



# LUND UNIVERSITY

## Punktkonstruktioners verkningssätt vid upprepade lastcykler

Plem, Erik

1971

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*

Plem, E. (1971). *Punktkonstruktioners verkningssätt vid upprepade lastcykler*. (Bulletin of Division of Structural Mechanics and Concrete Construction, Bulletin 17; Vol. Bulletin 17). Lund Institute of Technology.

*Total number of authors:*

1

### General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117  
221 00 Lund  
+46 46-222 00 00

LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY · LUND · SWEDEN · 1971

DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS AND CONCRETE CONSTRUCTION · BULLETIN 17

# BYGGNADSSSTATIK REFERENS

ERIK PLEM

PUNKTKONSTRUKTIONERS VERKNINGSSÄTT  
VID UPPREPADE LASTCYKLER

PUNKTKONSTRUKTIONERS VERKNINGSSÄTT VID  
UPPREPADE LASTCYKLER

av tekn.lic. Erik Plem

Ingenjörbyrån Centerlöf & Holmberg AB, Lund

## FÖRORD .

Härmed framför jag ett varmt tack till tekn. dr Åke Holmberg, Ingenjörskyrån Centerlöf & Holmberg AB och till professor Ove Pettersson, Institutionen för byggnadsstatik vid Lunds tekniska högskola, dels för många stimulerande samtal under föreliggande arbetes tillblivelse, vilka tillfört detta värdefulla impulser, och dels för den tid de har offrat på att genomläsa det färdiga manuskriptet.

Dessutom vill jag tacka fru Lena Svensson, som svarat för utskrift av manuskriptet samt fru Karin Lööv, som renritat samtliga figurer.

Arbetet har utförts med ekonomiskt stöd från Statens råd för byggnadsforskning.

Lund i december 1970

Erik Plem



INNEHÅLL	3
BETECKNINGAR OCH DEFINITIONER	5
1 PROBLEMPRESENTATION	10
1.1 Första pålastning till ett elasto-plastiskt tillstånd	10
1.2 Tillståndsförändring efter första pålastning	15
2 INLEDANDE ANALYS AV EN PUNKTKONSTRUKTIONS TILLSTÅNDSVARIATION	19
2.1 Helt elastisk återgång efter flytning	19
2.1.1 Punkter i den elastiska zonen	20
2.1.2 Punkter i den plastiska zonen	22
2.1.3 Specialfallet $\theta_2 = 0$	25
2.2 Icke helt elastisk återgång efter flytning	26
2.2.1 Avlastningsfasens jämviktsekvationer	26
2.2.2 Fenomenologisk diskussion	30
2.3 Datamaskinberäknade illustrationsexempel	34
3 TILLSTÅNDSFÖRÄNDRINGAR UNDER EN LASTCYKEL	37
3.1 Inre arbetets gradient	37
3.2 Symmetrisk lastcykel	46
3.3 Datamaskinberäknade illustrationsexempel	49
4 PUNKTKONSTRUKTION AV PUNKTER MED FLERA FLYTNIVÅER	54
4.1 Arbetslinjens approximation	54
4.2 Första pålastning	55
4.3 Tillståndsförändring	60
4.4 Tillämpningsexempel	63
4.5 Konsekvenser för en lastcykel	69
4.6 Datamaskinberäknade illustrationsexempel	71
5 PUNKTKONSTRUKTION MED UPPREPAD LASTVARIATION	74
5.1 Val av strain hardening funktion	74
5.2 Modifikation av flytvillkoret	77
5.3 Beräkningsgång vid upprepade lastcykler	78
5.4 Övergång från ett elasto-plastiskt till ett elastiskt tillstånd	80
5.5 Datamaskinberäknade illustrationsexempel	83

6	DATAMASKINPROGRAMMET "POINT SET STRUCTURE"	89
6.1	Programbeskrivning	89
6.1.1	Till huvudprogrammet hörande procedure-deklarationer	91
6.1.2	Huvudprogrammet	102
6.2	Programlista	108
6.3	Exempel på resultatredovisning	118
6.3.1	Beräkning enligt alternativ 1	118
6.3.2	Beräkning enligt alternativ 2	124
6.3.3	Beräkning enligt alternativ 3	128
7	SLUTORD	135
	REFERENSER	138
	FIGURFÖRTECKNING	139
	FIGURER	145

