν.

För bestämning av m_b fordras alltså kännedom om m_{d_ν} (m_{d_1}, m_{d_2} osv).

Vid beräkning av m-tal utgår man allmänt från balkändar med kända m-tal eller från snitt med på försök valda m-tal som successivt förbättras. Beräkningsprincipen beskrivs utförligare nedan i **D**.

B $\alpha_{c\nu}$ i specialfall (jfr fig :43 d)

D_ν *fritt upplagd:* $\gamma_{d_\nu} = \infty$; $m_{d_\nu} = 0$; $\alpha_{c_\nu} = \alpha^0_{c_\nu}$

D_ν *fast inspänd:* $\gamma_{d_\nu} = 0$; $m_{d_\nu} = \beta^0_{c_\nu d_\nu}/\alpha^0_{d_\nu}$; $\alpha_{c_\nu} = \alpha^0_{c_\nu} - (\beta^0_{c_\nu d_\nu})^2/\alpha^0_{d_\nu}$

D_ν *inspänd i grundplatta* på elastiskt underlag: γ_{d_ν} = vinkeländringen Θ för $M = 1$ enligt tabell 1:61 D; m_{d_ν} enligt ekv (1); α_{c_ν} enligt ekv (3)

D_ν *inspänd i vridningsbelastad balk:* γ_{d_ν} = vridningsvinkeln φ för $M_\nu = 1$; m_{d_ν} enligt ekv (1); α_{c_ν} enligt ekv (3)

e

C_1 m_b i specialfall (jfr fig :43 b)

B *fritt upplagd*: $m_b = 0$

B *fast inspänd*: $m_b = \beta^0_{ab}/\alpha^0_b = C_{ab}/2C_b$. Speciellt för votlös ramdel AB: $m_b = \frac{1}{2}$

B *elastiskt inspänd* i endast *en* anslutande ramdel CD (fig :43 e och f):

$\gamma_b = \alpha_c = \alpha^0_c - m_d \beta^0_{cd}$; $m_b = \beta^0_{ab}/(\alpha^0_b + \alpha_c)$

m-tal vid *betongplattor*: Se kap 336.

f

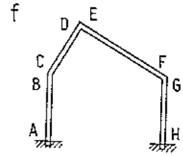


Fig :43 e och f

D m-talsberäkning vid några vanligare konstruktionstyper

Kontinuerlig balk (fig :43 e), *enkel öppen ram* (fig :43 f): m-tal för momentöverföring från vänster till höger (medsols) bestäms genom en successiv beräkning från höger till vänster (motsols) och vice versa. Exempelvis erhålls för den kontinuerliga balken enligt fig :43 e

$m_a = 0$; $m_c = \beta^0_{cd}/(\alpha^0_c + \alpha^0_b)$; $m_e = \beta^0_{ef}/[\alpha^0_e + (\alpha^0_d - m_c\beta^0_{cd})]$;

$m_g = \beta^0_{gh}/[\alpha^0_g + (\alpha^0_f - m_e\beta^0_{ef})]$; $m_h = \beta^0_{gh}/\alpha^0_h$; $m_f = \beta^0_{ef}/[\alpha^0_f + (\alpha^0_g - m_h\beta^0_{gh})]$;

$m_d = \beta^0_{cd}/[\alpha^0_d + (\alpha^0_e - m_f\beta^0_{ef})]$; $m_b = \beta^0_{ab}/[\alpha^0_b + (\alpha^0_c - m_d\beta^0_{cd})]$

Kontinuerlig öppen ram (fig :43 g): m-talen bestäms i huvudsak enligt samma teknik som vid enkel öppen ram med beaktande av de speciella problem, som inkommer i de knutpunkter, i vilka fler än två ramdelar ansluter. Exempelvis beräknas för momentöverföringstalet m_e vid den i fig :43 g visade ramen, jfr ekv (1)–(3)

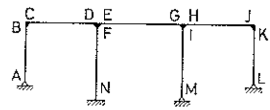


Fig :43 g

$$m_e = \beta^0_{eg} \Big/ \left[\alpha^0_e + \frac{1}{1/(\alpha^0_f - m_n\beta^0_{fn}) + 1/(\alpha^0_d - m_c\beta^0_{cd})}\right]$$

där $m_c = \beta^0_{cd}/(\alpha^0_c + \alpha^0_b)$; $m_n = \beta^0_{fn}/\alpha^0_n$

(speciellt för votlös balk $m_n = \frac{1}{2}$)

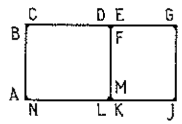


Fig :43h

Sluten ram (fig :43 h): För varje sluten ramcell väljs från början på försök två momentöverföringstal, t ex m_d och m_l samt m_e och m_k för ramen enligt fig :43 h. Med dessa som utgångspunkt beräknas enligt ovan ramens övriga m-tal, och ur dessa därpå förbättrade värden på de på försök valda momentöverföringstalen. Erhålls därvid otillfredsställande överensstämmelse mellan beräknade och från början ansatta m-värden får beräkningstekniken genomlöpa konstruktionen ytterligare ett varv etc. Jfr vidare exempel i :47.

:44 Fördelningstal (μ-tal)

Fördelningstal μ, vilka har aktualitet för knutpunkter med *fler än två inkommande ramdelar*, beskriver — jfr fig :44 a — hur ett i en ramdelsände B uppträdande moment M_b (primärmoment eller överfört moment) fördelas på de *övriga* i ramdelsänden anslutande ramdelarna C_1D_1, C_2D_2 ... $C_\nu D_\nu$ ... C_nD_n. För en härur godtyckligt utvald ramdel $C_\nu D_\nu$ (se fig :44 a b och c)

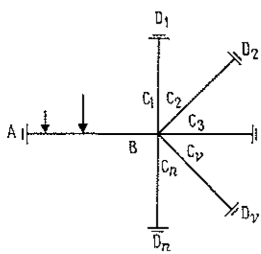


Fig :44 a

definieras fördelningstalet μ_{bc_ν} som det moment, som erhålls i C_ν, då hela det anslutande rampartiet C_1D_1, C_2D_2 ... $C_\nu D_\nu$ ... C_nD_n i knutpunkten B belastas med ett moment $M_b = 1$ (fig :44b).

För fördelningstalet μ_{bc_ν} gäller följande samband

$$\mu_{bc_\nu} = \frac{1/\alpha_{c_\nu}}{\sum_1^n 1/\alpha_{c_\nu}} \tag{1}$$

där α_{c_ν} erhålls ur :43.

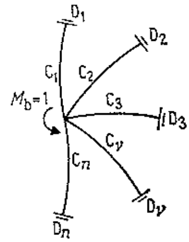


Fig :44b

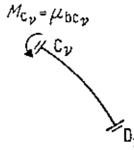


Fig :44c

:45 Primärmoment

Med en ramdels AB *primärmoment* M'_a och M'_b förstås de inspänningsmoment, som av en direkt på balken verkande last erhålls i ändpunkterna A resp B, om dessa därvid har en elastisk inspänning, som bestäms av de verkliga förhållandena i konstruktionen.

Med moment- och lastriktningar enligt fig :45a gäller för primärmomenten M'_a och M'_b de generella uttrycken

$$\left.\begin{aligned} M'_a &= -[m_a/(1-m_a m_b)]\,(\Theta^0_a/\beta^0_{ab} - m_b\,\Theta^0_b/\beta^0_{ab}) \\ M'_b &= [m_b/(1-m_a m_b)]\,(\Theta^0_b/\beta^0_{ab} - m_a\,\Theta^0_a/\beta^0_{ab}) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

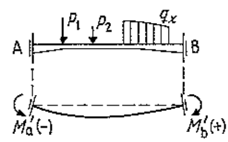


Fig :45a

i vilka β^0_{ab} betecknar genom ekv :32(1) definierad balkkonstant, Θ^0_a och Θ^0_b de i avsnitt :32 **B** beskrivna lastkonstanterna samt m_a och m_b de i avsnitt :43 behandlade momentöverföringstalen.

För balkar med symmetrisk inspänning och symmetrisk last ($m_a = m_b = m$, $\Theta^0_a/\beta^0_{ab} = \Theta^0_b/\beta^0_{ab} = \Theta^0/\beta^0_{ab}$) blir

$$M'_a = -M'_b = -[m/(1+m)](\Theta^0/\beta^0_{ab}) \tag{1a}$$

Vid *ändfack* (änden A fritt upplagd, $m_a = 0$) blir

$$M'_b = m_b\Theta^0_b/\beta^0_{ab} \tag{1b}$$

Speciellt för balk med *konstant sektion* gäller

$\Theta^0_a/\beta^0_{ab} = w_a$; $\Theta^0_b/\beta^0_{ab} = w_b$

$$M'_a = -[m_a/(1-m_a m_b)](w_a - m_b w_b);\ M'_b = [m_b/(1-m_a m_b)](w_b - m_a w_a) \tag{1c}$$

där w_a och w_b erhålls ur tabell 1: 38.

För balk- eller ramdelar med konstant sektion erhålls vid jämnt fördelad last och vid triangulär last konstanter för beräkning av primärmoment ur diagrammen i fig :45b uppgjorda av Bjuggren [15a] (m-talen förutsätts kända).

Vid *jämnt fördelad last* är för en balk a–b med konstant tröghetsmoment eller med symmetriska voter

$$M'_a = -c_a q l^2$$

där c_a fås ur det övre diagrammets kurvskara.

M'_b fås analogt, om m_a utbyts mot m_b och m_b mot m_a, när c-värdet uppsöks i diagrammet.

Vid *triangulärt fördelad last* gäller för balk med konstant tröghetsmoment de nedre diagrammen.

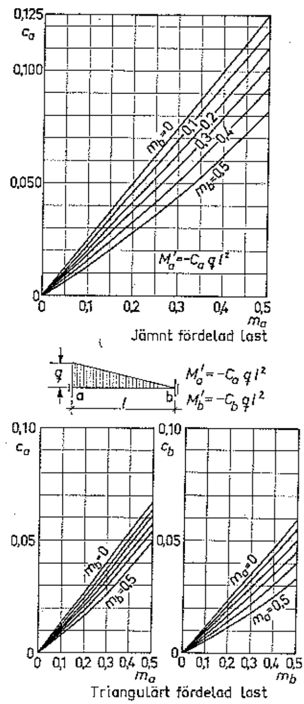


Fig :45b

För de till en ren parallellförskjutning δ av en ramdels båda upplag hörande primärmomenten (fig :45c), vilka har aktualitet vid momentberäkning av rambärverk med *förskjutbara knutpunkter*, övergår ekv (1) i sambanden

$$
\begin{aligned}
M'_a &= (\delta/L\beta^0_{ab})\,[m_a(1+m_b)/(1-m_a m_b)] \\
M'_b &= (\delta/L\beta^0_{ab})\,[m_b(1+m_a)/(1-m_a m_b)]
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

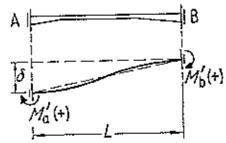


Fig :45c

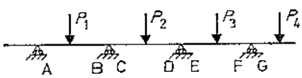
:46 Överförda och fördelade moment

I en balkände uppträdande primärmoment M' fördelas och överförs till övriga ramdelsändar med hjälp av fördelningstalen μ och momentöverföringstalen m. I balkar och ramar, där *endast två ramdelar inkommer i varje knutpunkt* (fig :43e och f), fördelas hela primärmomentet M'_b i en ramdelsände (B i fig :43e och f) till angränsande ände (C) i intilliggande ramdel (CD). Det fördelade momentet $M^f_c = -M'_b$ överförs till intilliggande ramdels (CD) andra ände (D). Det härvid överförda momentet $M^ö_d$ blir $M^ö_d = m_d M^f_c$.

Det överförda momentet $M^ö_d$ fördelas och överförs på motsvarande sätt vidare till övriga ramdelsändar.

Om *fler än två ramdelar inkommer i en knutpunkt* fördelas primärmomentet (M'_d) i en ramdels ände (D i fig :43g) till övriga i samma knutpunkt anslutande ramdelars ändar medelst μ-talen ($M^f_e = -\mu_{de} M'_d$; $M^f_f = -\mu_{df} M'_d$). De fördelade momenten överförs på sätt enligt ovan, varpå dessa överförda moment i sin tur fördelas och överförs till övriga ramdelsändar (jfr :47).

För ökad överskådlighet kan det ofta vara lämpligt, att beräkningen av överförda och fördelade moment samt resulterande stödmoment genomförs i tabell, vilket exemplifierande belyses i fig :46 för kontinuerlig balk.



Last på	M_a	M_b	M_c	M_d	M_e	M_f	..
AB	$\boxed{M'_a}$	$\boxed{M'_b}$	$-M'_b$	$-m_d M'_b$	$m_d M'_b$	$m_d m_f M'_b$	..
CD	$-m_a M'_c$	$-M'_c$	$\boxed{M'_c}$	$\boxed{M'_d}$	$-M_d$	$-m_f M'_d$	..
EF	$m_a m_c M'_e$	$m_c M'_e$	$-m_c M'_e$	$-M'_e$	$\boxed{M'_e}$	$\boxed{M'_f}$	..
.	.	.	.	.	.	.	..
.	.	.	.	.	.	.	..
ΣM	...	...	...	...	...	...	...

Fig :46

Last på fack AB ger de i tabellen inramade primärmomenten M'_a och M'_b, last på fack CD analogt de inramade primärmomenten M'_c och M'_d etc. Momentöverföring sker med bibehållet tecken och momentfördelning med teckenväxling (jfr :41). De resulterande stödmomenten, ΣM, erhålls för varje stöd genom addition — med beaktande av tecken — av primära, fördelade och överförda moment. Vid kända stödmoment kan sedan tillhörande momentdiagram beräknas ur jämviktsekvationer.

Jfr 162:52

:47 Beräkningsexempel

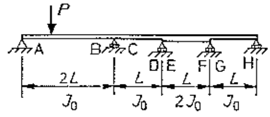


Fig :47a

Exempel 1. Kontinuerlig balk

Beräkna för den i fig :47a visade kontinuerliga balken stödreaktionen i H för olika lägen av punktkraft P på fack AB. Balken antas ha inom varje fack konstant sektion med tröghetsmoment I_0 för facken AB, CD och GH samt tröghetsmoment $2I_0$ för fack EF.

1 *Balkkonstanter* (jfr :32 **A**)

Fack AB: $\alpha_a^0 = \alpha_b^0 = 2L/3EI_0 = 0{,}667L/EI_0$; $\beta_{ab}^0 = 2L/6EI_0 = 0{,}333L/EI_0$

Fack CD: $\alpha_c^0 = \alpha_d^0 = L/3EI_0 = 0{,}333L/EI_0$; $\beta_{cd}^0 = L/6EI_0 = 0{,}1667L/EI_0$

Fack EF: $\alpha_e^0 = \alpha_f^0 = L/3E\cdot 2I_0 = 0{,}1667L/EI_0$; $\beta_{ef}^0 = L/6E\cdot 2I_0 = 0{,}0833L/EI_0$

Fack GH: $\alpha_g^0 = \alpha_h^0 = \alpha_c^0 = 0{,}333L/EI_0$; $\beta_{gh}^0 = \beta_{cd}^0 = 0{,}1667L/EI_0$

2 *Momentöverföringstal m* (jfr :43 **D**)

I det valda exemplet har endast överföring av moment från vänster till höger aktualitet. De härtill hörande m-talen beräknas från höger till vänster.

$m_h = 0$, då upplaget H är utformat som led.

$m_f = \beta_{ef}^0/(\alpha_f^0 + \gamma_f)$; $\gamma_f = \alpha_g = \alpha_g^0$; $m_f = 0{,}1667$

$m_d = \beta_{cd}^0/(\alpha_d^0 + \gamma_d)$; $\gamma_d = \alpha_e = \alpha_e^0 - m_f\beta_{ef}^0 = 0{,}1528L/EI_0$;

$m_d = 0{,}343$

$m_b = \beta_{ab}^0/(\alpha_b^0 + \gamma_b)$; $\gamma_b = \alpha_c = \alpha_c^0 - m_d\beta_{cd}^0 = 0{,}276L/EI_0$;

$m_b = 0{,}353$

$m_a = 0$, då upplaget A är utformat som led.

3 *Lastkonstanter* (jfr :32 **B**)

De för primärmomentens beräkning erforderliga kvoterna Θ_a^0/β_{ab}^0 och Θ_b^0/β_{ab}^0 erhålls direkt ur tabell 1:38.

a P i vänstra 1/4-punkten av fack AB

$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = (21/32)PL = 0{,}656PL$ $\qquad \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = (15/32)PL = 0{,}469PL$

b P i mittpunkten av fack AB

$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = (3/4)PL = 0{,}750PL$

c P i högra 1/4-punkten av fack AB

$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = 0{,}469PL$; $\Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = 0{,}656PL$

4 *Primärmoment M'* (jfr :45)

Med m-tal och lastkonstanter enligt ovan ger ekv :45(1) följande primärmoment M'.

a P i vänstra 1/4-punkten av fack AB

$M_a' = 0$, då $m_a = 0$ $\qquad M_b' = m_b\Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = 0{,}353\cdot 0{,}469PL = 0{,}1656PL$

b P i mittpunkten av fack AB

$M_a' = 0$; $M_b' = 0{,}353\cdot 0{,}750PL = 0{,}265PL$

c P i högra 1/4-punkten av fack AB

$M_a' = 0$; $M_b' = 0{,}353\cdot 0{,}656PL = 0{,}232PL$

5 *Momentöverföring och momentfördelning* (jfr :46)

Lastfall	M_b	M_c	M_d	M_e	M_f	M_g	Mult
a	$\boxed{0{,}1656}$	$-0{,}1656$	$-0{,}0568$	0,0568	0,00947	$-0{,}00947$	*PL*
b	$\boxed{0{,}265}$	$-0{,}265$	$-0{,}0909$	0,0909	0,01515	$-0{,}01515$	*PL*
c	$\boxed{0{,}232}$	$-0{,}232$	$-0{,}0796$	0,0796	0,01327	$-0{,}01327$	*PL*

6 *Stödreaktion i H*

Vid känt momenttillstånd beräknas stödreaktionen i *H* (R_h) enligt fig :47b ur sambandet

$R_h = (1/L)M_g$

a *P* i vänstra 1/4-punkten av fack AB $R_h = -0{,}00947P\ (\downarrow)$

b *P* i mittpunkten av fack AB $R_h = -0{,}01515P\ (\downarrow)$

c *P* i högra 1/4-punkten av fack AB $R_h = -0{,}01327P\ (\downarrow)$

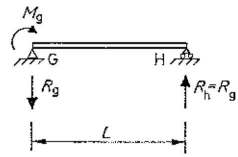


Fig :47b

Exempel 2. Ram i en våning och ett fack med knutpunktsförskjutning

Beräkna böjmomentdiagrammet för ett enligt fig :47c utformat och belastat rambärverk med för varje ramdel konstant sektion, svarande mot tröghetsmoment $2I_0$, I_0 och $3I_0$ för ramdel AB, CD resp EF.

A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter (jfr :41)

1 *Balkkonstanter* (jfr :32 A)

Del AB: $\alpha_a^0 = \alpha_b^0 = (4/7)\,L/3E\cdot 2I_0 = 0{,}0952L/EI_0$;

$\beta_{ab}^0 = (4/7)\,L/6E\cdot 2I_0 = 0{,}0476L/EI_0$

Del CD: $\alpha_c^0 = \alpha_d^0 = L/3EI_0 = 0{,}3333L/EI_0$;

$\beta_{cd}^0 = L/6EI_0 = 0{,}1667L/EI_0$

Del EF: $\alpha_e^0 = \alpha_f^0 = L/3E\cdot 3I_0 = 0{,}1111L/EI_0$;

$\beta_{ef}^0 = L/6E\cdot 3I_0 = 0{,}0556L/EI_0$

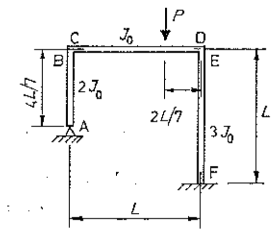


Fig :47c

2 *Momentöverföringstal m* (jfr :43 D)

a *m*-talen för överföring av moment medsols beräknas i ordning motsols.

$m_f = \beta_{ef}^0/(\alpha_f^0 + \gamma_f)$; $\gamma_f = 0$ (fast inspänd ramdelsände);

$m_f = 0{,}500$

$m_d = \beta_{cd}^0/(\alpha_d^0 + \gamma_d)$; $\gamma_d = \alpha_e = \alpha_e^0 - m_f\beta_{ef}^0 = 0{,}0833L/EI_0$,

$m_d = 0{,}400$

$m_b = \beta_{ab}^0/(\alpha_b^0 + \gamma_b)$; $\gamma_b = \alpha_c = \alpha_c^0 - m_d\beta_{cd}^0 = 0{,}2666L/EI_0$;

$m_b = 0{,}132$

b *m*-talen för överföring av moment motsols beräknas analogt i ordning medsols.

$m_a = 0$, då upplaget A är utformat som led

$m_c = \beta_{cd}^0/(\alpha_c^0 + \gamma_c)$; $\gamma_c = \alpha_b = \alpha_b^0$; $m_c = 0{,}389$

$m_e = \beta_{ef}^0/(\alpha_e^0 + \gamma_e)$; $\gamma_e = \alpha_d = \alpha_d^0 - m_c\beta_{cd}^0 = 0{,}2685L/EI_0$; $m_e = 0{,}146$

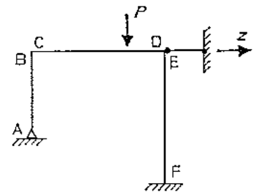
3 *Lastkonstanter* (jfr :32 **B**)

Ur tabell 1: 38 beräknas

$\Theta^0_c/\beta^0_{cd} = (90/343)\,PL = 0{,}262PL$; $\Theta^0_d/\beta^0_{cd} = (120/343)\,PL = 0{,}350PL$

4 *Primärmoment M'* (jfr :45)

Ur ekv :45 (1) erhålls för primärmomenten M'_c och M'_d uttrycken



$M'_c = -[0{,}389/(1-0{,}389\cdot 0{,}400)](0{,}262-0{,}400\cdot 0{,}350)PL = -0{,}0562PL$

$M'_d = \quad [0{,}400/(1-0{,}389\cdot 0{,}400)](0{,}350-0{,}389\cdot 0{,}262)PL = 0{,}1175PL$

5 *Momentöverföring och momentfördelning* (jfr :46)

$M^f_b = -M'_c = 0{,}0562PL$; $M^f_e = -M'_d = -0{,}1175PL$

$M^ö_f = m_f M^f_e = -0{,}500\cdot 0{,}1175PL = -0{,}0588PL$

B Korrektion för knutpunktsförskjutning (jfr :41 samt :33 exempel 2*B*)

1 *Fasthållningskraft Z*

Mot det under förutsättning av fixa knutpunkter enligt ovan beräknade momenttillståndet svarar i upplagspunkterna A och F de horisontella upplagsreaktionskomposanterna H_a och H_f, för vilka enligt fig :47d beräknas värdena

$H_a = M^f_b/(4/7)\,L = 0{,}0984\,P(\rightarrow)$

$H_f = (1/L)(M^f_e + M^ö_f) = -0{,}1763P(\leftarrow)$

I en för förhindrande av knutpunktsförskjutning erforderlig, på nivån CD applicerad fasthållningsstång ger dessa upplagsreaktioner en tillhörande fasthållningskraft Z, för vilken en horisontell projektionsekvation ger (fig :47d)

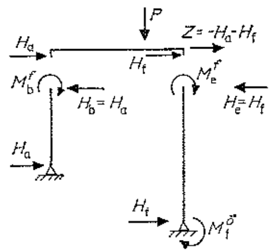


Fig :47d

$Z = -H_a - H_f = 0{,}0779P\ (\rightarrow)$

För att det under A beräknade rambärverket med fixa knutpunkter skall kunna överföras till reellt rambärverk enligt fig :47c, måste fasthållningsstången avlägsnas. Effekten härav blir en horisontell förskjutning åt vänster av ramnivån CD, svarande mot en last av en åt vänster riktad horisontalkraft $H = Z = 0{,}0779P$ enligt fig :47e.

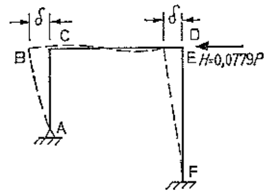


Fig :47e

2 *Primärmoment M' från horisontalförskjutning* $\delta = 1$ (jfr :45)

För till $\delta = 1$ enligt fig :47e hörande primärmoment beräknas ur ekv :45 (2) värdena

$$M'_{b_{\delta=1}} = m_b\delta/(4L\beta^0_{ab}/7) = 0{,}132\cdot 7\cdot EI_0/4L\cdot 0{,}0476L = 4{,}85EI_0/L^2$$

$$M'_{e_{\delta=1}} = m_e(1+m_f)\delta/L\beta^0_{ef}(1-m_e m_f) = 0{,}146\cdot 1{,}500\cdot EI_0/L\cdot 0{,}0556L$$
$$(1-0{,}146\cdot 0{,}500) = 4{,}25EI_0/L^2$$

$$M'_{f_{\delta=1}} = m_f(1+m_e)\delta/L\beta^0_{ef}(1-m_e m_f) = 0{,}500\cdot 1{,}146\cdot EI_0/L\cdot 0{,}0556L$$
$$(1-0{,}146\cdot 0{,}500) = 11{,}13EI_0/L^2$$

3 *Momentöverföring och momentfördelning* (jfr :46)

	M_b	M_c	M_d	M_e	M_f	Mult
Av $M'_{b_{\delta=1}}$	$\boxed{4{,}85}$	−4,85	−1,94	1,94	0,97	EI_0/L^2
Av $M'_{e_{\delta=1}}$	1,65	−1,65	−4,25	$\boxed{4{,}25}$	—	EI_0/L^2
Av $M'_{f_{\delta=1}}$	—	—	—	—	$\boxed{11{,}13}$	EI_0/L^2
Res $M\delta{=}1$	6,50	−6,50	−6,19	6,19	12,10	EI_0/L^2

4 Korrektionsmoment från knutpunktsförskjutning M

Genom summation av primärmoment samt överförda och fördelade moment erhålls de mot horisontalförskjutningen $\delta = 1$ svarande, resulterande böjmomenten, redovisade i den nedersta raden i tabellen på föregående sida. För de härtill hörande horisontella upplagsreaktionerna $H_{a\delta=1}$ och $H_{f\delta=1}$ i upplagen A och F beräknas, jfr fig :47 d och e

$$H_{a\delta=1} = M_{b\delta=1}/(4L/7) = 11{,}38 EI_0/L^3 \ (\rightarrow)$$

$$H_{f\delta=1} = (1/L)(M_{e\delta=1} + M_{f\delta=1}) = 18{,}29 EI_0/L^3 \ (\rightarrow)$$

med den resulterande horisontalkraften

$$\Sigma H_{\delta=1} = 29{,}7 EI_0/L^3$$

Den verkliga horisontalförskjutningen av rambärverksnivån CD erhålls ur villkoret

$$\Sigma H_{\delta=1} = H = 0{,}0779P$$

vilket ger

$$\delta = 2{,}62 \cdot 10^{-3} PL^3/EI_0$$

Korrektionsmomenten M^δ från den verkliga knutpunktsförskjutningen δ beräknas därpå genom proportionering $- M^\delta = \delta M_{\delta=1}$ $-$ till

$$M_b^\delta = 0{,}0170PL; \ M_c^\delta = -0{,}0170PL; \ M_d^\delta = -0{,}0162PL;$$

$$M_e^\delta = 0{,}0162PL; \ M_f^\delta = 0{,}0317PL$$

5 Slutgiltiga moment M^{mk}

De verkliga momenten M^{mk} för rambärverket enligt fig :47c med fria knutpunktsförskjutningsmöjligheter erhålls genom direkt överlagring av momenten M^{uk}, beräknade i avsnitten A4 och A5 under förutsättning av oförskjutbara knutpunkter, och korrektionsmomenten M^δ från knutpunktsförskjutning, dvs $M^{mk} = M^{uk} + M^\delta$. En sådan summation ger

$$M_b^{mk} = 0{,}0562PL + 0{,}0170PL = 0{,}0732PL = -M_c^{mk}$$

$$M_d^{mk} = 0{,}1175PL - 0{,}0162PL = 0{,}1013PL = -M_e^{mk}$$

$$M_f^{mk} = -0{,}0588PL + 0{,}0317PL = -0{,}0271PL$$

Det tillhörande momentdiagrammet redovisas i fig :47f, uppritat enligt principen, att momenten avsatts på den ramdelssida, som är utsatt för böjdragspänning.

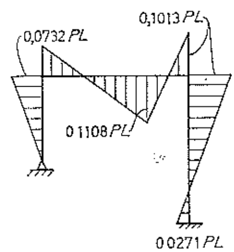


Fig :47f

Exempel 3. Ram i en våning och två fack med knutpunktsförskjutning

Beräkna böjmomentdiagrammet för ett enligt fig :47g utformat och belastat rambärverk med fixlager i upplagspunkterna A och H och horisontellt rulllager i upplagspunkten F. Ramdelarna CD och EF är utformade med parabelvoter.

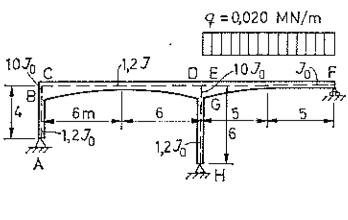


Fig :47g

A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter (jfr :41)
Förutsättningen kan realiseras genom utbyte av rullagret i F mot fixlager.

1 *Balkkonstanter* (jfr :32 **A**)
Del AB: $\alpha_a^0 = \alpha_b^0 = 4/3E \cdot 1{,}2I_0 = 1{,}111/EI_0$; $\beta_{ab}^0 = 4/6E \cdot 1{,}2I_0 = 0{,}556/EI_0$

Del CD: $\lambda = 0{,}50$; $n = 1{,}2I_0/10I_0 = 0{,}12$; $\alpha_c^0 = \alpha_d^0 = 0{,}476 \cdot 12/3E \cdot 1{,}2I_0 = 1{,}587/EI_0$;

$\beta_{cd}^0 = 0{,}665 \cdot 12/6E \cdot 1{,}2I_0 = 1{,}108/EI_0$

Del EF: $\lambda = 0{,}50$; $n = I_0/10I_0 = 0{,}10$; $\alpha_e^0 = 0{,}475 \cdot 10/3EI_0 = 1{,}583/EI_0$;

$\alpha_f^0 = 0{,}975 \cdot 10/3EI_0 = 3{,}25/EI_0$; $\beta_{ef}^0 = 0{,}820 \cdot 10/6EI_0 = 1{,}367/EI_0$

Del GH: $\alpha_g^0 = \alpha_h^0 = 6/3E \cdot 1{,}2I_0 = 1{,}667/EI_0$; $\beta_{gh}^0 = 6/6E \cdot 1{,}2I_0 = 0{,}833/EI_0$

2 *Momentöverföringstal m* (jfr :43 **D**)
a m-talen för överföring av moment medsols beräknas i ordning motsols.

$m_f = m_h = 0$, då upplagen F och H är utformade som leder

$m_d = \beta_{cd}^0/(\alpha_d^0 + \gamma_d)$; $\gamma_d = 1/(1/\alpha_e + 1/\alpha_g) = 1/(1/\alpha_e^0 + 1/\alpha_g^0)$

$= 0{,}812/EI_0$; $m_d = 0{,}462$

$m_b = \beta_{ab}^0/(\alpha_b^0 + \gamma_b)$; $\gamma_b = \alpha_c = \alpha_c^0 - m_d\beta_{cd}^0 = 1{,}075/EI_0$; $m_b = 0{,}254$

b m-talen för överföring av moment motsols beräknas i ordning medsols.

$m_a = 0$, då upplaget A är utformat som led

$m_c = \beta_{cd}^0/(\alpha_c^0 + \gamma_c)$; $\gamma_c = \alpha_b = \alpha_b^0 = 1{,}111/EI_0$; $m_c = 0{,}410$

$m_e = \beta_{ef}^0/(\alpha_e^0 + \gamma_e)$; $\gamma_e = 1/(1/\alpha_d + 1/\alpha_g) = 1/[1/(\alpha_d^0 - m_c\beta_{cd}^0) + 1/\alpha_g^0] = 0{,}674/EI_0$; $m_e = 0{,}607$

$m_g = \beta_{gh}^0/(\alpha_g^0 + \gamma_g)$; $\gamma_g = 1/(1/\alpha_d + 1/\alpha_e) = 1/[1/(\alpha_d^0 - m_c\beta_{cd}^0) + 1/\alpha_e^0] = 0{,}660/EI_0$; $m_g = 0{,}358$

3 *Fördelningstal* μ (jfr :44)
a Ett moment = 1, som angriper i D, fördelas till E och G enligt

$\mu_{de} = (1/\alpha_e)/(1/\alpha_e + 1/\alpha_g) = \alpha_g/(\alpha_e + \alpha_g) = \alpha_g^0/(\alpha_e^0 + \alpha_g^0) = 0{,}513$; $\mu_{dg} = 1 - \mu_{de} = 0{,}487$

b Ett moment = 1, som angriper i E, fördelas till D och G enligt

$\mu_{ed} = (1/\alpha_d)/(1/\alpha_d + 1/\alpha_g) = \alpha_g/(\alpha_d + \alpha_g) = \alpha_g^0/(\alpha_d^0 - m_c\beta_{cd}^0 + \alpha_g^0) = 0{,}596$; $\mu_{eg} = 1 - \mu_{ed} = 0{,}404$

c Ett moment = 1, som angriper i G, fördelas till D och E enligt

$\mu_{gd} = (1/\alpha_d)/(1/\alpha_d + 1/\alpha_e) = \alpha_e/(\alpha_d + \alpha_e) = \alpha_e^0/(\alpha_d^0 - m_c\beta_{cd}^0 + \alpha_e^0) = 0{,}583$; $\mu_{ge} = 1 - \mu_{gd} = 0{,}417$

4 *Lastkonstanter* (jfr :32 **B**)
Med koefficientvärden enligt tabell 1:45 beräknas för belastat fack EF ($\lambda = 0{,}50$; $n = 0{,}10$)

$\Theta_e^0/\beta_{ef}^0 = 0{,}878 \cdot 0{,}020 \cdot 10^2/4 = 0{,}439$ MNm

$\Theta_f^0/\beta_{ef}^0 = 1{,}122 \cdot 0{,}020 \cdot 10^2/4 = 0{,}561$ MNm

5 *Primärmoment samt överförda och fördelade moment*
För primärmomenten M'_e och M'_f beräknas (jfr :45)

$M'_e = -m_e\Theta_e^0/\beta_{ef}^0 = -0{,}607 \cdot 0{,}439 = -0{,}267$ MNm

$M'_f = 0$

M'_e ger upphov till de överförda och fördelade momenten

$M^f_d = -\mu_{ed} M'_e = +0{,}596 \cdot 0{,}267 = 0{,}159$ MNm

$M^f_g = -\mu_{eg} M'_e = +0{,}404 \cdot 0{,}267 = 0{,}108$ MNm

$M^ö_c = m_c M^f_d = 0{,}410 \cdot 0{,}159 = 0{,}0652$ MNm

$M^f_b = -M^ö_c = -0{,}0652$ MNm

Ovan beräknade primärmoment M', fördelade moment M^f och överförda moment $M^ö$ utgör också rambärverkets slutgiltiga moment M^{uk} vid fixa knutpunkter, dvs vid rullagret i upplagspunkten F ersatt med ett fixlager.

B Korrektion för knutpunktsförskjutning (jfr :41 samt :33 exempel 2*B*)

1 *Fasthållningskraft Z i upplagspunkt F*

Mot de ovan under förutsättning av fixa knutpunkter beräknade böjmomenten svarar i upplagspunkterna A och H de horisontella reaktionskomposanterna

$H_a = M^f_b/4 = -0{,}0652/4 = -0{,}0163$ MN (←)

$H_h = M^f_g/6 = 0{,}108/6 = 0{,}0180$ MN (→)

med den tillhörande fasthållningskraften Z i det för beräkningen under A förutsatta fixlagret i upplagspunkten F

$Z = H_a + H_h = -0{,}0163 + 0{,}0180 = 0{,}0017$MN (←)

En övergång till reellt rambärverk enligt fig :47g innebär ett utbyte av förutsatt fixlager i F mot horisontellt rullager. Effekten härav blir en horisontell förskjutning δ åt höger av ramnivån CDEF, svarande mot en last i punkt F av en åt höger riktad horisontalkraft $H = Z = 0{,}0017$MN.

2 *Primärmoment M' från horisontalförskjutning $\delta = 1$* (jfr :45)

För till $\delta = 1$ m hörande primärmoment beräknas ur ekv :45(2) värdena

$M'_{a_{\delta=1}} = 0$

$M'_{b_{\delta=1}} = -m_b \delta/L\beta^0_{ab} = -0{,}254EI_0/4 \cdot 0{,}556 = -0{,}1142EI_0$ MNm

$M'_{g_{\delta=1}} = -m_g \delta/L\beta^0_{gh} = -0{,}358EI_0/6 \cdot 0{,}833 = -0{,}0716EI_0$ MNm

$M'_{h_{\delta=1}} = 0$

3 *Momentöverföring och momentfördelning* (jfr :46)

	M_b	M_c	M_d	M_e	M_g	Mult
Av $M'_{b_{\delta=1}}$	$\boxed{-0{,}1142}$	0,1142	0,0527	−0,0271	−0,0256	EI_0
Av $M'_{g_{\delta=1}}$	−0,0171	0,0171	0,0418	0,0298	$\boxed{-0{,}0716}$	EI_0
Res $M_{\delta=1}$	−0,1313	0,1313	0,0945	0,0027	−0,0972	EI_0

4 *Korrektionsmoment från knutpunktsförskjutning M^δ*

Summation av primärmoment samt överförda och fördelade moment ger de mot $\delta = 1$ m svarande, resulterande böjmomenten $M_{\delta=1}$, redovisade i den nedersta raden i tabellen ovan. För tillhörande horisontella upplagsreaktioner $H_{a_{\delta=1}}$ och $H_{h_{\delta=1}}$ i upplagen A och H beräknas

$$H_{a_{\delta=1}} = M_{b_{\delta=1}}/L = -0{,}1313EI_0/4 = -0{,}0328EI_0 \text{ MN } (\leftarrow)$$

$$H_{h_{\delta=1}} = M_{g_{\delta=1}}/L = -0{,}0972EI_0/6 = -0{,}0162EI_0 \text{ MN } (\leftarrow)$$

med den resulterande horisontalkraften

$$\Sigma H_{\delta=1} = -0{,}0490EI_0 \text{ MN } (\leftarrow)$$

Den verkliga horisontalförskjutningen δ av ramnivån CDEF erhålls ur villkoret

$\delta\Sigma H_{\delta=1} = -H = -0{,}0017$ vilket ger

$\delta = 0{,}0017/0{,}0490EI_0 = 0{,}0347/EI_0$ m

Korrektionsmomenten M^{δ} från den verkliga knutpunktsförskjutningen δ beräknas därpå genom proportionering $-M^{\delta} = \delta M_{\delta=1}$ – till

$M_b^{\delta} = -0{,}0046$MNm; $M_c^{\delta} = 0{,}0046$MNm; $M_d^{\delta} = 0{,}0033$MNm;

$M_e^{\delta} = 0{,}0001$MNm; $M_g^{\delta} = -0{,}0034$MNm

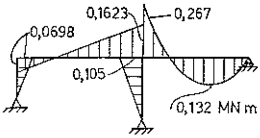


Fig :47h

5 *Slutgiltiga moment* M^{mk}

Direkt överlagring av momenten M^{uk} enligt avsnitt A5 och korrektionsmomenten M^{δ} enligt avsnitt B4 ovan ger de verkliga momenten M^{mk} för reellt rambärverk med horisontellt rullager i upplagspunkten F, dvs

$$M^{mk} = M^{uk} + M^{\delta}$$

Härur erhålls

$$M_b^{mk} = -0{,}0652 - 0{,}0046 = -0{,}0698 \text{ MNm} = -M_c^{mk}$$

$$M_d^{mk} = 0{,}1590 + 0{,}0033 = 0{,}1623 \text{ MNm}$$

$$M_e^{mk} = -0{,}267 + 0 = -0{,}267 \text{ MNm}$$

$$M_g^{mk} = 0{,}1080 - 0{,}0034 = 0{,}1046 \text{ MNm}$$

Det tillhörande momentdiagrammet redovisas i fig :47h, uppritat med momenten avsatta på den ramdelssida, som är utsatt för böjdragspänning.

Exempel 4. Flervåningsram med knutpunktsförskjutningar

Beräkna momentdiagrammet för den i fig :47i visade, vindbelastade 3-våningsramen med genomgående votlösa ramdelar.

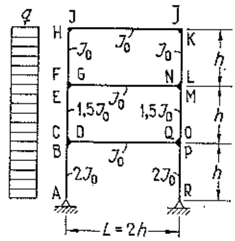


Fig :47i

A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter (jfr :41)

För att en osymmetrisk last utan uppkomst av knutpunktsförskjutning skall kunna upptas av den i fig :47i visade ramen fordras, att denna i horisontalernas nivåer kompletteras med horisontella fasthållningsstänger eller vertikala glidlager enligt fig :47j. I dessa uppträder härvid fasthållningskrafter Z_1, Z_2 och Z_3, vilka låter sig beräknas med hjälp av jämviktsekvationer sedan ramens momenttillstånd bestämts.

1 *Balkkonstanter* α^0 *och* β^0 (jfr :32A)

$\alpha_a^0 = \alpha_b^0 = \alpha_p^0 = \alpha_r^0 = h/(3E2I_0) = 0{,}1667k$; $\beta_{ab}^0 = \beta_{pr}^0 = h/(6E2I_0) = 0{,}0833k$

$\alpha_c^0 = \alpha_e^0 = \alpha_m^0 = \alpha_o^0 = 0{,}2222k$; $\beta_{ce}^0 = \beta_{mo}^0 = 0{,}1111k$

$\alpha_f^0 = \alpha_h^0 = \alpha_k^0 = \alpha_l^0 = 0{,}3333k$; $\beta_{fh}^0 = \beta_{kl}^0 = 0{,}1667k$

$\alpha_d^0 = \alpha_q^0 = \alpha_g^0 = \alpha_n^0 = \alpha_i^0 = \alpha_j^0 = 0{,}6667k$; $\beta_{dq}^0 = \beta_{gn}^0 = \beta_{ij}^0 = 0{,}3333k$

varvid $k = h/EI_0$

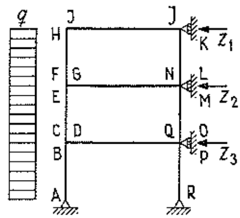


Fig :47j

2 m-tal (jfr :43 D)

Aktuell ramkonstruktion innehåller 2 slutna ramceller och borde därför rätteligen fordra 4 på förhand valda m-värden, vilka emellertid i föreliggande fall genom utnyttjande av konstruktionens symmetriegenskaper kan begränsas till 2.

Som utgångsvärden väljs på försök $m_e = m_f = 0{,}3$. Häremot svarar i övriga ramdelsändar m-tal, för vilka enligt :43 beräknas

a via m_e:

$$m_d = \beta^0_{dq}/(\alpha^0_d + \gamma_d);\ \gamma_d = 1/(1/\alpha_b + 1/\alpha_c);\ \alpha_b = \alpha^0_b = 0{,}1667k;$$

$$\alpha_c = \alpha^0_c - m_e\beta^0_{ce} = 0{,}1889k;\ \gamma_d = 0{,}0885k;\ m_d = 0{,}441 = m_q$$

$$m_o = \beta^0_{mo}/(\alpha^0_o + \gamma_o);\ \gamma_o = 1/(1/\alpha_p + 1/\alpha_q);\ \alpha_p = \alpha^0_p = 0{,}1667k;$$

$$\alpha_q = \alpha^0_q - m_d\beta^0_{dq} = 0{,}5197k;\ \gamma_o = 0{,}1262k;\ m_o = 0{,}319 = m_c$$

b via m_f:

$$m_i = \beta^0_{ij}/(\alpha^0_i + \gamma_i);\ \gamma_i = \alpha_h = \alpha^0_h - m_f\beta^0_{fh} = 0{,}2833k;\ m_i = 0{,}351 = m_j$$

$$m_k = \beta^0_{kl}/(\alpha^0_k + \gamma_k);\ \gamma_k = \alpha_j = \alpha^0_j - m_i\beta^0_{ij} = 0{,}5497k;\ m_k = 0{,}189 = m_h$$

c via m_k och m_o:

$$m_n = \beta^0_{gn}/(\alpha^0_n + \gamma_n);\ \gamma_n = 1/(1/\alpha_l + 1/\alpha_m);\ \alpha_l = \alpha^0_l - m_k\beta^0_{kl} = 0{,}3018k;$$

$$\alpha_m = \alpha^0_m - m_o\beta^0_{mo} = 1868k;\ \gamma_n = 0{,}1154k;\ m_n = 0{,}426 = m_g$$

$$m_e = \beta^0_{ce}/(\alpha^0_e + \gamma_e);\ \gamma_e = 1/(1/\alpha_f + 1/\alpha_g);\ \alpha_f = \alpha^0_f - m_h\beta^0_{fh} =$$

$$= 0{,}3018k;\ \alpha_g = \alpha^0_g - m_n\beta^0_{gn} = 0{,}5247k;\ \gamma_e = 0{,}1916k;$$

$$m_e = 0{,}268 = m_m$$

$$m_f = \beta^0_{fh}/(\alpha^0_f + \gamma_f);\ \gamma_f = 1/(1/\alpha_e + 1/\alpha_g);\ \alpha_e = \alpha^0_e - m_c\beta^0_{ce} = 0{,}1868k;$$

$$\alpha_g = 0{,}5247k;\ \gamma_f = 0{,}1378k;\ m_f = 0{,}354 = m_l$$

Efter en beräkningscykel har följaktligen i ramdelsändarna E och F framkommit i förhållande till startvärdena $m_e = m_f = 0{,}3$ förbättrade värden $m_e = 0{,}268$ och $m_f = 0{,}354$. Förnyad beräkning med utgångspunkt från dessa förbättrade m_e- och m_f-tal ger praktiskt betydelselösa korrektioner av de övriga ovan bestämda m-talen, vilka därför direkt kan accepteras som korrekta.

För de i ovanstående kalkyl obehandlade m-talen m_b och m_p erhålls därpå $m_b = m_p = 0{,}271$.

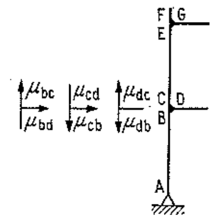


Fig :47k

3 μ-tal

Enligt :44 beräknas för knutpunkt BCD och OPQ (se fig :47k):

$$\alpha_b = \alpha^0_b = 0{,}1667k;\ \alpha_c = \alpha^0_c - m_e\beta^0_{ce} = 0{,}1924k;\ \alpha_d = \alpha^0_d - m_q\beta^0_{dq} = 0{,}5197k$$

$\mu_{bc} = (1/\alpha_c)/(1/\alpha_c + 1/\alpha_d) = 0{,}730(=\mu_{po});\ \mu_{bd} = 1 - \mu_{bc} = 0{,}270(=\mu_{pq})$; svarar mot $M = 1$ i B (resp P)

$\mu_{cb} = (1/\alpha_b)/(1/\alpha_b + 1/\alpha_d) = 0{,}757(=\mu_{op});\ \mu_{cd} = 1 - \mu_{cb} = 0{,}243(=\mu_{oq})$; svarar mot $M = 1$ i C (resp O)

$\mu_{db} = (1/\alpha_b)/(1/\alpha_b + 1/\alpha_c) = 0{,}536(=\mu_{qp});\ \mu_{dc} = 1 - \mu_{db} = 0{,}464(=\mu_{qo})$; svarar mot $M = 1$ i D (resp Q)

knutpunkt EFG och LMN:

$\mu_{ef} = 0{,}635(=\mu_{ml});\ \mu_{eg} = 0{,}365(=\mu_{mn})$; svarar mot $M = 1$ i E (resp M)

$\mu_{fe} = 0{,}737(=\mu_{lm});\ \mu_{fg} = 0{,}263\ (=\mu_{ln})$; svarar mot $M = 1$ i F (resp L)

$\mu_{ge} = 0{,}618(=\mu_{nm});\ \mu_{gf} = 0{,}382(=\mu_{nl})$; svarar mot $M = 1$ i G (resp N)

4 *Lastkonstanter* Θ^0

Lastkonstanterna Θ^0 beräknas enligt :32 **B1** vid balkar med konstant tröghetsmoment ur sambandet $\Theta^0/\beta^0 = w$, där $w(w_a$ och $w_b)$ erhålles ur tabell 1:38

$$\Theta^0_a/\beta^0_{ab} = \Theta^0_b/\beta^0_{ab} = \Theta^0_c/\beta^0_{ce} = \Theta^0_e/\beta^0_{ce} = \Theta^0_f/\beta^0_{fh} = \Theta^0_h/\beta^0_{fh} = (1/4)\,qh^2$$

5 *Primärmoment* M'

För dessa beräknas ur ekv :45 (1 c) genom insättning av m-talen och av storheterna $\Theta^0/\beta^0 = w$

$$M'_a = 0; \quad M'_b = 0{,}271 \cdot (1/4)\,qh^2 = 0{,}0678qh^2$$

$$M'_c = -[0{,}319/(1 - 0{,}319 \cdot 0{,}268)]\,[(1/4)qh^2 - 0{,}268 \cdot (1/4)qh^2]$$
$$= -0{,}0638qh^2;$$

$$M'_e = 0{,}0499qh^2; \quad M'_f = -0{,}0769qh^2; \quad M'_h = 0{,}0327qh^2$$

6 *Momentöverföring och momentfördelning*

Överföringen och fördelningen av primärmomenten sker, om ramen har många knutpunkter, lämpligen i tabellform. I tabellen i fig :47 l anges beräknade värden för M', M^f och $M^ö$ samt $M^{uk} = M' + \Sigma(M^f + M^ö)$. Beräkningsgången åskådliggörs av i fig :47 m visade exempel på överföring och fördelning av primärmomentet M'_b.

	Av M'_b	Av M'_c	Av M'_e	Av M'_f	Av M'_h	M^{uk}
B	+0.0678	+0.0483	+0,0001	−0,0137−0,0001	−0,0001	
					−0,0001	+0,1022qh^2
C	−0,0495	−0,0638	+0,0001	+0,0181−0,0001	+0,0001	−0,0951qh^2
D	−0,0183	+0,0155	−0,0002	−0,0044+0,0002	+0,0001	−0,0071qh^2
E	−0,0133+0,0001	−0,0001	+0,0499−0,0001	+0,0567+0,0001	+0,0003	
			−0,0001			+0,0935qh^2
F	+0,0084+0,0001		−0,0317+0,0001	−0,0769−0,0001	+0,0002	−0,0999qh^2
G	+0,0049−0,0002	+0,0001	−0,0182+0,0001	+0,0202	−0,0005	+0,0064qh^2
H	+0,0016−0,0001		−0,0060+0,0002	−0,0002	+0,0327	+0,0282qh^2
I	−0,0016+0,0001		+0,0060−0,0002	+0,0002	−0,0327	−0,0282qh^2
J	−0,0006+0,0002	−0,0001	+0,0021−0,0006	+0,0006	−0,0116	
	+0,0001					−0,0099qh^2
K	+0,0006−0,0002	+0,0001	−0,0021+0,0006	−0,0006	+0,0116	
	−0,0001					+0,0099qh^2
L	+0,0002−0,0008	+0,0006	−0,0007+0,0030	−0,0001−0,0033	+0,0041	
	−0,0006					+0,0024qh^2
M	+0,0010−0,0013	−0,0009	+0,0048+0,0005	+0,0002−0,0053	−0,0030	
	−0,0001					−0,0041qh^2
N	+0,0021−0,0004	+0,0003	−0,0078+0,0002	+0,0086−0,0001	−0,0011	
	−0,0001					+0,0017qh^2
O	+0,0038−0,0004	−0,0032	+0,0015+0,0002	+0,0009−0,0017	−0,0010	+0,0001qh^2
P	+0,0043+0,0003	−0,0036	−0,0011−0,0002	+0,0010+0,0013	+0,0008	+0,0028qh^2
Q	−0,0081+0,0001	+0,0068	−0,0004	−0,0019+0,0004	+0,0002	−0,0029qh^2

Fig :47 l. Primärmoment, överförda och fördelade moment samt resulterande moment M^{uk}

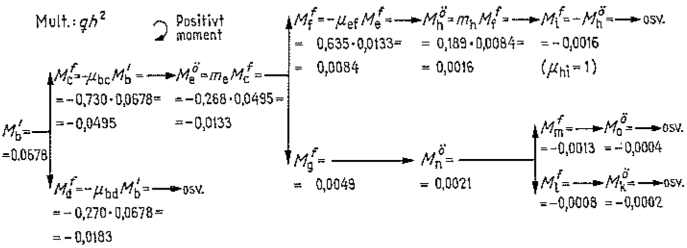


Fig :47 m. Överföring och fördelning av primärmoment M'_b. Beräkningen fortsätts, till dess att M^f och $M^ö$ blir så små, att de kan försummas

Sedan enligt tabellen i fig :47l den fullständiga effekten av varje primärmoment M' beräknats, erhålls de resulterande, mot ram utan knutpunktsförskjutning svarande momenten M^{uk} genom en direkt summation för varje ramdelsände av primärmoment och samtliga fördelade och transporterade moment. Dessa resulterande moment finns sammanställda i sista kolumnen i fig :47l.

B Korrektion för knutpunktsförskjutning (jfr även :41 och :33 exempel 2*B*)

1 *Fasthållningskrafter*

Vid känt momenttillstånd för fixa knutpunkter (M^{uk}) kan de för förhindrande av knutpunktsförskjutning erforderliga fasthållningskrafterna Z_1, Z_2 och Z_3 beräknas genom uppskärning av ramen i enkla delar och uppställande av jämviktsekvationer för dessa. Den detaljerade beräkningsgången härvid framgår av fig :47n. Som slutresultat erhålls

$$Z_1 = 0{,}440qh;\ Z_2 = 1{,}054qh;\ Z_3 = 1{,}111qh \qquad \text{(a)}$$

2 *Allmän beräkningsgång*

För att ramen med fixa knutpunkter skall övergå till den ursprungliga i fig :47i visade, måste de i knutpunkterna JK, LMN och OPQ införda vertikala glidlagren avlägsnas. Detta medför enligt fig :47o för horisontalerna IJ, GN och DQ förskjutningar δ_1, δ_2 och δ_3, svarande mot belastning av horisontalkrafterna H_1, H_2 och H_3, vilka är lika stora som Z_1, Z_2 resp Z_3 men motriktade dessa. Effekten av dessa knutpunktsförskjutningar behandlas i följande etapper.

a Beräkning av de böjmoment $M^{\delta_1=1}$ och horisontella knutpunktsbelastningar $H^{\delta_1=1}$, som svarar mot en elementarförskjutning $\delta_1 = 1$ enligt fig :47p av enbart horisontalen IJ.

b Beräkning av de böjmoment $M^{\delta_2=1}$ och horisontella knutpunktsbelastningar $H^{\delta_2=1}$, som svarar mot elementarförskjutningar $\delta_2 = 1$ enligt fig :47q av horisontalerna IJ och GN.

c Beräkning av de böjmoment $M^{\delta_3=1}$ och horisontella knutpunktsbelastningar $H^{\delta_3=1}$, som svarar mot elementarförskjutningar $\delta_3 = 1$ enligt fig :47r av samtliga horisontaler IJ, GN och DQ.

d Beräkning av de verkliga förskjutningarna δ_1, δ_2 och δ_3 ur jämviktsvillkoren

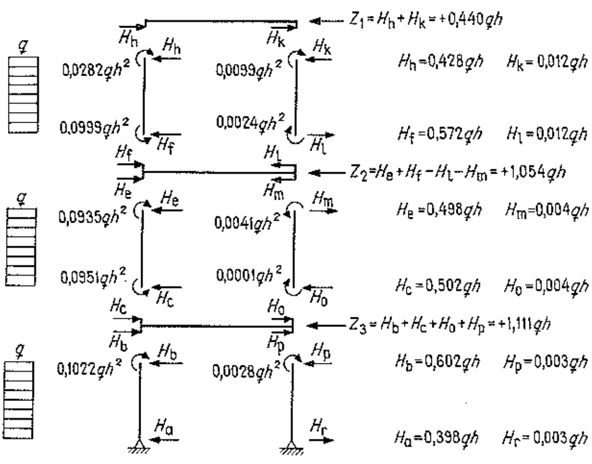


Fig :47n

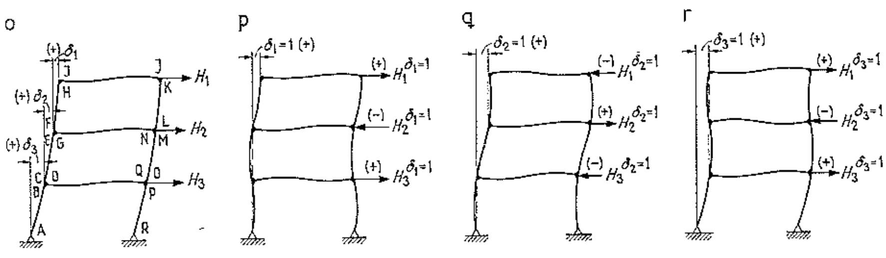


Fig :47 o–r

$$Z_1 = \delta_1 H_1^{\delta_1=1} + \delta_2 H_1^{\delta_2=1} + \delta_3 H_1^{\delta_3=1}$$

$$Z_2 = \delta_1 H_2^{\delta_1=1} + \delta_2 H_2^{\delta_2=1} + \delta_3 H_2^{\delta_3=1} \qquad \text{(b)}$$

$$Z_3 = \delta_1 H_3^{\delta_1=1} + \delta_2 H_3^{\delta_2=1} + \delta_3 H_3^{\delta_3=1}$$

varvid följande *teckenregler* tillämpats:
Fasthållningskrafterna Z (fig :47j och n) är positiva, om de är riktade åt vänster ($\overset{+}{\leftarrow}$)
H och δ (fig :47 o–r) är positiva, om de är riktade åt höger ($\overset{+}{\rightarrow}$)

e Beräkning av de till de verkliga knutpunktsförskjutningarna enligt fig :47 o hörande böjmomenten M^{δ} ur uttrycket

$$M^{\delta} = \delta_1 M^{\delta_1=1} + \delta_2 M^{\delta_2=1} + \delta_3 M^{\delta_3=1} \qquad \text{(c)}$$

3 *Numerisk utvärdering*

a Inverkan av elementarförskjutningar $\delta_1=1$, $\delta_2=1$ och $\delta_3=1$. För $\delta_1=1$ uppkommer i F, H, K och L primärmoment M', för vilka enligt ekv :45(2) beräknas

$$M'_f = -(6EI_0/h^2)[0{,}354(1+0{,}189)/(1-0{,}354\cdot 0{,}189)]$$

$$= -2{,}707EI_0/h^2 = M'_1$$

$$M'_h = -1{,}646EI_0/h^2 = M'_k$$

Effekten av dessa i form av fördelade och överförda moment bestäms på analogt sätt som under **A**. För föreliggande lastfall kan därvid en viss förenkling uppnås genom utnyttjande av antisymmetriegenskaperna. Resulterande knutpunktsförskjutningsmoment $M^{\delta_1=1}$ redovisas i tabell :47, vilken också innehåller de på analogt sätt bestämda, mot $\delta_2=1$ och $\delta_3=1$ svarande knutpunktsförskjutningsmomenten $M^{\delta_2=1}$ resp $M^{\delta_3=1}$.

De tillhörande horisontella knutpunktsbelastningarna $H^{\delta_1=1}$, $H^{\delta_2=1}$ och $H^{\delta_3=1}$ beräknas ur jämviktsekvationer enligt den i fig :47n demonstrerade tekniken. Slutresultatet anges nederst i tabellen.

b Beräkning av δ_1, δ_2 *och* δ_3

Genom insättning i ekv (b) av uttrycken för Z_1, Z_2, Z_3, $H^{\delta_1=1}$, $H^{\delta_2=1}$ och $H^{\delta_3=1}$ enligt ekv (a) resp tabell :47 erhålls för bestämning av ramens verkliga knutpunktsförskjutningar δ_1, δ_2 och δ_3 följande ekvationssystem

$$10{,}62\delta_1 - 5{,}21\delta_2 + 0{,}87\delta_3 = 0{,}440qh^4/EI_0;$$

$$-15{,}84\delta_1 + 21{,}62\delta_2 - 6{,}59\delta_3 = 1{,}054qh^4/EI_0$$

$$6{,}09\delta_1 - 22{,}16\delta_2 + 12{,}67\delta_3 = 1{,}111qh^4/EI_0$$

varur beräknas $\delta_1 = 0{,}173qh^4/EI_0$; $\delta_2 = 0{,}378qh^4/EI_0$; $\delta_3 = 0{,}666qh^4/EI_0$ (d)

Tabell :47

Moment och horisontalkraft	Moment ($M^{\delta=1}$) och horisontalkraft ($H^{\delta=1}$) av			Multiplikator
	$\delta_1=1$	$\delta_2=1$	$\delta_3=1$	
M_b	−0,435	2,870	−3,472	EI_0/h^2
M_c	0,652	−4,304	2,214	»
M_d	−0,217	1,434	1,258	»
M_e	1,958	−3,904	0,648	»
M_f	−3,047	2,084	−0,347	»
M_g	1,089	1,820	−0,301	»
M_h	−2,263	0,520	−0,087	»
M_i	2,263	−0,520	0,087	»
M_j	2,263	−0,520	0,087	»
M_k	−2,263	0,520	−0,087	»
M_l	−3,047	2,084	−0,347	»
M_m	1,958	−3,904	0,648	»
M_n	1,089	1,820	−0,301	»
M_o	0,652	−4,304	2,214	»
M_p	−0,435	2,870	−3,472	»
M_q	−0,217	1,434	1,258	»
H_1	10,62	−5,21	0,87	EI_0/h^3
H_2	−15,84	21,62	−6,59	»
H_3	6,09	−22,16	12,67	»

c Mot den verkliga knutpunktsförskjutningen svarande moment M^{δ}

För dessa ger ekv (c) i kombination med $M^{\delta=1}$ enligt tabellen ovan och δ_1, δ_2 och δ_3 enligt ekv (d) värdena

$$M_b^{\delta} = (-0{,}173\cdot 0{,}435+0{,}378\cdot 2{,}870-0{,}666\cdot 3{,}472)qh^2 = -1{,}303qh^2 = M_p^{\delta};$$

$$M_c^{\delta} = M_o^{\delta} = -0{,}040qh^2;\ M_d^{\delta} = M_q^{\delta} = 1{,}343qh^2;$$

$$M_e^{\delta} = M_m^{\delta} = -0{,}707qh^2;\ M_f^{\delta} = M_l^{\delta} = 0{,}031qh^2;\ M_g^{\delta} = M_n^{\delta} = 0{,}676qh^2;$$

$$M_h^{\delta} = M_k^{\delta} = -0{,}252qh^2;\ M_i^{\delta} = M_j^{\delta} = 0{,}252qh^2$$

d Slutgiltiga moment M^{mk}

De verkliga momenten M^{mk} för den i fig :47i visade ramen med fria knutpunktsförskjutningsmöjligheter blir $M^{mk} = M^{uk} + M^{\delta}$, där M^{uk} är de i fig :47 l angivna momenten vid fixa knutpunkter.

$$M_b^{mk} = -1{,}201qh^2;\quad M_c^{mk} = -0{,}135qh^2;\quad M_d^{mk} = -1{,}336qh^2;$$

$$M_e^{mk} = -0{,}613qh^2;\quad M_f^{mk} = -0{,}069qh^2;\quad M_g^{mk} = 0{,}682qh^2;$$

$$M_h^{mk} = -0{,}224qh^2;\quad M_i^{mk} = 0{,}224qh^2;\quad M_j^{mk} = 0{,}242qh^2;$$

$$M_k^{mk} = -0{,}242\,qh^2;\quad M_l^{mk} = 0{,}033qh^2;\quad M_m^{mk} = -0{,}711qh^2;$$

$$M_n^{mk} = 0{,}678qh^2;\quad M_o^{mk} = -0{,}040qh^2;\quad M_p^{mk} = -1{,}300qh^2,$$

$$M_q^{mk} = 1{,}340qh^2$$

Ramens momentdiagram visas i fig :47s, uppritat enligt principen, att momenten genomgående avsatts på den ramdelssida, som är utsatt för böjdragspänning.

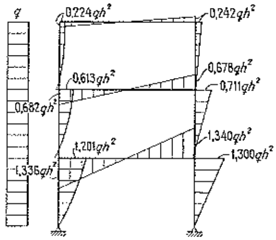


Fig :47s

:5 Cross' metod

:51 Allmän beräkningsgång

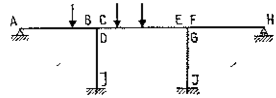


Fig :51

Cross' metod, vilken första gången framlades i litteraturen år 1932 av den amerikanske professorn Hardy Cross, är en systematiserad bruksstadiemetod, karaktäriserad av att momenttillståndet bestäms genom ett successivt approximationsförfarande.

Vid rambärverk med *fixa knutpunkter* är den principiella gången av en momentberäkning enligt Cross' metod följande (jfr fig :51).

Till en början antas rambärverkets samtliga icke-ledade knutpunkter genom något yttre tvång vara *fastlåsta mot rotation,* dvs inte kunna vinkeländras. Genom fastlåsningen blir balkarna i rambärverket ensidigt eller tvåsidigt fast inspända. Av den yttre belastningen uppkommer härvid inspänningsmoment i balkändarna, vilka kallas *ingångs- eller startmoment* M^s.

För att rambärverket skall övergå i den verkliga ramkonstruktionen enligt fig :51, måste de antagna fastlåsningarna mot rotation av knutpunkterna lösgöras. Detta sker successivt i ett antal beräkningsomgångar, varvid varje omgång omfattar beräkning av effekten av *en* knutpunkts lösgörande från fastlåsningen. För att därvid beräkningsförfarandets konvergens skall bli så snabb som möjligt, väljs för lösgörande i varje beräkningsomgång den knutpunkt, som har störst sammanlagt moment från i knutpunkten inkommande ramdelar.

I rambärverket enligt fig :51 har knutpunkten EFG störst sammanlagt startmoment $\Sigma M^s = M^s_e$, varför i denna införd fastlåsning först avlägsnas. Härvid måste för att knutpunkten skall befinna sig i jämvikt ett *kompensationsmoment* $M^k_{efg} = -\Sigma M^s = -M^s_e$ införas i knutpunkten. Detta kompensationsmoment ger den lösgjorda knutpunkten en rotation, varvid *fördelade moment* M^f_e, M^f_f respektive M^f_g uppkommer i de anslutande ramdelsändarna. Dessa fördelade moment ger i sin tur upphov till *transporterade moment* M^t_c, $M^t_h = 0$ resp M^t_i i ramdelarnas motsatta ändpunkter C, H och I.

Därmed är den fullständiga effekten av knutpunktens EFG lösgörande beaktad. I vinkeländrat läge låses så knutpunkten EFG åter fast för ytterligare rotation, varpå fastlåsningen avlägsnas i knutpunkt BCD, som nu fordrar största kompensationsmomentet $M^k_{bcd} = -\Sigma(M^s + M^t) = -(M^s_b + M^s_c + M^t_c)$. Detta moment fördelas och transporteras enligt ovan, varpå knutpunkt BCD åter fastlåses och knutpunkt EFG lösgörs från sin fastlåsning. Så upprepas det successiva beräkningsförfarandet till dess att kompensationsmomenten blir så små, att de med god approximation kan försummas. De slutgiltiga momenten M^{uk} erhålls därpå genom summation för varje ramdelsände av startmoment M^s och samtliga fördelade moment M^f och transporterade moment M^t, dvs $M^{uk} = \Sigma(M^s + M^f + M^t)$.

Vid *rambärverk med förskjutbara knutpunkter* kan momentberäkningen i princip enligt :33 exempel 2 *B*, :41, :47 och :57 ofta med fördel uppdelas i de båda etapperna

a Momentberäkning under förutsättning av fixa knutpunkter
b Korrektion för renodlad knutpunktsförskjutning

Beräkningsgång

A Fixa knutpunkter (utan knutpunktsförskjutning = *uk*, jfr :57)

1 Bestämning av transporttal *r* (se :52)
2 Bestämning av styvhetstal *S* (se :53)
3 Bestämning av fördelningstal *s* (se: 53)
4 Bestämning av startmoment M^s (se :54)

5 Successiv utjämning av momenten med början vid knutpunkt med största kompensationsmoment M^k (se ovan samt :55, :56 och :57)
  a Beräkning av kompensationsmoment M^k (se ovan och :55)
  b Beräkning av fördelade moment M^f (se :56)
  c Beräkning av transporterade moment M^t (se :56)
6 Beräkning av resulterande moment $M^{uk} = \Sigma(M^s + M^f + M^t)$

Sedan de resulterande momenten i en ramdels båda ändar beräknats enligt ovan, kan övriga snittkrafter i ramdelen och ramdelens deformation beräknas för ramdelen betraktad som enkel tvåstödsbalk, belastad av de resulterande momenten M^{uk} och den yttre lasten.

B Förskjutbara knutpunkter (med knutpunktsförskjutning = *mk*)

Beräkningen genomförs i princip på samma sätt som vid primärmomentmetoden (se :41).

I vissa fall, speciellt vid rambärverk, som skall momentberäknas endast för ett enstaka belastningsfall, kan ibland en behandling enligt en av Hultin modifierad metod [24], karaktäriserad av en *parallell successiv utjämning för knutpunktsrotation och knutpunktsförskjutning*, snabbare leda till målet än en renodlad Cross-beräkning.

Teckenregler

I avsikt att hålla nere risken för teckenfel väljs som genomgående teckenregel vid själva momentutjämningsprocessen, att *moment, som verkar i medsols riktning i en balkände, räknas som positiva* (+ ↷).

Detta innebär, att

1 *Tecknet bibehålls vid momenttransport* ($M_b = r_b M_a$)
2 *Tecknet växlas vid momentfördelning* ($M_c = -s_c M_b$)

Vid den slutgiltiga redovisningen av en ramkonstruktions momentdiagram övergår man lämpligen till därvid konventionella teckenregler.

Beträffande teckenregler för fasthållningskrafter, horisontalkrafter och förskjutningar vid rambärverk med förskjutbara knutpunkter se :41.

:52 Transporttal

En ramdels AB *transporttal* r_b definieras som det moment, som uppkommer i ramdelsänden B, om ramdelsänden A som fritt upplagd belastas med ett moment $M_a = 1$.

Fri uppläggning i B (fig :52a):

$$r_b = 0 \qquad (1)$$

Fast inspänning i B (fig :52b):

Generellt: $r_b = \beta^0_{ab}/\alpha^0_b = C_{ab}/2C_b$ (2 a)

där α^0_b och β^0_{ab} samt C_b och C_{ab} erhålls ur :32 **A**.

Votlös balk: $r_b = 1/2$ (2 b)

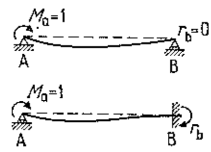


Fig :52 a och b

För vottyper enligt fig :32b redovisas r_b i diagramform i tabell 1:47 med som ingångsparametrar relativa votlängden λ och förhållandet $n = I_0/I_{max}$ mellan minsta och största tröghetsmoment.

:53 Styvhetstal och fördelningstal

En ramdels AB *styvhetstal* S_a definieras som det moment, som måste appliceras i ramdelsänden A för att i denna ge ramdelen en vinkeländring $\Theta_a = 1$.

Fri uppläggning i B (fig :53 a):

Generellt: $S'_a = 1/\alpha_a^0 = 3EI_0/C_a L$ (1 a)

Votlös balk: $S'_a = 3EI/L$ (1 b)

Fast inspänning i B (fig :53 b):

Generellt: $S''_a = 1/\alpha_a^0(1-(\beta_{ab}^0)^2/(\alpha_a^0\,\alpha_b^0) = 3EI_0/C_a L(1 - C_{ab}^2/4C_a\,C_b)$ (2 a)

där α_a^0, α_b^0 och β_{ab}^0 samt C_a, C_b och C_{ab} erhålls ur :32 A.

Votlös balk: $S''_a = 4EI/L$ (2 b)

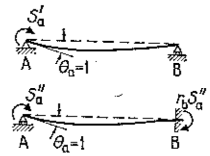


Fig :53 a och b

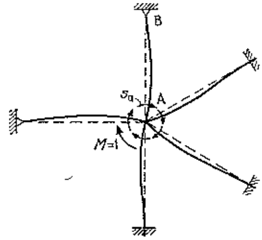


Fig :53 c

För vottyper enligt fig :32 b redovisas S'_a och S''_a i diagramform i tabell 1:46 med som ingångsparametrar relativa votlängden λ och förhållandet $n = I_0/I_{max}$ mellan minsta och största tröghetsmoment.

En i en knutpunkt enligt fig :53 c inkommande ramdels AB *fördelningstal* s_a definieras som det moment, som uppkommer i ramdelsänden A, då hela knutpunkten belastas med ett moment $M = 1$. Fördelningstalet s_a bestäms enbart av de anslutande ramdelarnas styvhetstal enligt sambandet

$$s_a = S_a/\Sigma S \tag{3}$$

i vilket summationen skall omfatta knutpunktens *samtliga* ramdelar.

Det förtjänar att understrykas den väsentliga skillnad, som finns mellan primärmomentmetodens och Cross-metodens fördelningstal μ respektive s, och som ligger däri, att, medan primärmomentmetodens fördelningstal beskriver, hur ett i en ramdel verkande moment fördelas på de *övriga* i knutpunkten anslutande ramdelarna, så anger Cross-metodens fördelningstal i stället fördelningen av ett knutpunkten angripande moment på knutpunktens *samtliga* ramdelar. Härtill kommer ytterligare en skillnad därigenom att primärmomentmetodens μ-värden är för den *verkliga* konstruktionen gällande fördelningstal, under det att Cross-metodens s-värden hänför sig till en *modifierad* konstruktion, uppkommen ur den verkliga genom att samtliga icke-ledade — från knutpunkten räknat — yttre ramdelsändar fastlåsts mot rotation.

:54 Startmoment

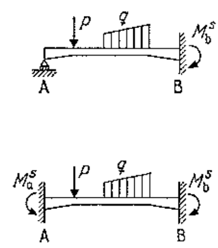


Fig :54 och b

Startmomenten är identiska med inspänningsmomenten vid ensidigt och tvåsidigt fast inspända balkar.

Generellt gäller vid godtyckligt vald last och tröghetsmomentvariation för ensidigt fast inspänd balk (fig :54 a):

$$M_b^s = \Theta_b^0/\alpha_b^0; \tag{1}$$

för tvåsidigt fast inspänd balk (fig :54 b):

$$M_a^s = (\Theta_a^0\,\alpha_b^0 - \Theta_b^0\,\beta_{ab}^0)/[\alpha_a^0\,\alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2];$$

$$M_b^s = (\Theta_b^0\,\alpha_a^0 - \Theta_a^0\,\beta_{ab}^0)/[\alpha_a^0\,\alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2] \tag{2}$$

varvid α_a^0, α_b^0 och β_{ab}^0 samt Θ_a^0 och Θ_b^0 betecknar de i :32 beskrivna balk- resp lastkonstanterna. Med speciell tillämpbarhet på balkar med *raka, triangulära* eller *paraboliska voter* anges för några vanliga lastfall i fig :54 c–h

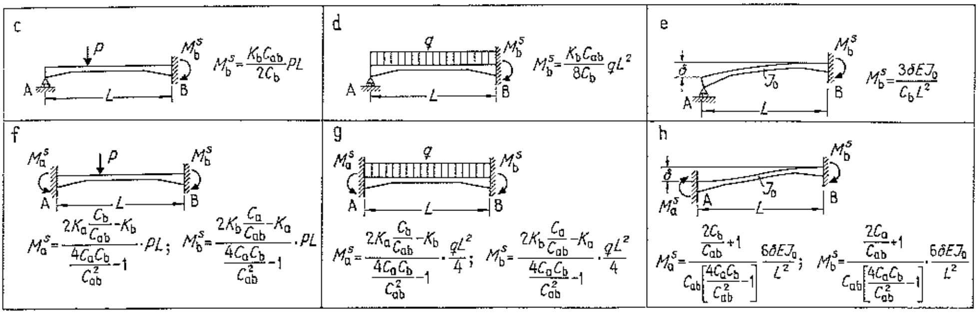


Fig :54 c–h

ur ekv (1) och (2) vidareutvecklade M^s-samband, baserade på de i :32 samt i tabellerna 1:44 och 1:45 redovisade C- och K-talen. En kompletterande direkt redovisning av M^s för votförsedd balk ges för jämnt fördelad och triangulärt fördelad last i tabell 1:48 med som ingångsparametrar relativa votlängden λ och förhållandet $n = I_0/I_{max}$ mellan minsta och största tröghetsmoment.

För M^s vid *votlös balk* hänvisas till tabellerna 1:39 och 1:40.

:55 Kompensationsmoment

Med en knutpunkts kompensationsmoment M^k förstås det moment, som måste tillföras knutpunkten för att den, då antagen fastlåsning mot rotation lösgörs, skall komma i jämvikt. Jfr fig :57d.

:56 Fördelade och transporterade moment

Kompensationsmomentet M^k i en knutpunkt fördelas till anslutande balkar med hjälp av fördelningstalen s. Speciellt för knutpunkten DEF i fig :57a ger detta i balkändarna D, E respektive F de *fördelade* momenten:

$$M_d^f = s_d M_{def}^k;\quad M_e^f = s_e M_{def}^k \text{ resp } M_f^f = s_f M_{def}^k$$

De fördelade momenten överförs till motsatt balkände, varvid transporttalen anger förhållandet mellan transporterat och fördelat moment. I ovannämnda fall (fig :57a) blir de till balkändarna C, G respektive J *transporterade momenten*:

$$M_c^t = r_c M_d^f,\; M_g^t = r_g M_e^f \text{ resp } M_j^t = r_j M_f^f.$$

:57 Beräkningsexempel

Beräkna momentdiagrammet för det i fig :57a visade lastfallet.

A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter

För att vid aktuellt lastfall enligt fig :57a en ramdeformation utan någon sidoförskjutning av knutpunkterna BC, DEF och GH skall uppkomma, fordras, att ramen kompletteras med någon sidostagande anordning, exempelvis enligt fig :57b med ett vertikalt glidlager i knutpunkten GH.

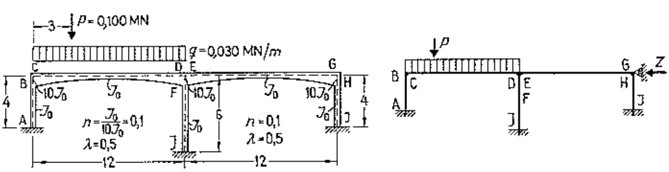


Fig :57a och b

I detta uppträdande horisontalkraft, *fasthållningskraft Z*, kan beräknas direkt ur jämviktsekvationer, sedan det till fixa knutpunkter hörande momenttillståndet bestämts.

1 *Transporttal r* (se :52)

För de votlösa rambenen gäller

$r_a = r_i = r_j = 1/2$

och för de med parabelvoter försedda horisontalerna

$C_{cd} = C_{dc} = C_{eg} = C_{ge} = 0{,}642$; $C_c = C_d = C_e = C_g = 0{,}450$ (se tabell 1:44).

$r_c = r_d = r_e = r_g = 0{,}642/2 \cdot 0{,}450 = 0{,}713$ (jfr också tabell 1:47)

2 *Styvhetstal S* (se :53)

$S_b = S_h = 4EI_0/4 = EI_0$; $S_f = 4EI_0/6 = 0{,}667EI_0$ [ekv :53 (2b)]

$S_c = S_d = S_e = S_g = 13{,}55EI_0/12 = 1{,}129EI_0$ [ekv :53 (2a) med *C*-tal enligt ovan eller tabell 1:46]

3 *Fördelningstal s* [ekv :53 (3)]

Knutpunkt BC och GH:

$\Sigma S = S_b + S_c = 2{,}129EI_0$; $s_b = S_b/\Sigma S = 0{,}470 = s_h$;

$s_c = 1 - s_b = 0{,}530 = s_g$

Knutpunkt DEF:

$\Sigma S = S_d + S_e + S_f = 2{,}925EI_0$; $s_d = S_d/\Sigma S = 0{,}386 = s_e$;

$s_f = 1 - s_d - s_e = 0{,}228$

4 *Ingångs- eller startmoment* M^s (se :54)

Av *q*-lasten enbart enligt fig :54g med $K_c = K_d = 1$ (se tabell 1:45) och *C*-tal enligt ovan:

$M_c^s = -M_d^s = -0{,}416qL^2/4 = -0{,}416 \cdot 0{,}03 \cdot 12^2/4 = -0{,}449$ MNm

(jfr också tabell 1:48)

Av *P*-lasten enbart enligt fig :54f med $K_c = 0{,}303$, $K_d = 0{,}244$ (se tabell 1:45) och *C*-tal enligt ovan

$M_c^s = -0{,}187PL = -0{,}187 \cdot 0{,}100 \cdot 12 = -0{,}224$ MNm

$M_d^s = 0{,}041PL = 0{,}041 \cdot 0{,}100 \cdot 12 = 0{,}049$ MNm

Totalt av $q + P$ $M_c^s = -0{,}673$MNm; $M_d^s = 0{,}498$MNm

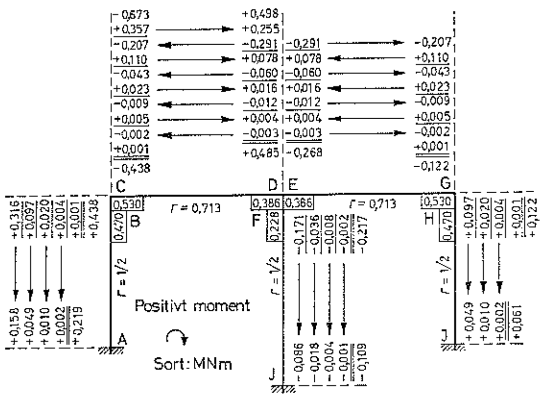


Fig :57c

5 Successiv momentutjämning

Den successiva utjämningen av de under förutsättning av mot rotation fastlåsta knutpunkter BC, DEF och GH gällande startmomenten M^s finns genomförd i den i fig :57c redovisade beräkningstablån. I denna har för den successiva utjämningens underlättande från början införts de olika ramdelarnas transporttal r samt för de inre knutpunkterna fördelningstalen s för i dessa inkommande ramdelar.

Före utjämningens början verkar i ramen som enda moment de båda startmomenten i C och D $M_c^s = -0{,}673$ MNm resp $M_d^s = +0{,}498$ MNm.

Det numeriskt största startmomentet uppträder följaktligen i knutpunkten BC. Ur konvergenssynpunkt är det därför lämpligt att starta det successiva lösgörandet av de från början antagna fastlåsningarna mot rotation just i denna punkt. I fig :57d anges beräkningsgången vid de tre första beräkningsetapperna (jfr :51).

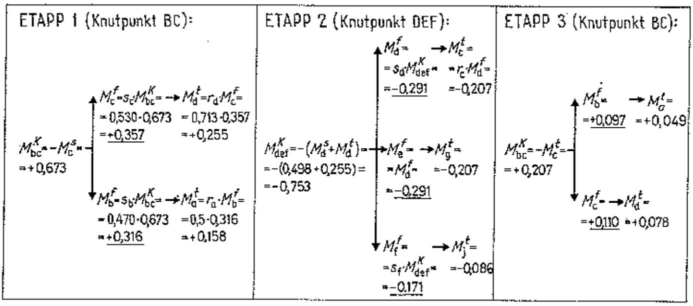


Fig :57d. De tre första beräkningsetapperna vid utjämning av momenten i ramen enl fig :57c

Sedan kompensationsmomentet M^k i en knutpunkt fördelats och transporterats, är knutpunkten i jämvikt och fastlåses i detta tillstånd. Jämviktstillståndet markeras med enkelt streck (t ex $\underline{-0{,}291}$) under de i knutpunkten fördelade momenten.

När kompensationsmomenten blivit så små, att deras inverkan kan försummas, avbryts beräkningen.

Slutmomenten M^{uk} erhålls som summan av samtliga M^s, M^f och M^t i varje balkände och markeras med dubbla streck (t ex $+0{,}485$)

B Korrektion för knutpunktsförskjutning (jfr :33 exempel **2** *B* och :47)

Sedan ramens momenttillstånd vid fixa knutpunkter (M^{uk}) bestämts enligt **A**, erhålls fasthållningskraften Z (fig :57b) genom jämviktsekvationer enligt fig :57e för det i enkla delar uppskurna rambärverket.

Avlägsnas det i knutpunkten GH införda vertikala glidlagret, kommer knutpunktsnivån BC-DEF-GH att horisontalförskjutas åt höger en distans δ, svarande mot en i GH angripande, åt höger riktad horisontalkraft $H = Z = 0{,}1558$ MN (jfr fig :57f).

Det häremot svarande momenttillståndet beräknas nedan i etapper.

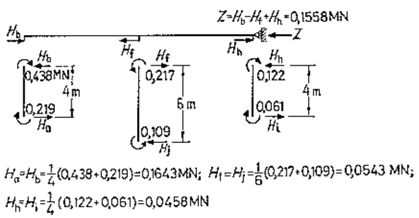


Fig :57e

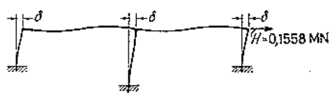


Fig :57f

1 Inverkan av elementarförskjutning $\delta = 1$

Under förutsättning av mot rotation fastlåsta knutpunkter BC, DEF och GH ger en elementarförskjutning (fig :57g) i rambenens ändpunkter startmoment M^s, för vilka enligt tabell 1:40 beräknas

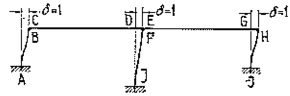


Fig :57g

$$M_a^{s^{\delta=1}} = M_b^{s^{\delta=1}} = M_h^{s^{\delta=1}} = M_i^{s^{\delta=1}} = -6EI_0/L^2 = -6EI_0/4^2 = -0{,}375EI_0$$

$$M_f^{s^{\delta=1}} = M_j^{s^{\delta=1}} = -6EI_0/6^2 = -0{,}167EI_0$$

Övergång från den i fig :57g visade deformationsfiguren till verklig deformationsfigur enligt fig :57f kan ske genom ett successivt frigörande av de antagna fastlåsningarna mot rotation, helt i överensstämmelse med den i A redovisade tekniken för ram med fixa knutpunkter. Den häremot svarande successiva momentutjämningen visas i fig :57h och till därvid erhållna slutgiltiga moment $M^{\delta=1}$ hörande horisontella upplagsreaktioner i fig :57i. Av denna senare framgår, att för en elementarförskjutning $\delta = 1$ enligt fig :57f fordras i knutpunkten GH angrepp av en högerriktad horisontalkraft $H^{\delta=1} = 0{,}293EI_0$.

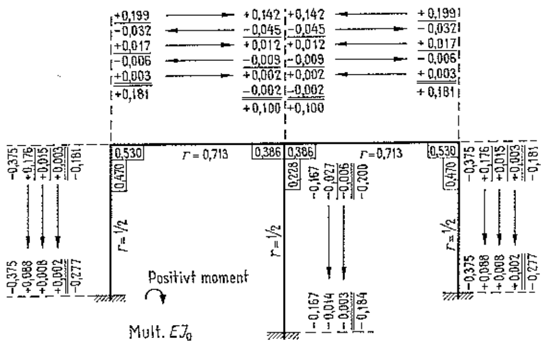


Fig :57h

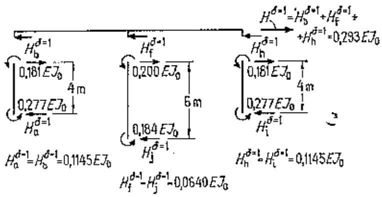


Fig :57i

2 Beräkning av verklig knutpunktsförskjutning δ

δ erhålls ur jämviktsvillkoret $Z = \delta H^{\delta=1}$

Insättning av aktuella värden ger:

$0{,}1558 = \delta \cdot 0{,}293EI_0$; $\delta = 0{,}532/EI_0$

3 Mot verklig knutpunktsförskjutning δ *svarande moment* M_δ *i* MNm

Direkt proportionering ger

$M^\delta = \delta M^{\delta=1}$

varur beräknas

$M_a^\delta = \delta M_a^{\delta=1} = -0{,}147 = M_i^\delta$; $M_b^\delta = -0{,}096 = -M_c^\delta = -M_g^\delta = M_h^\delta$;

$M_d^\delta = M_e^\delta = 0{,}053$; $M_f^\delta = -0{,}106$; $M_j^\delta = -0{,}098$

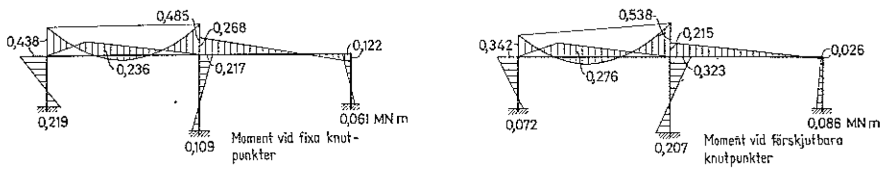
4 Slutliga moment M^{mk} *i* MNm

$M_a^{mk} = M_a^{uk} + M_a^\delta = 0{,}219 - 0{,}147 = 0{,}072$; $M_b^{mk} = 0{,}342 = -M_c^{mk}$;

$M_d^{mk} = 0{,}538$; $M_e^{mk} = -0{,}215$, $M_f^{mk} = -0{,}323$;

$M_g^{mk} = -0{,}026 = -M_h^{mk}$; $M_i^{mk} = -0{,}086$; $M_j^{mk} = -0{,}207$.

Fig :57j



Det tillhörande momentdiagrammet redovisas t h i fig :57j, i vilken som jämförelse också anges det mot fixa knutpunkter svarande momentdiagrammet. Diagrammen har ritats enligt tekniken, att momenten genomgående avsatts på den ramdelssida, som är utsatt för böjdragspänning.