## BETECKNINGAR OCH DEFINITIONER

- A Variabel som är proportionell med u-komponenten av det inre arbetets gradient.  
Även exponent som är 0 eller 1 för en punkt i den plastiska respektive den elastiska zonen.
- a Horisontell projektion av radien R.
- B Variabel som är proportionell med v-komponenten av det inre arbetets gradient.
- b Vertikal projektion av radien R.
- C Variabel som är proportionell mot  $\tau$ -komponenten av det inre arbetets gradient.
- c  $R^2 - a \cdot p - b \cdot q$
- D Formmatris med a, b och c som element.
- d Avståndet mellan vridmedelpunkten och verkningslinjen för den yttre kraften.
- G Viktmatris med g som element.
- g En punkts vikt.
- I Punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på vridmedelpunkten vid renodlad elastisk deformation.
- $I_0$  Punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på gruppens viktade tyngdpunkt.
- k En punkts elasticitetskoefficient.
- $k_1, k_2$  Parameterset som bestämmer strain hardening kurvans förlopp.

$M$	Yttre moment.
$M_{\varphi}$	Yttre moment efter första pålastning till påkännings-tillståndet $\varphi$ .
$N$	Yttre kraft.
$N_{\max}$	Övre gräns för den yttre kraften i en lastcykel.
$N_{\min}$	Undre gräns för den yttre kraften i en lastcykel.
$N_{\varphi}$	Yttre kraft efter första pålastning till påkännings-tillståndet $\varphi$ .
$n$	Antalet punkter i konstruktionen.
$P$	Punktkraft.
$P_0$	Flytkraft vid en punkt med $g = 1$ då strain hardening ej beaktas.
$P_{\sigma}$	Flytkraft vid en punkt med $g = 1$ efter $\sigma$ flyttill-fällen vid punkten.
$p$	Horisontell projektion av sträckan mellan en punkts momentancentrum och vridmedelpunkten för tillskottsdeformation.
$Q$	Lastmatris.
$q$	Vertikal projektion av sträckan mellan en punkts momentancentrum och vridmedelpunkten för tillskottsdeformation.
$R$	En punkts radie räknad från dess momentancentrum.
$R_0$	Gränsradien mellan elastisk och plastisk zon.
$R_M$	Max $R$ vid första pålastning.



$R_i^I$	Gränsradien mellan elastisk och plastisk zon i band nr i.
$R_i^{II}$	Yttre gränsradien för band nr i.
$r$	En punkts radie räknad från annan punkt än dess momentancentrum. I allmänhet räknas $r$ från tillskottsdeformationens vridmedelpunkt.
$S$	$\sum g$
$u, v$	Koordinater till tillskottsdeformationens vridmedelpunkt.
$V$	Rotationsmatris. Diagonalmatris med $v$ som element i huvuddiagonalen.
$x, y$	En punkts koordinater.
$x_1, y_1$	Koordinater till en punkts momentancentrum vid inledningen av en tillståndsändring.
$x_2, y_2$	Koordinater till en punkts momentancentrum vid avslutningen av en tillståndsändring.
$x_g$	Abscissa till punktgruppens viktade tyngdpunkt.
$\alpha$	Parameter som beskriver storleken av en tillståndsändring.
$\beta$	Koefficienten $\theta_1/\theta_2$ .
$\beta_i$	$\Delta_i$ i dimensionslös form.
$\gamma$	Vinkeln mellan abscissaaxeln och $R$ .
$\Delta_i$	Flytdeformation vid den relativa flytnivån $\eta_i$ .
$\delta$	En punkts förskjutning.

$\epsilon$	Dimensionslös elasticitetskoefficient.
$\zeta_0$	Initiallutning hos strain hardening kurvan.
$\eta_i$	Relativ flytnivå i band nr i.
$\theta'$	Verklig vinkeländring.
$\theta$	$\theta'/\lambda$
$\theta_1'$	Verklig total vinkeländring fram till aktuell tillståndsförändring.
$\theta_1$	$\theta_1'/\lambda$
$\theta_2'$	Verklig storlek på resulterande vinkeländring.
$\theta_2$	$\theta_2'/\lambda$
$\varphi$	$(1-\alpha) \cdot  N_\varphi $
$\kappa$	Relativ flytkraft $P_\sigma/P_0$ vid en punkt då strain hardening effekten beaktas.
$\lambda$	Materialkoefficienten $P_0/k$ .
$\mu$	Koefficient mellan 0 och $\kappa$ beroende av plasticeringsgraden vid en punkt.
$\nu$	Reell eller fiktiv rotation som bestämmer en punktkrafts storlek.
$\pi$	P i dimensionslös form.
$\xi$	R i dimensionslös form
$\xi_i'$	$R_i'$ i dimensionslös form.
$\xi_i''$	$R_i''$ i dimensionslös form.

$\sigma$	Antalet flyttillfällen vid en punkt.
$\tau'$	Verklig storlek på tillskottsdeformationens rotation.
$\tau$	$\tau'/\lambda$
$\Phi$	Yttre arbetet
$\varphi$	Påkänningstillståndet
$\chi$	Koefficient som kan tilldelas värdet +1 eller -1.
$\psi$	Inre arbetet
$\omega$	Formfaktor
$\omega_0$	$1 + \sum \beta_i$ . Summation över samtliga band.
$\omega_i$	$\sum \beta_i$ . Summation över samtliga band innanför band nr i.
flytkraft	Den punktkraft, vid vilken flytning börjar vid en punkt med vikten $g = 1$ .
flytgräns	Den yttre last, vid vilken flytning börjar inom en punktkonstruktion vid dess mest ansträngda punkt.
brottgräns	Den yttre last, som ej stegras vid fortsatt plastisering av en punktkonstruktion.

## 1. PROBLEMPRESENTATION

Föreliggande publikation utgör en fortsättning på det arbete som författaren redovisar i "Design of Point Set Structures" (Byggnadsvetenskapens rapport 21/68), i det följande betecknad PSS.

Arbetet omfattar studier beträffande punktkonstruktioners beteende under inverkan av lastcykler med cykelgränser i det elasto-plastiska området.

### 1.1 Första pålastning till ett elasto-plastiskt tillstånd

En punktkonstruktion definieras i PSS som ett ändligt antal diskreta punkter belägna i ett plan, varvid de är förbundna på ett sådant sätt, att en förflyttning i planet av en punkt alstrar en förflyttningen motriktad kraft  $P$ , angripande vid punkten. För växande storlek på förflyttningen antas att kraften följer Hooke's lag upp till ett gränsvärde  $P_0$ , varefter den förblir konstant oberoende av förflyttningen. Vidare antas att förflyttningen är en kongruensflyttning, vilket innebär att det ömsesidiga avståndet mellan två godtyckliga punkter inom konstruktionen är invariant i avseende på förflyttningen.

Denna definition läggs till grund även för föreliggande arbete. Den kommer dock längre fram att modifieras vad beträffar den enskilda punktens elasto-plastiska egenskaper.

Den beskrivna beräkningsmodellen kan i sinnesvärlden tänkas motsvara konstruktioner av typen nit- eller skruvförband. Dessutom kan vridna pälgrupper med enbart vertikalpålar anses svara mot den valda modellen.

Den vanliga beräkningsgången vid dimensionering av ett nitförband inleds med att den yttre kraften parallellförflyttas till förbandets tyngdpunkt under samtidigt införande av mot förflyttningen svarande moment. Kraften fördelas lika på konstruktionens punkter (nitar) med kraftkomposanter i den yttre kraftens riktning och flyttningmomentet balanseras av andra kraftkomposanter vars storlek är proportionell med respektive punkts avstånd från



tyngdpunkten och vars riktning är vinkelrät mot punktens radie med avseende på tyngdpunkten. Den resulterande kraften vid varje punkt ges sedan genom vektoriell addition av de två således bestämda kraftkomposanterna.

Betraktelsesättet innebär att mot krafterna svarande förflyttning av förbandet uppfattas som sammansatt av translation och samtidig rotation kring tyngdpunkten.

Det beskrivna beräkningsförfarandet förenklas om man som Gullander (1907) inser att en translation och en samtidig rotation alltid kan sammansättas till en rotation kring ett momentancentrum (vridmedelpunkten). Läget av den resulterande rörelsens momentancentrum bestäms därvid entydigt av den betraktade situationens geometri och är således oberoende av den yttre kraftens storlek.

Sedan vridmedelpunktens läge bestämts erhålles storleken på kraften vid konstruktionens enskilda punkter genom att multiplicera punktens avstånd från vridmedelpunkten med en proportionalitetsfaktor. Kraftens riktning är vinkelrät mot punktens radie med avseende på vridmedelpunkten, varför man vid detta förfarande slipper gå omvägen över en vektoriell komposantaddition.

Gemensamt för de två skisserade beräkningssätten är att de äger giltighet endast då elastiska förhållanden är för handen d.v.s. den yttre kraften måste alltid vara mindre än eller lika med konstruktionens flytgräns. Den senare definieras som den kraft, vilken nätt och jämnt medför flytning vid konstruktionens mest ansträngda punkt. Konsekvensen härav är att de relaterade metoderna på sin höjd kan ge upplysning om konstruktionens säkerhet gentemot begynnande flytning. Om konstruktionens brottlast får man inget besked.