:6 Matrismetoder och systematiserad analys

:61 Allmänt

Formuleringen av de grundläggande statiska sambanden i matrisform gjordes tidigt. Den fick dock inte någon praktisk användning och blev därför inte helt genomarbetad förrän datorerna i större utsträckning började användas som beräkningshjälpmedel. Liksom alla datoranpassade beräkningsmetoder kännetecknas dessa matrismetoder av en långt driven formalism. Detta har bl a medfört större möjlighet att överblicka beräkningarna även för mycket stora system. Den ökade användningen av dessa metoder har även inneburit att studiet av numeriska beräkningsmetoder har fått ökad betydelse inom byggnadsstatiken.

I det följande skall matrismetoderna för deformations- och kraftmetoderna behandlas. De ingångsmatriser som därvid erfordras kan uppställas manuellt och sedan kan matrisoperationerna utföras med hjälp av dator. I dag finns dock datorprogram, som bygger på någon av dessa metoder och som gör det möjligt att genomföra beräkningen med väsentligt mindre manuellt arbete. Exempel på sådana beräkningssystem är FRAM, STRESS, STRIP, STRUDL m fl. Vid användandet av dessa program är dock en god kännedom om den använda beräkningsmetoden en förutsättning för en riktig bedömning av beräkningsmodeller och resultatet.

:62 Deformationsmetod

:621 Jämviktsekvationer

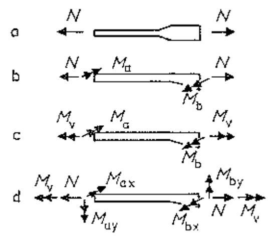


Fig :621 a–d. Exempel på oberoende randsnittkrafter för olika elementtyper *a* stav, *b* balk i plant rambärverk, *c* balk i balkrost, *d* balk i tredimensionellt rambärverk. Båge och krökt balk kan betraktas som specialfall av *b*, *c* eller *d*

Jämviktsekvationer kan formuleras dels som interna samband över de enskilda elementen mellan snittkrafter och yttre laster, dels som jämviktssamband i systemets knutpunkter mellan de anslutande elementens randsnittkrafter och i knutpunkterna inkommande yttre laster.

Sambanden över de enskilda elementen kan användas för en reduktion av totala antalet randsnittkrafter så att endast *oberoende* sådana förekommer i de fortsatta beräkningarna. För dessa snittkrafter skall vekhetsvärden (se nedan) bestämmas. Detta sker ofta med hjälp av tabellverk. Med hänsyn härtill är det lämpligt att välja normalkraft och moment som *oberoende* randsnittkrafter enl fig :621 a–d. De eliminerade tvärkrafterna kan uttryckas med hjälp av dessa snittkrafter.

Antalet jämviktsekvationer som kan formuleras i en knutpunkt är lika med antalet frihetsgrader i punkten och detta är bl a beroende av konstruktionstypen (se tabell :621). Förekomsten av styva reaktioner eller styva (t ex normalkraftstyva) element innebär en reduktion av antalet frihetsgrader. Finns en led mellan en knutpunkt och ett anslutande element innebär detta en motsvarande ökning av antalet frihetsgrader.

Styva reaktioner i en knutpunkt medför således att några ekvationer inte

Tabell :621. Sammanställning av antalet frihetsgrader för olika konstruktionstyper.

Konstruktionstyp	Maximalt antal frihetsgrader i knutpunkt
Plant fackverk	2 translationer
Plan ram	2 translationer + 1 rotation
Balkrost	1 translation + 2 rotationer
3-dim fackverk	3 translationer
3-dim ram	3 translationer + 3 rotationer

formuleras i de styva riktningarna. Ett normalkraftsstyvt element innebär bortfall av en ekvation i vilken normalkraften skulle ingått samtidigt som denna elimineras från de obekanta oberoende snittkrafterna. Bildar de normalkraftsstyva elementen mer komplexa system kan valet av vilka ekvationer som kan formuleras innebära vissa svårigheter. Speciellt gäller att om de normalkraftsstyva elementen bildar en statiskt obestämd fackverkskonstruktion så kan beräkningen inte genomföras. Trots att styva element i allmänhet innebär en minskning av ekvationssystemets storlek och därmed beräkningsvolymen bör de därför användas med försiktighet.

Förekomsten av en led innebär en extra ekvation, som sätter aktuella snittkrafter till 0.

I matrisform kan jämviktsekvationerna skrivas

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Bq} \qquad (1)$$

A-*matrisen* $(j \cdot n)$ är jämviktsekvationernas koefficientmatris. Antalet rader (j) är lika med konstruktionens totala antal frihetsgrader och antalet kolumner (n) är lika med antalet obekanta randsnittkrafter.

P-*matrisen* $(n \cdot l)$ innehåller de obekanta randsnittkrafterna. Antalet kolumner (l) är lika med antalet lastfall.

Som högerled i ekvationssystemet förekommer yttre laster, som uttrycks som knutpunktslaster i de av jämviktsekvationerna definierade riktningarna. Laster från anslutande element överförs till ekvivalenta knutpunktslaster genom att elementen först betraktas som fast inspända i knutpunkterna. De därvid på knutpunkten angripande inspänningsmomenten och fasthållningskrafterna utgör den aktuella knutpunktslasten (se fig :621 e–g samt jämför med startmomenten vid beräkning enligt Cross' metod, :54).

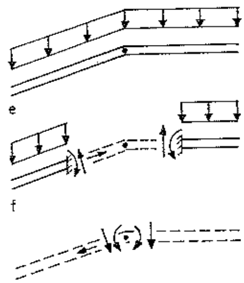


Fig :621 e–g. *e* Knutpunkt med anslutande belastade element. *f* På elementen angripande inspänningsmoment och fasthållningskrafter vid fasthållna knutpunkter. *g* På knutpunkten angripande moment och krafter som ger med yttre lasten ekvivalenta knutpunktslaster

Bq-*matrisen* $(j \cdot l)$ innehåller mot respektive jämviktsekvation svarande knutpunktslast.

Är antalet jämviktsekvationer $(j) >$ antalet obekanta snittkrafter (n) är konstruktionen labil. Är $j = n$ är den statiskt bestämd såvida den inte är lokalt labil. I detta fall kan snittkraftsfördelningen direkt bestämmas genom lösning av ekv (1). Är $j < n$ är konstruktionen statiskt obestämd och antalet statiskt obestämda är $n - j$. De jämviktsekvationer som inte medtagits i **A**-matrisen kan användas till att bestämma styva reaktionskrafter och andra styva snittkrafter sedan de obekanta randsnittkrafterna beräknats.

:622 Lokala elementdeformationer

Elementens lokala elastiska deformationer kan beräknas ur vekhetsvärdena och randsnittkrafterna. I matrisform kan detta skrivas

$$\Delta_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \qquad (1)$$

Här anger

Δ_e-*matrisen* $(n \cdot l)$ de mot de obekanta randsnittkrafterna svarande elastiska deformationerna för de olika lastfallen.

V-*matrisen* $(n \cdot n)$, vekhets- eller flexibilitetsmatrisen, är uppbyggd av diagonalt ordnade undermatriser, en för varje element. Undermatriserna anger de lokala deformationerna i de obekanta randlasternas riktningar till följd av var och en av dessa = 1.

Ett vekhetselement V_{ij} anger den lokala deformationen i snittkraften i:s riktning p g a randsnittkraften $j = 1$. Som en följd av Maxwells sats är $V_{ij} = V_{ji}$. Vekhetsmatriserna för några vanliga elementtyper visas i fig :622 a–c.

Värdena i vekhetsmatrisen för ett godtyckligt valt plant balkelement kan beräknas enligt ekv (2) (jämför :25)

$$V_{ij} = \int_L \frac{N_i N_j}{EA} \mathrm{d}x + \int_L \frac{M_i M_j}{EI} \mathrm{d}x + \int_L \frac{\varkappa T_i T_j}{GA} \mathrm{d}x \tag{2}$$

N_i, M_i och T_i är snittkrafterna för $P_i = 1$ och N_j, M_j och T_j för $P_j = 1$. Tags inte hänsyn till normal- eller tvärkraftarbete, bortfaller motsvarande termer ur ekv (2).

$$\begin{array}{cc} & N \\ \delta_N & \begin{bmatrix} \int \frac{\mathrm{d}x}{EA} \end{bmatrix} \end{array}$$

a

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} M_a & M_b & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \delta_N \end{matrix} & \begin{bmatrix} \alpha_a^0 & \beta_{ab}^0 & \\ \beta_{ab}^0 & \alpha_b^0 & \\ & & \int \frac{\mathrm{d}x}{EA} \end{bmatrix} \end{array}$$

b

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} M_v & M_a & M_b \end{matrix} \\ \begin{matrix} \Delta\varphi \\ \theta_a \\ \theta_b \end{matrix} & \begin{bmatrix} \int \frac{\mathrm{d}x}{GK_v} & & \\ & \alpha_a^0 & \beta_{ab}^0 \\ & \beta_{ab}^0 & \alpha_b^0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c

Fig :622 a–c. Vekhetsmatriser för några vanliga elementtyper. *a* Stavelement, *b* balkelement med rak tyngdpunktsaxel och med försumbar inverkan av tvärkraftsarbete (α^0 och β^0 balkkonstanter enligt :32 A), *c* balkrostelement vid hänsyn tagen till endast inverkan av böjning och Saint-Venant-torsion

:623 Kontinuitetsvillkor

Kontinuitetsvillkoret formulerar sambandet mellan de lokala elementdeformationerna och de angränsande knutpunkternas deformationer. Detta innebär att summan av elastiska och icke elastiska (orsakade av t ex temperatur och krympning) elementdeformationer är lika med (skillnaden mellan) de angränsande knutpunkternas deformationer transformerade i elementens riktningar. I matrisform kan detta skrivas

$$-\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{\Delta}_0 \tag{1}$$

Här är

U-*matrisen* $(j \cdot l)$ en matris, som innehåller de obekanta knutpunktsdeformationerna, till antal och riktning definierade genom i **A**-matrisen tecknade jämviktssamband. (j) är antalet frihetsgrader och (l) är antalet lastfall.

T-*matrisen* $(n \cdot j)$ en transformationsmatris, som överför de obekanta knutpunktsdeformationerna u till lokala elementdeformationer. Antalet rader (n) är lika med antalet oberoende randlaster och antalet kolumner (j) är lika med antalet frihetsgrader.

$\mathbf{\Delta}_0$-*matrisen* $(n \cdot l)$ en matris som innehåller icke elastiska elementdeformationer såsom temperaturdeformationer, krymp- och krypdeformationer etc.

För lineär teori gäller att T-matrisen är identisk med den transformerade A-matrisen.

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

Insätts ekv (2) i ekv (1) erhålls

$$-\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{\Delta}_0 \tag{3}$$

Enligt förutsättningarna har eventuella styva randlaster redan eliminerats, varför **V**-matrisen kan inverteras. Ur ekv (3) kan därför erhållas

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\,(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{\Delta}_0) \tag{4}$$

där $\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1}$ (5)

S-*matrisen* $(n \cdot n)$, styvhetsmatrisen, är den inverterade **V**-matrisen och är liksom denna uppbyggd av diagonalt ordnade undermatriser. Dessa beskriver de randsnittkrafter som måste appliceras för att en lokal enhetsdeformation skall erhållas.

Vid beräkning enligt deformationsmetod är det i allmänhet lämpligt att direkt ställa upp **S**-matrisen och inte gå vägen över **V**-matrisen. Styvhetsmatriserna för några olika elementtyper framgår av fig :623 a–c.

$$\begin{array}{cc} & \delta_N \\ N & \begin{bmatrix} S_N \end{bmatrix} \end{array}$$

a

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \theta_a & \theta_b & \delta_N \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_a \\ M_b \\ N \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_a & S_{ab} & \\ S_{ab} & S_b & \\ & & S_N \end{bmatrix} \end{array}$$

b

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \theta_a & \theta_b & \Delta\varphi \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_a \\ M_b \\ M_v \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_a & S_{ab} & \\ S_{ab} & S_b & \\ & & S_v \end{bmatrix} \end{array}$$

c

$$S_N = 1 / \int_L \frac{\mathrm{d}x}{EA}$$

$$S_a = \alpha_b^0 / [\alpha_a^0 \alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2]$$

$$S_{ab} = -\beta_{ab}^0 / [\alpha_a^0 \alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2]$$

$$S_v = 1 / \int_L \frac{\mathrm{d}x}{GK_v}$$

$$S_b = \alpha_a^0 / [\alpha_a^0 \alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2]$$

Fig :623 a–c. Styvhetsmatriser för *a* stavelement, *b* balkelement, *c* balkrostelement (α^0 och β^0 enl :32 A)

:624 Bestämning av resulterande deformationer och snittkrafter

Insätts ekv :623 (4) i ekv :621 (1) erhålls

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{A}^T)\cdot\mathbf{U} = \mathbf{Bq} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{\Delta}_0 \tag{1}$$

Knutpunktsdeformationer **U** erhålls genom lösande av (1) och snittkraftsfördelningen **P** erhålls därefter genom insättning i ekv :623 (4). De resulterande snittkrafterna $\mathbf{P}_1$ erhålls slutligen som

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P} + \mathbf{Q}_0 \tag{2}$$

$\mathbf{Q}_0$-*matrisen* $(n\cdot l)$ innehåller de snittkrafter som erhålls som inspänningsmoment och fasthållningskrafter om elementen antas helt inspända i ändarna.

:625 Beräkningsgång

1 Givet: Systemets geometri och styvheter samt lastfall.

2 Numrera de obekanta randsnittkrafterna.

3 Ställ upp jämviktsekvationernas koefficientmatris, **A**-matrisen (se :621).

4 Ställ upp styvhetsmatrisen, **S**-matrisen (se :623).

5 Beräkna inspänningsmoment och fasthållningskrafter för yttre last samt längdändringar och vinkeländringar för de fritt upplagda elementen vid temperaturlast. Ställ upp $\mathbf{Q}_0$-, **Bq**- och $\mathbf{\Delta}_0$-matriserna (se :624, :621 och :623).

6 Beräkna knutpunktsdeformationerna **U** samt snittkrafterna $\mathbf{P}_1$ enl ekv :624 (1), (2) och :623 (4).

:626 Beräkningsexempel

Exempel 1

Beräkna momentfördelningen för ramkonstruktionen enl fig :626a. De ingående elementen har konstanta tröghetsmoment. Hänsyn tas endast till momentarbetet.

De oberoende snittkrafterna numreras enl fig :626b. Eftersom elementen är normalkraftsstyva medtas därvid inte normalkrafterna.

Konstruktionen har tre frihetsgrader, nämligen rotationerna i knutpunkterna ② och ③ samt horisontaltranslationen, som är lika för ② och ③. **A**-matrisen har alltså 3 rader och 4 kolumner (fig :626c) och **S**-matrisen är av ordningen 4 gånger 4 (fig :626d).

Momentfördelningen vid fasthållna knutpunkter framgår av fig :626e och $\mathbf{Q}_0$- och **Bq**-matriserna av fig :626f resp g.

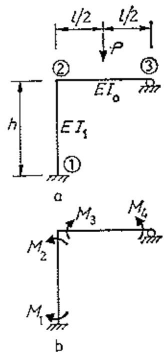


Fig :626a och b

Knutpunkt och ekvriktning	M_1	M_2	M_3	M_4
② →	$-\frac{1}{h}$	$\frac{1}{h}$		
② ↺		1	−1	
③ ↺				1

Fig :626c. **A**-matris

Snittkraft	Vinkeländring θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
M_1	$\frac{4EI_1}{h}$	$\frac{-2EI_1}{h}$		
M_2	$\frac{-2EI_1}{h}$	$\frac{4EI_1}{h}$		
M_3			$\frac{4EI_0}{l}$	$\frac{-2EI_0}{l}$
M_4			$\frac{-2EI_0}{l}$	$\frac{4EI_0}{l}$

Fig :626d. **S**-matris

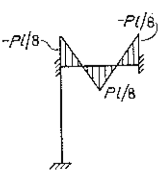


Fig :626e

Snittkraft	Lastfall 1
M_1	0
M_2	0
M_3	$-\frac{Pl}{8}$
M_4	$-\frac{Pl}{8}$

Knutpunkt och ekvriktning	Lastfall 1
② →	0
② ↺	$-\frac{Pl}{8}$
③ ↺	$\frac{Pl}{8}$

Fig :626f och g. $\mathbf{Q}_0$- resp **Bq**-matris

$$\frac{EI_0}{l}\begin{bmatrix} 12/l^2 & 6/l & \\ 6/l & 8 & 2 \\ & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{Pl}{8} \\ \frac{Pl}{8} \end{bmatrix}$$

Fig :626h. Ekvationssystem $ASA^TU = Bq$

Knutpunkt och defriktning	Lastfall 1
② →	+3 l
② ↺	-6
③ ↺	7

$\times \frac{Pl^2}{128 EI_0}$

Fig :626i. U-matris

Snittkraft	Lastfall 1
M_1	−3
M_2	−3
M_3	−3
M_4	0

$\times Pl/64$

Fig :626j. P_1-matris

Genomförs beräkningarna för $h = l$ och $EI_1 = EI_0$ erhålls ekvationssystemet enligt fig :626h, fr ekv :624(1) med $\Delta_0 = 0$. Ur detta kan deformationsmatrisen U bestämmas (fig :626i) varefter $P_1 = S \cdot A^T \cdot U + Q_0$ kan beräknas (fig :626j), fr ekv :623(4) och :624(2) med $\Delta_0 = 0$. Den resulterande momentfördelningen framgår av fig :626k.

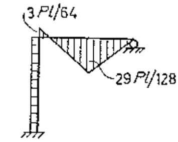


Fig :626k

Exempel 2

Beräkna momentfördelningen för ramkonstruktionen enligt fig :626 l för följande lastfall:

1 Vindlast q
2–4 Bjälklagslaster p för respektive bjälklag
5 Lineär temperaturgradient med differensen Δt mellan ök och uk för nedre bjälklaget. Tjockleken $= d$.

Jfr för lastfall 1 i :47 exempel 4.

Vid beräkningarna tas inte hänsyn till normal- eller tvärkraftsarbete.

Eftersom samtliga element är normalkraftsstyva, utgörs de obekanta snittkrafterna endast av momenten i elementändarna, numrerade enligt fig :626m. Beträffande teckenregler för vertikala och horisontella element se fig :626n. Jämviktsekvationerna formuleras i den ordning som framgår av fig :626o. Jämviktsekvationernas koefficientmatris A-matrisen (ordning $11 \cdot 18$) framgår av fig :626p. S-matrisen $(18 \cdot 18)$ framgår av fig :626r. Lastmatriserna $Bq(11 \cdot 5)$, $\Delta_0(18 \cdot 5)$ och $Q_0(18 \cdot 5)$ framgår av fig :626q, s resp t.

Sedan beräkningarna genomförts över matrisekvationerna :624 (1), (2) och :623 (4) för $h = 5{,}00$ m erhålls de resulterande deformations- och snittkraftsmatriserna U resp P_1 enligt fig :626u resp v.

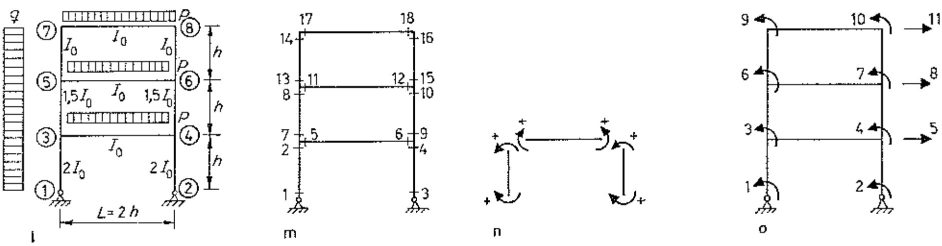


Fig :626 l–o

Jäm-vikts ekv. nr	Snittkrafter M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}	M_{17}	M_{18}
1	-1																	
2			-1															
3		1			-1		-1											
4				1		1			-1									
5 →	$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$			$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$								
6								1			-1		-1					
7										1		1			-1.			
8 →							$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$			$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$		
9														1			-1	
10																1		1
11 →													$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$		

Fig :626 p. **A**-matris (11·18)

Knut-punkt last nr	Lastfall nr 1	2	3	4	5
1	$-\frac{qh^2}{12}$				
2					
3		$-\frac{pL^2}{12}$			
4		$\frac{pL^2}{12}$			
5 →	qh				
6			$-\frac{pL^2}{12}$		
7			$\frac{pL^2}{12}$		
8 →	qh				
9	$\frac{qh^2}{12}$			$-\frac{pL^2}{12}$	
10				$\frac{pL^2}{12}$	
11 →	$\frac{qh}{2}$				

Fig :626 q. **Bq**-matris (11·5)

Snitt-kraft	Vinkeländring Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4	Θ_5	Θ_6	Θ_7	Θ_8	Θ_{15}	Θ_{16}	Θ_{17}	Θ_{18}
M_1	$\frac{8EJ_0}{h}$	$-\frac{4EJ_0}{h}$										
M_2	$-\frac{4EJ_0}{h}$	$\frac{8EJ_0}{h}$										
M_3			$\frac{8EJ_0}{h}$	$-\frac{4EJ_0}{h}$								
M_4			$-\frac{4EJ_0}{h}$	$\frac{8EJ_0}{h}$								
M_5					$\frac{4EJ_0}{L}$	$-\frac{2EJ_0}{L}$						
M_6					$-\frac{2EJ_0}{L}$	$\frac{4EJ_0}{L}$						
M_7							$\frac{6EJ_0}{h}$	$-\frac{3EJ_0}{h}$				
M_8							$-\frac{3EJ_0}{h}$	$\frac{6EJ_0}{h}$				
M_{15}									$\frac{4EJ_0}{h}$	$-\frac{2EJ_0}{h}$		
M_{16}									$-\frac{2EJ_0}{h}$	$\frac{4EJ_0}{h}$		
M_{17}											$\frac{4EJ_0}{L}$	$-\frac{2EJ_0}{L}$
M_{18}											$-\frac{2EJ_0}{L}$	$\frac{4EJ_0}{L}$

Fig :626 r. **S**-matris (18·18)

Vinkel-änd-ring	Lastfall nr 1	2	3	4	5
Θ_5^0					$\frac{L\alpha\Delta t}{2d}$
Θ_6^0					$\frac{L\alpha\Delta t}{2d}$

Fig :626 s. $\mathbf{\Delta_0}$-matris (18·5)

Snitt-kraft	Lastfall nr 1	2	3	4	5
M_1	$-\frac{qh^2}{12}$				
M_2	$-\frac{qh^2}{12}$				
M_5		$-\frac{pL^2}{12}$			
M_6		$-\frac{pL^2}{12}$			
M_7	$\frac{qh^2}{12}$				
M_8	$-\frac{qh^2}{12}$				
M_{11}			$-\frac{pL^2}{12}$		
M_{12}			$-\frac{pL^2}{12}$		
M_{13}	$\frac{qh^2}{12}$				
M_{14}	$-\frac{qh^2}{12}$				
M_{17}				$-\frac{pL^2}{12}$	
M_{18}				$-\frac{pL^2}{12}$	

Fig :626 t. $\mathbf{Q_0}$-matris (18·5)

Knutpunkt och def-riktning	Lastfall 1	2	3	4	5
1 ↶	-98,3	17,2	-5,1	2,0	-2,06
2 ↶	-96,7	-17,2	5,1	-2,0	2,06
3 ↶	-55,5	-34,4	10,1	-4,0	4,13
4 ↶	-56,1	34,4	-10,1	4,0	-4,13
4 →	415,4	0,0	0,0	0,0	0,00
5 ↶	-28,6	10,1	-43,9	17,5	-1,21
6 ↶	-28,0	-10,1	43,9	-17,5	1,21
6 →	651,6	0,0	0,0	0,0	0,00
7 ↶	-8,5	-4,0	17,6	-90,5	0,48
8 ↶	-10,7	4,0	-17,6	90,5	-0,48
8 →	759,7	0,0	0,0	0,0	0,0
Multiplikator	$\frac{q}{EJ_0}$	$\frac{P}{EJ_0}$	$\frac{P}{EJ_0}$	$\frac{P}{EJ_0}$	$\frac{\alpha \Delta t}{h}$

Fig :626 u. U-matris (11·5)

Snittkrafter	Lastfall 1	2	3	4	5
M_1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
M_2	30,00	-4,13	1,21	-0,49	0,494
M_3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
M_4	32,49	-4,13	-1,21	0,49	-0,494
M_5	33,39	-7,65	-0,20	0,08	0,916
M_6	-33,50	-7,65	-0,20	0,08	0,916
M_7	-3,38	3,52	1,42	-0,57	-0,422
M_8	15,34	-0,85	-4,65	1,86	0,102
M_9	-1,00	-3,52	-1,42	0,57	0,422
M_{10}	17,77	0,85	4,65	-1,86	-0,102
M_{11}	15,05	-0,20	-7,46	-0,35	0,024
M_{12}	-16,94	-0,20	-7,46	-0,35	0,024
M_{13}	-1,72	-0,64	2,81	2,21	0,008
M_{14}	5,58	0,08	-0,35	-6,53	-0,010
M_{15}	0,84	0,64	-2,81	-2,21	-0,077
M_{16}	6,04	-0,08	0,35	6,53	+0,010
M_{17}	5,58	0,08	-0,35	-6,53	-0,010
M_{18}	-6,04	0,08	-0,35	-6,53	-0,010
Multiplikator	q	P	P	P	$\frac{\alpha \Delta t\, EJ_0}{h}$

Fig :626 v. $\mathbf{P}_1$-matris (18·5)

:63 Kraftmetod

:631 Matriser och matrisekvationer

Kraftmetoden i matrisform utgör en systematisering av de beräkningsmetoder för arbetsekvationer, som beskrivits i :2. De där visade integralsambanden kan genom lämpligt val av utgångsmatriserna ersättas med matrismultiplikationer. Således kan ekv :262 (4) ersättas med matrisekvationen

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{\Delta}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{X}=0 \qquad (1)$$

Här beskriver en kolumn hos

C-*matrisen* $(n\cdot s)$ snittkrafterna i den uppsnittade statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen p g a en statiskt obestämd $X_i=1$. Antalet rader (n) är totala antalet oberoende randsnittkrafter inklusive reaktionskrafterna. Antalet kolumner (s) är antalet statiskt obestämda.

Vidare gäller:

V-*matrisen* $(n\cdot n)$ är vekhets-(flexibilitets-)matrisen enligt :622.

D-*matrisen* $(n\cdot l)$ beskriver snittkrafterna hos den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen orsakade av yttre last, med en kolumn för varje lastfall.

Δ-*matrisen* $(n\cdot l)$ anger lastkonstanterna (θ_a^0, θ_b^0, δ_N^0 etc se :32B) för de olika lastfallen.

Det bör observeras, att integraltermen $\int_L (M_1 M_0/EI)\mathrm{d}x$ etc i ekv (1) i :262 motsvaras av 2 termer i matrisekvationen (1). $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}$ innebär en integration under förutsättning av lineärt varierande momentvariation över elementen. Den ickelineära variationen över belastade element införs genom termen $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{\Delta}$ genom att lastkonstanterna förekommer i **Δ**-matrisen.

Ur ekv (1) kan de statiskt obestämda, **X** lösas. Systemmatrisen $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}$ är symmetrisk, vilket är en följd av Maxwells sats

$$\mathbf{X}=-(\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C})^{-1}\cdot(\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{\Delta}) \qquad (2)$$

Sedan de statiskt obestämda beräknats, erhålls de resulterande snittkrafterna **P** enligt sambandet

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \tag{3}$$

P-*matrisen* $(n \cdot l)$ innehåller resulterande snittkrafter för de olika lastfallen. Deformationerna beräknas därefter ur ekvationen

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \Delta \tag{4}$$

F-*matrisen* $(n \cdot d)$ innehåller snittkrafter i den uppsnittade, statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen, orsakade av enhetskrafter respektive enhetsmoment i den önskade deformationens punkt och riktning. Antalet kolumner (d) är lika med antalet deformationer som beräknas.

Z-*matrisen* $(d \cdot l)$ innehåller de resulterande deformationerna i de av **F**-matrisen definierade riktningarna och för de olika lastfallen.

:632 Beräkningsgång

1 Givet: Konstruktionens geometri och de enskilda elementens vekheter samt lastfall
2 Numrera de obekanta randsnittkrafterna
3 Bestäm antalet statiskt obestämda. Välj dessa och därmed den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen
4 Ställ upp **C**- och **V**-matriserna
5 Bestäm kraftfördelningen i den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen
6 Ställ upp **D**- och **Δ**-matriserna
7 Beräkna de statiskt obekanta **X** och de resulterande snittkrafterna **P** med hjälp av ekv :631 (2) och (3)
8 Ställ upp **F**-matrisen om deformationer skall bestämmas
9 Beräkna deformationsmatrisen **Z** enligt ekv :631 (4).

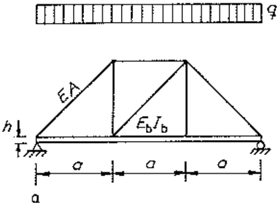
:633 Beräkningsexempel

Spännbockskonstruktion enligt fig :633 a, som även behandlats i :27, beräknas här för jämnt utbredd last (lastfall 1), längskrympning av balken ε (lastfall 2) och lineär temperaturgradient med temperaturdifferensen Δt mellan balkens över- och undersida. Längdutvidgningskoefficienten är α.

Snittkrafterna numreras enligt fig :633 b och de statiskt obestämda X_1 och X_2 väljs som redovisats på fig :27 h eller fig :27 j och k.

Snittkraftsfördelningen i den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen p g a $X_1 = 1$ och $X_2 = 1$ beskrivs i **C**-matrisen (fig :633 c) och inverkan av yttre last i **D**-matrisen (fig :633 d). **Δ**-matrisen (fig :633 e) innehåller lastkonstanter θ^0 och δ. Slutligen beskrivs elementens elastiska egenskaper i **V**-matrisen (fig :633 f).

Beräkningarna genomförs för $a = 4$ m, $A = 10$ cm^2, $I_b = 40\,000$ cm^4, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$MN/m^2, $E_b = 3{,}5 \cdot 10^4$MN/m^2, $q = 0{,}01$ MN/m, $\varepsilon = 10 \cdot 10^{-5}$, $\Delta t = 10$°C och $\alpha = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ enligt matrisekvationer :631 (2) och (3). Den resulterande snittkraftsfördelningen erhålls därvid i **P**-matrisen (fig :633 g).



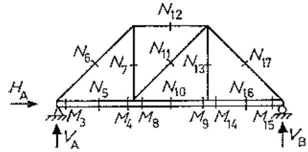


Fig :633 a och b

Snittkrafter	Stat obest X_1	X_2
H_A		
V_A		
M_3		
M_4	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	
N_5	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	
N_6	1	
N_7	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	
M_8	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	
M_9		$\frac{a}{\sqrt{2}}$
N_{10}		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
N_{11}	-1	1
N_{12}	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
N_{13}	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$
M_{14}		$\frac{a}{\sqrt{2}}$
M_{15}		
N_{16}		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
N_{17}		1
V_B		

Fig :633c. C-matris (18·2)

Snittkrafter	Lastfall 1	2	3
H_A			
V_A	$1{,}5qa$		
M_3			
M_4	qa^2		
N_5			
N_6			
N_7			
M_8	qa^2		
M_9	qa^2		
N_{10}			
N_{11}			
N_{12}			
N_{13}			
M_{14}	qa^2		
M_{15}			
N_{16}			
N_{17}			
V_B	$1{,}5qa$		

Fig :633d. D-matris (18·3)

Lastkonstanter	Lastfall 1	2	3
u_{AH}			
u_{AV}			
Θ_3	$\frac{a^3}{24E_bJ_b}$		$\frac{-\alpha a\Delta t}{2h}$
Θ_4	$\frac{a^3}{24E_bJ_b}$		$\frac{-\alpha a\Delta t}{2h}$
δ_5		$-a\varepsilon$	
δ_6			
δ_7			
Θ_8	$\frac{a^3}{24E_bJ_b}$		$\frac{-\alpha a\Delta t}{2h}$
Θ_9	$\frac{a^3}{24E_bJ_b}$		$\frac{-\alpha a\Delta t}{2h}$
δ_{10}		$-a\varepsilon$	
δ_{11}			
δ_{12}			
δ_{13}			
Θ_{14}	$\frac{a^3}{24E_bJ_b}$		$\frac{-\alpha a\Delta t}{2h}$
Θ_{15}	$\frac{a^3}{24E_bJ_b}$		$\frac{-\alpha a\Delta t}{2h}$
δ_{16}		$-a\varepsilon$	
δ_{17}			
u_{VB}			

Fig :633e. Δ-matris (18·3)

	H_A	V_A	M_3	M_4	N_5	N_6	N_7	M_8	M_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	M_{14}	M_{15}	N_{16}	N_{17}	V_B
Θ_3			α^0	β^0														
Θ_4			β^0	α^0														
δ_6						$\frac{a\sqrt{2}}{EA}$												
δ_7							$\frac{a}{EA}$											
Θ_8								α^0	β^0									
Θ_9								β^0	α^0									
δ_{11}											$\frac{a\sqrt{2}}{EA}$							
δ_{12}												$\frac{a}{EA}$						
δ_{13}													$\frac{a}{EA}$					
Θ_{14}														α^0	β^0			
Θ_{15}														β^0	α^0			
δ_{17}																	$\frac{a\sqrt{2}}{EA}$	

Fig :633f. V-matris (18·18). $\alpha^0 = a/3E_b I_b$; $\beta^0 = a/6E_b I_b$

Reaktions- o. snittkrafter	Lastfall 1	2	3
H_A	0,000	0,0000	0,000
V_A	6,000	0,0000	0,000
M_3	0,000	0,0000	0,000
M_4	−1,292	−0,0305	−0,165
N_5	4,323	0,0076	0,041
N_6	−6,114	−0,0108	−0,058
N_7	4,323	0,0076	0,041
M_8	−1,292	−0,0305	−0,165
M_9	−1,163	−0,0927	−0,164
N_{10}	4,291	0,0232	0,041
N_{11}	0,045	−0,0220	0,000
N_{12}	−4,323	−0,0076	−0,041
N_{13}	4,259	0,0387	0,041
M_{14}	−1,163	−0,0927	−0,164
M_{15}	0,000	0,0000	0,000
N_{16}	4,291	0,0232	0,041
N_{17}	−6,068	−0,0328	−0,058
V_B	6,000	0,00	0,00
Multiplikator	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}

Fig :633g. P-matris (18·3). Reaktioner och normalkrafter i MN och moment i MNm

:64 Andra ordningens teori

:641 Allmänt

Under :62 och :63 behandlas deformations- och kraftmetoderna enligt s k lineär teori. Därvid förutsätts små deformationer, idealelastiskt material och giltighet av superpositionslagen. Är något av dessa villkor inte uppfyllt måste även termer av högre ordning medtas i jämvikts- och kontinuitetssamband. Detta leder i allmänhet till att beräkningarna måste utföras efter något iterativt förfarande.

Linkonstruktioner är ett exempel på konstruktioner där direkt proportionalitet inte gäller mellan deformationer och laster. Andra exempel är slanka tryckta konstruktioner, bärverk med krökt σ-ε-kurva liksom böjda och dragna betongkonstruktioner, vilkas tvärsnittsvärden varierar med lasten.

Såväl deformations- som kraftmetoden kan generaliseras till s k 2:dra ordningens teori. Den förstnämnda metoden är därvid i allmänhet att föredra, varför endast denna kommer att behandlas här.

:642 Jämviktsekvationer

Då konstruktionen deformeras ändrar sig de enskilda elementens absoluta riktningar vilket innebär att **A**-matrisens termer i ekv :621 (1) blir en funktion av knutpunktsdeformationerna (u). Jämviktsekvationerna kan då skrivas under formen

$$\mathbf{A}(u)\cdot\mathbf{P} = \mathbf{Bq} \tag{1}$$

Utvecklas ekv (1) enligt Taylors formel erhålls

$$\mathbf{A}(u_1)\cdot\Delta\mathbf{P}+\mathbf{D}(p_1)\cdot\Delta\mathbf{U} = \mathbf{Bq}-\mathbf{A}(u_1)\cdot\mathbf{P}_1 = \Delta\mathbf{Bq}_1 \tag{2}$$

$\Delta\mathbf{U}$ och $\Delta\mathbf{P}$ är här tillskottsvärdena för knutpunktsdeformationer och snittkrafter. Vidare är

$$\mathbf{D}(p_1)\cdot\Delta\mathbf{U} = \frac{\delta}{\delta u}(\mathbf{A}(u)\cdot\Delta\mathbf{P})_1\cdot\Delta\mathbf{U} \tag{3}$$

D-*matrisen* $(j\cdot j)$ beskriver därvid förändringen i knutpunktsjämvikten, då konstruktionen under kända snittkrafter p_1 påtvingas enhetsdeformationer i var och en av de riktningar, som definierats av jämviktsekvationerna. Matriselementet d_{kl} anger således kraften (momentet) i av ekv k definierad riktning p g a påtvingad enhetsdeformation i den riktning, som definierats av ekv 1. **D**-matrisen är kvadratisk och symmetrisk.

$\Delta\mathbf{Bq}$-matrisen $(j\cdot 1)$ beskriver de tillskottslaster som erhålls i knutpunkterna som skillnaden mellan yttre laster och de deformerade elementens reaktioner på knutpunkten. I $\Delta\mathbf{Bq}$-matrisen ingår även eventuella korrektioner av de fasta inspänningsmomenten hos det deformerade och initialbelastade elementet. Se 157:4

:643 Kontinuitetssamband

Enligt lineär teori formuleras kontinuitetssambanden av ekv :623 (1). Tas hänsyn till de enskilda elementens deformation och till knutpunktsrörelserna kan ekvationen skrivas under den allmänna formen

$$-\mathbf{V}(p)\cdot\mathbf{P}+\mathbf{T}(u)\cdot\mathbf{U} = \mathbf{\Delta}_0 \tag{1}$$

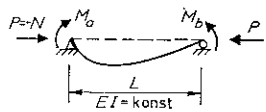


Fig :643 a

Ekv (1) innebär att **V**-matrisens vekhetsvärden θ_a^0, θ_b^0 och δ_N (fig :643 a) är en funktion av snittkrafterna M_a, M_b och N och vidare att transformationsmatrisens **T** termer varierar med knutpunktsdeformationen **U**. Utvecklas ekv (1) enligt Taylors formel erhålls

$$-\overline{\mathbf{V}}(p_1)\cdot\Delta\mathbf{P}+\frac{\delta}{\delta u}(\mathbf{T}(u))\cdot\Delta\mathbf{U}=\Delta_0+\mathbf{V}(p_1)\cdot\mathbf{P}_1-\mathbf{T}(u_1)\cdot\mathbf{U}_1 \qquad (2)$$

Här är

$$\overline{\mathbf{V}}(p_1)=\frac{\delta}{\delta p}[\mathbf{V}(p)]_1$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & \Delta M_a & \Delta M_b & \Delta N \\ \hline \Delta\Theta_a & \alpha_a & \beta_{ab} & \gamma_{aN} \\ \Delta\Theta_b & \beta_{ab} & \alpha_b & \gamma_{bN} \\ \Delta\delta_N & \gamma_{aN} & \gamma_{bN} & \delta \\ \hline \end{array}$$

Fig :643 b

$$\begin{array}{c|ccc|} & M_a & M_b & N \\ \hline \Theta_a & \alpha_a & \beta_{ab} & \\ \Theta_b & \beta_{ab} & \alpha_b & \\ \delta_N & \gamma_{aN}/2 & \gamma_{bN}/2 & \delta \\ \hline \end{array}$$

Fig :643 c

Matrisen $\mathbf{V}(p_1)$ ger tillskottsdeformationerna i lastläget M_{a1}, M_{b1} och N_1 på grund av $\Delta M_a=1$, $\Delta M_b=1$ och $\Delta N=1$. Matrisens utseende för den fritt upplagda balken med konstant EI enligt fig :643 a framgår av fig :643 b och de ingående termernas storlek av ekv (3) och (4). Matrisprodukten $\overline{\mathbf{V}}(p_1)\cdot\Delta\mathbf{P}$ ger således som resultat de elastiska tillskottsdeformationerna p g a $\Delta\mathbf{P}$. Produkten $\mathbf{V}(p_1)\cdot\mathbf{P}_1$ ger däremot de totala deformationerna fram till lastläge $\mathbf{P}_1$ (fig :643 c).

I de fall normalkraftens variation med deformationen kan försummas (dvs $\Delta\mathbf{N}\sim 0$) kan γ-termerna enligt fig :643 b och c sättas till 0 och $\overline{\mathbf{V}}(p_1)=$ $=\mathbf{V}(p_1)$

$$\alpha_a=\alpha_b=\psi L/3EI \qquad (3a)$$

$$\beta_{ab}=\varphi L/6EI \qquad (3b)$$

$$\gamma_{aN}=-\varrho[L^3/2(EI)^2]M_a-\lambda[L^3/2(EI)^2]M_b \qquad (3c)$$

$$\gamma_{bN}=-\lambda[L^3/2(EI)^2]M_a-\varrho[L^3/2(EI)^2]M_b \qquad (3d)$$

$$\delta=L/EA \qquad (3e)$$

med

$$\psi=(3/kL)(1/kL-1/\tan kL) \qquad (4a)$$

$$\varphi=(6/kL)(1/\sin kL-1/kL) \qquad (4b)$$

$$\varrho=[1/(kL)^2]\,[-2/(kL)^2+1/kL\tan kL+1/\sin^2 kL] \qquad (4c)$$

$$\lambda=[1/(kL)^2]\,[2/(kL)^2-1/kL\sin kL-1/\tan kL\sin kL] \qquad (4d)$$

$$kL=L\sqrt{P/EI} \qquad (4e)$$

ψ- och φ-funktionerna, de s k Berryfunktionerna, finns redovisade i diagramform i kap 157:422. De antar oändligt stora värden då $kL=\pi$ dvs då P når det enskilda elementets knäcklast. För den här beskrivna iterativa beräkningsmetoden kan man i det allmänna fallet inte tillåta att denna last uppnås. Om risk härför förefinns måste elementen uppdelas i smärre element genom att extra knutpunkter införs. Vid beräkningar med hjälp av datorer är det t o m lämpligt att välja elementen så små att vekhetsvärdenas variation kan försummas. Detta kan med tillfredsställande noggrannhet ske om $kL<\pi/6$ varvid med god approximation $\varphi=\psi=1$ och $\varrho=\lambda=0$. Härigenom vinns även den fördelen att också element med varierande tröghetsmoment kan behandlas utan svårighet.

Sambandet mellan transformationsmatrisen $\mathbf{T}(u)$ och jämviktsekvationernas koefficientmatris $\mathbf{A}(u)$ kan i det generaliserade fallet skrivas

$$\frac{\delta}{\delta u}[\mathbf{T}(u)\cdot\mathbf{U}]=\mathbf{A}(u) \qquad (5)$$

Försummas i ekv (5) termer av högre ordning än 2:dra grads termer i u erhålls

$$\mathbf{T}(u_1)\simeq 0{,}5[\mathbf{A}^T(0)+\mathbf{A}^T(u_1)] \qquad (6)$$

:644 Bestämning av tillskott i deformationer och snittkrafter

Sammanställs ekv :643 (2) med utnyttjande av ekv :643 (5), (6) med ekv :642 (2) erhålls

$$-\bar{\mathbf{V}}(p_1)\cdot\Delta\mathbf{P}+\mathbf{A}^T(u_1)\cdot\Delta\mathbf{U}=\Delta\mathbf{\Delta}_0 \qquad (1\,a)$$

$$\mathbf{A}(u_1)\cdot\Delta\mathbf{P}+\mathbf{D}(p_1)\cdot\Delta\mathbf{U}=\Delta\mathbf{Bq} \qquad (1\,b)$$

Här är

$$\Delta\mathbf{\Delta}_0=\mathbf{\Delta}_0+\mathbf{V}(p_1)\cdot\mathbf{P}_1-0{,}5\cdot[\mathbf{A}^T(0)+\mathbf{A}^T(u_1)]\cdot\mathbf{U}_1 \qquad (2)$$

Ur ekv (1 a) kan $\Delta\mathbf{P}$ bestämmas uttryckt i $\Delta\mathbf{U}$

$$\Delta\mathbf{P}=\bar{\mathbf{S}}(p_1)\,[\mathbf{A}^T(u_1)\cdot\Delta\mathbf{U}-\Delta\mathbf{\Delta}_0] \qquad (3)$$

och efter insättning i ekv (1 b) erhålls

$$[\mathbf{A}(u_1)\cdot\bar{\mathbf{S}}(p_1)\cdot\mathbf{A}^T(u_1)+\mathbf{D}(p_1)]\,\Delta\mathbf{U}=\Delta\mathbf{Bq}+\mathbf{A}(u_1)\cdot\bar{\mathbf{S}}(p_1)\,\Delta\mathbf{\Delta}_0 \qquad (4)$$

Ekv (4) representerar ett lineärt ekvationssystem i Δu. Eftersom $\mathbf{D}(p_1)$ är en symmetrisk matris är även ekvationssystemet symmetriskt. Ur ekv (4) kan $\Delta\mathbf{U}$ beräknas och genom insättning i ekv (3) erhålls $\Delta\mathbf{P}$. Totala deformationer och snittkrafter kan därefter bestämmas enligt

$$\mathbf{U}_2=\mathbf{U}_1+\Delta\mathbf{U} \quad (5\,a) \qquad \mathbf{P}_2=\mathbf{P}_1+\Delta\mathbf{P} \quad (5\,b)$$

Iterationerna avbryts när tillskotten är försumbart små. I normala fall är 2 till 3 steg tillräckligt för att resttermerna skall bli mindre än 1 %.