I PSS studeras en punktkonstruktion under pålastning in i och genom det elasto-plastiska området fram till dess slutlig kollaps. Detta inträffar då den yttre kraften uppnår brottgränsen, definierad som den kraft som ej stegras vid fortsatt plasticering inom konstruktionen. Som beskrivande parameter för

konstruktionens aktuella tillstånd används påkänningstillståndet  $\psi$  bestämt som förhållandet mellan radien  $R_0$  - se FIG. 1 - i den gränscirkel vilken, reellt eller fiktivt, delar punktgruppen i en elastisk och en plastisk zon och den största radien  $R_M$  till någon punkt inom gruppen. Nämnade radier tas härvid med avseende på konstruktionens momentana vridmedelpunkt. Inom den renodlade elastiska fasen av pålastningsförloppet är  $\psi \geq 1$  där likhetstecknet avser flytgränsen. Under den resterande elasto-plastiska fasen är  $1 > \psi \geq 0$  där likhetstecknet avser brottgränsen.

Styrning av påkänningstillståndet genom parametern  $\psi$  innebär reellt styrning genom påtvingad deformation. Att deformationen valts som primär åverkan och icke den yttre kraften sammanhänger med det förhållandet att utsträckningen av det elasto-plastiska området ur deformationssynpunkt är stor under det att den ur kraftsynpunkt ibland är mycket begränsad. Val av deformation som primär åverkan medger således en exaktare styrning mot ett eftersträvat tillstånd.

Vid ansträngning av en given punktkonstruktion, med ett i relation till denna fixerat läge för den yttre kraften, inträffar följande. Under hela förloppet kan deformationen beskrivas som en rotation kring ett momentancentrum gemensamt för alla konstruktionens punkter. Under förloppets inledande elastiska fas ligger, som tidigare påpekats, denna punkt stilla i förhållande till konstruktionen. Denna fixering upphävs emellertid då flytgränsen passeras. Under den följande delen av pålastningen, karakteriserad av elasto-plastiskt beteende hos konstruktionen, förflyttar sig således vridmedelpunkten i konstruktionens plan längs en bana bestämd av den förhandenvarande situationens geometri.

Medan vridmedelpunktens fasta läge under den elastiska fasen enkelt kan beräknas utifrån aktuella konstruktionsdata, kan dess varierande läge under det elasto-plastiska skedet icke bestämmas explicit.

I PSS anges ett sätt att bestämma vridmedelpunktens momentana läge baserat på studier av systemets inre arbete och under för-

utsättning om idealelasto-plastiskt beteende för den enskilda konstruktionspunkten. Den härvid härledda beräkningsmetoden har omsatts i ett datamaskinsprogram med vilket pålastning till en nivå över flytgränsen kan studeras.

Sedan vridmedelpunktens läge bestämts kan de enskilda punktkrafterna beräknas ur sambandet

$$P = g \cdot P_0 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^A \quad (1)$$

där  $g$  är den enskilda punktens vikt,  $R$  dess radie med avseende på vridmedelpunkten och, enligt FIG. 1

$$A = \begin{cases} 0 & \text{för } R \geq R_0 \\ 1 & \text{för } R < R_0 \end{cases}$$

Mot krafttillståndet svarande rotationsdeformation karakteriseras av vinkeländringen  $\theta'$  bestämd ur

$$\theta' = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{R_0} \quad (2)$$

där  $k$  är punktens "elasticitetsmodul".

Införs den sammansatta materialkonstanten

$$\lambda = \frac{P_0}{k} \quad (3)$$

kan (2) alternativt tecknas

$$\theta' = \lambda \cdot \frac{1}{R_0} \quad (4)$$

I ett etablerat jämviktstillstånd skall systemets samtliga krafter, yttre och inre, satisfiera planets två projektionsekvationer, vilka med beteckningar enligt FIG. 2 antar formen

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{R_0} \sum g a - \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{N}{P_0} &= 0 \\ -\frac{1}{R_0} \sum g b - \sum_p g \frac{b}{R} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

då verkningslinjen för  $N$  väljs parallell med det använda koordinatsystemets  $y$ -axel och  $N$  räknas positiv motriktad  $y$ .