:645 Beräkningsgång

1 Givet: Systemets geometri och styvhetsvärden samt aktuellt lastfall

Då tillämpningen av :644 varierar något för dragna och tryckta konstruktioner beskrivs den nedan separat för vardera av dessa konstruktionstyper.

A Förspända eller förbelastade linkonstruktioner
Dessa konstruktioner är uppbyggda av enbart normalkraftsupptagande linelement varför böjtermerna bortfaller ur vekhetsmatrisen. Detta innebär att $\bar{\mathbf{V}}(p_1)=\mathbf{V}(p_1)=\mathbf{V}(0)$. Förspänningen ($\mathbf{P}_0$) innebär att beräkningarna inte startar från $\mathbf{U}=0$ och $\mathbf{P}=0$ utan från $\mathbf{U}=0$ och $\mathbf{P}=\mathbf{P}_0$.

2 Ställ upp matriserna $\mathbf{A}(0)$, $\mathbf{V}(0)$, $\mathbf{D}(p_0)$ och $\mathbf{Bq}$.

3 Beräkna $\mathbf{U}_1=\Delta\mathbf{U}$ och $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_0+\Delta\mathbf{P}$ enligt ekv :644 (4) och (3).

4 Ställ upp matriserna $\mathbf{A}(u_1)$, $\mathbf{D}(p_1)$, $\Delta\mathbf{\Delta}_0$ och $\Delta\mathbf{Bq}$.

5 Beräkna $\Delta\mathbf{U}$ och $\Delta\mathbf{P}$ enligt ekv :644 (3), (4) och (5).

6 Upprepa 4 och 5 tills tillräcklig noggrannhet erhålls.

B Tryckta konstruktioner

2 Multiplicera lasten med säkerheten s Jfr 157 : 44

3 Beräkna knutpunktsdeformationen $\mathbf{U}_1$ och snittkraftsfördelningen $\mathbf{P}_1$ enligt lineär teori (se :62).

4 Ställ upp matriserna $\mathbf{A}(u_1)$, $\mathbf{V}(p_1)$, $\mathbf{D}(p_1)$ och $\Delta\mathbf{Bq}_1$. Är elementindelningen sådan att det enskilda elementets knäcksäkerhet $(=\pi/kL)>6$ är $\mathbf{V}(p_1)\simeq\mathbf{V}(0)$. Delningen måste under alla förhållanden väljas så att $\pi/kL>1$.

5 Beräkna $\Delta\mathbf{\Delta}_{01}$ enligt ekv :644 (2), $\Delta\mathbf{U}$ och $\Delta\mathbf{P}$ enligt ekv :644 (4) och (3) samt $\mathbf{U}_1$ och $\mathbf{P}_1$ enligt ekv :644 (5).

6 Upprepa 4 och 5 tills dess erforderlig noggrannhet erhålls.

7 Dividera resulterande snittkrafter med s. Så erhållna snittkrafter kan därefter jämföras med tillåtna värden för $L/i=0$, där i = tvärsnittets tröghetsradie.

:646 Beräkningsexempel

Exempel 1. Ramkonstruktion

Beräkna enligt andra ordningens teori momentfördelning och horisontell knutpunktsförskjutning för ramen enligt fig :646a. Samtliga element har de konstanta tvärsnittsvärdena $EI = 2{,}50$ MNm², $EA = 400$ MN, $L = 10$ m.

Snittkrafterna numreras enligt fig :646b. Momentdiagram och deformationer enligt lineär teori framgår av fig :646c och d. Horisontaldeformationen $u_H = 0{,}04764$ m.

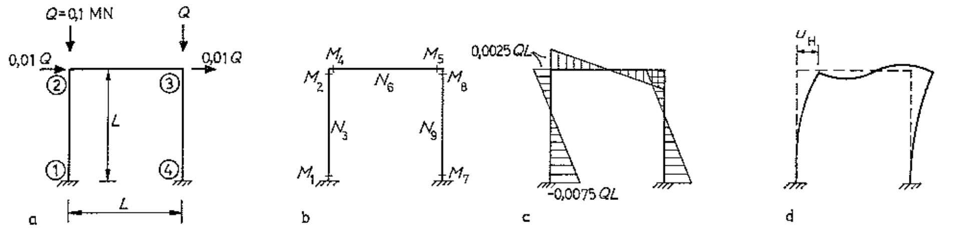


Fig :646a–d

$\mathbf{A}(u_1)$-matrisen för det deformerade systemet framgår av fig :646e. För element 1–2 och 3–4 är $kL = 2{,}00$. Normalkrafterna i rambenen är praktiskt taget konstanta $= -Q(\Delta N \sim 0)$. δ-termerna enligt fig :643 b och c kan därför sättas till 0, varav följer att $\overline{\mathbf{V}}(p_1) \simeq \mathbf{V}(p_1)$, se :643.

Knutpunkt och kraftriktning	Snittkrafter								
	M_1	M_2	N_3	M_4	M_5	N_6	M_7	M_8	N_9
2 →	$-1/L$	$1/L$	u_H/L			-1			
2 ↑	u_H/L^2	$-u_H/L^2$	1	$-1/L$	$1/L$				
2 ↶		1		-1					
3 →						1	$-1/L$	$1/L$	u_H/L
3 ↑				$1/L$	$-1/L$		u_H/L^2	$-u_H/L^2$	1
3 ↶					1			-1	

Fig :646e. $\mathbf{A}(u_1)$-matris (6·9)

	Snittkrafter								
	M_1	M_2	N_3	M_4	M_5	N_6	M_7	M_8	N_9
θ_1	$\frac{1{,}435L}{3EJ}$	$\frac{1{,}80L}{6EJ}$							
θ_2	$\frac{1{,}80L}{6EJ}$	$\frac{1{,}435L}{3EJ}$							
δ_3			$\frac{L}{EA}$						
θ_4				$\frac{L}{3EJ}$	$\frac{L}{6EJ}$				
θ_5				$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{L}{3EJ}$				
δ_6						$\frac{L}{EA}$			
θ_7							$\frac{1{,}435L}{3EJ}$	$\frac{1{,}80L}{6EJ}$	
θ_8							$\frac{1{,}80L}{6EJ}$	$\frac{1{,}435L}{3EJ}$	
δ_9									$\frac{L}{EA}$

Fig :646f. $\mathbf{V}(p_1)$-matris (9·9)

	Knutpunkt och def-riktning					
	2 →	2 ↑	2 ↺	3 →	3 ↑	3 ↺
θ_1	$-1/L$	$\frac{u_H}{2L^2}$				
θ_2	$1/L$	$\frac{-u_H}{2L^2}$	1			
δ_3	$\frac{u_H}{2L}$	1				
θ_4		$-1/L$	-1		$1/L$	
θ_5		$1/L$			$-1/L$	1
δ_6	-1			1		
θ_7				$-1/L$	$\frac{u_H}{2L^2}$	
θ_8				$1/L$	$\frac{-u_H}{2L^2}$	-1
θ_9				$\frac{u_H}{2L}$	1	

Fig :646g. T(u_1)-matris (9·6)

Knutpunkt och def-riktning	2 →	2 ↑	2 ↺	3 →	3 ↑	3 ↺
2 →	$-\frac{Q}{L}-0{,}01\frac{Q}{L}$					
2 ↑	$0{,}01\frac{Q}{L}$					
2 ↺						
3 →				$-\frac{Q}{L}-0{,}01\frac{Q}{L}$		
3 ↑				$-0{,}01\frac{Q}{L}$		
3 ↺						

Fig :646h. D(p_1)-matris (6·6)

Knutpunkt och last-riktning	
2 →	$Q\,\frac{u_H}{L}$
2 ↑	$0{,}01\,Q\,\frac{u_H}{L}$
2 ↺	
3 →	$Q\,\frac{u_H}{L}$
3 ↑	$0{,}01\,Q\,\frac{u_H}{L}$
3 ↺	

Fig :646i. Δ**Bq**-matris (6·1)

Enligt ekv :643 (4a), (4b) erhålls $\psi = 1{,}435$ och $\varphi = 1{,}80$. Med dessa värden insatta erhålls **V**(p_1)-matrisen enligt fig :646f.

Enligt ekv :643 (6) kan **T**(u_1)-matrisen beräknas ur **A**(u_1) och **A**(0)-matriserna. **T**(u_1)-matrisen framgår av fig :646g. $\Delta\mathbf{\Delta}_0$-matrisen kan nu beräknas enligt sambandet

$$\Delta\mathbf{\Delta}_0 = \mathbf{V}(p_1)\cdot\mathbf{P}_1 - \mathbf{T}(u_1)\cdot\mathbf{U}_1 \tag{a}$$

$\mathbf{P}_1$-matrisen är därvid resultatmatrisen enligt lineär teori.

D(p_1)-matrisen som beskriver knutpunktsjämviktens variation med enhetsdeformationer framgår av fig :646h.

Δ**Bq**-matrisen slutligen kan beräknas ur följande matrisekvation (b) eller ställas upp direkt.

$$\Delta\mathbf{Bq} = \mathbf{Bq} - \mathbf{A}(u_1)\,\mathbf{P}_1 \tag{b}$$

Matrisen framgår av fig :646i.

Δ**U** och Δ**P** kan nu beräknas enligt ekv :644 (4) och (3) varefter $\mathbf{U}_2$ och $\mathbf{P}_2$ beräknas enligt ekv :644 (5). De i de olika iterationsstegen beräknade u_H-värdena framgår av fig :646j. Redan efter 2 beräkningssteg har ca 98 % av slutlig deformation erhållits.

Resulterande moment framgår av fig :646k.

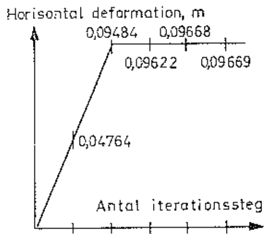


Fig :646j

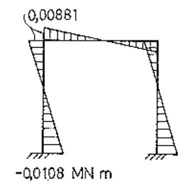


Fig :646k

Exempel 2. Linkonstruktion

Linkonstruktionen enligt fig :646 l har under initiallasten 2·0,75 MN intagit den i fig :646l visade formen. Beräkna tillskottsdeformationen och linkrafterna av tillskottslasten 0,50 MN. Linkrafterna $\mathbf{P}_0$ av initiallasten framgår av fig :646m.

Denna konstruktion kan inte beräknas enligt lineär teori då den bildar ett labilt fackverk. Beräkningarna startar emellertid från utgångsläget $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ och $\mathbf{U} = 0$ och ekvationssystemet :644 (1) får för 1:a iterationssteget formen

$$\left.\begin{aligned} -\mathbf{V}\cdot\Delta\mathbf{P} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\Delta\mathbf{U} &= 0 \\ \mathbf{A}(0)\cdot\Delta\mathbf{P} + \mathbf{D}(P_0)\cdot\Delta\mathbf{U} &= \mathbf{Bq} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

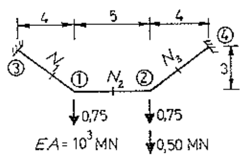


Fig :646l

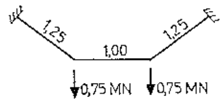


Fig :646m

V-matrisen och $\mathbf{A}(0)$-matrisen framgår av fig :646n och o.

För bestämning av $\mathbf{D}(P_0)$-matrisens termer tänks knutpunkterna tvångsförflyttas en liten enhetssträcka i de riktningar som definieras av jämviktsekvationerna. Förflyttningen tänks ske med oförändrade normalkrafter $\mathbf{P}_0$ och termerna anger förändringen i knutpunktsjämvikten.

För bestämning av termerna på matrisens 1:a rad tänks alltså knutpunkt 1 förskjuten $\Delta u = 1$ åt höger (fig :646p). För element 0–1 innebär detta en vinkeländring $d\alpha$. Detta orsakar en förändring i horisontella jämvikten med $P_{01} \sin \alpha d\alpha$ och i vertikal riktning av $P_{01} \cos \alpha d\alpha$ (fig :646q). Eftersom det andra elementet från knutpunkten inte riktningsförändras erhålls alltså för 1:a raden i $\mathbf{D}(P_0)$-matrisen

$$d_{11} = (P_{01}/L) \sin^2\alpha; \; d_{12} = (P_{01}/L) \sin \alpha \cos \alpha$$

$\mathbf{D}(P_0)$-matrisen framgår av fig :646r.

Ur ekvationssystem (a) kan nu $\Delta\mathbf{P}$ och $\Delta\mathbf{U}$ bestämmas. $\mathbf{U}_1$ och $\mathbf{P}_1$ kan beräknas enligt ekvationen

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= 0 + \Delta\mathbf{U} \\ \mathbf{P}_1 &= \mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Med utgångspunkt från den nya geometrin uppställs nya matriser $\mathbf{A}(u_1)$ och $\mathbf{D}(p_1)$. Sedan $\Delta\mathbf{\Delta}_0$ och $\Delta\mathbf{Bq}$ beräknats enligt ekv :644 (2) och :642 (2) kan $\Delta\mathbf{U}$ och $\Delta\mathbf{P}$ på nytt bestämmas ur ekv :644 (4) och (3) osv. Beräkningarna fortsätter tills tillfredsställande konvergens erhållits. Vertikaldeformationerna i punkterna ① och ② för de successiva iterationsstegen framgår av fig :646s och resulterande normalkrafter av fig :646t.

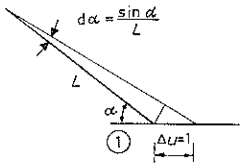


Fig :646p

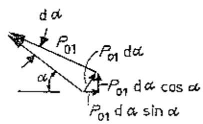


Fig :646q

	Snittkrafter		
	ΔN_1	ΔN_2	ΔN_3
δ_1	$\frac{L}{EA}$		
δ_2		$\frac{L}{EA}$	
δ_3			$\frac{L}{EA}$

Fig :646n. V-matris

Knutpunkt och ekv-riktning	Snittkrafter		
	ΔN_1	ΔN_2	ΔN_3
1 →	0,8	−1	
1 ↑	−0,6		
2 →		1	−0,8
2 ↑			−0,6

Fig :646o. $\mathbf{A}(0)$-matris

Knutpunkt och ekv-riktning	Knutpunktsdef			
	u_1	u_2	u_3	u_4
1 →	0,090	0,120		
1 ↑	0,120	0,360		−0,20
2 →			0,090	0,120
2 ↑		−0,20	−0,120	0,360

Fig :646r. $\mathbf{D}(P_0)$-matris

:65 Stabilitet

Ekv :644 (4) beskriver ett lineärt ekvationssystem. Detta är i allmänhet lösbart men ökas lastnivån p_1 genom multiplikation med en skalär faktor λ kan vissa lastnivåer nås för vilka ingen lösning kan erhållas genom att den till ekvationssystemet hörande determinanten blir 0. Separeras de p_1-beroende termerna från de övriga i vänsterledet och multipliceras p_1 med skalären λ kan ekvationssystemet skrivas

$$\{\mathbf{A}(u_1)\cdot\mathbf{S}(0)\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(u_1) + \lambda[\mathbf{A}(u_1)\cdot\Delta\mathbf{S}(p_1)\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(u_1) + \mathbf{D}(p_1)]\}\Delta\mathbf{U} = \mathrm{HL} \qquad (1)$$

där $\Delta\mathbf{S}(p_1) = \mathbf{S}(p_1) - \mathbf{S}(0)$

HL = ekvationssystemets högerled.

De lastlägen ($\lambda_1, \lambda_2 \ldots$) för vilka ekv (1) saknar lösning sägs vara systemmatrisens egenvärden. Av speciellt intresse är därvid det lägsta egenvärdet λ_1 som representerar konstruktionens knäcksäkerhet. Tillhörande deformationsvektor $\Delta\mathbf{U}$ ger knäckkurvans form. (Betr egenvärdesberäkning se 124: 353.)

För konstruktioner med små deformationer och för vilka normalkrafternas variation med deformationen kan försummas kan λ och $\Delta\mathbf{U}$ direkt bestämmas ur ekv (1). I annat fall bestäms p_1, u_1 och λ_1 för successivt ökande lastnivåer. Den kritiska lasten erhålls då när $\lambda = 1$.

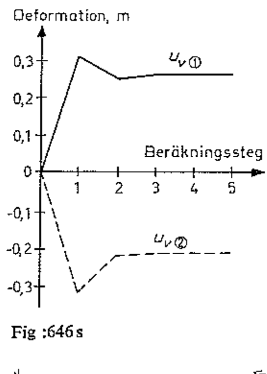


Fig :646s

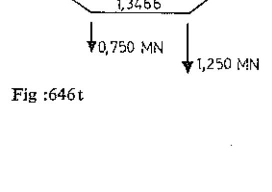


Fig :646t

:7 Jämförelse mellan olika metoder för bruksstadiet

De i :2–:6 beskrivna beräkningsmetoderna utgör olika sätt att bestämma kraftfördelning och deformationer för statiskt obestämda konstruktioner med hänsyn till jämviktsvillkor och kontinuitetssamband. Förutsätts små deformationer, bibehållen tvärsnittsform och idealelastiskt material leder dessa samband till ett lineärt ekvationssystem. Detta kan lösas med såväl direkta som iterativa metoder vilket framgår av de beskrivna metoderna. Är någon av ovan nämnda förutsättningar inte uppfylld erhålls samband av högre ordning och beräkningarna måste utföras med hänsyn härtill (se :64).

De ovan nämnda jämviktsvillkoren och kontinuitetssambanden kan överföras till ekvationssystem med obekanta snittstorheter eller med obekanta deformationsstorheter (=knutpunktsrotationer och förskjutningar). Beroende på dessa obekanta sägs en beräkning enligt kraft- respektive deformationsmetod föreligga. Arbetsekvationer och Castiglianos sats (se :2 och :63) är kraftmetoder. Beräkning med hjälp av elasticitetsekvationer (se :3) och primärmomentmetoden (se :4) är vid tillämpning på system med oförskjutbara knutpunkter rena kraftmetoder medan de vid tillämpning på system med förskjutbara knutpunkter får karaktäriseras som en kombination av kraft- och deformationsmetod. Den successiva momentutjämningsmetoden eller Cross' metod (se :5) torde närmast kunna betraktas som en deformationsmetod.

Vad gäller användningen av dessa metoder kan allmänt sägas att kraftmetoder bör eftersträvas för konstruktioner med litet antal statiskt obestämda jämfört med antal frihetsgrader för knutpunktsdeformationer. Höggradigt statiskt obestämda konstruktioner med relativt få frihetsgrader (t ex pålgrupper) bör beräknas med hjälp av deformationsmetod.

Större konstruktioner beräknas numera med fördel med hjälp av datorer med hänsyn till den stora arbetsinsats som krävs för manuella beräkningar. Detta gäller särskilt system med många knutpunktsförskjutningsmöjligheter.

Vad gäller valet av beräkningsmetod vid manuellt utförda beräkningar kan följande rekommendationer ges:

Arbetsekvationer och Castiglianos sats är lämpliga för låggradigt statiskt obestämda konstruktioner. Hänsyn kan lätt tas till ledade förbindningar, dragstag etc.

En beräkning med *elasticitetsekvationer* blir vid enkla konstruktioner med ett litet antal knutpunkter synnerligen överskådlig och snabbt genomförbar.

Vid större system med i huvudsak fixa knutpunkter är en ramberäkning med *primärmomentmetoden* eller enligt *Cross' metod* att föredra. Allmänt gäller därvid att vid ramverk, som skall beräknas för flera lastfall, som regel primärmomentmetoden är den snabbaste, under det att vid konstruktioner, som enbart behöver undersökas för ett litet antal lastfall, Cross' metod är överlägsen.

Vad slutligen gäller de systematiserade matrismetoderna erhålls såväl den minsta beräkningsvolymen som den högsta noggrannheten om valet av de obekanta görs så att ekvationssystemets bandbredd blir så liten som möjligt. Med hänsyn till kapaciteten och snabbheten hos dagens datorer får detta dock praktisk betydelse först vid konstruktioner med flera hundra knutpunkter.

:8 Gränslastmetod

:81 Allmänt

De i :2–:6 behandlade bruksstadiemetoderna kan oinskränkt tillämpas endast under förutsättning av att uppträdande spänningar σ ligger under proportionalitetsgränsen σ_P. Som en följd härav kan metoderna utnyttjas för

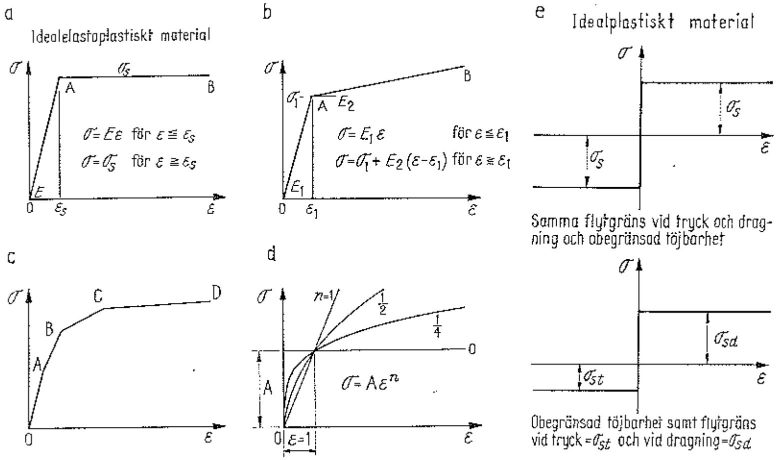


Fig :81 a–e. Förenklade σ–ε-diagram

en bestämning av det spännings- och deformationstillstånd, som uppträder vid i praktiken ordinärt förekommande lastintensiteter, s k brukslaster. Något svar på frågan om hur stor *brottsäkerheten* är för en konstruktion, som under antagande av elastiskt material dimensionerats för en viss tillåten spänning σ_{till}, kan däremot inte erhållas genom en beräkning enligt bruksstadiemetoder.

För en bestämning härav fordras en beräkning av den last, *gränslast*, som svarar mot konstruktionens fullständiga utnyttjande under beaktande av aktuellt konstruktionsmaterials, ända upp till brott gällande, verkliga σ–ε-diagram. En sträng beräkning härav blir som regel mycket mödosam att genomföra beroende på att de ordinära konstruktionsmaterialens σ–ε-diagram är av matematiskt starkt komplicerad natur, vilket för praktiska beräkningar tvingar till införande av förenklade σ–ε-diagram.

Några sådana redovisas i fig :81 a–e.

Bestämningen nedan av balkars och ramars gränslaster bygger i överensstämmelse med praxis i den hållfasthetstekniska litteraturen på förutsättning om *idealplastiskt* material (fig :81 e), vilket uppkommer ur det i fig :81 a visade idealelastoplastiska, om detta kompletteras med antagande om oändlig töjbarhet. För den praktiska tillämpbarheten härav vid olika konstruktionsmaterial hänvisas till vad som anförts i :1.

I den följande framställningen, vilken begränsas till att omfatta massiva konstruktioner med sådana laster och utformningar, att inverkan av normal- och tvärkrafter (se :85 **B** och **C**) med god approximation är försumbar, redovisas gränslasterna genomgående som gränslastmoment.

:82 Gränslast för statiskt bestämd balk

Illustrerat på det i fig :82a visade lastfallet har en *statiskt bestämd* balk, som via idealelastoplastiskt tillstånd övergår i idealplastiskt, följande statiska verkningssätt. För små lastvärden q råder i varje snitt av balken elastiska förhållanden med lineärt σ-diagram enligt detalj α, fig :82b. Den övre gränsen för detta tillstånd markeras av det q-värde, för vilket σ-spänningen i mittsektionens över- och underkant (balkens mest ansträngda punkter) just uppnår materialets sträckgräns σ_s. Ökas q-lasten över detta värde, börjar *flytzoner* att utbreda sig från mittsektionens över- och underkanter, vilket medför en omställning av σ-diagrammet till den i detalj β, fig :82b,

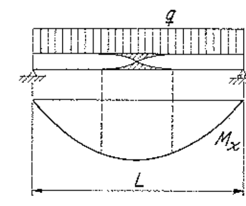


Fig :82a

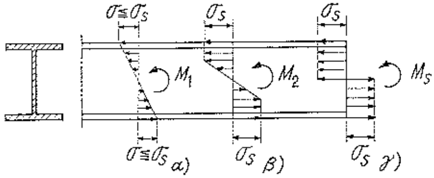


Fig :82b

återgivna typen. Med ytterligare ökad last närmar sig mittsektionens σ-diagram allt mer det i detalj γ, fig :82b, visade, vilket svarar mot fullständigt genomplasticerad sektion (jfr fig :81e), samtidigt som flytzonerna går mot den i fig :82a markerade utsträckningen. Sedan mittsektionen fullständigt plasticerats, kommer den att för fortsatt deformation verka som en led — en s k *flytled* har uppkommit. Härvid deformeras balken i flytleden utan att lasten och därmed momentet i flytleden ökas. Den från början statiskt bestämda balken övergår i en statiskt underbestämd konstruktion, som saknar förmåga till ytterligare lastupptagning. I och med den starkast ansträngda sektionens (mittsektionens) genomplasticering är därför den fritt upplagda balkens *gränslast* uppnådd.

:83 Gränslast för statiskt obestämd balk

Används den i fig :82a visade balken i stället som tvåsidigt fast inspänd, statiskt obestämd konstruktion (fig :83), blir dess statiska verkningssätt följande. Under elastiska förhållanden, dvs så länge i varje punkt av konstruktionen $\sigma<\sigma_s$, råder en momentfördelning enligt detalj β i fig :83. Konstruktionens mest ansträngda partier utgör därvid inspänningssnitten. Från dessa utbreder sig, sedan lasten q ökats över det värde, som ger $\sigma=\sigma_s$ i inspänningssnittens mest ansträngda punkter, flytzoner, vilka, sedan inspänningssnitten fullständigt plasticerats, får en utsträckning enligt detalj α i fig :83.

För lastökning härutöver tjänstgör inspänningssnitten som icke-momentupptagande flytleder, vilket medför, att konstruktionen för denna lastöknings upptagande kommer att verka som en *statiskt bestämd, tvåsidigt fritt upplagd balk*. Lasten kan för denna ökas, till dess att en flytled utbildats i mest ansträngt snitt, fackmitt. Balken blir då statiskt underbestämd och saknar förmåga till ytterligare lastupptagning. Härvid är *gränslasten* uppnådd. Gränslasttillståndet för den tvåsidigt fast inspända balken karaktäriseras alltså av fullständigt genomplasticerade sektioner i fackmitt samt i inspänningssnitten, vilket vid konstant tvärsnitt är identiskt med numeriskt lika stora moment M_s i samtliga dessa tre snitt. I kombination med jämviktsvillkoret att summan av ett stödmoment och momentet i fackmitt skall vara $=(1/8)qL^2$, ger detta $M_s=(1/16)qL^2$ med ett tillhörande momentdiagram enligt detalj γ i fig :83.

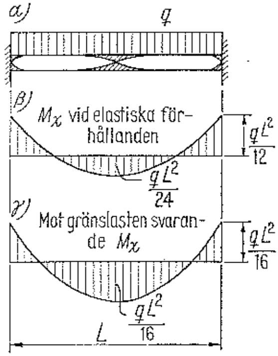


Fig :83

:84 Synpunkter på dimensioneringen

Vid en ordinär hållfasthetsberäkning enligt *bruksstadiemetod* kontrolleras att mot dimensionerande (normalt i bestämmelser föreskrivna) laster svarande spänningar inte överskrider för aktuellt konstruktionsmaterial tillåten spänning σ_{till}, bestämd i förhållande till materialets sträckgräns σ_s eller brottgräns σ_B av säkerhetsfaktorn n_e enligt sambanden

$$n_e=\sigma_s/\sigma_{\text{till}} \text{ resp } n_e=\sigma_B/\sigma_{\text{till}} \tag{1}$$

Storleken av säkerhetsfaktorn n_e väljs därvid i förhållande till förväntad exakthet i material, arbetsutförande etc, men görs däremot ordinärt inte beroende av sådana faktorer som sektionsform, spänningsfördelning över konstruktionens tvärsnitt eller i konstruktionens längsled, konstruktionstyp (statiskt bestämd eller statiskt obestämd) m m.

För förhållandet Q_s/Q_{till} mellan en av idealplastiskt material utformad konstruktions gränslast Q_s och det av σ_{till} bestämda tillåtna lastvärdet Q_{till} medför en ordinär bruksstadieberäkning följande.

Vid lasten $n_e Q_{\text{till}}$ har flytspänningen σ_s just börjat uppträda i en konstruktions mest ansträngda sektion. Vid *statiskt bestämd* konstruktionsutformning kan lasten ytterligare ökas, till dess att flytspänningen vid gränslasten Q_s utbrett sig över hela sektionen. Storleken av denna ökning beror av sektionsformen och uppgår vid rektangulär sektion till 50 %, vid cirkulär sektion till 70 % och vid parallellflänsig I-sektion till 10 à 20 %, svarande mot en brottsäkerhet $Q_s/Q_{\text{till}} = 1{,}50n_e$, $Q_s/Q_{\text{till}} = 1{,}70n_e$ resp $Q_s/Q_{\text{till}} = 1{,}1$ à $1{,}2n_e$. Vid *statiskt obestämd* konstruktionsutformning tillkommer härutöver vid övergång från bruks- till brottstadium en gynnsam momentomlagringseffekt, vilken speciellt för tvåsidigt fast inspänd balk enligt :83 medför en ytterligare ökning av brottsäkerheten med $(16/12-1)\cdot 100 = 33$ % till för rektangulär sektion $Q_s/Q_{\text{till}} = 1{,}33 \cdot 1{,}50n_e = 2n_e$, för cirkulär sektion $Q_s/Q_{\text{till}} = 1{,}33 \cdot 1{,}70n_e = 2{,}26n_e$ och för parallellflänsig I-sektion $Q_s/Q_{\text{till}} = 1{,}33$ $(1{,}1$ à $1{,}2)n_e = 1{,}46$ à $1{,}60n_e$. *En ordinär bruksstadiedimensionering för en enligt ekv* (1) *fixerad, tillåten spänning* σ_{till} *resulterar följaktligen i konstruktioner, som vid ett och samma material får brottsäkerheter, som starkt varierar med sektionsform och konstruktionstyp.* Detta förhållande undviks om man vid en på gränslastmetod baserad hållfasthetsberäkning utgår från en konstant säkerhets- eller lastfaktor n_s och tillser att $n_s \times$ aktuell last blir $\leqslant$ konstruktionens gränslast Q_s. Normmässig belastningsfaktor n_s för gränslastdimensionering anges i StBK-K1 »Gränslasthandbok» för stålbärverk och i »Aluminiumkonstruktioner 1966» för bärverk i aluminiumlegeringar.

Det ovan anförda gäller endast under förutsättning av idealplastiskt material. Vid konstruktioner med *liten deformerbarhet* kan i vissa fall böjbrott inträda vid väsentligt lägre laster än de, som erhålls ur en renodlad beräkning enligt gränslastmetod. Väsentligt är givetvis vidare, att risken för *andra brottyper* — skjuvbrott, stabilitetsbrott (t ex knäckning, vippning, lokal buckling) etc — samt att risken för uppkomst av *generande nedböjningar* kontrolleras. Jfr vidare de under :1 lämnade synpunkterna.

För de speciella problem, som uppkommer vid en gränslastmetodberäkning för *upprepade, varierande laster* hänvisas till :89.

:85 Enkelsymmetriska tvärsnitts gränslastmoment vid idealplastiskt material[1]

A Enbart moment

Vid momentangrepp av ett balktvärsnitt av idealplastiskt material med *lika flytgräns* σ_s *för tryck- och draglast* ställer neutralaxeln in sig på en sådan nivå, att tryckt sektionsdel A_t blir = dragen sektionsdel $A_d = \frac{1}{2}A$ (jfr fig :85a). För gränslastmomentet ger en momentekvation sambandet

$$M_s = \tfrac{1}{2}\sigma_s A \varrho_s \tag{1}$$

i vilket ϱ_s betecknar avståndet mellan de tryckta och dragna sektionsdelarnas tyngdpunkter G_t respektive G_d. Omskriven till en redovisningsteknik, som överensstämmer med den vid elastiska förhållanden ordinärt tillämpade (Naviers ekvation) får ekv (1) formen

$$M_s = \sigma_s W_s \tag{2}$$

där $W_s = \tfrac{1}{2}A\varrho_s \qquad (3)$

är sektionens s k *plastiska böjmotstånd* (motståndsmoment), sammanställt i tabell :85 för några vanligen förekommande sektionsutformningar.

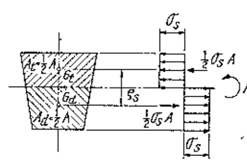
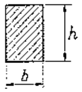
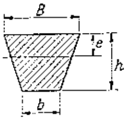
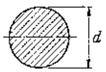
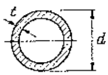
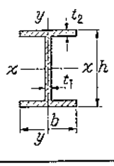


Fig :85a

[1] För osymmetriska tvärsnitts gränslastmoment, se [49]

Tabell :85. Plastiskt böjmotstånd W_s

	$W_s = \frac{1}{4}bh^2$
	$e = \left[\frac{B}{B-b} - \sqrt{\left(\frac{B}{B-b}\right)^2 - \frac{B+b}{2(B-b)}}\right]h$ $W_s = \frac{1}{6}(h-e)^2\left[B+2b-\frac{e}{h}(B-b)\right] + \frac{1}{6}e^2\left[3B-\frac{e}{h}(B-b)\right]$
	$W_s = \frac{1}{6}d^3$
	$W_s = \frac{1}{6}d^3\left[1-\left(1-\frac{2t}{d}\right)^3\right]$ För $t \ll d$: $W_s = td^2$
	Vid böjning kring axel $x-x$ $W_s = bt_2(h-t_2)+\frac{1}{4}t_1(h-2t_2)^2$ Vid böjning kring axel $y-y$ $W_s = \frac{1}{2}b^2t_2+\frac{1}{4}(h-2t_2)\,t_1^2$

B Inverkan av normalkraft N

Generellt medför en normalkraft N, som verkar i den mot renodlat angrepp av gränslastmomentet M_s svarande neutralaxeln, en minskning av tvärsnittets momentupptagande förmåga till ett värde M_{sN}. För detta reducerade gränslastmoment M_{sN} gäller enligt fig :85b för fallet idealplastiskt material med lika sträckgräns σ_s för tryck och dragning sambandet

$$M_{sN} = M_s - N\xi \tag{4}$$

i vilket ξ betecknar avståndet från den ovan nämnda neutralaxeln till

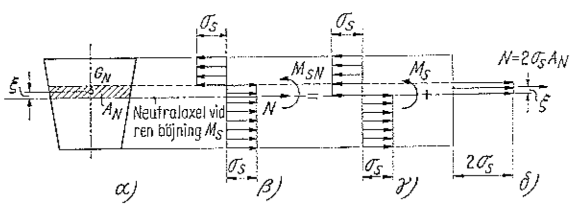


Fig :85b

tyngdpunkten G_N av den i detalj α, fig :85b, sektionerade ytan $A_N = N/2\sigma_s$.

För rektangulär sektion kan ur ekv (4) härledas sambandet

$$M_{sN} = M_s[1-(N/N_s)^2] \tag{5}$$

där M_s = gränslastmomentet vid $N=0$, N = aktuell normalkraft och $N_s = \sigma_s A$ = gränslastnormalkraften vid $M=0$.

M_{sN} enligt ekv (5) kan approximativt tillämpas vid överslagsberäkningar också för andra sektionsutformningar än den rektangulära (jfr fig :85c).

Vid balkar och 1-våningsramar med ordinär utformning är som regel $N/N_s < 0{,}1$ och normalkraftens inverkan på den enligt gränslastmetod beräknade momentfördelningen med god approximation försumbar. Vid flervåningsramar däremot blir normalkraftsinverkan inte sällan av betydelse, vad gäller de nedre våningarnas momentupptagande förmåga, och vid bågar, i synnerhet då vid fördelade belastningar, blir som regel normalkraftsinverkan av direkt utslagsgivande karaktär vid en bestämning av tvärsnittens gränslastmoment. Vid bågkonstruktioner tillkommer härutöver inte sällan en icke försumbar effekt på gränslasten av momentomlagringar från utböjningarna — jfr bl a [49].

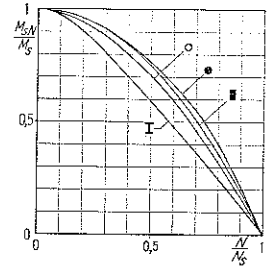


Fig :85c. Gränslastmoment M_{sN} för några olika sektionstyper vid närvaro av normalkraft N [49]

C Inverkan av tvärkraft T

Närvaron av en tvärkraft T nedsätter generellt ett tvärsnitts momentupptagande förmåga. Vid ramkonstruktioner är denna reduktion av gränslastmomentet så gott som undantagslöst utan praktisk betydelse. Vid kontinuerliga balkar kan reduktionen i mycket extrema fall uppgå till 10 à 15 %, vad gäller stödmoment, men som regel är effekten av tvärkraften på gränslastmomentet med god approximation försumbar också för kontinuerliga balkar.

I tveksamma fall är en överslagsberäkning av det med hänsyn till tvärkraftseffekten reducerade gränslastmomentet M_{sT} tillrådlig. För *rektangulär sektion* av idealplastiskt material med lika sträckgräns σ_s för tryck och dragning kan denna överslagsberäkning med tillfredsställande noggrannhet genomföras ur sambandet (se Horne [43], [48])

$$M_{sT}/M_s = 1 - 0{,}44(T/T_s)^2, \text{ där } T_s = \tfrac{1}{2}\sigma_s A \qquad (6)$$

med giltighet för $T/T_s \leqslant 0{,}79$. För I-*sektioner* gäller med god precision inom hela området $0 \leqslant T/T_s \leqslant 1$ det av Heyman, J och Dutton, W L i Welding and Metal Fabrication 1954 uppställda uttrycket

$$M_{sT}/M_s = [1-(A-A_f)/(A+A_f)][1-\sqrt{1-(T/T_s)^2}], \text{ där } T_s = (1/\sqrt{3})\,\sigma_s A_l \qquad (7)$$

i vilket A = totala tvärsnittsytan, A_l = livytan och A_f = sammanlagda ytan för båda flänsarna.

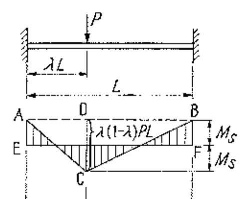
:86 Gränslastmoment för statiskt obestämd balk i ett fack

A Tvåsidigt fast inspänd balk

I avsnitt :83 har i anslutning till det i fig :83 angivna lastfallet visats, att en tvåsidigt fast inspänd balks gränslast är uppnådd i och med att flytleder utbildats i balkens tre mest ansträngda snitt.

Exempel 1. Bestäm den mot gränslasten svarande momentfördelningen vid den i fig :86a visade, tvåsidigt fast inspända balken med efter sin längd konstant sektion.

Problemet består i att finna det momentdiagram, som uppfyller jämviktsvillkoren och som i balkens tre mest ansträngda snitt har numeriskt lika stora böjmoment M_s. Jämviktsvillkoren kan uttryckas genom den tillhörande statiskt bestämda, tvåsidigt fritt upplagda balkens momentdiagram ABC, vilket har sitt maximivärde DC $=\lambda(1-\lambda)PL$ i P:s angreppssnitt. Det resterande villkoret numeriskt lika stora moment M_s i de tre mest ansträngda snitten blir uppfyllt, om i momentdiagrammet ABC en horisontell momentnollinje EF inläggs genom CD:s mittpunkt enligt fig :86a. Balkens tre mest ansträngda snitt är följaktligen de båda inspänningssnitten samt P:s angreppssnitt, vilka samtliga, då balken är maximalt utnyttjad, har ett gränslastmoment $M_s = \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)PL$.



Flytfigur vid uppnådd gränslast
(• = flytled)

Fig :86a

Exempel 2. Beräkna för den i fig :86b, detalj α visade, tvåsidigt fast inspända balken momentfördelningen enligt gränslastmetod. Balken förutsätts ha rektangulär sektion med konstant bredd b och med höjd h, som i balkens $^1/_4$-punkter diskontinuerligt förändras enligt figuren från h_0 till $2h_0$.

Av tabellen i :85 över det plastiska motståndsmomentet W_s följer, att om gränslastmomentet för balksektionen med den minsta höjden h_0 betecknas med M_s, så blir det mot balksektionen med den största höjden $2h_0$ svarande gränslastmomentet $= 4M_s$.

Problemet består i att i den tillhörande fritt upplagda balkens momentdiagram ABC inlägga en momentnollinje EF, som ger maximalt utnyttjande av de tre mest ansträngda snittens momentupptagande förmåga. Antas dessa snitt vara de båda inspänningssnitten samt mittsnittet, erhålls för momentnollinjen det i fig :86b, detalj α inritade läget, karaktäriserat av mittmoment M_s och inspänningsmoment $4M_s$. En nödvändig förutsättning för denna lösnings riktighet är, att den inte i något snitt inom området för sektionshöjden h_0 ger ett moment $> M_s$. Av figuren framgår, att denna förutsättning är uppfylld, varför antagen flytfigur med flytleder i inspänningssnitten och i fackmitt är den rätta. Det tillhörande gränslastmomentet M_s erhålls direkt ur figuren till $M_s = (1/40)qL^2$.

Om votlängden minskas från $L/4$ till $L/6$ (detalj β i fig :86b) blir med momentnollinje EF enligt detalj α böjmomentet i de snitt, där sektionshöjden diskontinuerligt förändras, större än gränslastmomentet M_s. Härav följer, att en flytfigur baserad på flytleder i fackmitt och i inspänningssnitten är felaktig vid votlängden $L/6$. En förnyad lösning med antagna flytleder i fackmitt samt i de båda snitten för den språngvisa höjdförändringen resulterar i ett momentdiagram enligt detalj β, vilket direkt inses vara riktigt. Ur detta beräknas för det mot votlängden $L/6$ svarande gränslastmomentet

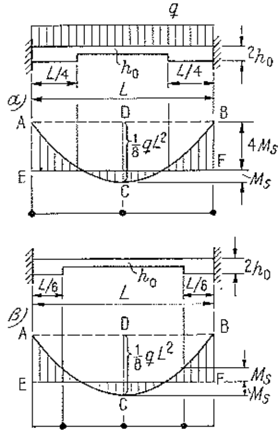


Fig :86b

$$2M_s = \tfrac{1}{8}q(\tfrac{2}{3}L)^2, \text{ dvs } M_s = (1/36)\,qL^2$$

B Ensidigt fast inspänd balk

En balk som är fast inspänd vid den ena änden, fritt upplagd vid den andra, är en 1-falt statiskt obestämd konstruktion. Sedan den genom belastning getts *en* flytled, kommer den för lastökning härutöver att verka som en statiskt bestämd balk. Ökas lasten, till dess att ytterligare en flytled uppträder, erhålls för fortsatt lastökning en statiskt underbestämd konstruktion, vilken saknar förmåga till ytterligare lastupptagning. I maximalt utnyttjat tillstånd karaktäriseras alltså en ensidigt fast inspänd balk av två flytleder.

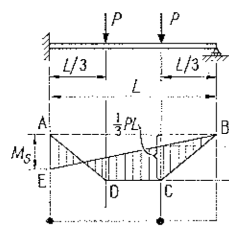


Fig :86c

Exempel 1. Beräkna för den i fig :86c visade balken med konstant sektion momentdiagrammet enligt gränslastmetod.

Det uppställda problemet består i att i den tillhörande fritt upplagda balkens momentdiagram ABCD genom B lägga en momentnollinje BE, som i balkens två mest ansträngda snitt ger numeriskt lika stora böjmoment M_s. Lösningen finns genomförd i fig :86c, av vilken framgår, att balkens båda mest ansträngda snitt utgörs av inspänningssnittet samt av den högra P-lastens angreppssnitt.

Ur likformiga trianglar beräknas för gränslastmomentet M_s

$$M_s/L = (\tfrac{1}{3}PL - M_s)/\tfrac{1}{3}L, \text{ dvs } M_s = \tfrac{1}{4}PL$$

Exempel 2. Beräkna det mot gränslasten svarande momentdiagrammet för den i fig :86d visade balken med konstant sektion.

Problemet innehåller jämfört med det ovan i exempel 1 behandlade en extra svårighet därigenom att det exakta läget av flytleden i fältet inte är från början bekant. Denna svårighet kan alltid lösas genom en *successiv prövning* med olika lutningar för moment-nollinjen BD. Den nämnda flytledens läge kan också bestämmas *analytiskt* eller genom en direkt *geomet-*

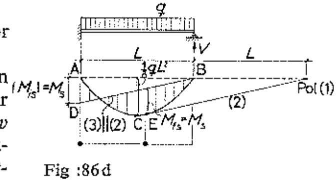


Fig :86d

risk konstruktion på det sätt, som visats i figuren genom beteckningarna (1), (2) och (3) för de olika konstruktionsetapperna [49].