Summaindex  $e$  anger att summationen skall omsluta samtliga konstruktionspunkter inom den elastiska zonen och på motsvarande

sätt anger  $p$  summation över alla punkter tillhörande den plastiska zonen. Mot vald deformation, uttryckt i  $\varphi$ , svarande yttre kraft beräknas slutligen ur momentekvationen, vilket ger sambandet

$$N = \frac{P_0}{d} \cdot \left( \frac{1}{R_0} \sum g R^2 + \sum g R \right) \quad (6)$$

Det klassiska sättet att beräkna punktkonstruktioner, jämte Gullanders variant, liksom det i PSS angivna bygger enligt den inledande definitionen på förutsättningen om att punktgruppen under deformation förflyttar sig som ett stelt system. Detta innebär, att eventuellt uppträdande deformationer i det punktbärande mediet negligeras. Denna förutsättning är i allmänhet icke strängt uppfyllt. Den kan anses ge god överensstämmelse mellan beräkningsmodell och verklig konstruktion i fallet grupp av vertikalpålar belastad med vridmoment, där det uppburna fundamentets vekhet oftast kan anses vara försumbar jämfört med de enskilda pålarnas vekhet.

För nit- och skruvförband kan å andra sidan förväntas att beräknad kraftfördelning avviker från verklig på grund av plåtarnas egendeformationer. Approximationens noggrannhet är här beroende av relationerna mellan plåttjocklek, plåtutbredning, nitdiameter och nitavstånd.

Ett försök att teoretiskt beakta dessa faktorerers inverkan på kraftfördelningen gör bl.a. Bufler (1968), då han studerar det till synes okomplicerade fallet då två olika breda och tjocka plåtar hopnitas med en enkel nitrad och lasten utgörs av dragkraft i plåtarnas plan i nitradens riktning. På grundval av jämviktsekvationer, kompatibilitetsvillkor och en antagen påkänningsfördelning vid nitarnas anliggning mot hålranden beräknas kraftfördelningen inom förbandet.

Den framräknade kraftfördelningen karakteriseras av påkännings-  
toppar vid förbandets början och slut under förutsättning av att renodlade elastiska förhållanden är rådande. Men Bufler visar även att en stegring av den yttre kraften resulterar i en successiv utjämning av kraftfördelningen i takt med att flytzonerna växer inåt mot förbandets mitt innebärande att det fel



som begås genom att bortse från plåtarnas egendeformationer minskas i samma mån som utbredningen av den plasticerade zonen ökar inom förbandet.

Den uppvisade komplexiteten vid behandling av denna endimensionella nitgrupp indikerar att en analog analys av en tvådimensionell grupp icke är möjlig med rimlig arbetsinsats. Som en konsekvens härav accepteras principen om kongruensflyttning även i det följande samtidigt som det framhålls att de här uppnådda resultaten måste tolkas med denna approximation i minnet.

## 1.2 Tillståndsäändring efter första pålastning

I PSS var intresset inriktat på beteendet hos en punktkonstruktion vid dess första pålastning. Vi skall här ägna oss åt de problem som sammanhänger med tillståndsförändringar inom konstruktionen vid en eller flera efterföljande omkastningar av den yttre lasten.

Har belastningen första gång drivits så långt att slutvärdet på den yttre kraften överstiger flytgränsen är det icke självklart hur kraftfördelningen inom gruppen förändras då den yttre lasten reverteras. Någon beräkningsmetod med vilken ett sådant förlopp kan följas har veterligen icke redovisats förut.

Litteraturen om punktkonstruktioner - i huvudsak nit- och friktionsförband - finns förtecknad på ett föredömligt sätt hos de Jonge (1945) vars bibliografi täcker tiden fram till 1944. Dess fortsättning finner man i den av ASCE (1967) sammanställda bibliografien, vilken upptar litteratur i ämnet framkommen under tidsperioden 1944-1966.

En genomgång av dessa båda, i andra avseenden givande arbeten, gör det sannolikt att generella metoder saknas för beräkning av tillståndsförändringar inom en punktgrupp vid lastvariationer i det elasto-plastiska området. Syftet med föreliggande arbete är därför att fylla denna lucka genom att uppställa en sådan beräkningsmetod.

För andra konstruktionstyper föreliggande metoder för plasticitetsteoretisk analys har växt fram ur respektive konstruktions-typs egenart och kan därför icke utan vidare överföras till tillämpning på punktkonstruktioner. I det följande skall vi därför uppställa en plasticitetsteoretisk beräkningsmetod speciellt anpassad till punktkonstruktioner, realisera denna i ett data-maskinprogram och sedan med detta studera den betraktade konstruktionstypen under inverkan av växlande last. Studiet begränsas därvid till att omfatta den typ av lastväxlingar som karakteriseras av fixerat kraftläge. Variationen läggs således helt och hållet på lastens storlek.

Det skall dessutom nämnas att endast renodlade byggnadsstatiska aspekter kommer att anläggas på problemet. Frågor som kan hänföras till materialläran faller således utanför denna avhandlings ram. Det ovan uttalade syftet har förverkligats enligt följande utvecklingslinje.

Avlastning. - Vid belastning av en punktkonstruktion till en sådan nivå, att ett inre elasto-plastiskt tillstånd etableras, erhåller alla punkter belägna i den plastiska zonen permanenta förflyttningar. Förflyttningarnas storlek är bestämda av dels punkternas lägen i relation till det momentana vridcentrat gällande vid sluttillståndet och dels den kvarstående elastiska zonens utbredning. Då den yttre kraften avlägsnas återgår punktkrafterna följaktligen icke till noll utan ett system av inre residualkrafter i jämvikt kvarstår efter avlastningen. I 2.1 studeras problem i samband härmed och en beräkningsmetod uppställs för bestämning av detta residualtillstånd.

En lastcykel. - Om den yttre kraften efter avlastning reverteras med oförändrad verkningslinje och därvid tillåts växa till en sådan storlek, att ett nytt elasto-plastiskt tillstånd etableras, har konstruktionen utsatts för en halv elasto-plastisk belastningscykel. Efter upprepade avlastning och revertering förs den yttre kraften till sitt ursprungsvärde och en hel belastningscykel har genomlöpts.

En vidareutveckling av beräkningsmetoden för avlastning ger i 2.2 den generella teorien för beräkning av övergång från ett inre kraft-

tillstånd till ett annat. Teorien kompletteras i avsnitt 3 med ett studium av variationen hos det inre arbetets gradient under genomgång av en belastningscykel.

Generaliserad arbetslinje. - Deformation-kraftsambandet vid konstruktionens enskilda punkt har ovan förutsatts vara ideal-elasto-plastiskt i enlighet med den inledande definitionen på en punktkonstruktion. I avsnitt 4 framläggs ett approximativt sätt att behandla punktkonstruktioner, vars punkter har egenskaper som kan uttryckas med en godtyckligt vald, uppåt icke-konkav arbetslinje. Den angivna metoden karakteriseras av en uppdelning av töjningsområdet i delområden, vilka vart för sig delas i ett rent elastiskt och ett rent plastiskt område. Beträktelsesättet leder till en approximerande arbetslinje med flera flytnivåer, se FIG. 23. Det visas hur denna kan tillämpas dels i samband med i PSS uppställd beräkningsmetod för första pålastning och dels vid detaljstudiet av en följande belastningscykel. Metoden medger speciellt analys av en konstruktion omfattande punkter med arbetslinje karakteriserad av två flytnivåer vilket ger möjlighet till ett mera nyanserat studium av t.ex. friktionsförband.

Upprepad last. - Upprepas den ovan beskrivna lastcykeln ett antal gånger mellan fasta cykelgränser på en punktkonstruktion i metalliskt material vill detaljförloppet hos den inre kraftvariationen ändras från cykel till cykel. Detta sammanhänger med dels det kända fenomenet att en från början krökt arbetslinje raknar under inverkan av upprepade på- och avlastningar och dels en ändring i materialstrukturen till följd av plastisk kallbearbetning vid de av konstruktionens punkter, vilka ansträngs till flytning vid cykelgränserna, resulterande i en successiv höjning av flytkraften vid berörda punkter. Nämnade två fenomen har i avsnitt 5 approximativt beaktats på följande sätt. Dels räknas genomgående med idealelasto-plastiska egenskaper hos konstruktionens punkter under hela cykelserien, d.v.s. en eventuell krökning hos punkternas arbetslinje i de inledande laststegen beaktas ej. Dels introduceras ett funktionellt samband mellan en punkts aktuella flytkraft och antalet upprepade flytningar. Sambandet har getts en analytisk form, som medger

studium av situationer svarande mot såväl linjärt beroende som icke-linjärt beroende, anpassningsbart till experimentellt bestämda samband. Med de angivna förutsättningarna studeras den successiva förändringen av det inre krafttillståndet vid slutet av en serie cykelperioder, där varje period innehåller ett föreskrivet antal cykler. Samtidigt undersöks de tillhörande förändringarna i konstruktionens flytgräns och brottgräns.