I kompletterande syfte genomförs också en analytisk lösning av problemet, varvid som obekant storhet införs upplagsreaktionen V i balkens glidlager. För inspänningsmomentets absolutvärde erhålls

$$|M_{is}| = \tfrac{1}{2}qL^2 - VL$$

För fältmomentet i snitt x gäller uttrycket (x räknat från upplaget B)

$$M_f = Vx - \tfrac{1}{2}qx^2$$

vilket antar maximivärde för

$$\mathrm{d}M_f/\mathrm{d}x = V - qx = 0, \text{ dvs för } x = V/q$$

För maximivärdet av fältmoment M_f erhålls härigenom

$$M_{f\max} = M_{fs} = V^2/2q$$

Villkoret, att $|M_{is}| = M_{fs} = M_s$, ger nu sambandet

$$\tfrac{1}{2}qL^2 - VL = V^2/2q$$

varur för upplagsreaktionen V beräknas värdet

$$V = (\sqrt{2} - 1)\,qL$$

och för gränslaststadiets dimensionerande böjmoment värdet

$$M_{fs} = -M_{is} = V^2/2q = (3/2 - \sqrt{2})\,qL^2$$

Exempel 3. Beräkna det mot gränslasten svarande momentdiagrammet för den i fig :86e visade, ensidigt fast inspända balken med rektangulär sektion, som med konstant bredd b har en sektionshöjd h, som enligt fig :86e diskontinuerligt förändras från h_0 till $2h_0$.

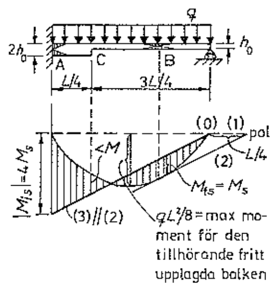


Fig :86e

Vid fullt utbildad plasticering gäller för balktvärsnittet med sektionshöjden h_0 gränslastböjmomentet — tabell :85

$$M_s = \tfrac{1}{4}bh_0^2\sigma_s$$

och för balktvärsnittet med sektionshöjden $2h_0$ gränslastböjmomentet

$$\overline{M}_s = \tfrac{1}{4}b(2h_0)^2\sigma_s = bh_0^2\sigma_s = 4M_s$$

I gränslaststadiet uppträder flytleder i inspänningssnittet A samt i ett fältsnitt B, vars läge kan geometriskt konstrueras enligt fig :86e på analogt sätt som det i exempel 2 redovisade. I snittet A uppträder därvid i gränslaststadiet böjmomentet $|M_{is}| = 4M_s$ och i snittet B böjmomentet $M_{fs} = M_s$. En nödvändig förutsättning för genomförd lösnings giltighet är, att det i språngsnittet C uppträdande böjmomentet $<$ gränslastmomentet M_s. Vid i tillämpningen valt läge för språngsnittet är denna förutsättning uppfylld. Om genomförd konstruktion av gränslaststadiets böjmomentdiagram i snittet C givit ett böjmoment $> M_s$, hade detta varit ett kriterium på att vald flytfigur inte varit korrekt. En annan flytfigur, innehållande flytled i snittet C, hade då fått undersökas.

:87 Gränslastmoment för kontinuerlig balk

För en kontinuerlig balk med *konstant sektion*, påverkad av genomgående *åt samma håll riktade, varandra lineärt beroende laster* kan gränslastmomentet M_s bestämmas på följande sätt [49].

För varje delfack AB, BC, CD ... beräknas enligt fig :87a de gränslast-

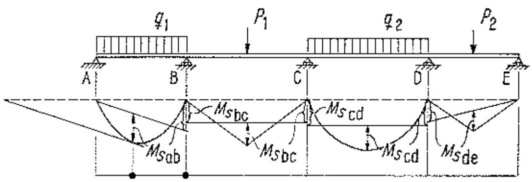


Fig :87a

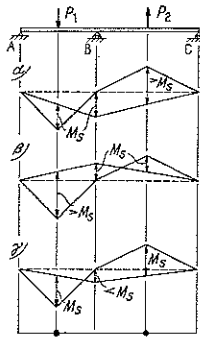


Fig :87b

moment M_{sab}, M_{sbc}, M_{scd} ..., som svarar mot fullständig plasticering av respektive delfack, varpå den kontinuerliga balkens gränslastmoment M_s erhålls som det *största* av delfackens gränslastmoment. Speciellt för det i fig :87a angivna lastfallet ger detta $M_s = M_{sab}$ och en flytfigur, som vid den kontinuerliga balkens maximala utnyttjande har flytleder endast över stödet B samt i fältet av fack AB. Vid av varandra lineärt beroende laster bestäms följaktligen den kontinuerliga konstruktionens totala bärförmåga helt av bärförmågan för det starkast ansträngda delfacket.

Vid av *varandra lineärt beroende laster*, som i den kontinuerliga balkens delfack är *omväxlande uppåt- och nedåtriktade*, fordras för en beräkning av dimensionerande gränslastmoment generellt en undersökning av ett större antal flytalternativ än vid lastfall av den typ, som visas i fig :87a.

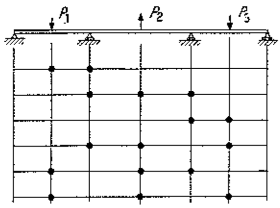


Fig :87c

Förhållandena illustreras av det i fig :87b angivna lastfallet. Av figuren framgår, att vid rådande P_1/P_2-förhållande en gränslastberäkning, baserad på maximalt utnyttjat fack AB med flytleder över stödet B samt i P_1:s angreppssnitt, resulterar i ett moment $> M_s$ i P_2:s angreppssnitt (flytalternativ α). Denna flytfigur är därför inte möjlig. Analogt ger en beräkning enligt flytalternativ β ett moment $> M_s$ i P_1:s angreppssnitt, varför också detta flytalternativ är omöjligt. Vid det rätta flytalternativet, redovisat i figurens detalj γ, uppträder en flytfigur med flytleder i P_1:s och P_2:s angreppssnitt utan plasticering över mellanstödet B.

Vid en kontinuerlig balk i 3 fack med last enligt fig :87c blir, beroende på de inbördes förhållandena mellan P_1, P_2 och P_3, något av de i figuren angivna 6 flytalternativen aktuellt. Vid kontinuerlig balk i 4 fack blir vid omväxlande nedåt- och uppåtriktade laster antalet aktuella flytfigurer att undersöka 10, vid balk i 5 fack 15 etc och allmänt vid balk i n fack $\frac{1}{2}n(n+1)$.

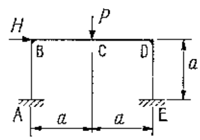


Fig :88a

:88 Ramkonstruktioners gränslastmoment

A Direkt beräkningsmetod

Vid okomplicerade ramkonstruktioner under enkla laster kan dimensionerande gränslastmoment som regel lätt bestämmas genom en direkt beräkning för olika flytalternativ. Förfarandet illustreras på det i fig :88a visade fallet, dvs en 0-ledsram med efter hela sin utsträckning konstant tvärsnitt, belastad med av varandra lineärt beroende punktlaster P och H.

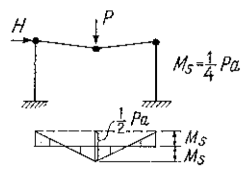


Fig :88b

Följande flytalternativ är geometriskt möjliga:

1 Det i fig :88b angivna, svarande mot maximalt utnyttjad ramdel BD, med flytleder i B, C och D. För detta flytalternativ erhålls direkt ur det i figuren redovisade momentdiagrammet

$$M_s = \tfrac{1}{4}Pa \tag{a}$$

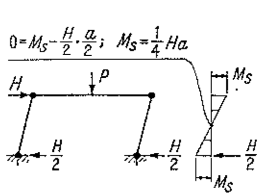


Fig :88c

2 Det i fig :88c angivna, svarande mot maximalt utnyttjade ramben och karaktäriserat av flytleder i A, B, D och E. Härför beräknas ur rambenens momentdiagram

$$M_s = \tfrac{1}{4}Ha \tag{b}$$

3 Det i fig :88d redovisade med flytleder i A, C, D och E, vid vilket gränslasten upptas genom kombinerat utnyttjande av ramben och ramhorisontal. Det mot detta flytalternativ svarande momentdiagrammet finns angett i fig :88e, ur vilken beräknas

genom momentekvation för delen DE: $X = 2M_s/a$

genom momentekvation för delen CD: $Y = 2M_s/a$

genom momentekvation kring A för hela ramen:

$$-M_s + Ha + Pa - Y \cdot 2a - M_s = 0$$

varav

$$M_s = (1/6)(P+H)a \qquad \text{(c)}$$

Vid givet förhållande P/H erhålls ur ekv (a)–(c) tre värden på gränslastmomentet M_s. Det största av dessa värden dimensionerar och bestämmer typen av flytfigur.

De till de tre flytalternativen hörande ekv (a), (b) och (c) kan i diagramform sammanfattas enligt fig :88f. Ekvationernas tre räta linjer ger därvid en dimensionerande begränsning abcd. Skärningspunkten mellan denna begränsning och en mot ett givet förhållande H/P svarande rät linje genom origo ger aktuellt gränslastvärde och aktuellt flytalternativ. Det framgår t ex ur diagrammet, att för $H = \frac{1}{3}P$ gäller flytalternativ 1, för H = P flytalternativ 3 och för H = 3P flytalternativ 2.

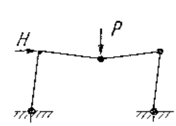


Fig :88d

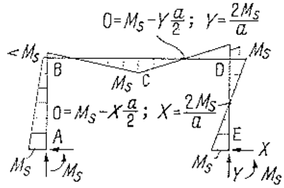


Fig :88e

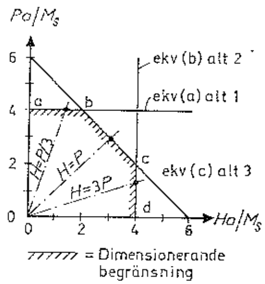


Fig :88f

B Beräkning genom kombination av elementarmekanismer

a Allmänt

Vid ramkonstruktioner av mera komplicerad uppbyggnad kan det ofta vara svårt att från början klart överblicka de olika geometriskt möjliga flytalternativen. I sådana fall kan en gränslastmomentberäkning med fördel genomföras exempelvis enligt den nedan illustrerade metodiken, vid vilken dimensionerande flytfigur framräknas genom en systematisk kombination av s k *elementarmekanismer* = av varandra oberoende flytfigurer, genom vilka *begränsade* ramavsnitt genom plasticering blir maximalt utnyttjade.

b Begreppet elementarmekanism

För en *enkel, öppen ram* av exempelvis den typ, som behandlats under A, kan *två* huvudtyper av elementarmekanismer uppträda, nämligen dels *balkmekanismer*, karaktäriserade av att en enstaka balk (i fig :88g balken BCD) fullständigt plasticeras, och dels en renodlad *knutpunktsförskjutningsmekanism* enligt fig :88h. Dessa båda elementarmekanismer kan direkt överlagras till den i fig :88i visade *kombinerade mekanismen.* För en enkel, öppen ram med utformning och last enligt fig :88j existerar sex av varandra oberoende elementarmekanismer, nämligen fyra balkmekanismer enligt fig :88k (samtliga redovisade i en figur) och två knutpunktsförskjutningsmekanismer enligt fig :88l och m.[1] Genom direkt överlagring av två eller

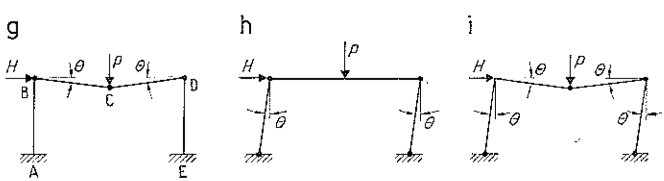


Fig :88g–i. *g* balkmekanism, *h* knutpunktsförskjutningsmekanism, *i* kombinerad mekanism

[1] Beträffande elementarmekanismen enligt fig :88m förutsätts att C fasthålls i sidled. I stället för att utgå från elementarmekanismerna enligt fig :88l och m kan man utgå från den enligt fig :88o jämte dess spegelvända mekanism med flytleder i C och E

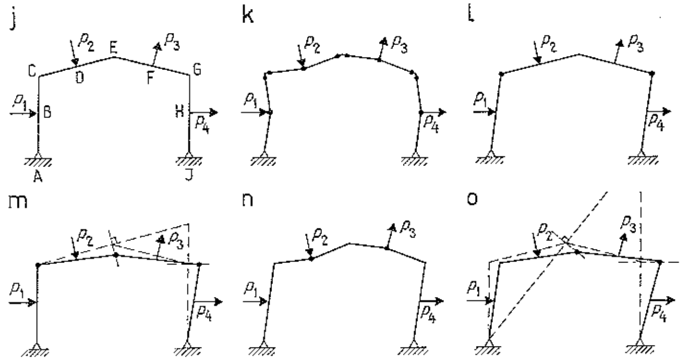


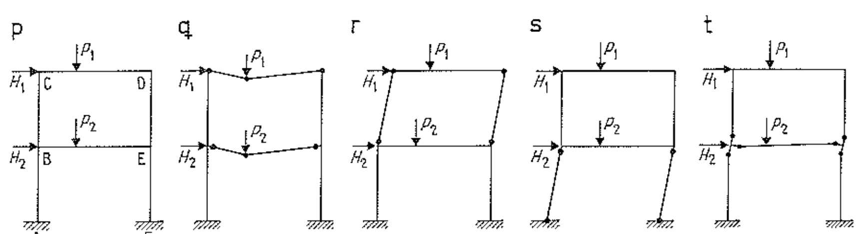
Fig :88j–o. *j* ram med last, *k* balkmekanismer, *l* och *m* knutpunktsförskjutningsmekanismer, *n* och *o* kombinerade mekanismer

flera av dessa elementarmekanismer kan olika typer av kombinerade mekanismer erhållas. Som exempel härpå visas i fig :88n en flytmekanism, erhållen som summan av de båda balkmekanismerna för CDE och EFG (fig :88k) samt knutpunktsförskjutningsmekanismen enligt fig :88l, och i fig :88o den flytmekanism, som uppkommer genom direkt överlagring av de båda knutpunktsförskjutningsmekanismerna enligt fig :88l och m.

Vid *kontinuerliga ramar* och *flervåningsramar* tillkommer utöver de båda ovan nämnda typerna av elementarmekanismer ytterligare en typ, nämligen s k *knutpunktsrotationsmekanismer*, kännetecknade av flytleder, som möjliggör en renodlad rotation av knutpunkter med fler än två anslutande ramdelar (jfr fig :88t). Sådana elementarmekanismer har — bortsett från fallet, att de aktuella knutpunkterna åverkas av yttre koncentrerade böjmoment — i sig själv ingen reell mening, men blir av betydelse, då de kombineras med andra typer av elementarmekanismer, vilket närmare illustreras av beräkningsexemplen nedan. Tillämpat på en 2-våningsram med utformning och last enligt fig :88p, erhålls sex av varandra oberoende elementarmekanismer — två balkmekanismer (fig :88q), två knutpunktsförskjutningsmekanismer (fig :88r och s) samt två knutpunktsrotationsmekanismer (fig :88t).

Generellt gäller för det till ett givet ramlastfall hörande *antalet elementarmekanismer*, att detta är lika med skillnaden mellan det antal snitt, i vilka böjmomentets storlek måste beräknas, för att momentdiagrammet skall bli entydigt bestämt, och antalet statiskt obestämda kvantiteter för ramen. Speciellt för ramen enligt fig :88g blir momentdiagrammet entydigt fixerat, sedan momentets storlek beräknats i snitten A, B, C, D och E, dvs i 5 snitt — mellan dessa snitt har nämligen momentet en från början känd, lineär variation. Då vidare ramen är 3-falt statiskt obestämd, följer, att antalet elementarmekanismer blir $5-3=2$. För det i fig :88j visade lastfallet blir

Fig :88p–t. *p* ram med last, *q* balkmekanismer, *r* och *s* knutpunktsförskjutningsmekanismer, *t* knutpunktsrotationsmekanismer



analogt momentdiagrammet entydigt bestämt vid beräknade momentvärden i B, C, D, E, F, G och H, dvs i 7 snitt, vilket kombinerat med förhållandet, att ramen är 1-falt statiskt obestämd, ger $7-1=6$ elementarmekanismer. En övergång för någon eller några ramdelar från punktbelastning P till jämnt fördelad last q medför för dessa ramdelar en parabolisk momentvariation i stället för lineär, men förändrar inte det för entydigt bestämt momentdiagram erforderliga antalet snitt med kända momentvärden och därför inte heller antalet elementarmekanismer.

c Allmän beräkningsgång

Allmänt kan en gränslastmomentberäkning enligt metoden med kombination av elementarmekanismer genomföras i följande etapper:

1 Bestämning enligt ovan av det för lastfallet karaktäristiska antalet elementarmekanismer.

2 Beräkning av de olika elementarmekanismernas gränslastmoment.

3 Överlagring av två eller flera elementarmekanismer till kombinerade mekanismer samt bestämning av dessas gränslastmoment.

Dimensionerande och bestämmande för den i verkligheten uppträdande flytfiguren blir därvid den elementarmekanism eller den kombinerade mekanism, som ger det *största* gränslastmomentet.

För den detaljerade beräkningsmetodiken hänvisas till efterföljande tilllämpningsexempel.

d Exempel

Exempel 1. Beräkna för det *i* fig :88u visade lastfallet dimensionerande moment enligt gränslastmetod, om de olika ramdelarnas inbördes dimensioner är sådana, att de svarar mot gränslastmoment M_s för pelarna, $(3/2)M_s$ för horisontalen DF samt $2M_s$ för horisontalen BD.

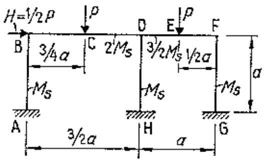


Fig :88u. Ram med last

Antalet elementarmekanismer

Momentdiagrammet blir entydigt bestämt vid kända momentvärden i A, B, C, D (tre snitt), E, F G och H, dvs i 10 snitt. Då vidare ramkonstruktionen är 6-falt statiskt obestämd, följer att lastfallets antal elementarmekanismer blir $10-6=4$. Dessa utgörs av 2 balkmekanismer enligt fig :88v, 1 knutpunktsförskjutningsmekanism enligt fig :88x samt 1 knutpunktsrotationsmekanism enligt fig :88y.

Elementarmekanismernas gränslastmoment M_s

Dessa kan beräknas direkt ur jämviktsekvationer på det sätt, som ovan visats i exemplet under A. I kompletterande syfte används i detta sammanhang för beräkningen av M_s i stället en *kinematisk* metod, baserad på förhållandet, att en ramkonstruktion, då dess gränslast uppnås, övergår till en s k kinematisk kedja, som utan lastökning kan deformeras genom enbart vinkeländringar i flytlederna. I dessa uträttar därvid gränslastmomenten ett inre arbete W_i, som är lika med det yttre arbete W_y, som den yttre lasten ger upphov till, då den medföljer i den kinematiska kedjans deformation.

För den till delen BCD hörande, i fig :88v visade balkmekanismen ger en sådan kinematisk beräkning

$$W_i = \underbrace{M_s\Theta}_{\text{i B}} + \underbrace{2M_s\Theta + 2M_s\Theta}_{\text{i C}} + \underbrace{2M_s\Theta}_{\text{i D}} = W_y = P(3/4)a\Theta$$

$$7M_s\Theta = (3/4)Pa\Theta;\quad M_s = (3/28)Pa = 0{,}1071Pa \qquad \text{(a)}$$

och för den till delen DEF hörande balkmekanismen

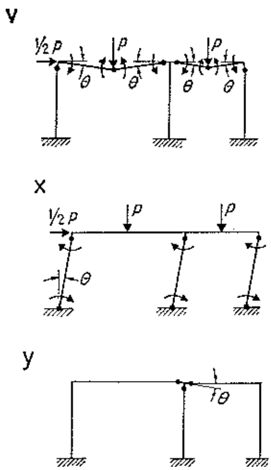


Fig :88v–y. *v* balkmekanismer, *x* knutpunktsförskjutningsmekanism, *y* knutpunktsrotationsmekanism

$$W_i = \underbrace{(3/2)\,M_s\Theta}_{\text{i D}} + \underbrace{(3/2)\,M_s\Theta + (3/2)\,M_s\Theta}_{\text{i E}} + \underbrace{M_s\Theta}_{\text{i F}} = W_y = P(a/2)\,\Theta$$

$$5{,}5M_s\,\Theta = (1/2)\,Pa\Theta;\quad M_s = (1/11)\,Pa = 0{,}0909Pa \qquad \text{(b)}$$

För knutpunktsförskjutningsmekanismen enligt fig :88x beräknas analogt

$$W_i = 6M_s\,\Theta = W_y = (1/2)\,Pa\Theta;\quad M_s = (1/12)\,Pa = 0{,}0833Pa \qquad \text{(c)}$$

Gränslastmoment M_s för kombinerade mekanismer

Av elementarmekanismerna ger enligt ovan den till delen BCD hörande balkmekanismen det största M_s-värdet. Det är därför naturligt att välja denna mekanism som bas vid konstruktion av sådana kombinerade mekanismer, som kan tänkas ha högre M_s-värden än det av ekv (a) givna.

En överlagring av balkmekanismen för BCD och knutpunktsförskjutningsmekanismen enligt fig :88x ger den i fig :88z angivna kombinerade mekanismen. I denna uträttar P-krafterna ett yttre arbete W_y, som erhålls som summan av de båda elementarmekanismernas yttre arbeten, dvs (jfr ekv (a) och (c))

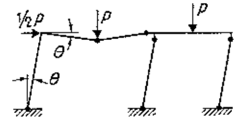


Fig :88z. Kombinerad mekanism

$$W_y = (3/4)\,Pa\Theta + (1/2)\,Pa\Theta = (5/4)\,Pa\Theta \qquad \text{(d)}$$

En direkt addition av de båda elementarmekanismernas inre arbeten ger ett W_i, som är större än den kombinerade mekanismens, beroende på att elementarmekanismernas flytleder i ramhörnet B inte återfinns i den kombinerade mekanismen. Härigenom reduceras det inre arbetet med beloppet $M_s\Theta + M_s\Theta = 2M_s\Theta$, varpå för det resulterande W_i beräknas (jfr ekv (a) och (c))

$$W_i = 7M_s\Theta + 6M_s\Theta - 2M_s\Theta = 11M_s\Theta \qquad \text{(e)}$$

$^{R}M = W_i$ ger så för den kombinerade mekanismen enligt fig :88z

$$11M_s\,\Theta = (5/4)\,Pa\Theta;\quad M_s = (5/44)\,Pa = 0{,}1136Pa \qquad \text{(f)}$$

dvs ett större M_s-värde än för någon av de övriga, hittills undersökta mekanismerna.

En överlagring av den rena knutpunktsrotationsmekanismen enligt fig :88y på mekanismen enligt fig :88z resulterar i den i fig :88aa visade, kombinerade mekanismen. Denna överlagring ger ingen förändring av det yttre arbetet W_y från ekv (d). Däremot förändras det av ekv (e) angivna inre arbetet W_i därigenom, att (jfr fig :88z och aa) i knutpunkten D för ramdelarna BCD och DEF tillkommer beloppen $2M_s\,\Theta$resp $(3/2)\,M_s\Theta$, medan samtidigt för vertikalen DH bortgår beloppet $M_s\Theta$. Totalt ger detta en ökning i W_i av $2{,}5M_s\Theta$ och, då tillhörande W_y enligt ovan är oförändrat, en minskning av det av ekv (f) bestämda M_s-värdet. Flytmekanismen enligt fig :88aa är följaktligen inte dimensionerande. På analogt sätt inses, att den i fig :88ab visade mekanismen, uppkommen genom kombination av mekanismen enligt fig :88z och en motursriktad knutpunktsrotationsmekanism, inte kan vara dimensionerande.

Direkt inses vidare, att en addition av knutpunktsrotationsmekanismen till ramdelens BCD balkmekanism ger oförändrat W_y, ökat W_i och därför ett M_s, som är mindre än den renodlade balkmekanismens. Inte heller den så kombinerade mekanismen är således dimensionerande.

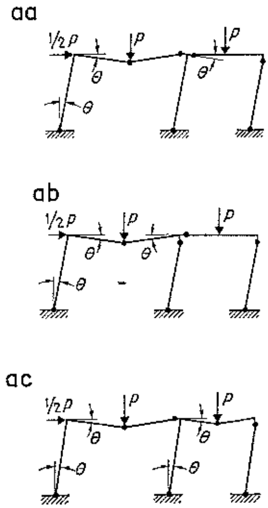


Fig :88aa–ac. Kombinerade mekanismer

En överlagring av samtliga fyra elementarmekanismer resulterar i en kombinerad mekanism enligt fig :88 ac, för vilken kinematiskt beräknas

$$W_i = \underbrace{M_s\Theta}_{\text{i A}} + \underbrace{4M_s\Theta}_{\text{i C}} + \underbrace{4M_s\Theta}_{\text{i D}} + \underbrace{3M_s\Theta}_{\text{i E}} + \underbrace{2M_s\Theta}_{\text{i F}} + \underbrace{M_s\Theta}_{\text{i G}} + \underbrace{M_s\Theta}_{\text{i H}} = 16M_s\Theta$$

$$W_y = (1/2)\,Pa\Theta + P(3/4)\,a\Theta + P(1/2)\,a\Theta = (7/4)\,Pa\Theta$$

$$W_i = W_y;\quad M_s = (7/64)\,Pa = 0{,}1094Pa \qquad \text{(g)}$$

dvs ett mindre M_s än för mekanismen enligt fig :88z.

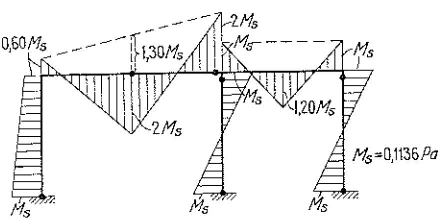


Fig :88 ad

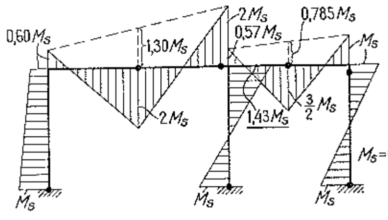


Fig :88 ae

Därmed har samtliga tänkbara, på balkmekanismen för BCD baserade, farliga flytmekanismer undersökts, varvid den i fig :88 z visade mekanismen funnits vara den dimensionerande. Som kontroll kan utnyttjas förhållandet, att i den riktiga flytmekanismen inte får finnas något snitt, i vilket den momentupptagande förmågan (för vertikalerna M_s, för delen BCD $2M_s$ och för delen DEF $(3/2)M_s$) överskrids. Att så inte blir fallet för flytmekanismen enligt fig :88 z, kan lätt konstateras genom konstruktion av det tillhörande momentdiagrammet (jfr fig :88 ad). Däremot ger en konstruktion av motsvarande momentdiagram för den i fig :88 ac visade flytmekanismen (jfr fig :88 ae) i mellanpelarens övre ändpunkt ett moment $= 1{,}43M_s$, dvs ett större moment än vad pelaren vid fullständig plasticering kan uppta, vilket är ett kriterium på att flytmekanismen enligt fig :88 ac är felaktig.

Resultat: Lastfallets gränslastmoment $M_s = 0{,}1136Pa$, bestämt av den i fig :88 z visade, kombinerade flytmekanismen.

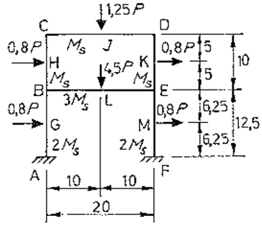


Fig :88 af

Exempel 2. Beräkna för en enligt fig :88 af utformad och belastad tvåvåningsram dimensionerande gränslastvärde för P. Rambärverket har för varje ramdel konstant sektion, svarande mot ett gränslastböjmoment M_s för ramdelarna BC, CD och DE, ett gränslastböjmoment $2M_s$ för ramdelarna AB och EF samt ett gränslastböjmoment $3M_s$ för ramdelen BE.

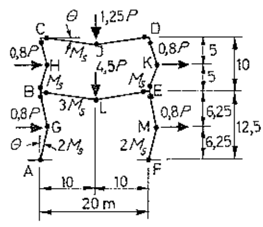


Fig :88 ag

Antalet elementarmekanismer

För att ramlastfallets böjmomentdiagram skall vara entydigt fixerat, fordras, att böjmomentets storlek beräknas i snitten A, G, B (tre snitt), H, C, I, D, K, E (tre snitt), L, M, och F, dvs i sammanlagt 16 snitt. Rambärverket är sexfalt statiskt obestämt. Antalet geometriskt möjliga elementarmekanismer blir därför $16 - 6 = 10$.

Elementarmekanismerna utgörs av 6 balkmekanismer (fig :88 ag), två knutpunktsförskjutningsmekanismer (fig :88 ah och ai) samt två knutpunktsrotationsmekanismer (fig :88 aj och ak). Mot de olika balkmekanismerna och knutpunktsförskjutningsmekanismerna svarar entydiga gränslastvärden, medan knutpunktsrotationsmekanismerna har betydelse endast som i kombinerade mekanismer ingående delar.

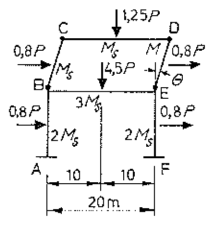


Fig :88 ah

Elementarmekanismernas gränslastmoment M_s

Som framgår av fig :88 ag har ramlastfallet sex av varandra oberoende *balkmekanismer*. För dessas gränslastvärden ger en beräkning enligt kinematisk

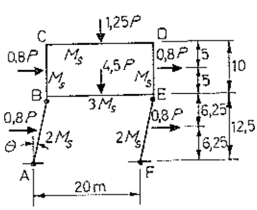


Fig :88 ai

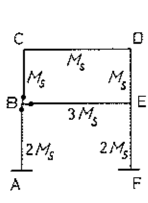


Fig :88 aj

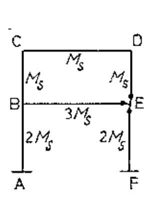


Fig :88 ak

metod följande samband med Θ = vinkeländringen för varje enskilt, av två på varandra följande flytleder begränsat avsnitt i en ramdels kinematiska kedja.

Ramdel AB, EF: $W^y = 0{,}8P\cdot 6{,}25\Theta = W^i = 4\cdot 2M_s\cdot\Theta$

$$5P\Theta = 8M_s\Theta;\ M_s = 0{,}0625P \qquad \text{(a)}$$

Ramdel BC, DE: $W^y = 0{,}8P\cdot 5\Theta = W^i = 4M_s\Theta$

$$4P\Theta = 4M_s\Theta;\ M_s = P \qquad \text{(b)}$$

Ramdel CD: $W^y = 1{,}25P\cdot 10\Theta = W^i = 4M_s\Theta$

$$12{,}5P\Theta = 4M_s\Theta;\ M_s = 3{,}125P \qquad \text{(c)}$$

Ramdel BE: $W^y = 4{,}5P\cdot 10\Theta = W^i = 4\cdot 3M_s\Theta$

$$45P\Theta = 12M_s\Theta;\ M_s = 3{,}75P \qquad \text{(d)}$$

Analogt ger en beräkning enligt kinematisk metod för gränslastvärdet för de i fig :88ah och ai visade *knutpunktsförskjutningsmekanismerna* sambanden, med Θ = rambenens vinkeländring för den övre resp undre ramvåningen.

Förskjutningsmekanism ah: $W^y = 2\cdot 0{,}8P\cdot 5\Theta = W^i = 4M_s\Theta$

$$8P\Theta = 4M_s\Theta;\ M_s = 2P \qquad \text{(e)}$$

Förskjutningsmekanism ai: $W^y = 2\cdot 0{,}8P\cdot 12{,}5\Theta + 2\cdot 0{,}8P\cdot 6{,}25\Theta = W^i =$

$= 4\cdot 2M_s\Theta$

$$30P\Theta = 8M_s\Theta;\ M_s = 3{,}75P \qquad \text{(f)}$$

Kombinerade mekanismers gränslastmoment M_s

Av ovan för elementarmekanismerna beräknade gränslastsamband ger de till balkmekanism för ramdelen BE och knutpunktsförskjutningsmekanism ai hörande lägsta gränslastvärdet P. I avsikt att finna en kombinerad mekanism, som ger ännu lägre gränslastvärde, är det därför naturligt att i första hand undersöka en kombinerad mekanism, som just är sammansatt av *balkmekanismen för ramdelen BE och förskjutningsmekanismen ai* (fig :88al). Vid en genom en sådan överlagring erhållen flytfigur blir emellertid de båda elementarmekanismerna inte deformationsmässigt kopplade till varandra — vinkeländringarna Θ_1 och Θ_2 är oberoende av varandra. En entydig, kombinerad mekanism uppkommer däremot, om utöver de båda nämnda elementarmekanismerna inkluderas *knutpunktsrotationsmekanismen aj* (fig :88am). För denna kombinerade mekanism ger en beräkning enligt kinematisk metod för det yttre arbetet W^y uttrycket

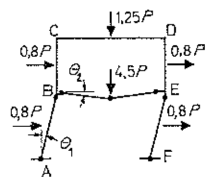


Fig :88al

$$W^y = 2\cdot 0{,}8P\cdot 6{,}25\Theta + 2\cdot 0{,}8P\cdot 12{,}5\Theta + 4{,}5P\cdot 10\Theta = 10P\Theta + 20P\Theta + 45P\Theta =$$

$$= 75P\Theta$$

och för det inre arbetet W^i uttrycket

$$W^i = 3\cdot 2M_s\Theta + M_s\Theta + 3\cdot 3M_s\Theta = 16M_s\Theta$$

varpå ur villkoret $W^y = W^i$ erhålls gränslastsambandet

$$75P\Theta = 16M_s\Theta;\ M_s = 4{,}69P \qquad \text{(g)}$$

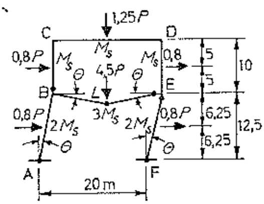


Fig :88am

Den kombinerade mekanismen enligt fig :88am ger alltså ett lägre gränslastvärde P än någon av elementarmekanismerna.

Uttrycken för den kombinerade mekanismens yttre och inre arbeten W^y och W^i kan beräknas något mera direkt genom följande resonemang (jfr exempel 1).

Vid en överlagring av de tre elementarmekanismerna till en kombinerad mekanism förändras inte de till elementarmekanismerna hörande yttre arbetena W^y. En direkt summation av dessa yttre arbeten ger därför den kombinerade mekanismens yttre arbete W^y, dvs — jfr ekv (d) och (f)

$$W^y = 45P\Theta + 30P\Theta = 75P\Theta$$

En jämförelse mellan den kombinerade mekanismens flytleder (fig :88am) å ena sidan och flytlederna för balkmekanismen för ramdelen BE (fig :88ag) och för knutpunktsförskjutningsmekanismen ai å andra sidan visar, att i den kombinerade mekanismen återfinns de båda elementarmekanismernas flytleder, vad gäller de till punkterna A, E, F och L hörande. I ramhörnet B återfinns för den kombinerade mekanismen inte de båda elementarmekanismernas flytleder. I gengäld innehåller den kombinerade mekanismen för ramhörnet B en i ramdelen BC uppträdande flytled, vilken saknas för de båda elementarmekanismerna. Av det anförda framgår, att den kombinerade mekanismens inre arbete W^i kan beräknas genom addition av de båda elementarmekanismernas, om samtidigt en korrektion införs för skiljaktigheterna i ramhörnet B, dvs om beloppen $3M_s\Theta$ och $2M_s\Theta$ subtraheras och beloppet $M_s\Theta$ adderas. Den kombinerade mekanismens inre arbete W^i får härigenom värdet — jfr ekv (d) och (f)

$$W^i = 12M_s\Theta + 8M_s\Theta - 3M_s\Theta - 2M_s\Theta + M_s\Theta = 16M_s\Theta$$

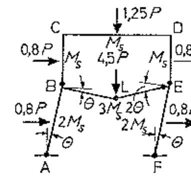


Fig :88an

En överlagring av *knutpunktsrotationsmekanismen ak* på den i fig :88am visade kombinerade mekanismen ger en ny kombinerad mekanism med utformning enligt fig :88an. För det yttre arbetet W^y gäller för de båda kombinerade mekanismerna samma uttryck — ekv (g) — dvs

$$W^y = 75P\Theta$$

För det inre arbetet W^i gäller också för de båda kombinerade mekanismerna samma värde, vad avser de till flytlederna kring punkterna A, B, F och L hörande delbeloppen. Från ramhörnet E tillkommer för den kombinerade mekanismen enligt fig :88am bidraget $3M_s\Theta + 2M_s\Theta = 5M_s\Theta$ och för den kombinerade mekanismen enligt fig :88an bidraget $3M_s \cdot 2\Theta + M_s\Theta = 7M_s\Theta$ till det inre arbetet W^i. För den i fig :88an visade kombinerade mekanismen erhålls därför för det inre arbetet W^i uttrycket — jfr ekv (g)

$$W^i = 16M_s\Theta + 7M_s\Theta - 5M_s\Theta = 18M_s\Theta$$

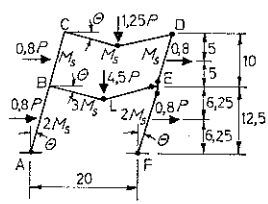


Fig :88ao

varpå villkoret $W^i = W^y$ ger gränslastsambandet

$$75P\Theta = 18M_s\Theta; \quad M_s = 4{,}17P \tag{h}$$

Det mot flytfiguren enligt fig :88an svarande gränslastvärdet P är alltså större än gränslastvärdet för den kombinerade mekanismen enligt fig :88am och därför inte dimensionerande för rambärverket.

Överlagras på den kombinerade mekanismen enligt fig :88am *förskjutningsmekanismen ah samt balkmekanismen för ramdelen CD*, uppkommer den i fig :88ao visade, kombinerade mekanismen. Denna karaktäriseras av ett yttre arbete W^y, som erhålls genom en direkt summation av de till balkmekanismen för CD, förskjutningsmekanismen ah samt mekanismen enligt fig :88am hörande yttre arbetena, dvs — jfr ekv (c), (e) respektive (g)

$$W^y = 12{,}5P\Theta + 8P\Theta + 75P\Theta = 95{,}5P\Theta$$

För det samtidigt i flytlederna uppkomna inre arbetet W^i beräknas ur fig :88ao uttrycket

$$W^i = 5M_s\Theta + 3 \cdot 2M_s \cdot \Theta + 3 \cdot 3M_s \cdot \Theta = 20M_s\Theta$$

varpå ur villkoret $W^y = W^i$ erhålls gränslastsambandet

$$95{,}5P\Theta = 20M_s\Theta; \quad M_s = 4{,}78P \tag{i}$$

Av samtliga elementarmekanismer och ovan behandlade, kombinerade mekanismer ger följaktligen den kombinerade mekanismen enligt fig :88ao det högsta gränslastmomentet M_s eller lägsta gränslastvärdet P. En addition till denna senare mekanism av knutpunktsrotationsmekanismen ak förändrar inte det yttre och inre arbetets storlek och därigenom inte heller gränslastvärdet P.

Avslutningsvis undersöks genom konstruktion av böjmomentdiagrammet om ovan funnen dimensionerande flytmekanism enligt fig :88ao också är rambelastningsfallets korrekta flytmekanism. Som kriterium härför gäller, att det inte i något snitt av rambärverket får uppträda något böjmoment, som är större än den tillhörande ramdelens gränslastböjmoment — M_s för ramdelarna BC, CD och DE, $2M_s$ för ramdelarna AB och EF samt $3M_s$ för ramdelen BE.

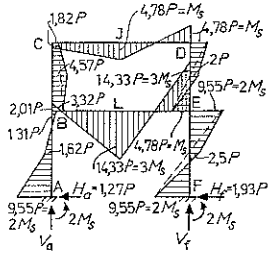


Fig :88ap

Böjmomentdiagrammet för dimensionerande flytmekanism

Av de ovan studerade flytmekanismerna ger den i fig :88ao angivna det lägsta värdet för gränslasten P. I det till denna flytmekanism hörande böjmomentdiagrammet (fig :88ap) kan direkt inritas böjmomentvärdena för mekanismens flytleder. Därigenom bestäms direkt den lineära böjmomentvariationen mellan flytlederna I och D samt L och E. En överlagring på den mot inspänningsböjmomenten svarande lineära momentvariationen för ramdelarna DE och EF av böjmomentvariationen för transversalkrafterna $0{,}8P$ bestämmer dessa ramdelars böjmomentdiagram. Speciellt erhålls i ramdelarnas mittsnitt böjmomentet $0{,}4P \cdot 5 = 2P$ för ramdelen DE och böjmomentet $0{,}4P \cdot 6{,}25 = 2{,}5P$ för ramdelen EF.

För bestämning av böjmomentvariationen för ramdelen AB beräknas först horisontalreaktionen H_a i upplaget A. Ur en horisontell projektionsekvation för hela rambärverkets yttre krafter erhålls sambandet

$$H_a + H_f - 4 \cdot 0{,}8P = 0; \quad H_a + H_f = 3{,}2P$$

och ur en momentekvation med avseende på upplaget E för ramdelens EF yttre krafter sambandet

$$\curvearrowleft H_f \cdot 12{,}5 - 0{,}8P \cdot 6{,}25 - 2 \cdot 9{,}55P = 0$$

Sambanden ger för horisontalreaktionerna H_a och H_f i upplagspunkterna A och F värdena

$$H_f = 1{,}93P; \quad H_a = 1{,}27P$$

Med inspänningsmoment och horisontalreaktion kända i upplagssnittet A blir böjmomentdiagrammet för ramdelen AB bestämt. I ramdelens mittsnitt erhålls momentvärdet

$$2M_s - H_a \cdot 6{,}25 = 9{,}55P - 1{,}27P \cdot 6{,}25 = 1{,}62P\ (\circlearrowright)$$

och i ramdelens inspänningssnitt B momentvärdet

$$2M_s - H_a \cdot 12{,}5 + 0{,}8P \cdot 6{,}25 = 9{,}55P - 1{,}27P \cdot 12{,}5 + 5P = -1{,}31P\ (\circlearrowleft)$$

Ur förhållandet, att böjmomentet $= 0$ i snittet mitt emellan flytlederna I och D, beräknas för ramdelens CD vertikalreaktion V_d i ändpunkten D uttrycket

$$M_s - V_d \cdot 5 = 0; \quad V_d = 4{,}78P/5 = 0{,}955P$$

Med V_d och inspänningsmomentet i D kända blir också böjmomentdiagrammet för ramdelen CD bestämt. I ramdelens inspänningssnitt C erhålls böjmomentvärdet

$$M_s - V_d \cdot 20 + 1{,}25P \cdot 10 = 4{,}78P - 0{,}955P \cdot 20 + 12{,}5P = -1{,}82P\ (\curvearrowright)$$

Analogt beräknas för ramdelens BE vertikalreaktion V_e i ändpunkten E uttrycket

$$3M_s - V_e \cdot 5 = 0; \quad V_e = 14{,}33P/5 = 2{,}87P$$

och för böjmomentet i ramdelens inspänningssnitt B värdet

$3M_s - V_e \cdot 20 + 4{,}5P \cdot 10 = 14{,}33P - 2{,}87P \cdot 20 + 45P = 2{,}01P$ (↶)

För ramdelen BC ger den genomförda beräkningen momentvärdet $1{,}82P$ i inspänningssnittet C samt momentvärdet $1{,}31P + 2{,}01P = 3{,}32P$ i inspänningssnittet B — jfr fig :88 aq. Därmed kan också böjmomentdiagrammet för ramdelen BC konstrueras.

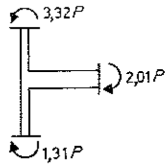


Fig :88 aq

Av det nu i sin helhet bestämda böjmomentdiagrammet för rambärverket framgår, att det inte innehåller något snitt, i vilket böjmomentet är större än tillhörande ramdels gränslastböjmoment. Den för böjmomentdiagrammet gällande flytmekanismen enligt fig :88 ao är därför korrekt och den för rambärverket dimensionerande.

C Andra beräkningsmetoder

Av övriga i litteraturen redovisade, systematiserade metoder för bestämning av ramkonstruktioners gränslaster förtjänar speciellt att nämnas den av Horne angivna *plastiska successiva momentutjämningsmetoden*, vid vilken korrekt flytfigur bestäms genom ett relaxationsförfarande. För metodens detaljer hänvisas i detta sammanhang till publicerade arbeten på området (se t ex [43], [44], [48] och [51]), i vilka också beskrivs andra gränslastmetoder för ramkonstruktioner.

:89 Inverkan av upprepad varierande last

Vid de ovan genomförda ramberäkningarna enligt gränslastmetod har genomgående förutsatts, att de verkande lasterna är av varandra lineärt beroende — samtliga multipler av ex ett lastvärde P, q etc. Under denna förutsättning kan vid valda dimensioner beräknas den brottsäkerhet

$$n = P_s/P; \quad n = q_s/q \text{ etc} \tag{1}$$

som tillhör den som *engångslast* uppträdande farligaste kombinationen av dimensionerande laster uttryckta i P, q etc. I ekv (1) betecknar därvid P_s och q_s de P- och q-värden, som bestäms av gränslastmomentet M_s vid dimensionerande flytfigur. Omvänt kan man vid känd farligaste lastkombination och föreskriven brottsäkerhet n i stället beräkna för konstruktionen erforderliga dimensioner. De vid byggnadskonstruktioner aktuella lasterna är normalt inte sammankopplade på detta sätt till som engångslaster uppträdande kombinationer. Det ordinära lastförloppet beskrivs i stället av en konstant, av egenvikten bestämd inverkan, kombinerad med mer eller mindre kontinuerligt varierande inverkningar från nyttig last, snölast, vindlast etc. Vid en dimensionering är därvid — bortsett från extrema undantagsfall — dessa varierande inverkningar kända endast genom vissa övre och undre gränsvärden, givna t ex genom gällande bestämmelser, men däremot okända, vad gäller det detaljerade variationsförloppet. För inverkningar av denna typ införs nedan i överensstämmelse med litteraturen på området beteckningen *upprepad, varierande last*.