Datamaskinprogram. - För den praktiska tillämpningen erforderligt datamaskinprogram redovisas och kommenteras i avsnitt 6. Här återfinns utförlig programbeskrivning med detaljdiskussion av speciella problem i anslutning till den numeriska behandlingen i 6.1, komplett programlista i Algol avpassad för datorsystemet UNIVAC 1108 i 6.2 och exemplifierande resultatutskrifter i 6.3.



## 2. INLEDANDE ANALYS AV EN PUNKTKONSTRUKTIONS TILLSTÄNDSVARIATION

### 2.1 Helt elastisk återgång efter flytning

En icke tidigare belastad punktgrupp belastas till påkännings-tillståndet  $\varphi < 1$ , varvid en rotation inträffar kring den mot  $\varphi$  svarande vridmedelpunkten A enligt FIG. 3. Punktens läge ( $x_1$ ,  $y_1$ ) kan beräknas enligt i PSS angivna principer och förutsättes därför känt i det följande. Det inre, elasto-plastiska påkänningsstillståndet balanseras av en yttre kraft  $N_\varphi$  eller som specialfall av ett yttre moment  $M_\varphi$ . Rotationen räknas positiv medurs, dess storlek anges med vridningsvinkeln  $\theta_1'$ . Då punktkraft och punktförflyttning är motriktade räknas en punktkraft positiv då den har en moturs omloppsriktning i förhållande till sitt momentancentrum.

Eftersom, enligt förutsättningen,  $\varphi < 1$  delar sig punktmängden i två delmängder, en elastisk och en plastisk, åtskilda av gränscirkeln med centrum i A och med radien  $R_0 = \varphi \cdot R_M$ .

Vid hel eller delvis avlastning av konstruktionen till N eller M kan det inre krafttillståndet, som vi senare skall se, ej längre beskrivas med talet  $\varphi$ . Som beskrivande parameter väljs i stället

$$\alpha = \frac{N}{N_\varphi} \quad \text{eller} \quad \frac{M}{M_\varphi} \quad (7)$$

alltså förhållandet mellan slutvärdet på den yttre kraften respektive det yttre momentet efter avlastning och initialvärdet efter första pålastning av den yttre kraften respektive det yttre momentet. I det följande antas  $\alpha < 1$ .

Avlastningen kan åstadkommas genom att påföra konstruktionen en ny yttre kraft

$$\Delta N = - (1 - \alpha) \cdot N_\varphi \quad (8)$$

angripande i samma linje som  $N_\varphi$ , respektive genom att påföra den ett nytt yttre moment

$$\Delta M = - (1 - \alpha) \cdot M_\varphi \quad (9)$$

Det resulterande krafttillståndet inom punktgruppen efter förändring av den yttre belastningen fås som den vektoriella summan av krafttillståndet hörande till pålastningsfasen, fas 1, och krafttillståndet hörande till avlastningsfasen, fas 2.

Vi förutsätter ytterligare att  $\alpha$  väljs på en sådan nivå, att det resulterande krafttillståndet karakteriseras av full elasticitet. Härav följer att förloppet under fas 2 blir helt elastiskt och således kan beskrivas som en rotation kring den mot  $\psi \geq 1$  svarande vridmedelpunkten B, vars läge  $(u, v)$  explicit kan beräknas enligt anvisning i PSS. Återgångens vridningsvinkel betecknas  $\tau'$ . Vi behandlar i det följande punkter inom de under fas 1 etablerade elastiska och plastiska zonerna var för sig.

### 2.1.1 Punkter i den elastiska zonen

Punkter tillhörande denna zon karakteriseras av elastiskt beteende i båda belastningsfaserna, varför superpositionsprincipen direkt är tillämpbar. Vi är därför berättigade att tänka oss båda belastningarna påförda konstruktionen samtidigt, varvid en resulterande rotation erhålles kring ett momentancentrum C i FIG. 3, med koordinaterna  $(x_2, y_2)$  och med vridningsvinkeln  $\theta'_2$ .

Allmänt antas att vid elastiska förhållanden mellan punktkraften P och häremot svarande förskjutning  $\delta$  gäller sambandet

$$P = g \cdot k \cdot \delta \quad (10)$$

där g är punktens vikt och k den tidigare introducerade "elasticitetsmodulen". Detta samband ger, tillämpat på fas 1 vid en fiktiv punkt med  $g = 1$  belägen på cirkeln med radien  $R_0$  och med centrum i A uttrycket

$$P_0 = k \cdot \delta = k \cdot R_0 \cdot \theta'_1$$

eller med beaktande av (3)

$$\theta'_1 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{R_0} = \lambda \cdot \theta_1 \quad (11)$$