Vid en upprepad varierande last kan ett flytbrott bli aktuellt vid ett övre lastvärde P, q som är *lägre* än den mot en engångslast svarande gränslasten P_s, q_s. Följande *två* huvudtyper av flytbrott kan därvid uppkomma:

1 *Växelflytbrott* (alternating plasticity collapse).
2 *Tillväxtflytbrott* (incremental collapse).

Ett *växelflytbrott* är till sin typ ett utmattningsbrott och orsakas av att den upprepade varierande lasten i något eller några snitt av en konstruktion ger flytning omväxlande genom tryck och dragning. Det slutgiltiga brottet kommer därvid som regel efter ett relativt litet antal lastväxlingar — av storleksordningen 100 à 1 000.

Ett *tillväxtflytbrott* karaktäriseras av att konstruktionen i något eller några snitt vid varje cykel av den upprepade varierande lasten får en ickeavtagande, åt bestämt håll riktad tillväxt i kvarstående, plastiska vinkeländringar. Brott inträffar genom att summan av dessa vinkeländringstillskott blir så stor, att materialets deformationsförmåga överskrids.

En beräkning av de mot växelflytbrott och tillväxtflytbrott svarande lastvärdena förutsätter kännedom om momenttillståndet vid elastiska förhållanden och blir som en följd härav normalt tidsödande i jämförelse med en ordinär gränslastberäkning enligt de linjer, som angetts ovan i :86–:88. För det detaljerade genomförandet av sådana beräkningar för växelflytbrott och tillväxtflytbrott hänvisas i detta sammanhang till litteraturen på området. (Se t ex [43] och [51].)

För en vidare belysning av den skildrade problemställningen ges nedan en på i [43] genomförda kalkyler baserad, beskrivande analys av verkningssättet vid det i fig :88a visade lastfallet.

Från den i :88 A genomförda behandlingen är det bekant, att den mot en *engångslast* svarande gränslasten P_s för specialfallet $H=P$ har värdet

$$P_s = 3M_s/a \tag{a}$$

Utsätts konstruktionen i stället för en *upprepad last*, uppbyggd av följande lastcykler

$$\begin{cases} P = +P \to 0 \to 0 \quad \to 0 \to +P \text{ osv} \\ H = +P \to 0 \to -P \to 0 \to +P \text{ osv} \end{cases} \tag{b}$$

ger en beräkning, att för

$$P = P_s^v \geqslant 2{,}76M_s/a \tag{c}$$

kommer inspänningssnittet E att bli utsatt för omväxlande positivt och negativt flytmoment, $+M_s$ resp $-M_s$, vilket efter ett bestämt antal upprepade laster för till *växelflytbrott* i konstruktionen.

Angrips konstruktionen i stället av en upprepad last med följande lastcykler

$$\begin{cases} P = +P \to 0 \to 0 \to 0 \to +P \text{ osv} \\ H = +P \to 0 \to +P \to 0 \to +P \text{ osv} \end{cases} \tag{d}$$

kan, beroende på storleken av P, något av följande alternativ inträffa:

1 $P \leqslant 2{,}74M_s/a$. Efter den första lastcykeln med flytning i något eller några av snitten A, D och E uppför sig ramen för upprepade lastcykler helt elastiskt.

2 $2{,}74M_s/a < P \leqslant 2{,}86M_s/a$. Under varje lastcykel uppkommer en kvarstående tillväxt i plastisk vinkeländring i snitten D och E, då lasten $P=+P$ och $H=+P$ påförs, och i snittet A, då enbart lasten $H=+P$ påförs. Storleken av dessa vinkeländringstillskott avtar med antalet lastcykler och de totala kvarstående vinkeländringarna konvergerar mot bestämda gränsvärden.

3 $P > 2{,}86M_s/a = P_s^{tv}$. De kvarstående plastiska vinkeländringstillskotten blir för varje lastcykel lika stora, vilket medför totala kvarstående vinkeländringar, som med ökat antal lastcykler obegränsat tillväxer och för till *tillväxtflytbrott*.

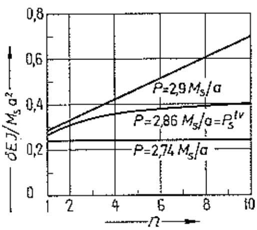


Fig :89

Förhållandena illustreras ytterligare av diagrammet i fig :89, vilket för olika P-värden ger den totalt kvarstående horisontalförskjutningen δ av BCD som funktion av antalet upprepade lastcykler n.

Av det ovan anförda framgår, att, om den i fig :88a visade ramen dimensioneras med en bestämd brottsäkerhet n för en *engångslast* P jämte H, där $H=P$, får den för en upprepad varierande last av typ enligt ekv (b) en brottsäkerhet mot *växelflytbrott* $n^v = 2{,}76/3n = 0{,}920n$, och för en upprepad varierande last av typ enligt ekv (d) en motsvarande brottsäkerhet mot *tillväxtflytbrott* $n^{tv} = (2{,}86/3)\,n = 0{,}953n$. Vid föreskrivet maximalvärde för lasten blir följaktligen brottsäkerheten något mindre, om lasten är av typen upprepad varierande än om den inkommer som en engångslast. Av detta får inte dras den slutsatsen, att en beräkning enligt ordinär gränslastmetod (:86–:88) vid byggnadskonstruktioner, för vilka normalt lasten är av typen upprepad varierande, generellt ger dimensioner på osäkra sidan. Som en gynnsam faktor för en beräkning enligt ordinär gränslastmetod i jämförelse med en mera komplicerad beräkning för växel- och tillväxtflytbrott tillkommer nämligen ordinärt förhållandet, att sannolikheten för att en föreskriven maximilast skall uppträda ett stort antal gånger som upprepad varierande, är mindre än sannolikheten för att den skall uppträda som en engångslast, vilket motiverar lägre brottsäkerheter vid brottyperna växel- och tillväxtflytbrott. Problemet har närmare analyserats i av Horne m fl publicerade arbeten, ur vilka allmänt kan dras slutsatsen, att — bortsett från typiska fall av utmattningslaster — resulterar en ordinär gränslastberäkning enligt :86–:88 vid normalt utformade byggnadskonstruktioner i sådana dimensionsförhållanden, att sannolikheten för konstruktionens sammanstörtande genom växelflytbrott eller tillväxtflytbrott blir mindre än sannolikheten för kollaps genom det till en engångslast hörande flytbrottet.

Litteratur

Castiglianos sats. Arbetsekvationer

[1] Asplund, S O: *Structural mechanics: classical and matrix methods.* Prentice-Hall, London–Sydney–Toronto–New Delhi–Tokyo 1966

[2] Borg, S F och Gennaro, J J: *Advanced structural analysis.* New York–London–Toronto 1965

[3] Broek, J A van den: *Elastic energy theory.* New York 1948

[4] Hannemann, I G: *Teknisk statik I.* Köpenhamn 1955

[5] Hirschfeld, K: *Baustatik.* Berlin–Heidelberg–New York 1965

[6] Matheson, J A L: *Hyperstatic structures.* Vol 1. London 1959. — Vol 2. London 1960

[7] Maugh, L C: *Statically indeterminate structures.* New York–London–Sydney 1964

[8] Nylander, H och Sahlin, S: *Statiskt obestämda stångsystem, balk- och ramkonstruktioner.* KTH, Institutionen för byggnadsstatik. Meddelande 80. Stockholm 1969

[9] Odqvist, F K G: *Hållfasthetslära.* Stockholm 1966

[10] Stüssi, F: *Vorlesungen über Baustatik.* Bd II. Basel 1954

[11] Timoshenko, S och Young, D H: *Theory of structures.* New York–London 1945

Elasticitetsekvationer

[1], [2], [4]–[11] jämte

[12] Fries, W: *Fachwerk und Rahmenwerk.* Berlin–Göttingen–Heidelberg 1953

[13] Guldan, R: *Rahmentragwerke und Durchlaufträger.* Wien 1959

[14] Ostenfeld, C: *Die Deformationsmethode.* Berlin 1926

Primärmomentmetoden

[1] jämte

[15a] Bjuggren, U: *Momentbestämning för den elastiskt inspända balken med konstant tröghetsmoment.* Teknisk tidskrift 1939 : 11. Stockholm

[15b] Efsen, A: *Die Methode der primären Momente.* Köpenhamn 1931. — *Primærmomentmetoden.* Köpenhamn 1950

[16] Ludvigson, B: *Beräkning av ramar och bågar enligt primärmomentmetoden.* Byggforskningen. Meddelande 7. Stockholm 1947

[17] Rygol, J: *Structural analysis by direct moment distribution.* London 1968

[18] Wästlund, G: *Primärmomentmetoden.* KTH, Institutionen för brobyggnad. Meddelande 1. Stockholm 1944

Cross' metod

[1], [2], [5]–[9], [11] jämte

[19] Barth, R: *Grundwerte für das Cross-Verfahren.* Berlin 1964

[20] Cross, H och Morgan, N D: *Continuous frames of reinforced concrete.* New York 1932

[21] Cross, H: *Arches, continuous frames, columns and conduits.* Urbana 1963

[22] Gere, J M: *Moment distribution*. New York–London–Toronto 1963

[23] Guldan, R: *Die Cross-Methode und ihre praktische Anwendung*. Wien 1955

[24] Hultin, S: *Beräkning av ramkonstruktioner medelst utjämningsberäkning*. Chalmeristernas handelsförening. Göteborg 1945

[25] Johansson, J: *Das Cross-Verfahren*. Berlin 1948

[26] Kani, G: *Analysis of multistory frames*. New York–London 1957

[27] Mörsch, E: *Das Cross'sche Verfahren*. Stuttgart 1947

[28] Raczat, G: *Das vervollständigte Cross-Verfahren in der Rahmenberechnung*. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962

Matrismetoder och systematiserad analys

[1], [8] jämte

[29] Argyris, J H, Kelsey, S och Kamel, H: *Matrix methods in structural analysis*. London 1964

[30] Argyris, J H och Kelsey, S: *Energy theorems and structural analysis*. London 1968

[31] Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G och Hackett, R M: *Computer methods of structural analysis*. Prentice Hall, New Jersey 1970

[32] Bengtsson, Å och Wolf, J P: *Ein neues Berechnungshilfsmittel für Statiker*. Neuen Zürcher Zeitung, 11 maj 1970

[33] Gere, J M och Weaver, W: *Analysis of framed structures*. Princeton, New Jersey–Toronto–New York–London 1965

[34] Hall, A S och Woodhead, R W: *Frame analysis*. New York–London 1967

[35] Jenkins, W M: *Matrix and digital computer methods in structural analysis*. London 1969

[36] Livesley, R K: *Matrix methods in structural analysis*. Oxford–London–Edinburgh–Paris–Frankfurt–New York 1964

[37] Pipes, L A och Hovanessian, S A: *Matrix-computer methods in engineering*. New York–London–Sydney–Toronto 1969

[38] Robinson, J: *Structural matrix analysis for the engineer*. New York–London–Sydney 1966

[39] Sundstrand, A: *Beräkningssystem för strukturanalys*. Akademisk avhandling. KTH. Stockholm 1964

[40] Willems, N och Lucas, W M: *Matrix analysis for structural engineers*. London–Sydney–Toronto–New Delhi–Tokyo 1968

Gränslastmetod

[2] jämte

[41] Baehre, R: *Das Tragverhalten von biegungsbeanspruchten statisch bestimmten und unbestimmten Balken aus elastoplastischem Material*. Acta polytechnica scandinavica, Ci 51, Stockholm 1968

[42] Baker, A L L: *Limit state design of reinforced concrete*. London 1971

[43] Baker, J F, Horne, M R och Heyman, J: *The steel skeleton*. Vol II. Cambridge 1956

[44] Baker, J F och Heyman, J: *Plastic design of frames. 1 Fundamentals*. Cambridge 1969. — Heyman, J: *Plastic design of frames. 2 Applications*. Cambridge 1971

[45] Beedle, L S: *Plastic design of steel frames*. New York–London–Sidney 1964

[46] Broek, J A van den: *Theory of limit design*. New York 1948

[47] Daniels, S R: *Inelastic steel structures*. University of Tennessee 1966

[48] Horne, M R: *Plastic theory of structures*. London 1971

[49] Johansen, K W m fl: *Undersøgelser over stålkonstruktioners bæreevne*. Danmarks tekniske højskole, Laboratoriet for bygningsteknik. Meddelelse 3. Köpenhamn 1954

[50] Lin, T H: *Theory of inelastic structures*. New York 1968

[51] Neal, B G: *The plastic methods of structural analysis*. London 1963

[52] Dyrbye, C: *Kontinuerlige, elasto-plastiske bjælker med gentagne, overkørende belastninger*. Polyteknisk Forlag. Köpenhamn 1969

[53] Mikkola, M: *An analysis of physically nonlinear structures*. Statens tekniska forskningsanstalt, Publikation 112. Helsingfors 1966

[54] Nylander, H och Sahlin, S: *Undersökning av kontinuerliga betongbalkar vid långtgående betongstukning*. Betong 1955: 3, s 241. Stockholm

[55] Phillips, A: *Introduction to plasticity*. New York 1956

[56] Reckling, K A: *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*. Berlin–Heidelberg–New York 1967

[57] Samuelsson, A: *Flytledsteori för balkar och ramar av stål och betong*. CTH, Institutionen för byggnadsstatik. Intern skrift 15. Göteborg 1965

Tabellgrupp

Allmänna beteckningar:

A och a samt B och b = vänster respektive höger upplag eller ände

l = teoretisk spännvidd

R = stödreaktion

T = tvärkraft

M = moment

$w = \frac{\Theta^0}{\beta^0} = \frac{\Theta^0 6EI}{l}$, där Θ^0 är stödvinkeländringen

(jfr 161:32 **B**)

y = nedböjning

M_1, y_1 osv betecknar moment respektive nedböjning i punkt 1

M^{0-1}, y^{0-1} osv betecknar moment respektive nedböjning på sträckan 0 – 1

w_a, w_b hänför sig till vänster respektive höger upplag

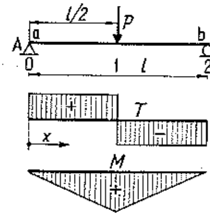
Tabell 1:38. Enkel tvåstödsbalk (y **och** w **vid konstant** I)

1

$R_A = \frac{P}{2}$ $\quad T_x^{0-1} = R_A$ $\quad M_x^{0-1} = \frac{Px}{2}$ $\quad y^{0-1} = \frac{Pl^2x}{16EI}\left(1 - \frac{4x^2}{3l^2}\right)$

$R_B = \frac{P}{2}$ $\quad T_x^{1-2} = -R_B$ $\quad M_x^{1-2} = \frac{P(l-x)}{2}$ $\quad y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$

$w_a = w_b = \frac{3Pl}{8}$ $\quad M_{max} = M_{mitt} = \frac{Pl}{4}$ $\quad$ för $x = 0{,}5\,l$



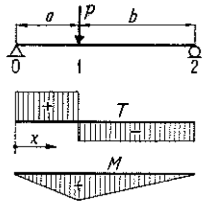
2

$R_A = \frac{Pb}{l}$ $\quad T_x^{0-1} = R_A$ $\quad w_a = Pb\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)$ $\quad M_x^{0-1} = \frac{Pbx}{l}$

$R_B = \frac{Pa}{l}$ $\quad T_x^{1-2} = -R_B$ $\quad w_b = Pa\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$ $\quad M_x^{1-2} = \frac{Pa(l-x)}{l}$

$y_{mitt} = \frac{Pa(3l^2 - 4a^2)}{48EI}$ $\quad (a < b)$ $\quad M_{max} = M_1 = \frac{Pab}{l}$

$y^{0-1} = \frac{Plbx}{6EI}\left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\quad y^{1-2} = \frac{Pla(l-x)}{6EI}\left(\frac{2x}{l} - \frac{a^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\quad y_1 = \frac{Pa^2b^2}{3EIl}$



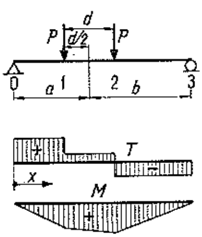
Beträffande R, T och M jfr 162:415 **A**. Beträffande y jfr 162:414 och tabell 1:49 **A**.

3

$R_A = \frac{2Pb}{l}$ $\quad T^{1-2} = \frac{2Pb}{l} - P$ $\quad M_1 = \frac{2Pb}{l}\left(a - \frac{d}{2}\right)$

$R_B = \frac{2Pa}{l}$ $\quad w_a = \frac{Pb}{l^2}\left[2a(l+b) - \frac{3}{2}d^2\right]$ $\quad M_2 = \frac{2Pa}{l}\left(b - \frac{d}{2}\right)$

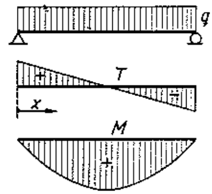
$R_{max} = P\left(2 - \frac{d}{l}\right)$ $\quad w_b = \frac{Pa}{l^2}\left[2b(l+a) - \frac{3}{2}d^2\right]$ $\quad M_x^{1-2} = R_A x - P\left(x - a + \frac{d}{2}\right)$



Vid givet lastläge inträffar M_{max} under den av krafterna som står närmast spännviddens mitt.
Är kraftparet rörligt skall det för erhållande av farligaste lastläge uppställas så att en av krafterna står symmetriskt med resultanten i förhållande till spännviddens mitt. Se 162:415 **C**.
Vid specialfallet $a = b$ blir

$$w_a = w_b = \frac{3Pl}{4}\left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)$$

4



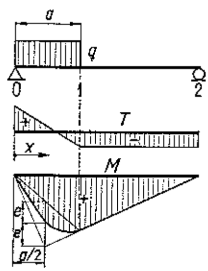
$$R_A = \frac{ql}{2} \qquad T_x = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \qquad M_x = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \qquad y = \frac{ql^3x}{24EI}\left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)$$

$$R_B = \frac{ql}{2} \qquad w_a = w_b = \frac{ql^2}{4} \qquad M_{max} = \frac{ql^2}{8} \text{ för } x = 0{,}5\,l \qquad y_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

för $x = 0{,}5\,l$

x/l	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
M_x/M_{max}	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1,00	0,96	0,84	0,64	0,36	0
y/y_{max}	0	0,314	0,594	0,813	0,952	1,00	0,952	0,813	0,594	0,314	0

5



$$R_A = \frac{qa(2l-a)}{2l} \qquad T_x^{0-1} = R_A - qx \qquad M_x^{0-1} = R_A x - \frac{qx^2}{2} \qquad w_a = \frac{qa^2}{l^2}\left(l - \frac{a}{2}\right)^2$$

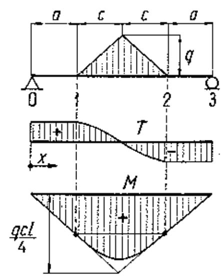
$$R_B = \frac{qa^2}{2l} \qquad T_x^{1-2} = -R_B \qquad M_1 = \frac{qa^2(l-a)}{2l} \qquad w_b = \frac{qa^2}{2l^2}\left(l^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

M för $a/2$ fås grafiskt genom att de båda avstånden e görs lika

$$M_{max} = \frac{qa^2}{2}\left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 \quad \text{för} \quad x = a\left(1 - \frac{a}{2l}\right) < a$$

a/l	0,2	0,4	0,6	0,8
x/l	0,18	0,32	0,42	0,48
M_{max}/ql^2	0,0162	0,0512	0,0882	0,1152

6



$$M_1 = M_2 = \frac{qac}{2}$$

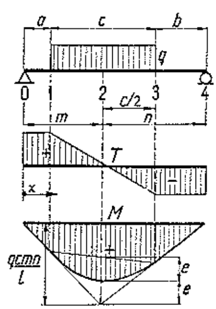
$$R_A = \frac{qc}{2} \qquad T_x^{1-2} = R_A - q(x-a)$$

$$M_x^{1-2} = \frac{qcx}{2} - \frac{q(x-a)^2}{2}$$

$$R_B = \frac{qc}{2} \qquad w_a = w_b = \frac{qc}{8l}(3l^2 - c^2)$$

$$M_{max} = M_{mitt} = \frac{qc}{2}\left(a + \frac{c}{4}\right)$$

7



$$R_A = \frac{qcn}{l} \qquad T_x^{1-3} = R_A - q(x-a) \qquad M_1 = \frac{qcna}{l} \qquad M_3 = \frac{qcmb}{l}$$

$$R_B = \frac{qcm}{l} \qquad w_a = qcn\left(1 - \frac{n^2}{l^2} - \frac{c^2}{4l^2}\right) \qquad M_x^{1-3} = \frac{qcnx}{l} - \frac{q(x-a)^2}{2}$$

$$w_b = qcm\left(1 - \frac{m^2}{l^2} - \frac{c^2}{4l^2}\right) \qquad M_{max} = \frac{qcn}{2l^2}(2al + cn)$$

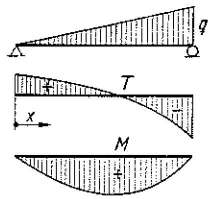
för $x = a + \dfrac{cn}{l}$

8

$R_A = \frac{ql}{6}$ $\quad T_x = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l}$ $\quad M_x = \frac{qlx}{6}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ $\quad y = \frac{ql^3x}{360EI}\left(7 - 10\frac{x^2}{l^2} + 3\frac{x^4}{l^4}\right)$

$R_B = \frac{ql}{3}$ $\quad w_a = \frac{7}{60}\ ql^2$ $\quad M_{max} = 0{,}064ql^2$ för $x = 0{,}577l$ $\quad y_{max} = 0{,}00652\frac{ql^4}{EI}$ för $x = 0{,}519l$

$w_b = \frac{8}{60}ql^2$ $\quad M_{mitt} = \frac{ql^2}{16}$ $\quad y_{mitt} = \frac{5ql^4}{768EI}$



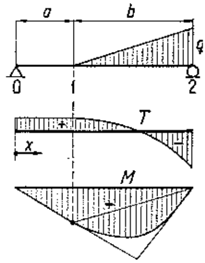
9

$R_A = \frac{qb^2}{6l}$ $\quad T_x^{1-2} = R_A - \frac{q(x-a)^2}{2b}$ $\quad M_1 = \frac{qab^2}{6l}$

$R_B = \frac{qb}{2}\left(1 - \frac{b}{3l}\right)$ $\quad w_a = \frac{qb^2}{60l^2}(10l^2 - 3b^2)$ $\quad M_x^{1-2} = R_A x - \frac{q(x-a)^3}{6b}$

$w_b = \frac{qb^2}{60l^2}(20l^2 - 15lb + 3b^2)$ $\quad M_{max} = R_A\left(a + \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3l}}\right)$

för $x = a + b\sqrt{\frac{b}{3l}}$



10

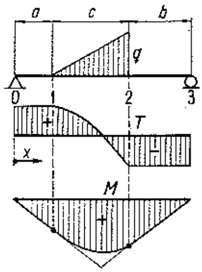
$R_A = \frac{qc\left(b + \frac{c}{3}\right)}{2l}$ $\quad R_B = \frac{qc\left(a + \frac{2c}{3}\right)}{2l}$ $\quad M_1 = R_A a$

$M_x^{1-2} = R_A x - \frac{q(x-a)^3}{6c}$

$T_x^{1-2} = R_A - \frac{q(x-a)^2}{2c}$ $\quad M_2 = R_B b$

$w_a = \frac{qc}{60l^2}[20b^2(3a+2c) + 10a^2(3b+c) + c^2(35b+20a+7c) + 80abc]$

$w_b = \frac{qc}{60l^2}[10b^2(3a+2c) + 20a^2(3b+c) + c^2(40b+25a+8c) + 100abc]$

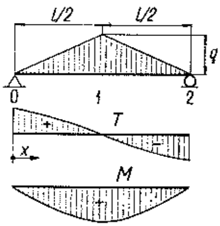


11

$R_A = \frac{ql}{4}$ $\quad T_x^{0-1} = R_A - \frac{qx^2}{l}$ $\quad M_x^{0-1} = \frac{qlx}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{3l^2}\right)$

$R_B = \frac{ql}{4}$ $\quad w_a = w_b = \frac{5ql^2}{32}$ $\quad M_{max} = \frac{ql^2}{12}$ för $x = 0{,}5l$

$y^{0-1} = \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{5x}{8l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2x^5}{5l^5}\right)$ $\quad y_{max} = \frac{ql^4}{120EI}$ för $x = 0{,}5l$

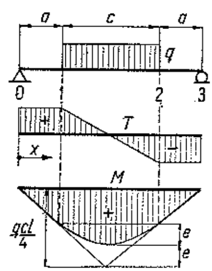


12

$R_A = \frac{qc}{2}$ $\quad T_x^{1-2} = R_A - \frac{q(x-a)^2}{2c}$ $\quad M_x^{1-2} = \frac{qcx}{2} - \frac{q(x-a)^3}{6c}$

$R_B = \frac{qc}{2}$ $\quad$ för $a \leq x \leq a + c$ $\quad$ för $a \leq x \leq a + c$

$w_a = w_b = \frac{qc}{8l}(3l^2 - 2c^2)$ $\quad M_{max} = M_2 = \frac{qc}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{c}{3}\right)$

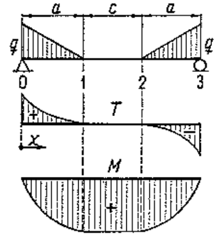


13

$$R_A = \frac{qa}{2} \qquad T_x^{0-1} = \frac{q(a-x)^2}{2a} \qquad M_x^{0-1} = \frac{qa^2}{6}\left[1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^3\right]$$

$$R_B = \frac{qa}{2} \qquad T^{1-2} = 0 \qquad M^{1-2} = M_{max} = \frac{qa^2}{6}$$

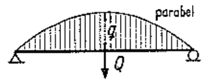
$$w_a = w_b = \frac{qa^2}{4l}(2l-a)$$



14

$$R_A = \frac{Q}{2} \qquad T_x = \frac{Q}{2}\left(1-6\frac{x^2}{l^2}+4\frac{x^3}{l^3}\right) \qquad M_x = \frac{Ql}{2}\left(\frac{x}{l}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$$

$$R_B = \frac{Q}{2} \qquad w_a = w_b = \frac{3}{10}Ql \qquad M_{max} = \frac{5}{32}Ql \text{ för } x = 0{,}5l \qquad Q = \frac{2}{3}ql$$

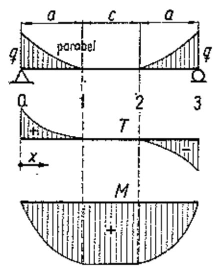


15

$$R_A = \frac{qa}{3} \qquad T_x^{0-1} = \frac{q(a-x)^3}{3a^2} \qquad M_x^{0-1} = \frac{qa^2}{12}\left[1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^4\right]$$

$$R_B = \frac{qa}{3} \qquad T^{1-2} = 0 \qquad M^{1-2} = M_{max} = \frac{qa^2}{12}$$

$$q_x^{0-1} = q\frac{(a-x)^2}{a^2} \qquad w_a = w_b = \frac{qa^2}{4} - \frac{qa^3}{10l}$$



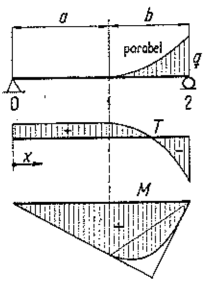
16

$$R_A = \frac{qb^2}{12l} \qquad T_x^{0-1} = \frac{qb^2}{12l} \qquad M_1 = \frac{qab^2}{12l}$$

$$R_B = \frac{qb}{3}\left(1-\frac{b}{4l}\right) \qquad T_x^{1-2} = \frac{qb^2}{12l} - \frac{q(x-a)^3}{3b^2} \qquad M_x^{1-2} = R_A x - \frac{q(x-a)^4}{12b^2}$$

$$q_x = \frac{q(x-a)^2}{b^2} \qquad M_{max} = R_A\left[a+\frac{3}{4}b\sqrt[3]{\frac{b}{4l}}\right] \quad \text{för } x = a+b\sqrt[3]{\frac{b}{4l}}$$

$$w_a = \frac{qb^2}{60}\left(5-\frac{b^2}{l^2}\right) \qquad w_b = \frac{qb^2}{60}\left(10-6\frac{b}{l}+\frac{b^2}{l^2}\right)$$



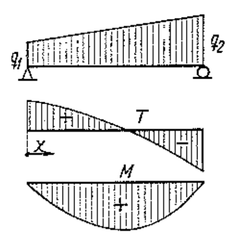
17

$$R_A = \frac{l}{6}(2q_1+q_2) \qquad R_B = \frac{l}{6}(2q_2+q_1) \qquad w_a = \frac{l^2}{60}(8q_1+7q_2)$$

$$T_x = R_A - q_1 x - (q_2-q_1)\frac{x^2}{2l} \qquad w_b = \frac{l^2}{60}(7q_1+8q_2)$$

$$M_x = R_A x - q_1\frac{x^2}{2} - (q_2-q_1)\frac{x^3}{6l}$$

Beroende på förhållandet q_2/q_1 fås M_{max} för x mellan $0{,}5l$ och $0{,}577l$



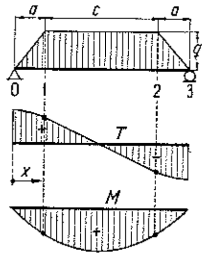
18

$R_A = q\dfrac{a+c}{2}$ $\quad T_1 = \dfrac{qc}{2}$ $\quad M_1 = R_A a - \dfrac{qa^2}{6}$

$R_B = q\dfrac{a+c}{2}$ $\quad T_x^{0-1} = R_A - \dfrac{qx^2}{2a}$ $\quad M_x^{0-1} = R_A x - \dfrac{qx^3}{6a}$

$T_x^{1-2} = q\left(\dfrac{c}{2} + a - x\right)$ $\quad M_x^{1-2} = R_A x - \dfrac{q}{2}\left(x^2 - ax + \dfrac{a^2}{3}\right)$

$w_a = w_b = \dfrac{ql(l+c)}{32}\left(5 - \dfrac{c^2}{l^2}\right)$ $\quad M_{max} = M_{mitt} = \dfrac{q}{24}[8a^2 + 3c(c+4a)]$

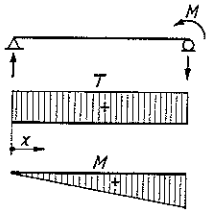


19

$R_A = \dfrac{M}{l}$ $\quad R_B = -\dfrac{M}{l}$ $\quad T_x = \dfrac{M}{l}$ $\quad M_x = M\dfrac{x}{l}$ $\quad w_a = M$ $\quad w_b = 2M$

$y = \dfrac{Mlx}{6EI}\left(1 - \dfrac{x^2}{l^2}\right)$ $\quad y_{max} = \dfrac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ för $x = 0{,}577l$ $\quad y_{mitt} = \dfrac{Ml^2}{16EI}$

x/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y/y_{max}	0,258	0,500	0,710	0,875	0,976	1,0	0,930	0,750	0,445



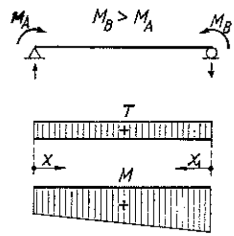
20

$R_A = \dfrac{M_B - M_A}{l}$ $\quad T = \dfrac{M_B - M_A}{l}$ $\quad M_x = M_A + (M_B - M_A)\dfrac{x}{l}$

$R_B = -\dfrac{M_B - M_A}{l}$ $\quad T$ är positiv om $M_B > M_A$ $\quad w_a = 2M_A + M_B$ $\quad w_b = 2M_B + M_A$

$y = \dfrac{l}{6EI}\left[M_A x_1\left(1 - \dfrac{x_1^2}{l^2}\right) + M_B x\left(1 - \dfrac{x^2}{l^2}\right)\right]$

Beroende på förhållandet M_A/M_B varierar läget för y_{max} mellan 0,5l och 0,577l ($M_B > M_A$)



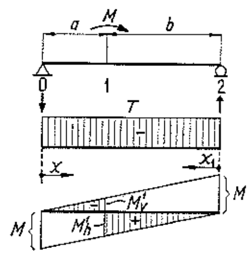
21

$R_A = -\dfrac{M}{l}$ $\quad M_x^{0-1} = -M\dfrac{x}{l}$ $\quad w_a = M\left(3\dfrac{b^2}{l^2} - 1\right)$

$R_B = +\dfrac{M}{l}$ $\quad M_x^{1-2} = +\dfrac{M(l-x)}{l}$ $\quad w_b = -M\left(3\dfrac{a^2}{l^2} - 1\right)$

$T = -\dfrac{M}{l}$ $\quad M'_v = -M\dfrac{a}{l}$ $\quad y^{0-1} = -\dfrac{Mlx}{6EI}\left(1 - \dfrac{x^2}{l^2} - \dfrac{3b^2}{l^2}\right)$

$M'_h = +M\dfrac{b}{l}$ $\quad y^{1-2} = \dfrac{Mlx_1}{6EI}\left(1 - \dfrac{x_1^2}{l^2} - \dfrac{3a^2}{l^2}\right)$

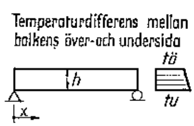


22

$R = 0$ $\quad w_a = w_b = \dfrac{3EI\alpha\Delta t}{h}$ $\quad y = \dfrac{\alpha\Delta t l^2}{2h}\left(\dfrac{x}{l} - \dfrac{x^2}{l^2}\right)$ $\quad y_{max} = \dfrac{\alpha\Delta t l^2}{8h}$

$T = 0$ $\quad \Delta t = t_u - t_ö$ $\quad \alpha$ = längdutvidgningskoefficient $\quad$ för $x = 0{,}5l$

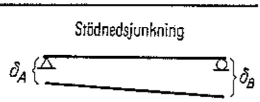
$M = 0$



23

$R = 0$ $\quad M = 0$ $\quad w_a = \dfrac{6EI}{l^2}(\delta_B - \delta_A)$ $\quad w_b = -\dfrac{6EI}{l^2}(\delta_B - \delta_A)$

$T = 0$



Tabell 1: 39. Ensidigt fast inspänd balk med konstant tröghetsmoment

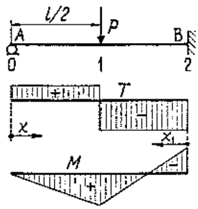
Generellt gäller $M_B = -\dfrac{w_b}{2}$ där w_b erhålls ur tabell 1: 38

1

$R_A = \dfrac{5P}{16}$ $\quad T^{0-1} = R_A$ $\quad M_B = M_{min} = -\dfrac{3Pl}{16}$ $\quad y_1 = \dfrac{7Pl^3}{768EI}$

$R_B = \dfrac{11P}{16}$ $\quad T^{1-2} = -R_B$ $\quad M_1 = \dfrac{5Pl}{32}$ $\quad y_{max} = \dfrac{Pl^3}{107EI}$

$y^{0-1} = \dfrac{Pl^2x}{32EI}\left(1 - \dfrac{5x^2}{3l^2}\right)$ $\quad y^{1-2} = \dfrac{Plx_1^2}{32EI}\left(3 - \dfrac{11x_1}{3l}\right)$ $\quad$ för $x = 0{,}447l$



2

$R_A = \dfrac{Pb^2}{2l^2}\left(3 - \dfrac{b}{l}\right)$ $\quad T^{0-1} = R_A$ $\quad M_1 = \dfrac{Pb^2a}{2l^2}\left(2 + \dfrac{a}{l}\right)$

$R_B = \dfrac{Pa}{2l}\left(3 - \dfrac{a^2}{l^2}\right)$ $\quad T^{1-2} = -R_B$ $\quad M_B = -\dfrac{Pa}{2}\left(1 - \dfrac{a^2}{l^2}\right)$

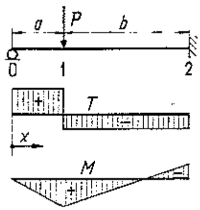
$$y^{0-1} = \frac{Pb^2x}{12EI}\left[3\frac{a}{l} - \left(2 + \frac{a}{l}\right)\frac{x^2}{l^2}\right]$$

$$y^{1-2} = \frac{Pa(l-x)^2}{12EI}\left[3\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) - \left(3 - \frac{a^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]$$

$$y_1 = \frac{Pa^2b^3}{12EIl^2}\left(4 - \frac{b}{l}\right)$$

Maximal nedböjning under P: $y_{1max} = \dfrac{Pl^3}{102EI}$ för $b = 0{,}59l$

Beträffande R och M, jfr tabell 1:49 **B**

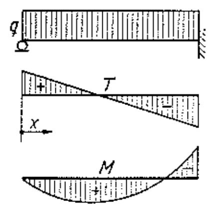


3

$R_A = \dfrac{3ql}{8}$ $\quad M_B = -\dfrac{ql^2}{8}$ $\quad y = \dfrac{ql^3x}{48EI}\left(1 - 3\dfrac{x^2}{l^2} + 2\dfrac{x^3}{l^3}\right)$

$R_B = \dfrac{5ql}{8}$ $\quad M_x = \dfrac{qlx}{2}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{l}\right)$ $\quad y_{mitt} = \dfrac{ql^4}{192EI}$

$T_x = R_A - qx$ $\quad +M_{max} = \dfrac{9}{128}ql^2$ för $x = 0{,}375l$ $\quad y_{max} = \dfrac{ql^4}{185EI}$ för $x = 0{,}42l$

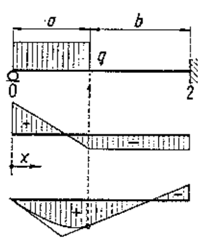


4

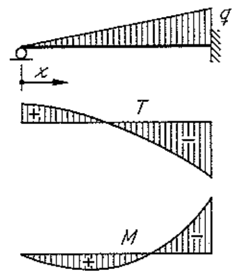
$R_A = \dfrac{qa}{8}\left(8 - \dfrac{6a}{l} + \dfrac{a^3}{l^3}\right)$ $\quad M_B = -\dfrac{qa^2}{8}\left(2 - \dfrac{a^2}{l^2}\right)$

$R_B = \dfrac{qa^2}{8l}\left(6 - \dfrac{a^2}{l^2}\right)$ $\quad M_x^{0-1} = R_A x - \dfrac{qx^2}{2}$

$M_x^{1-2} = R_A x - qa\left(x - \dfrac{a}{2}\right)$



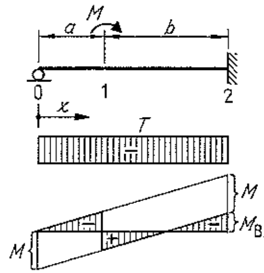
5



$$R_A = \frac{ql}{10} \qquad T_x = \frac{ql}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{x^2}{l^2}\right) \qquad M_x = \frac{qlx}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{x^2}{3l^2}\right)$$

$$R_B = \frac{2ql}{5} \qquad M_B = -\frac{ql^2}{15} \qquad M_{\max} = 0{,}0298\, ql^2 \text{ för } x = 0{,}447\, l$$

6

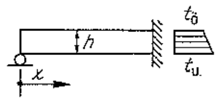


$$R_A = \frac{M}{2l}\left(\frac{3a^2}{l^2} - 3\right) \qquad T_x = R_A \qquad M_x^{0-1} = \frac{Mx}{2l}\left(\frac{3a^2}{l^2} - 3\right)$$

$$R_B = -R_A \qquad M_B = \frac{M}{2}\left(\frac{3a^2}{l^2} - 1\right) \qquad M_x^{1-2} = \frac{Mx}{2l}\left(\frac{3a^2}{l^2} - 3\right) + M$$

7

Temperaturdifferens mellan balkens över- och undersida



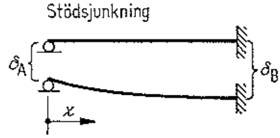
$$R_A = \frac{M_B}{l} \qquad T_x = R_A \qquad M_B = -\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$$

$$R_B = -R_A \qquad \Delta t = t_u - t_ö \qquad M_x = R_A\, x$$

α = längdutvidgningskoefficient

8

Stödsjunkning



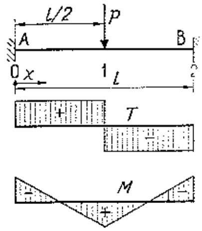
$$R_A = \frac{M_B}{l} \qquad T_x = R_A \qquad M_B = \frac{3EI}{l^2}(\delta_B - \delta_A)$$

$$R_B = -R_A \qquad M_x = R_A x$$

Tabell 1: 40. Dubbelsidigt fast inspänd balk med konstant tröghetsmoment

Generellt gäller $M_A = -\frac{1}{3}(2w_a - w_b)$ respektive $M_B = -\frac{1}{3}(2w_b - w_a)$, där w_a och w_b erhålls ur tabell 1:38

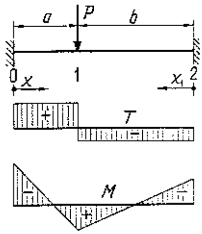
1



$R_A = \frac{P}{2}$ $\quad T^{0-1} = \frac{P}{2}$ $\quad M_A = -\frac{Pl}{8}$ $\quad y^{0-1} = \frac{Plx^2}{16EI}\left(1 - \frac{4x}{3l}\right)$

$R_B = \frac{P}{2}$ $\quad T^{1-2} = -\frac{P}{2}$ $\quad M_1 = \frac{Pl}{8}$ $\quad y_{max} = \frac{Pl^3}{192EI}$ för $x = 0{,}5l$

2



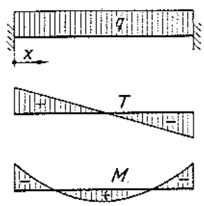
$R_A = \frac{Pb^2}{l^2}\left(1 + \frac{2a}{l}\right)$ $\quad T^{0-1} = R_A$ $\quad M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $\quad M_1 = +\frac{2Pa^2b^2}{l^3}$

$R_B = \frac{Pa^2}{l^2}\left(1 + \frac{2b}{l}\right)$ $\quad T^{1-2} = -R_B$ $\quad M_B = -\frac{Pba^2}{l^2}$

$y^{0-1} = \frac{Pax^2}{6EI}\left[3 - 6\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2} - \frac{x}{a}\left(1 - 3\frac{a^2}{l^2} + 2\frac{a^3}{l^3}\right)\right]$ $\quad y_1 = \frac{Pa^3b^3}{3EIl^3}$

Beträffande R och M, jfr tabell 1:49 **C**

3



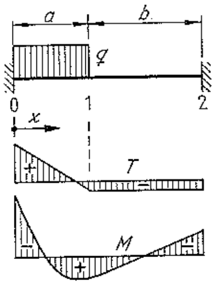
$R_A = \frac{ql}{2}$ $\quad M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$ $\quad y = \frac{ql^2x^2}{24EI}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$

$R_B = \frac{ql}{2}$ $\quad M_{mitt} = +\frac{ql^2}{24}$ $\quad y_{max} = \frac{ql^4}{384EI}$ för $x = 0{,}5l$

$T_x = \frac{ql}{2} - qx$ $\quad M_x = \frac{q}{2}\left(lx - x^2 - \frac{l^2}{6}\right)$

$M_x = 0$ för $x = 0{,}21\,l$

4



$R_A = qa\left(1 - \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^3}{2l^3}\right)$ $\quad T_x^{0-1} = R_A - qx$ $\quad M_A = -\frac{qa^2}{12}\left(3\frac{a^2}{l^2} - 8\frac{a}{l} + 6\right)$

$R_B = qa\left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{a^3}{2l^3}\right)$ $\quad T_x^{1-2} = R_A - qa$ $\quad M_B = -\frac{qa^3}{12l}\left(4 - 3\frac{a}{l}\right)$

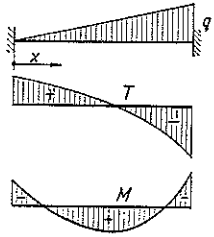
$M_x^{0-1} = M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2}$ $\quad M_x^{1-2} = M_B + R_B(l - x)$

5

$$R_A = \frac{3ql}{20} \qquad T_x = \frac{ql}{20}\left(3 - 10\frac{x^2}{l^2}\right) \qquad M_A = -\frac{ql^2}{30} \quad M_B = -\frac{ql^2}{20}$$

$$R_B = \frac{7ql}{20} \qquad M_x = \frac{ql^2}{60}\left(-2 + 9\frac{x}{l} - 10\frac{x^3}{l^3}\right)$$

$M_x = 0$ för $x = 0{,}237\,l$ och $x = 0{,}808l$ $\quad +M_{\max} = \dfrac{ql^2}{46{,}6}$ för $x = 0{,}548l$



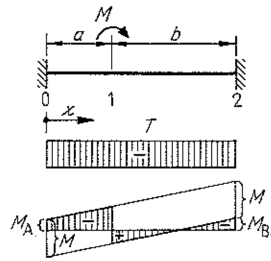
6

$$R_A = \frac{3M}{l}\left(\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{l^2} - 1\right) \qquad M_A = -M\left(\frac{a^2}{l^2} + \frac{2b^2}{l^2} - 1\right)$$

$$R_B = -R_A \qquad M_B = M\left(\frac{2a^2}{l^2} + \frac{b^2}{l^2} - 1\right)$$

$$T_x = R_A \qquad M_x^{0-1} = R_A x + M_A$$

$$M_x^{1-2} = R_A x + M_A + M$$



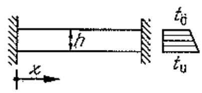
7

$$R_A = 0 \qquad T_x = 0 \qquad M_A = M_B = -\frac{EI\alpha\Delta t}{h} = M_x$$

$$R_B = 0 \qquad \Delta t = t_u - t_ö$$

α = längdutvidgningskoefficient

Temperaturdifferens mellan balkens över- och undersida



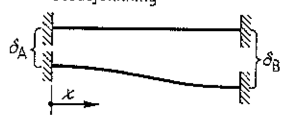
8

$$R_A = \frac{12EI}{l^3}(\delta_B - \delta_A) \qquad T_x = R_A \qquad M_A = -\frac{6EI}{l^2}(\delta_B - \delta_A)$$

$$R_B = -R_A \qquad M_B = \frac{6EI}{l^2}(\delta_B - \delta_A)$$

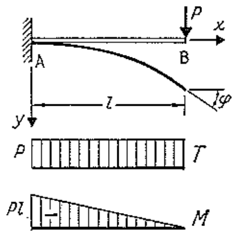
$$y = \delta_A + (\delta_B - \delta_A)\frac{x^2}{l^2}\left(3 - \frac{2x}{l}\right) \qquad M_x = M_A\left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

Stödsjunkning



Tabell 1: 41. Inspänd konsolbalk (y och φ gäller vid konstant I)

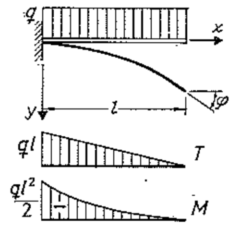
1



$R = P \qquad T = P \qquad M_x = -P(l-x) \qquad M_A = -Pl$

$$y = \frac{Pl^3}{3EI}\cdot\frac{x^2}{l^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{l}\right) \qquad y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI} \qquad \varphi = \frac{Pl^2}{2EI}$$

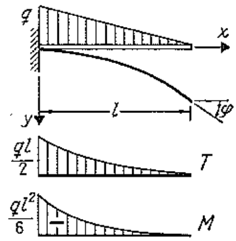
2



$$R = ql \qquad T_x = q(l-x) \qquad M_x = -\frac{q(l-x)^2}{2} \qquad M_A = -\frac{ql^2}{2}$$

$$y = \frac{ql^4}{8EI}\cdot\frac{x^2}{l^2}\left(2 - \frac{4}{3}\frac{x}{l} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{l^2}\right) \qquad y_{\max} = \frac{ql^4}{8EI} \qquad \varphi = \frac{ql^3}{6EI}$$

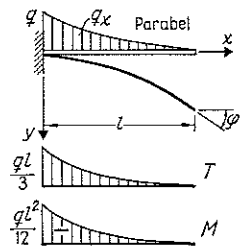
3



$$R = \frac{ql}{2} \qquad T_x = \frac{q(l-x)^2}{2l} \qquad M_x = -\frac{q(l-x)^3}{6l} \qquad M_A = -\frac{ql^2}{6}$$

$$y = \frac{ql^4}{30EI}\cdot\frac{x^2}{l^2}\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\frac{x}{l} + \frac{5}{4}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{4}\frac{x^3}{l^3}\right) \qquad y_{\max} = \frac{ql^4}{30EI} \qquad \varphi = \frac{ql^3}{24EI}$$

4



$$q_x = q\,\frac{(l-x)^2}{l^2} \qquad T_x = \frac{q(l-x)^3}{3l^2} \qquad M_x = -\frac{q(l-x)^4}{12l^2}$$

$$R = \frac{ql}{3} \qquad M_A = -\frac{ql^2}{12}$$

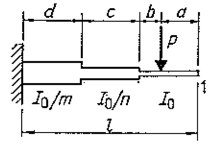
För $x = \dfrac{l}{2}$ är $\qquad T = \dfrac{R}{8} \qquad M = \dfrac{M_A}{16}$

$$y = \frac{ql^4}{72EI}\cdot\frac{x^2}{l^2}\left(3 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} - \frac{6}{5}\frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{5}\frac{x^4}{l^4}\right) \qquad y_{\max} = \frac{ql^4}{72EI} \qquad \varphi = \frac{ql^3}{60EI}$$

Tabell 1: 42. Inspänd konsolbalk med stegvis varierande tröghetsmoment, nedböjningar

Beträffande R, T och M, se tabell 1:41

1

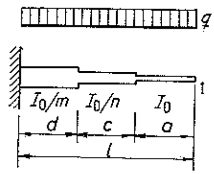


$$y_1 = (A + Bn + Cm)\frac{Pl^3}{3EI_0}$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{b^2}{l^2}\left(3\frac{a}{l} + 2\frac{b}{l}\right) \qquad B = \frac{1}{2}\frac{(b+c)^2}{l^2}\left(3\frac{a}{l} + 2\frac{b+c}{l}\right) - \frac{1}{2}\frac{b^2}{l^2}\left(3\frac{a}{l} + 2\frac{b}{l}\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{(b+c+d)^2}{l^2}\left(3\frac{a}{l} + 2\frac{b+c+d}{l}\right) - \frac{1}{2}\frac{(b+c)^2}{l^2}\left(3\frac{a}{l} + 2\frac{b+c}{l}\right)$$

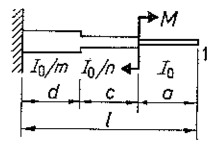
2



$$y_1 = (A + Bn + Cm)\frac{ql^4}{8EI_0} \qquad A = \frac{a^4}{l^4}$$

$$B = \frac{(a+c)^4}{l^4} - \frac{a^4}{l^4} \qquad C = 1 - \frac{(a+c)^4}{l^4}$$

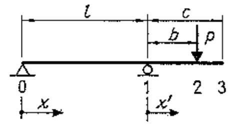
3



$$y_1 = (Bn + Cm)\frac{Ml^2}{2EI_0} \qquad B = \frac{c}{l}\cdot\frac{2a+c}{l} \qquad C = \frac{d}{l}\cdot\frac{2a+2c+d}{l}$$

Tabell 1: 43. Överkragande tvåstödsbalk med konstant tröghetsmoment, nedböjningar

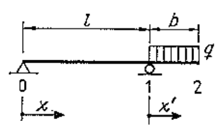
1



$$y^{0-1} = -\frac{Plbx}{6EI}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \qquad y^{1-2} = \frac{Px'}{6EI}(2bl + 3bx' - x'^2)$$

$$y_3 = \frac{Pb}{6EI}(2cl + 3bc - b^2)$$

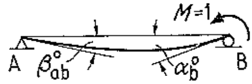
2



$$y^{0-1} = -\frac{qb^2lx}{12EI}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \qquad y^{1-2} = \frac{qx'}{24EI}(x'^3 - 4bx'^2 + 6b^2x' + 4b^2l)$$

$$y_2 = \frac{qb^3}{24EI}(3b + 4l)$$

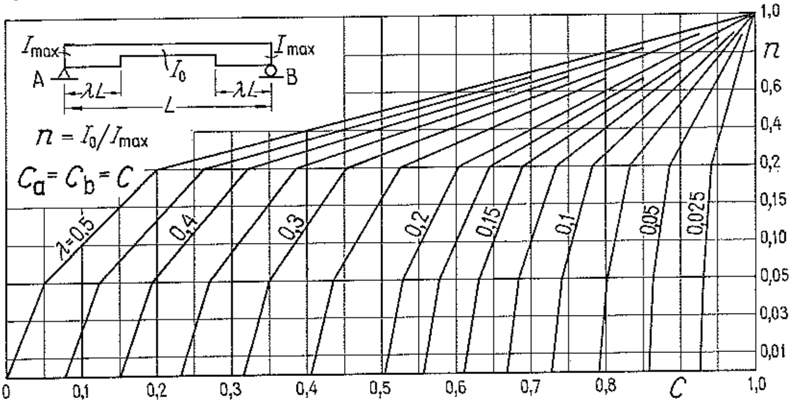
Tabell 1:44. Balkkonstanter* (jfr 161:32 A2)

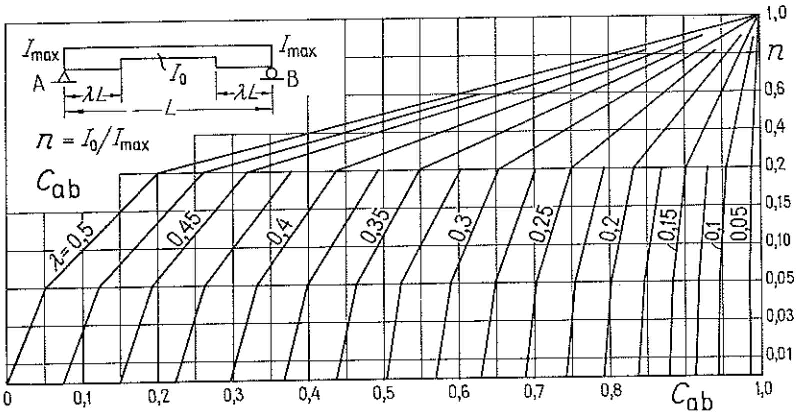


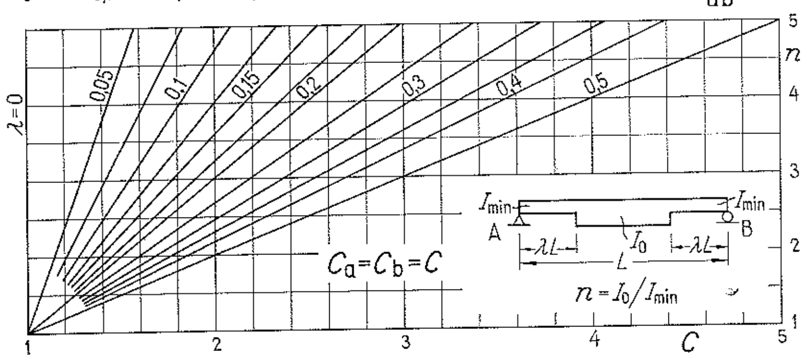
* *Kompletterat av professor O Pettersson*

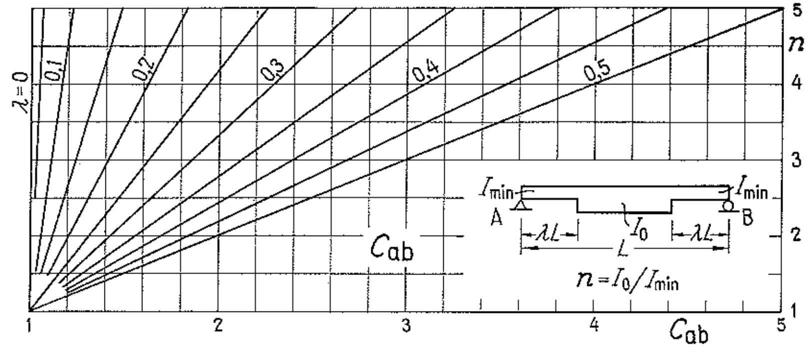
$$\alpha_a^0 = C_a \frac{L}{3EI_0} \qquad \beta_{ab}^0 = C_{ab} \frac{L}{6EI_0} \qquad \alpha_b^0 = C_b \frac{L}{3EI_0}$$

Symmetriska, raka voter

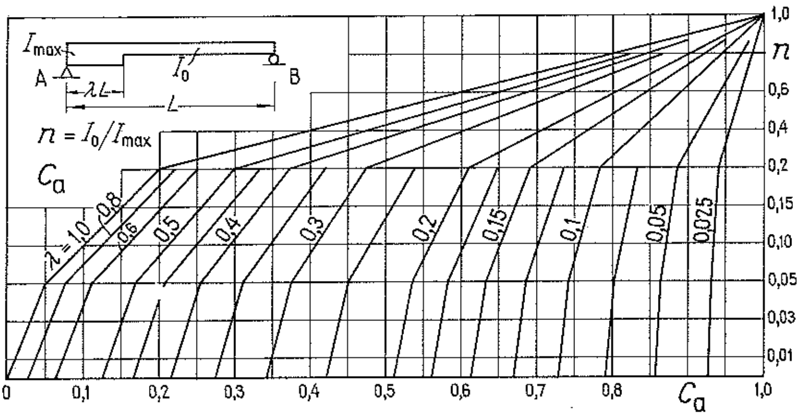


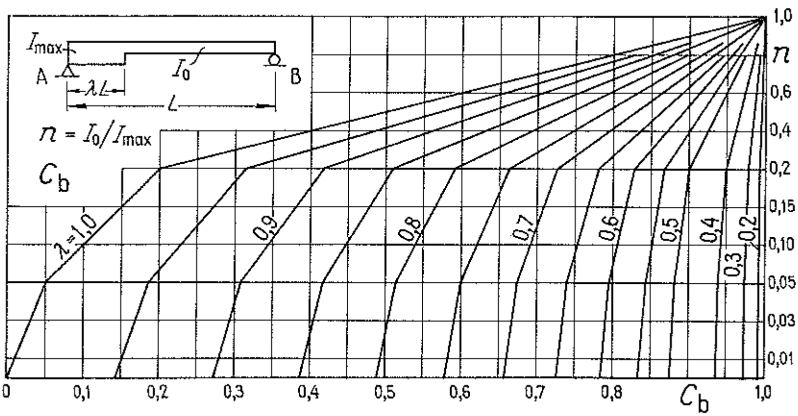


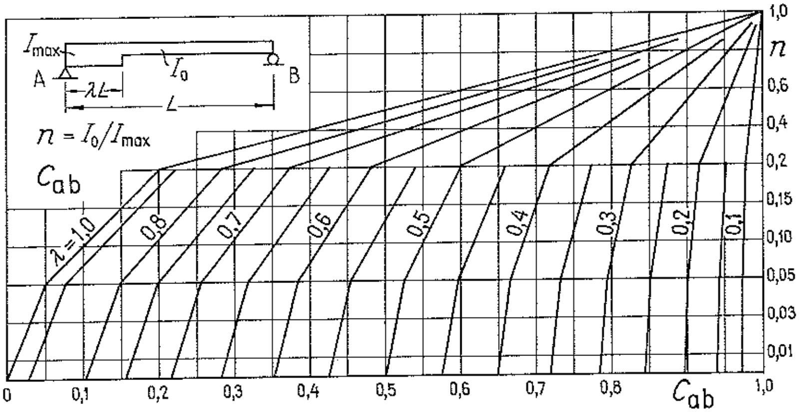




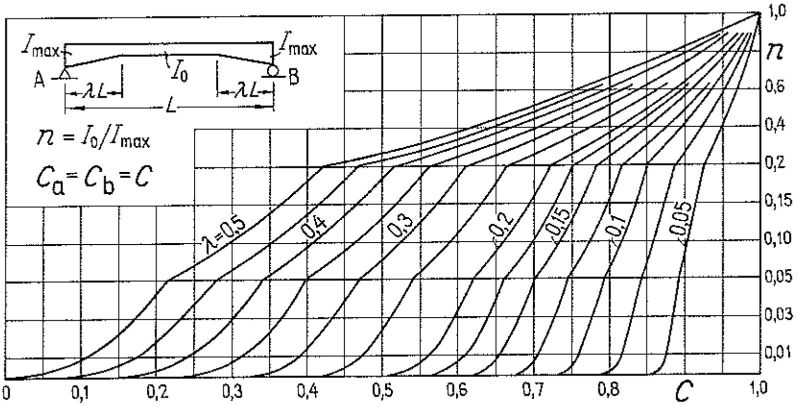
Ensidig, rak vot

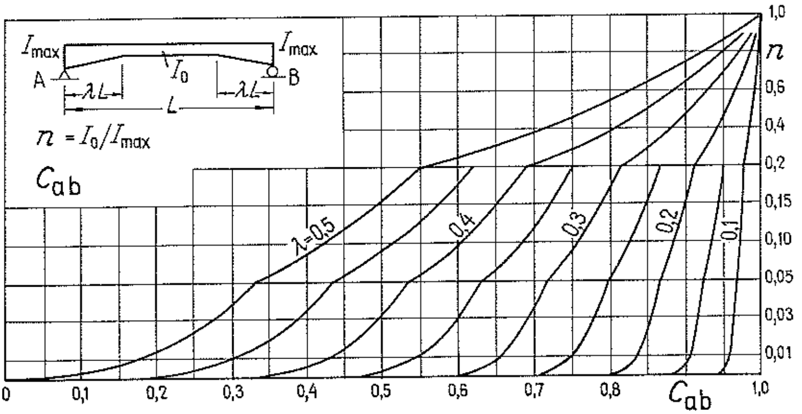




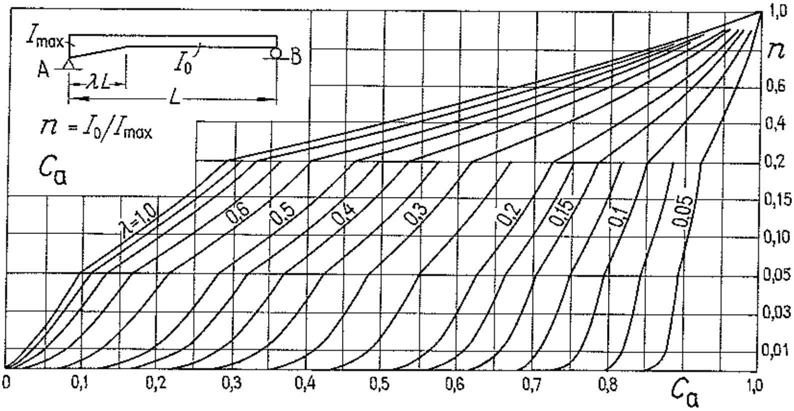


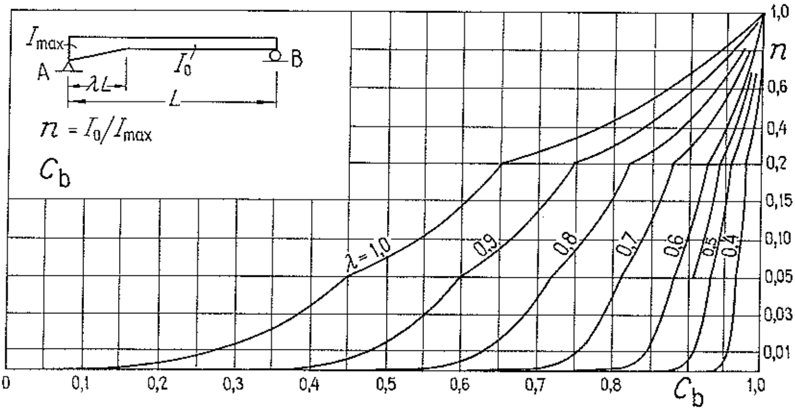
Symmetriska triangelvoter

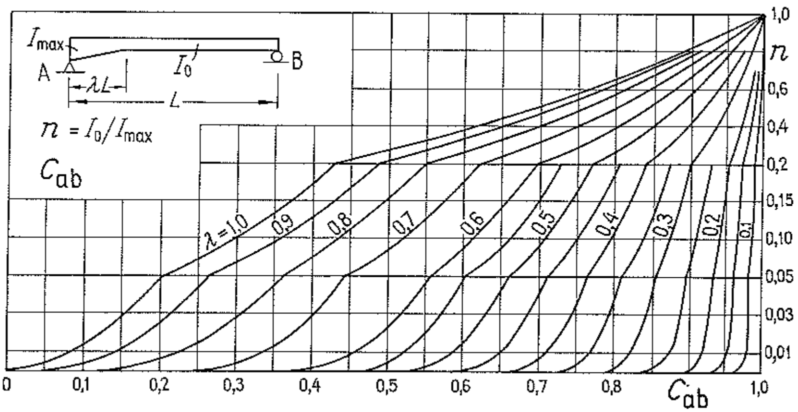




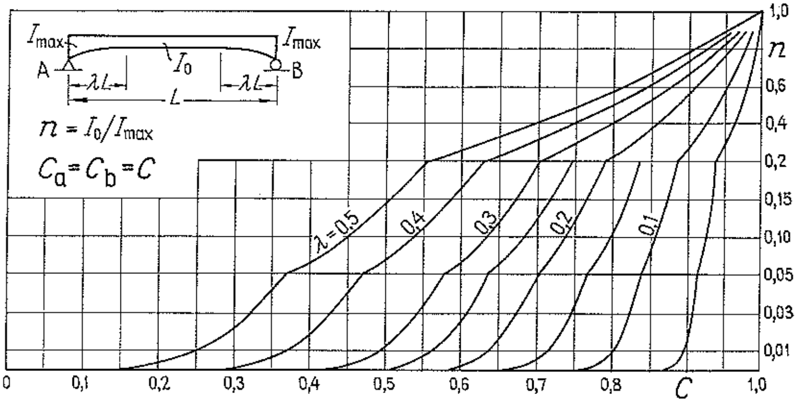
Ensidig triangelvot

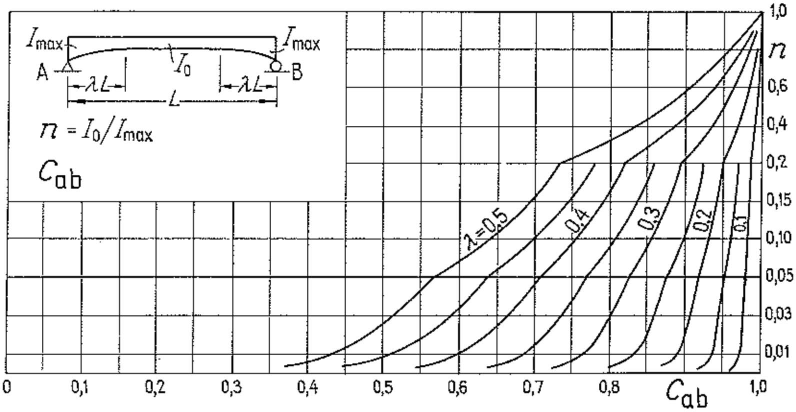




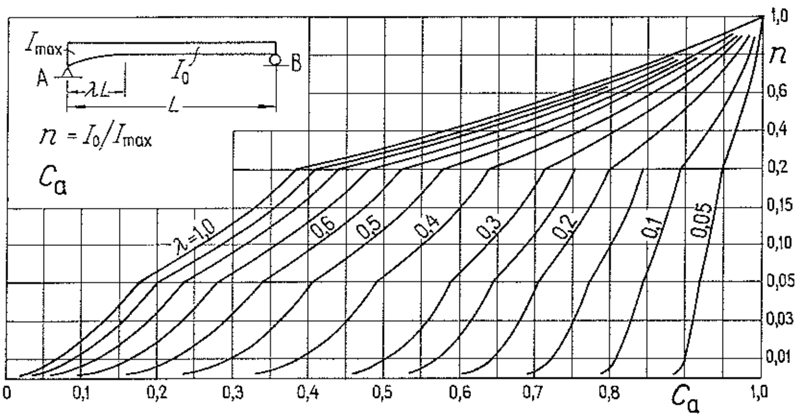


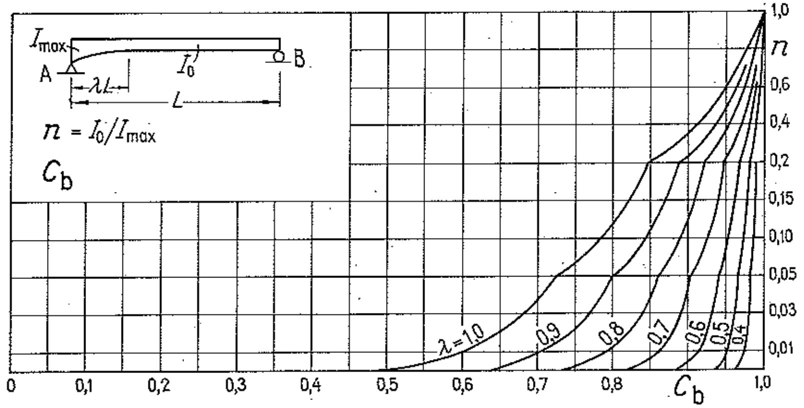
Symmetriska parabelvoter

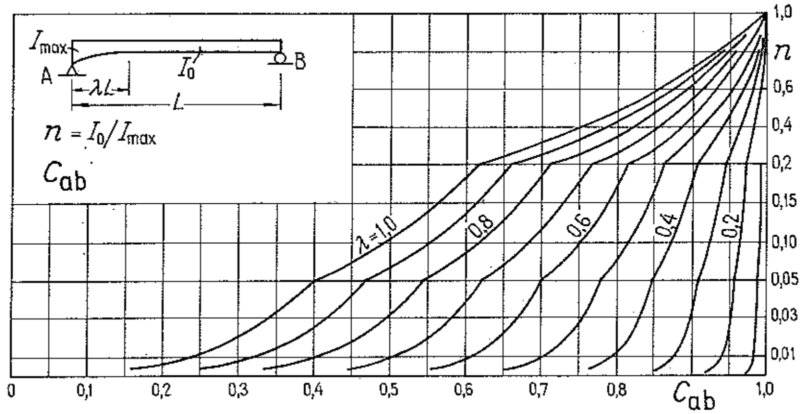




Ensidig parabelvot





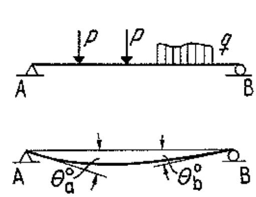


Tabell 1: 45. Lastkonstanter* (jfr 161: 32 B2)

* *Kompletterat av professor O Pettersson*

Θ_a^0 och Θ_b^0 är stödvinkeländringarna vid upplag A respektive B för den fritt upplagda balken AB, påverkad av aktuell yttre last.

I stället för en direkt redovisning av Θ_a^0 och Θ_b^0 anges nedan i diagramform storheterna $\dfrac{\Theta_a^0}{\beta_{ab}^0}$ och $\dfrac{\Theta_b^0}{\beta_{ab}^0}$, skrivna under formen dimensionslös koefficient K_a respektive K_b multiplicerad med faktor som enbart beror av last (q, P) och balklängd (L). Beträffande β_{ab}^0, se tabell 1:44.



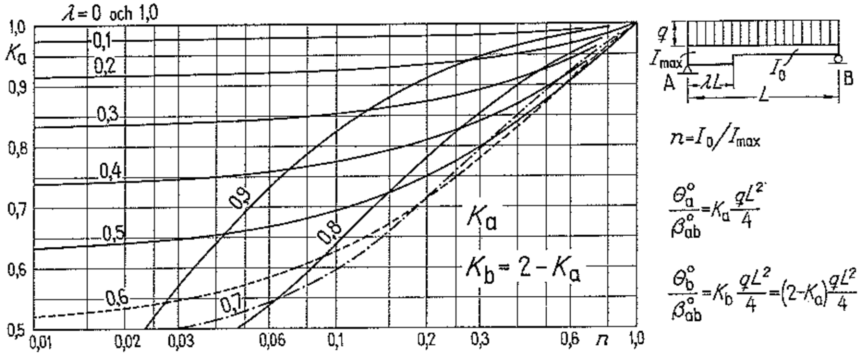
Jämnt fördelad last

Symmetriska voter

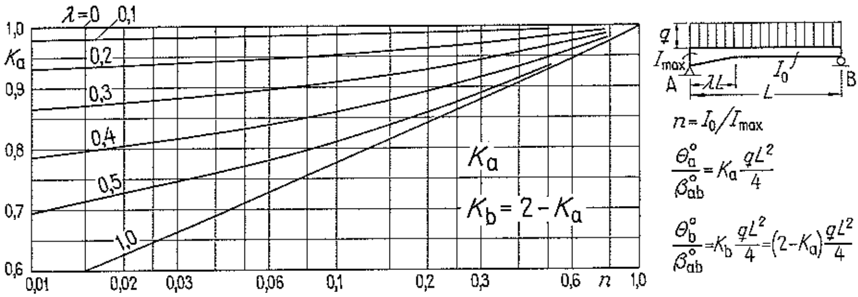
Vid symmetriska, godtyckligt utformade voter är enligt 161: 32 B2*a*

$$\frac{\Theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = \frac{\Theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = \frac{qL^2}{4} \quad \text{vilket innebär att } K_a = K_b = K = 1$$

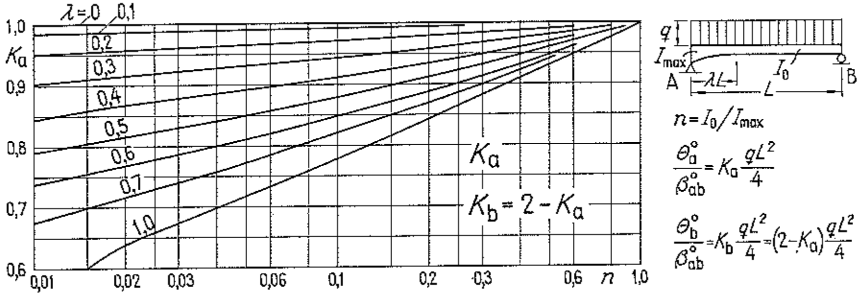
Ensidig, rak vot



Ensidig triangelvot



Ensidig parabelvot

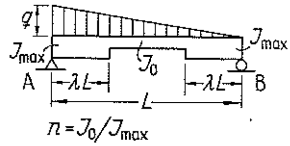


Triangulärt fördelad last

Symmetriska, raka voter

$$\Theta_a^0 = \frac{qL^3}{90EI_0}[2 - \lambda^2(15 - 20\lambda + 15\lambda^2 - 6\lambda^3)(1 - n)]$$

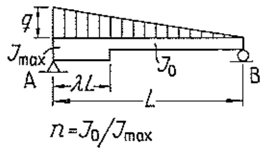
$$\Theta_b^0 = \frac{qL^3}{360EI_0}[7 - 2\lambda^2(15 + 10\lambda - 30\lambda^2 + 12\lambda^3)(1 - n)]$$



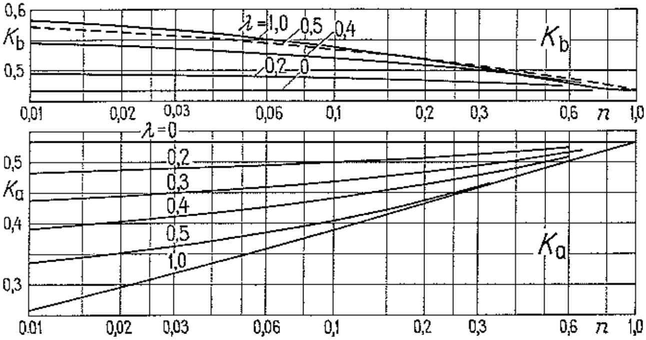
Ensidig, rak vot

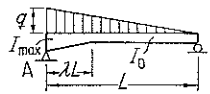
$$\Theta_a^0 = \frac{qL^3}{90EI_0}[(1 - \lambda)^3\{5 - 3(1 - \lambda)^2\}(1 - n) + 2n]$$

$$\Theta_b^0 = \frac{qL^3}{360EI_0}[(1 - \lambda)^2\{30 - 20(1 - \lambda) - 15(1 - \lambda)^2 + 12(1 - \lambda)^3\}(1 - n) + 7n]$$



Ensidig triangelvot (*Diagrammet uppgjort av H R Kivisild och U Müllersdorf*)





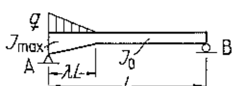
$n = I_0/I_{max}$

$$\frac{\Theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = K_b \frac{qL^2}{4}$$

$$\frac{\Theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = K_a \frac{qL^2}{4}$$

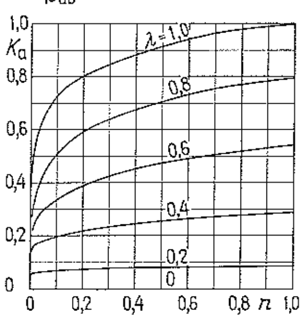
Last av voternas egenvikt

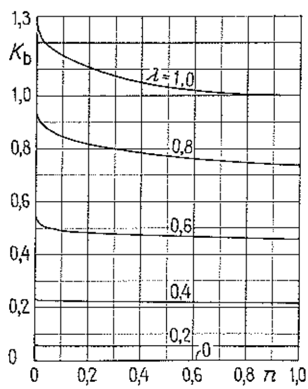
Då inverkan av voternas egenvikt normalt saknar betydelse vid dimensionering, har här endast tagits med uppgifter beträffande *triangelvoter.*

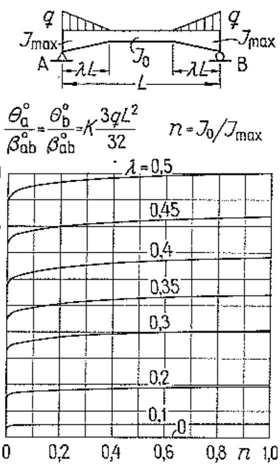


$$\frac{\Theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = K_a \frac{2qL^2}{15} \qquad n = J_0/J_{max}$$

$$\frac{\Theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = K_b \frac{7qL^2}{60}$$

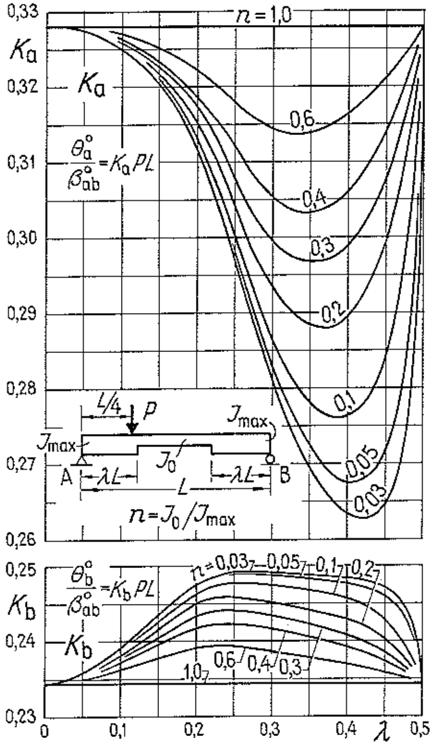


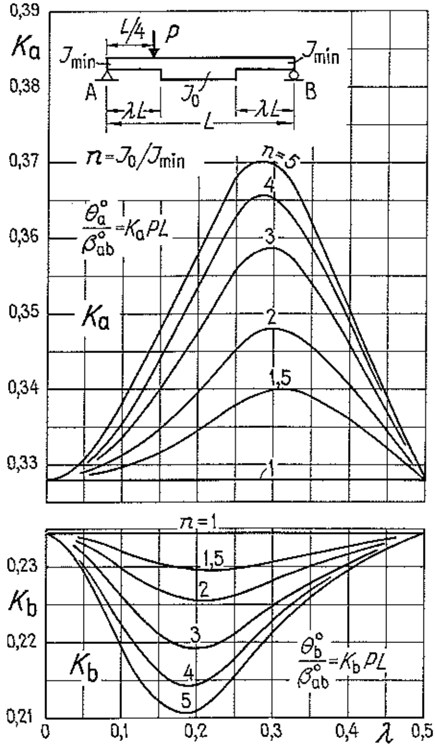


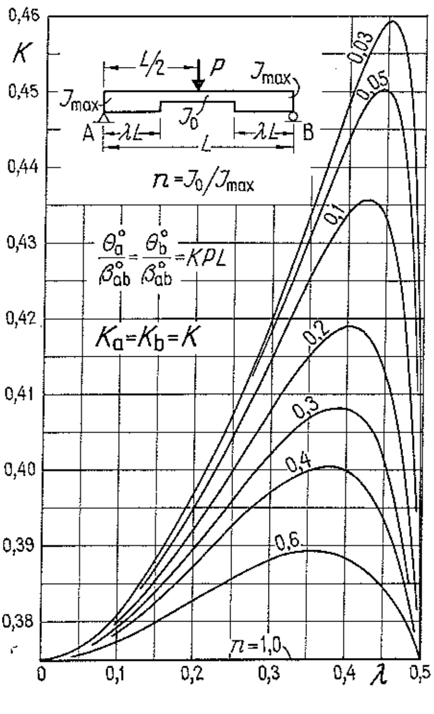


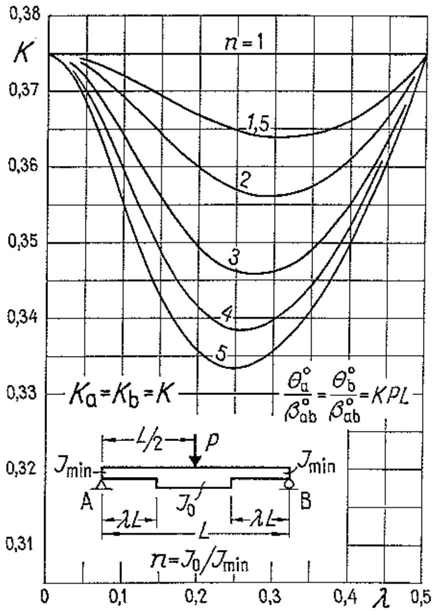
$$\frac{\Theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = \frac{\Theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = K \frac{3qL^2}{32} \qquad n = J_0/J_{max}$$

Symmetriska, raka voter

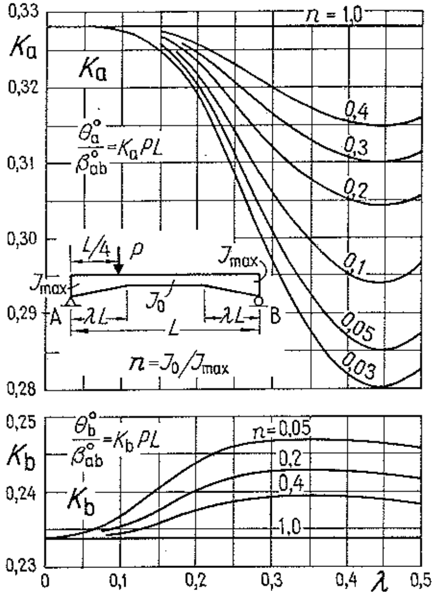


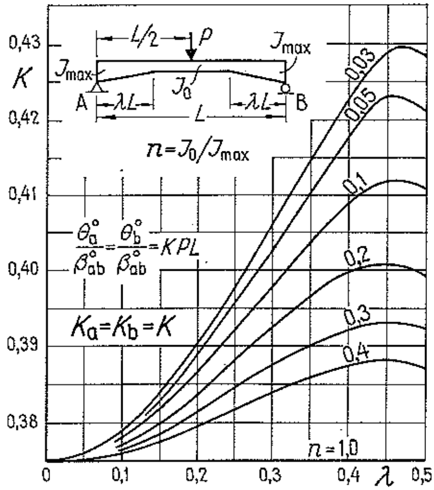




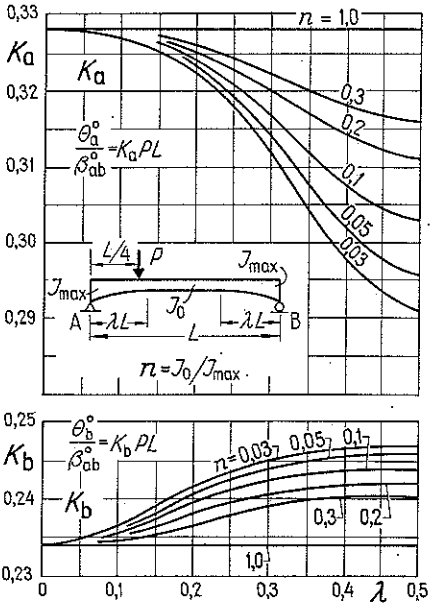


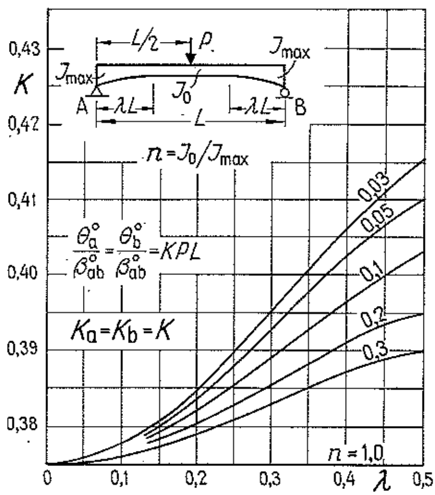
Symmetriska triangelvoter



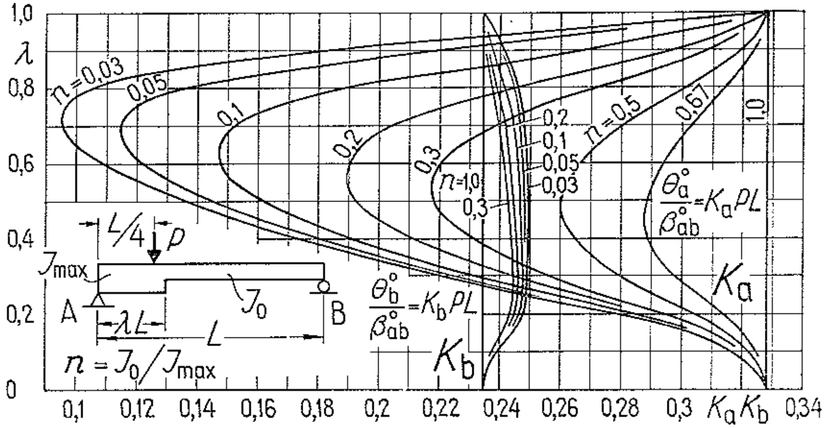


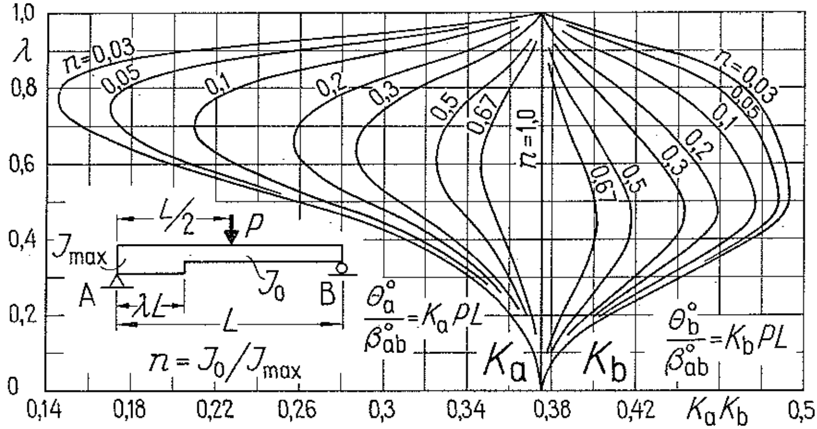
Symmetriska parabelvoter

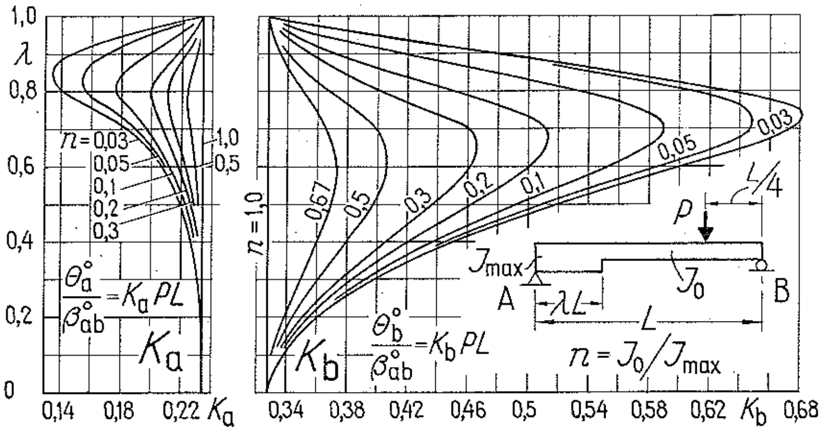




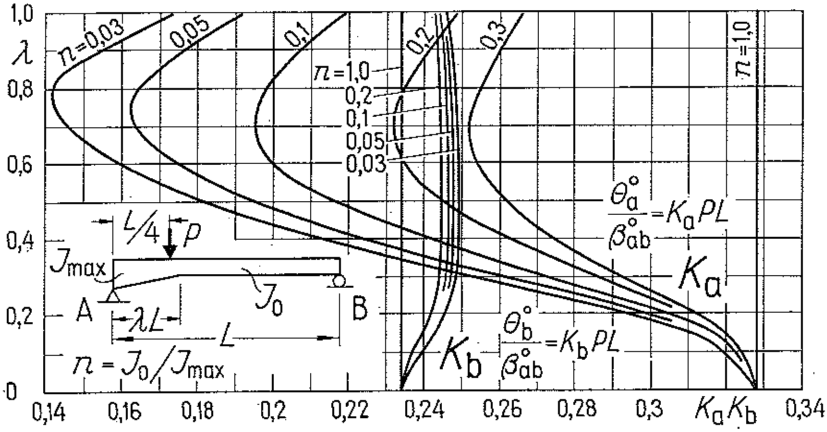
Ensidig, rak vot

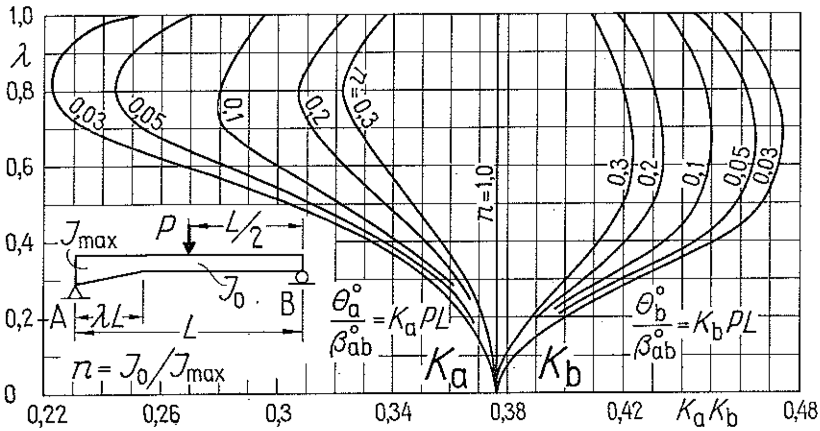


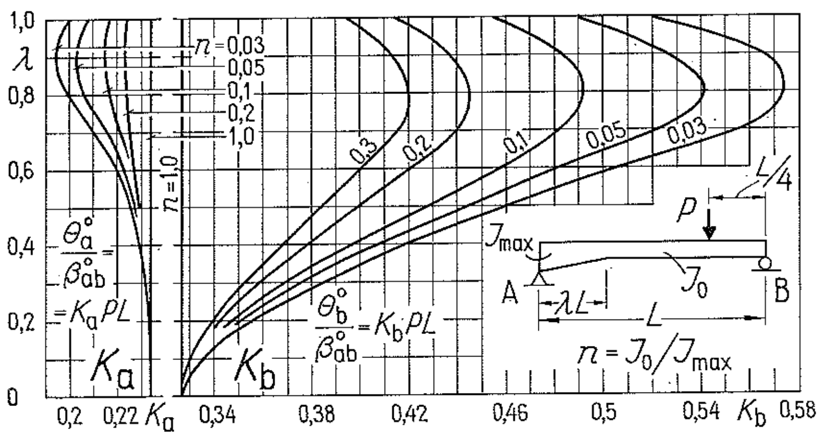




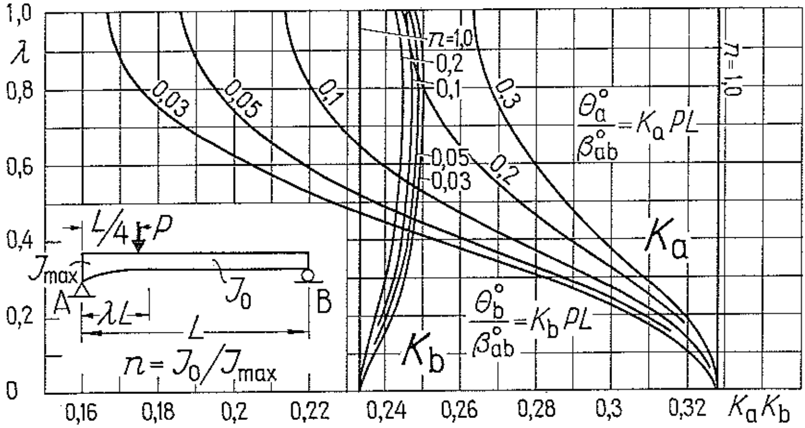
Ensidig triangelvot

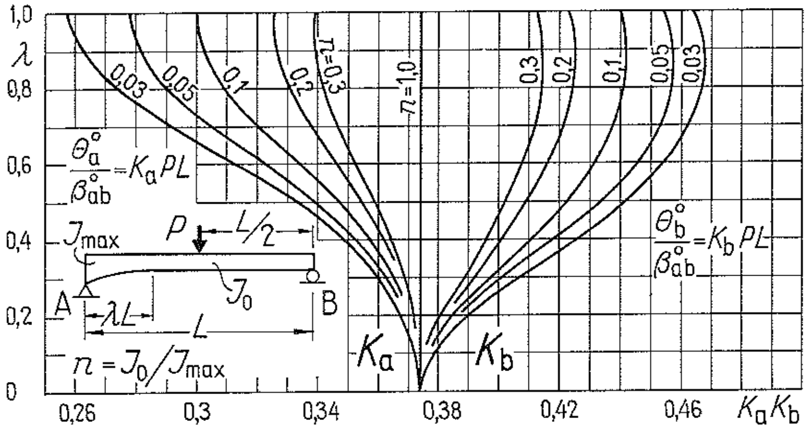


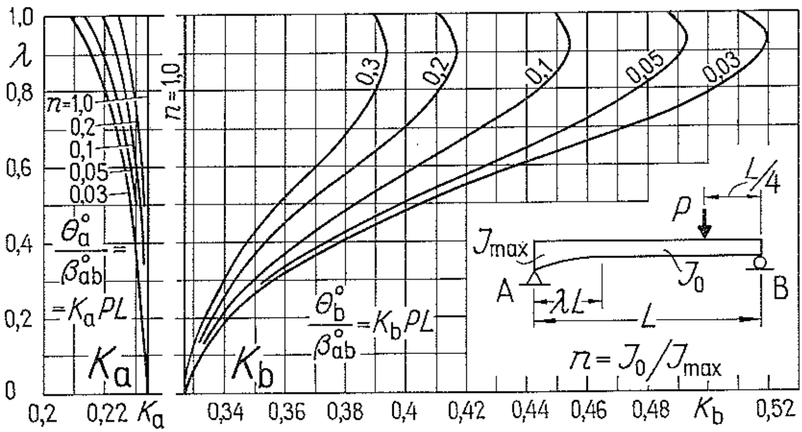




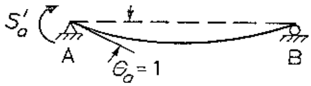
Ensidig parabelvot



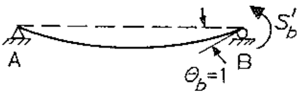




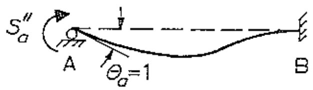
Tabell 1: 46. Styvhetstal



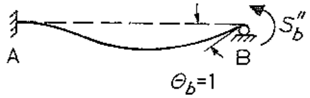
$S'_a = D'_a E I_0/L$



$S'_b = D'_b E I_0/L$

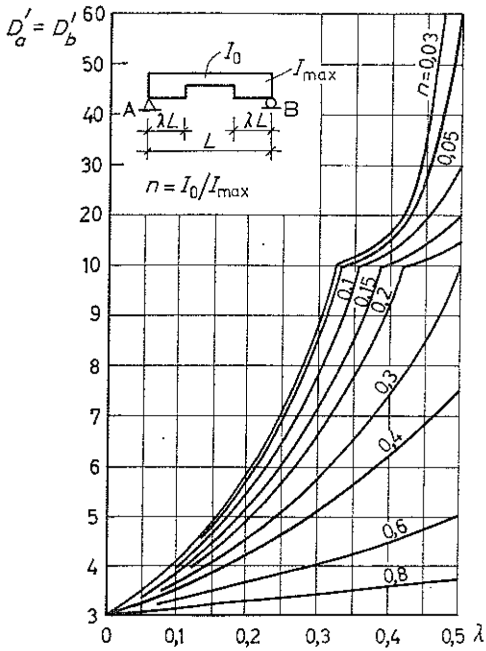


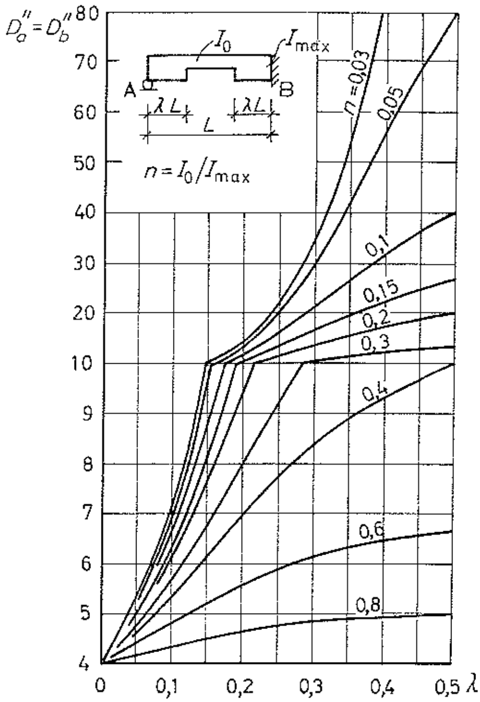
$S''_a = D''_a E I_0/L$



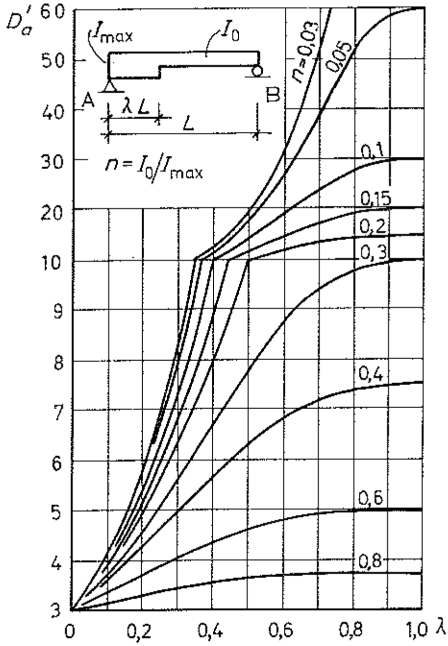
$S''_b = D''_b E I_0/L$

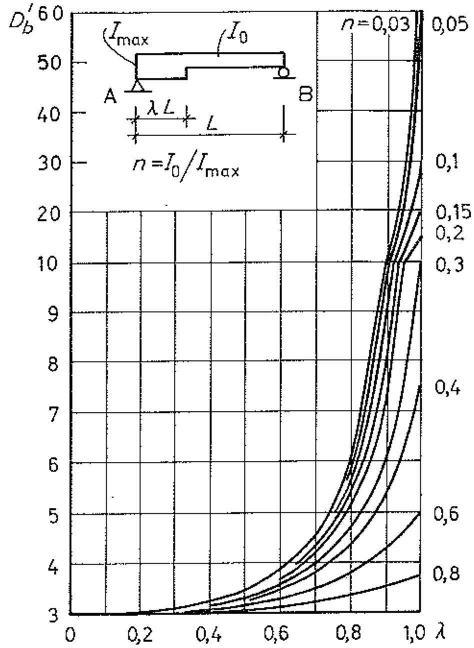
Symmetriska, raka voter

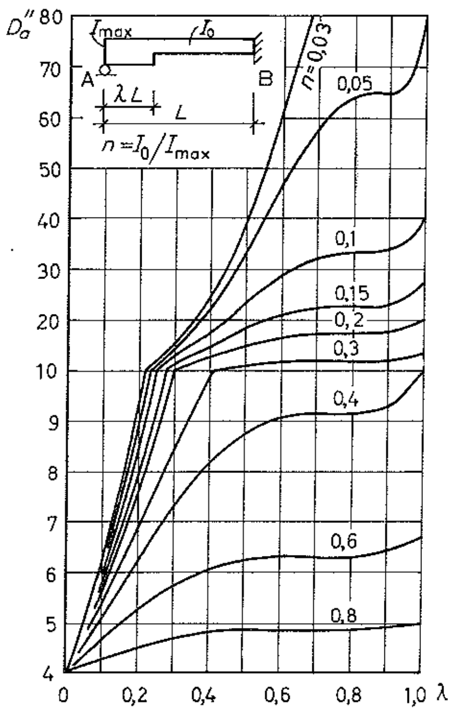


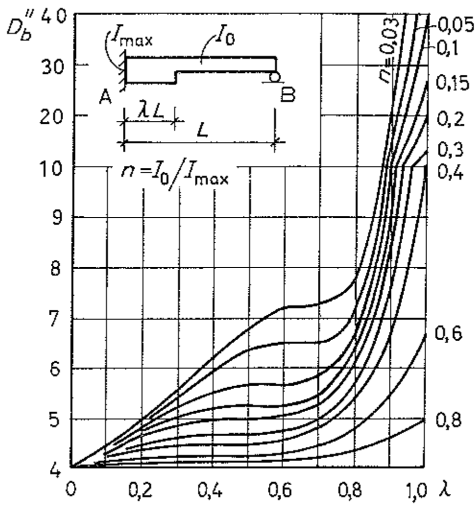


Ensidig, rak vot

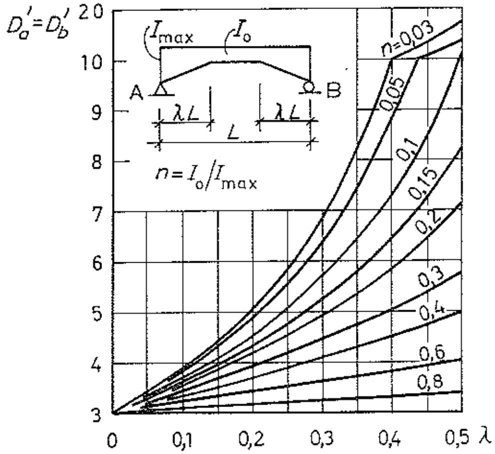


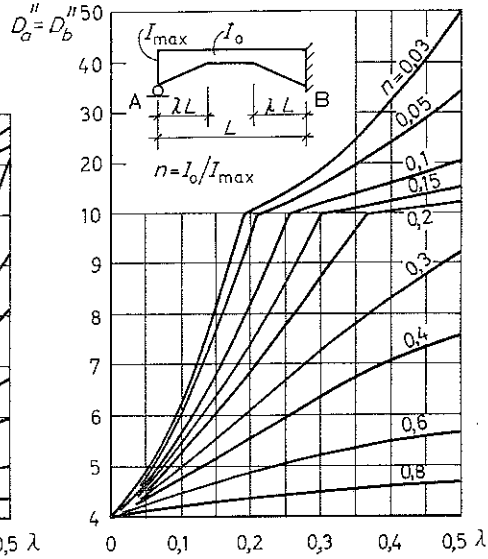




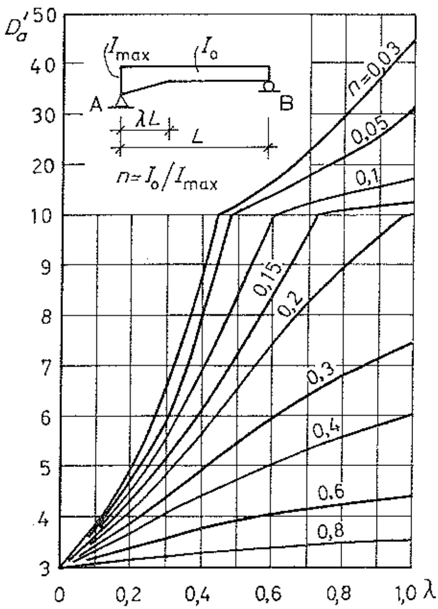


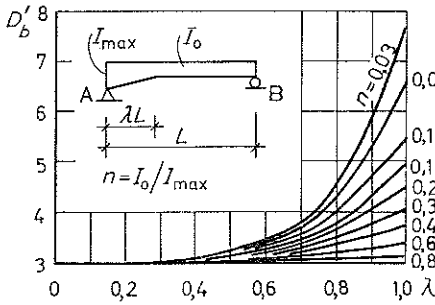
Symmetriska triangelvoter

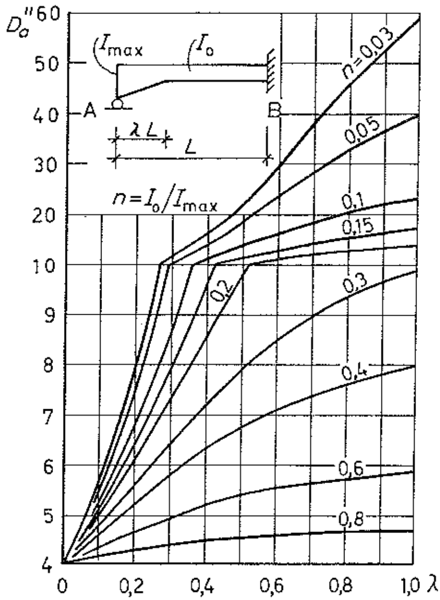


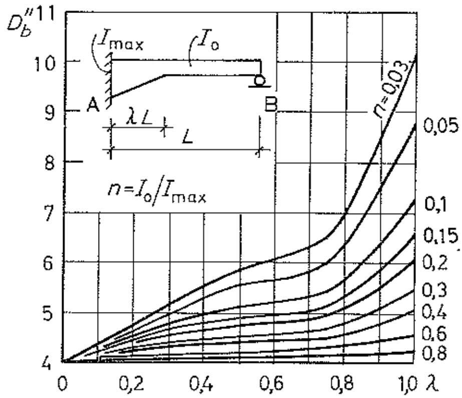


Ensidig triangelvot

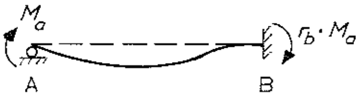




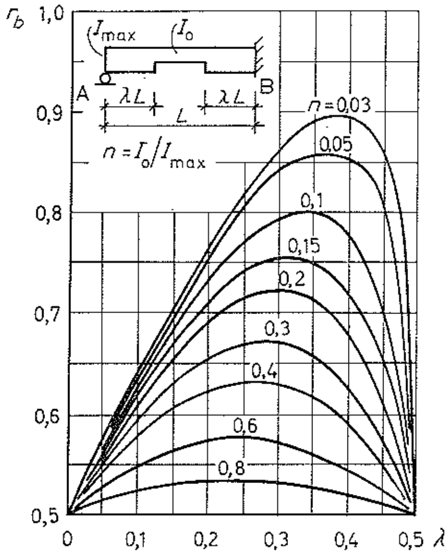

D_a''
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0 λ
I_{max}
I_o
A
B
λL
L
$n = I_o/I_{max}$
n=0,03
0,05
0,1
0,15
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8


D_b''
11
10
9
8
7
6
5
4
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0 λ
I_{max}
I_o
A
B
λL
L
$n = I_o/I_{max}$
n=0,03
0,05
0,1
0,15
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8

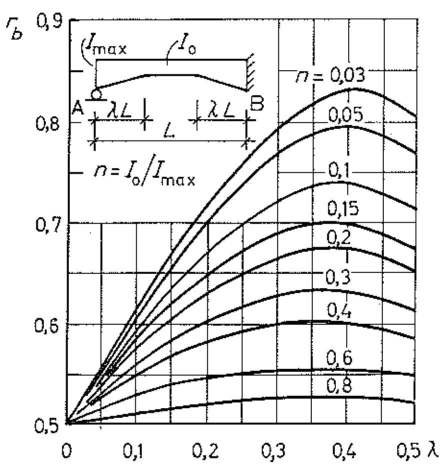
Tabell 1: 47. Transporttal



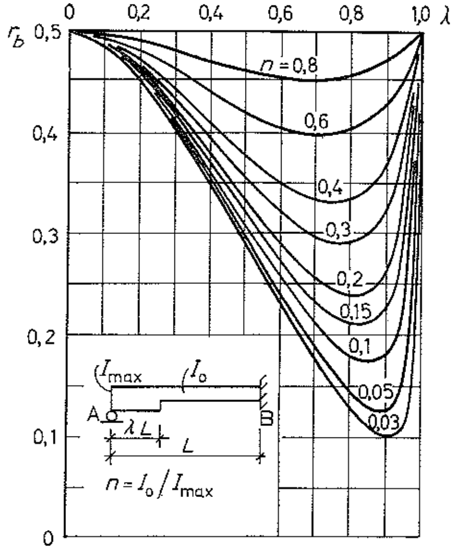
Symmetriska, raka voter

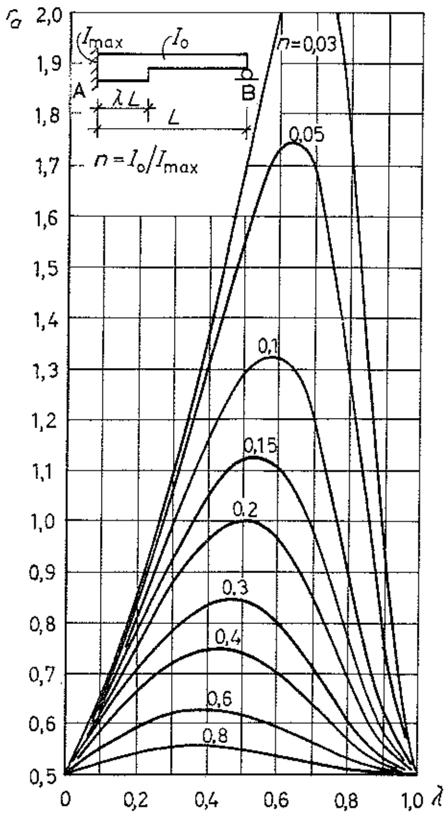


Symmetriska triangelvoter

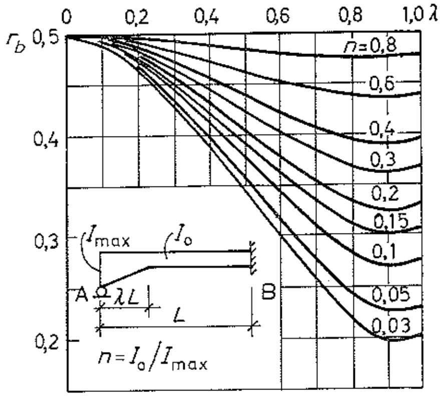


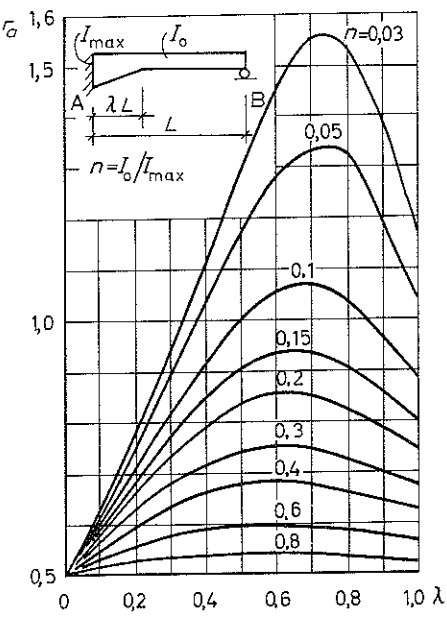
Ensidig, rak vot





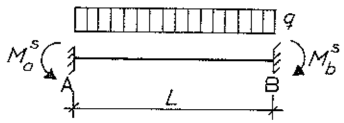
Ensidig triangelvot





Tabell 1: 48. Startmoment

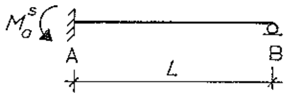
Jämnt fördelad last



$$M_a^s = F_a'' \cdot \frac{qL^2}{12}$$

$$M_b^s = F_b'' \cdot \frac{qL^2}{12}$$

Tvåsidig inspänning

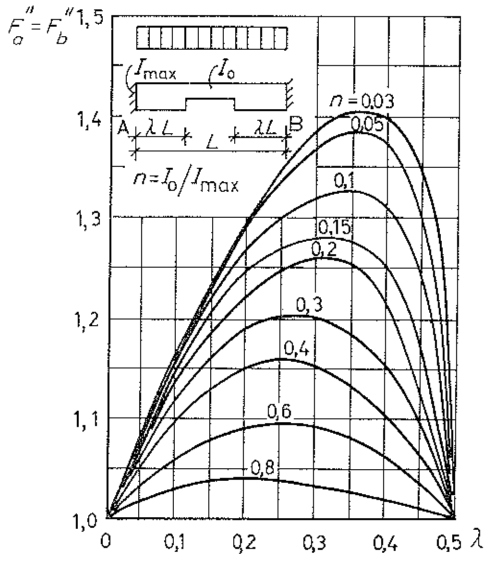


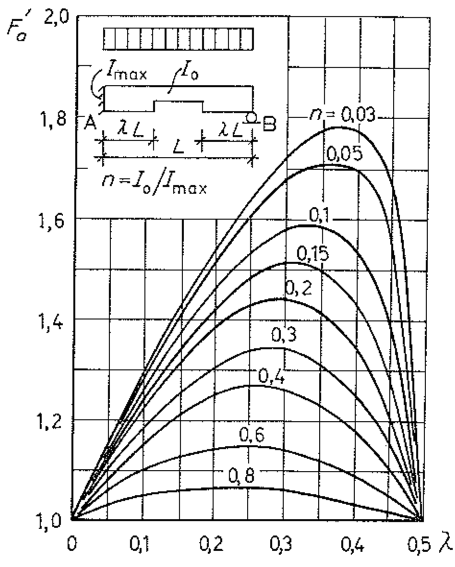
$$M_a^s = F_a' \cdot \frac{qL^2}{8}$$

Ensidig inspänning

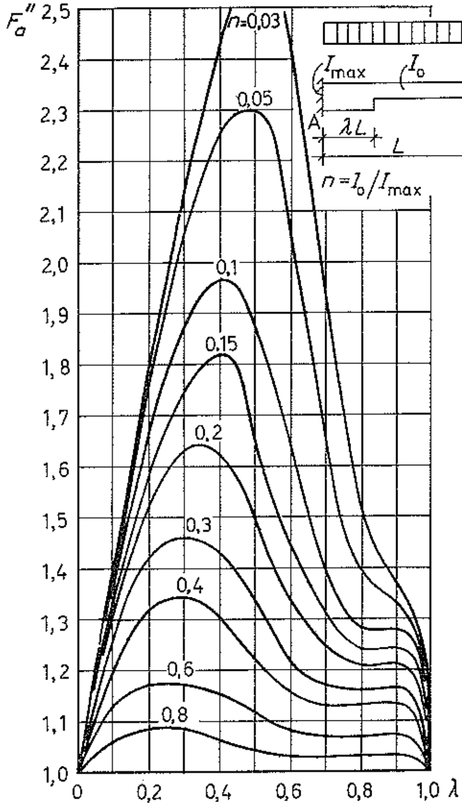
För diagram som ger startmomenten för votförsedda ramdelar vid inverkan av punktlast hänvisas till [19] och [23] tillhörande kap 161.

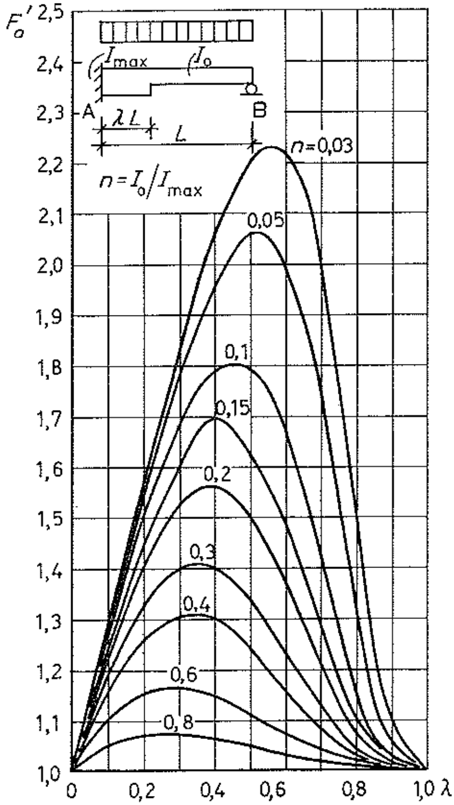
Symmetriska, raka voter

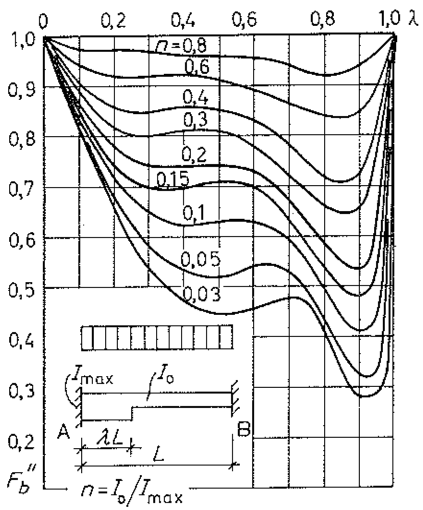


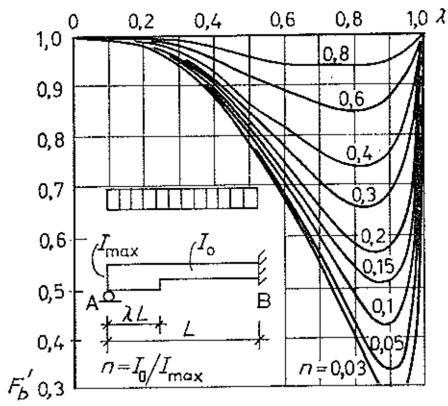


Ensidig, rak vot

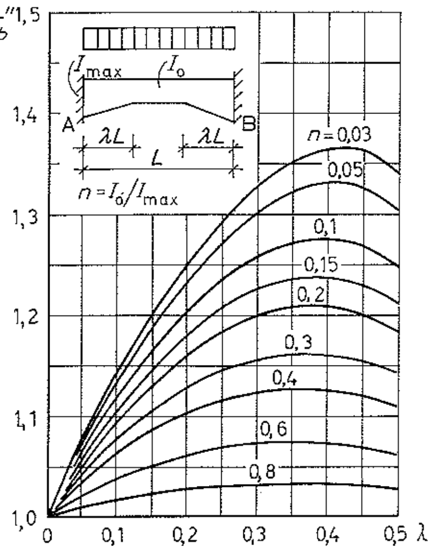


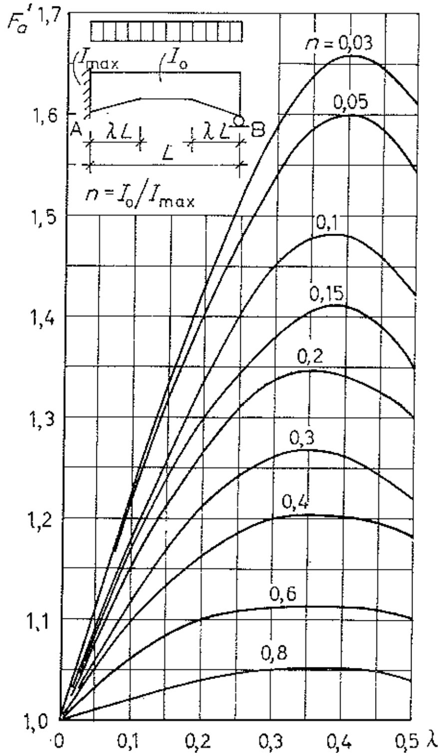




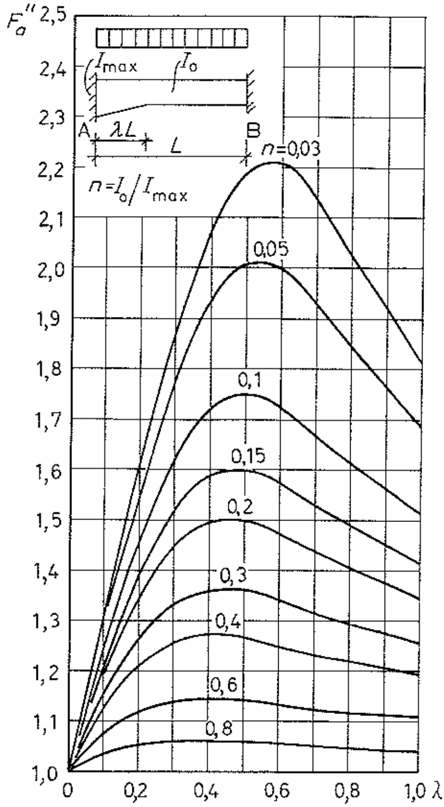


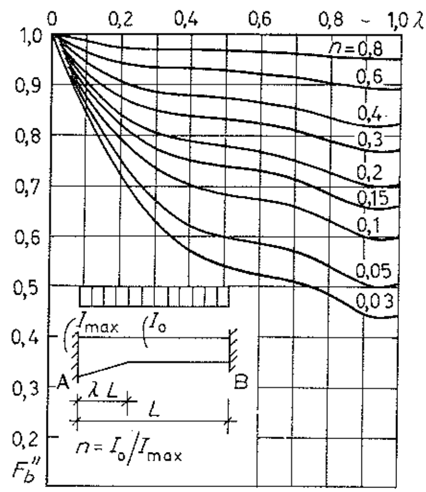
Symmetriska triangelvoter



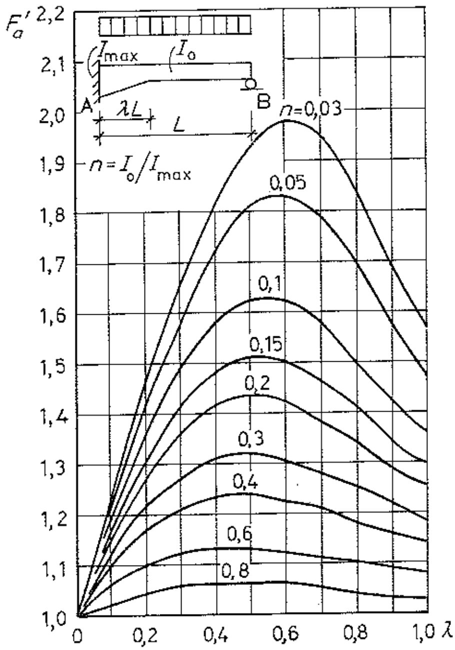


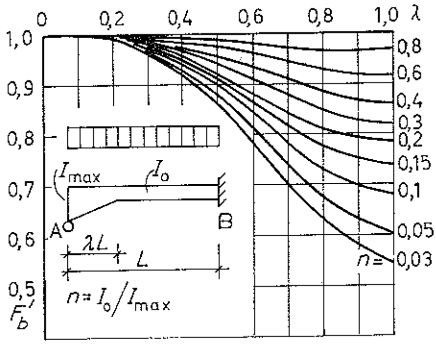
Ensidig triangelvot





Ensidig triangelvot



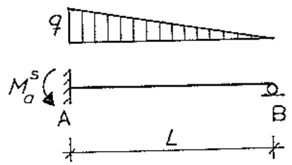


Triangulärt fördelad last

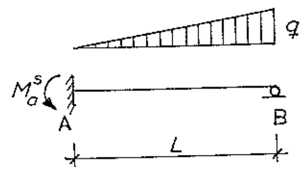
$$M_a^s = F_a'' \cdot \frac{qL^2}{20}$$

$$M_b^s = F_b'' \cdot \frac{qL^2}{30}$$

Tvåsidig inspänning



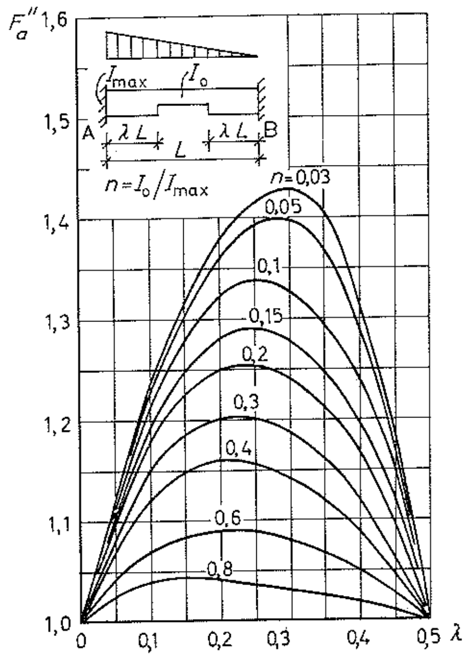
$$M_a^s = F_a' \cdot \frac{qL^2}{15}$$

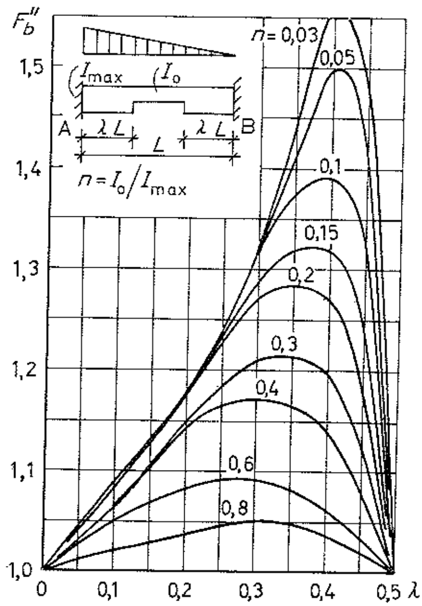


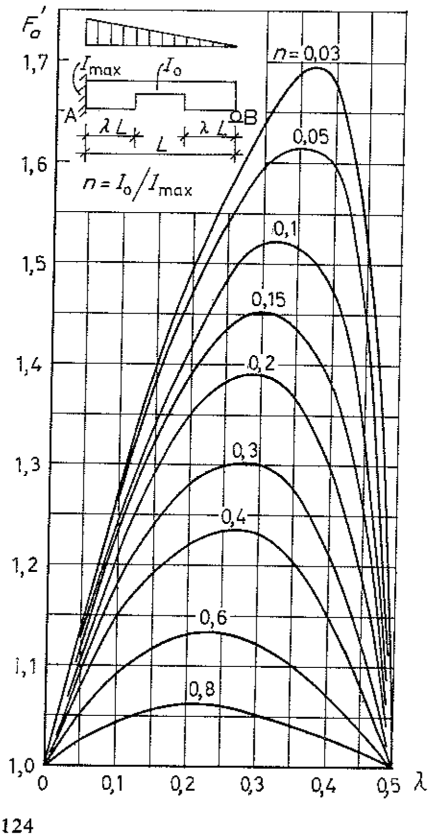
$$M_a^s = F_a' \cdot \frac{qL^2}{15}$$

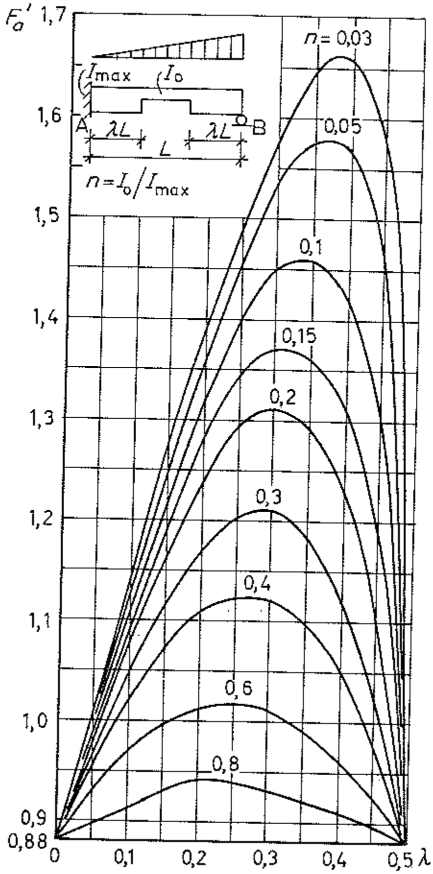
Ensidig inspänning

Symmetriska, raka voter

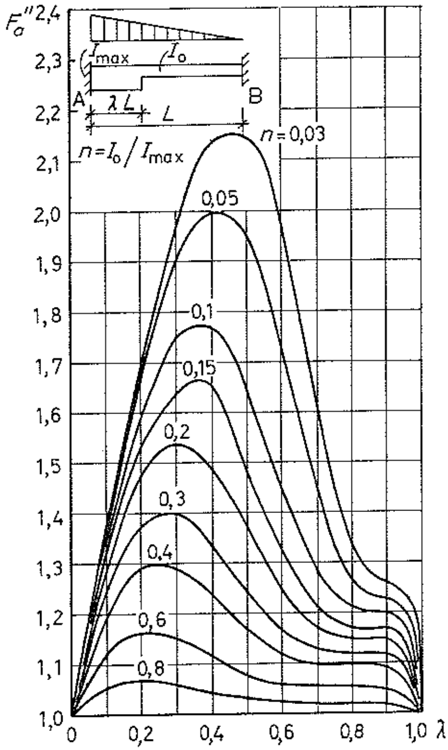


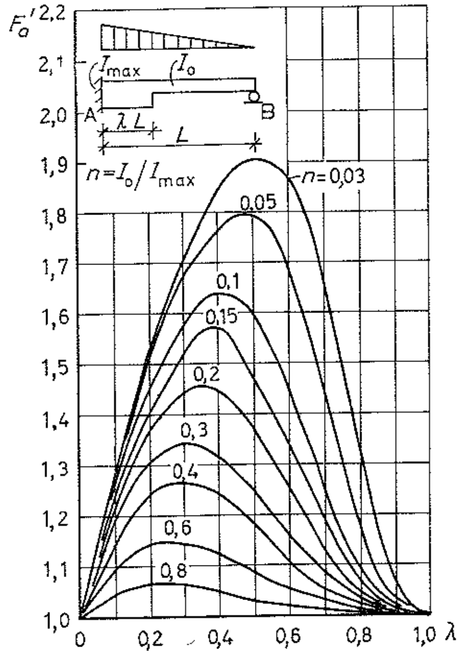

F_b''
I_{max}
I_o
A
B
λL
L
λL
$n = I_o/I_{max}$
n = 0,03
0,05
0,1
0,15
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5 λ

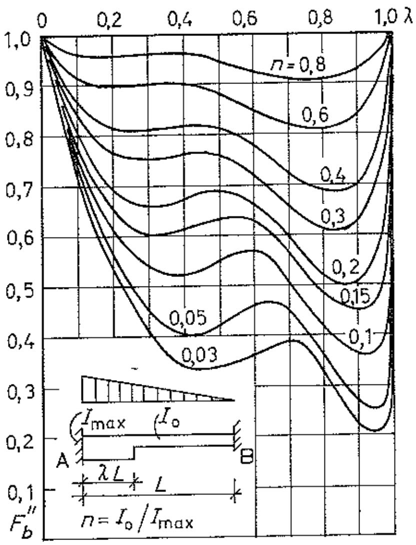

F_a'
I_{max}
I_o
A
B
λL
L
λL
$n = I_o/I_{max}$
n = 0,03
0,05
0,1
0,15
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5 λ


F_a'
I_{max}
I_o
A
B
λL
L
λL
$n = I_o/I_{max}$
n = 0,03
0,05
0,1
0,15
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
0,88
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5 λ

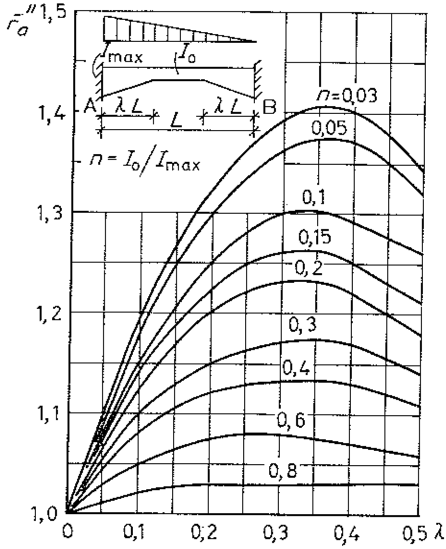
Ensidig, rak vot

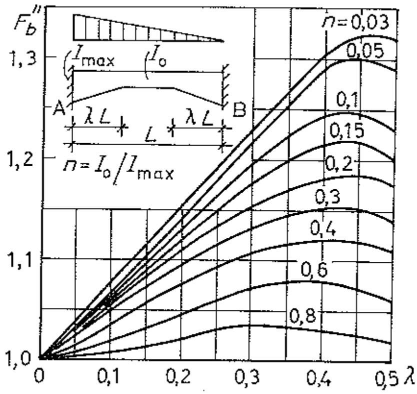


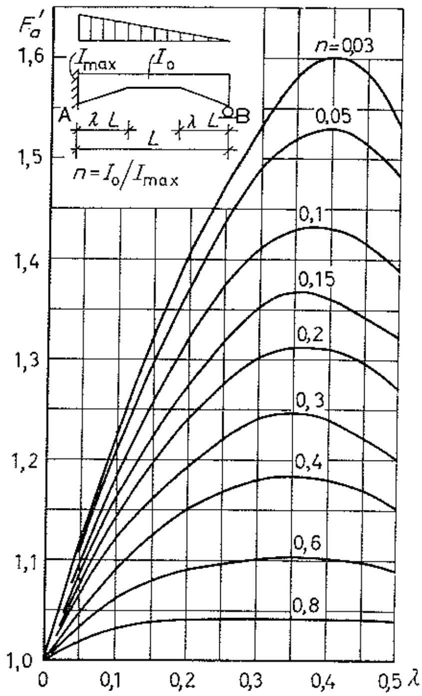


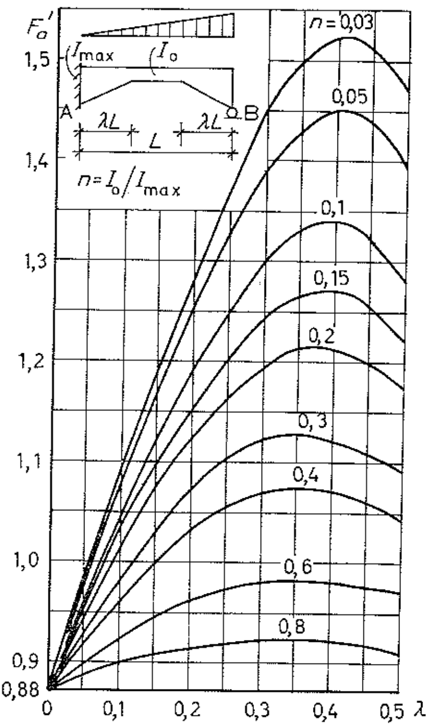


Symmetriska triangelvoter









Ensidig triangelvot