där

$$\theta_1 = \frac{1}{R_0} \quad (12)$$

Den till rotationen i fas 2 hörande vinkeländringen  $\tau'$  kan bestämmas med hjälp av uttrycket (82) i PSS, vilket ger

$$\tau' = \frac{\delta}{r} = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{M_g}{I_0} = \lambda \cdot \tau \quad (13)$$

där

$$\tau = \frac{M_g}{I_0} \quad (14)$$

Härvid betecknar  $M_g$  antingen momentet  $\Delta M$  enligt (9) eller momentet av  $\Delta N$  enligt (8) med avseende på gruppens viktade tyngdpunkt, i båda fallen dividerat med  $P_0$ . Med  $I_0$  avses gruppens polära tröghetsmoment med avseende på tyngdpunkten. Även punktradien  $r$  räknas i relation till denna punkt.

Storleken av den resulterande rotationen kring punkt C fås som summan av (11) och (13)

$$\theta'_2 = \lambda \cdot \theta_2 = \lambda \cdot (\theta_1 + \tau) \quad (15)$$

vilket ger sambandet

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau \quad (16)$$

Den resulterande punktkraften får värdet

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \theta'_2 \quad (17)$$

som med (15) insatt övergår i yttrycket

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \lambda \cdot \theta_2 = g \cdot R \cdot P_0 \cdot \theta_2 \quad (18)$$

eller i dimensionslös form

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot R \cdot \theta_2 \quad (19)$$

$R$  räknas här från den resulterande vridmedelpunkten C, vars läge det nu återstår att bestämma.

Punkten C karakteriseras av att den ligger stilla under den resulterande rörelsen. Den måste därför sökas på den räta linjen genom punkterna A och B. Dess läge på denna linje skall vara sådant, att summan av dess förflyttningar härrörande från fas 1 och fas 2 är noll. Villkoret ger med beteckningar enligt FIG. 3

$$\theta_1 \cdot (l_1 - l_2) - \tau \cdot l_2 = 0$$

varur erhålles

$$l_2 = \frac{\theta_1}{\theta_1 + 1} \cdot l_1 = \frac{\theta_1}{\theta_2} \cdot l_1 = \beta \cdot l_1 \quad (20)$$

$$\text{med } \beta = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{l_2}{l_1} \quad (21)$$

Koordinaterna  $(x_2, y_2)$  för punkten C kan härfter beräknas ur sambanden

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= u - \beta \cdot (u - x_1) \\ y_2 &= v - \beta \cdot (v - y_1) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

### 2.1.2 Punkter i den plastiska zonen

En punkt i denna zon har genom rotation kring punkt A under fas 1 erhållit en förskjutning

$$\delta = \delta_e + \delta_p$$

sammansatt av två delar, en elastisk  $\delta_e$  och en plastisk  $\delta_p$ . Den senare innebär reellt en permanent förflyttning av punkten i relation till punktmängden inom den elastiska zonen; punktgruppens geometri har således förändrats. Vi antar emellertid att  $\delta_p$  är liten i förhållande till konstruktionens utsträckning, varför den uppkomna distorsionen kan anses försumbar. Kraften vid punkten,  $g \cdot P_0$ , kan därför antas ha framkommit genom ett enbart elastiskt pålastningsförlopp, vilket emellertid är ett annat än det, som gäller för punktmängden inom den elastiska zonen. De två förloppen har dock den gemensamma vridmedelpunkten A.

Vinkeländringen för den fiktiva elastiska rotationen beräknas ur sambandet

$$\theta_1' = \frac{\delta_e}{R}$$

där R under fas 1 räknas från punkt A, vilket med kraftsambandet

$$g \cdot P_0 = g \cdot k \cdot \delta_e$$

insatt ger

$$\theta_1' = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{R} = \lambda \cdot \theta_1 \quad (23)$$

med

$$\theta_1 = \frac{1}{R} \quad (24)$$

Pålastningstillståndet har härigenom återförts till ett fiktivt elastiskt tillstånd, varför superpositionsprincipen kan tillämpas även vid den plastiska punkten och den fortsatta beräkningsgången blir densamma som för punktmängden inom den elastiska zonen. Det skall dock observeras att momentancentrum C för den resulterande rotationen blir individuell för varje punkt inom det plastiska området beroende av ett för varje punkt individuellt värde på  $\theta_1$  enligt (24). Detta förhållande är orsaken till att påkännings-tillståndet  $\varphi$  ej längre är definierat och därför måste ersättas med den beskrivande koefficienten  $\alpha$ .

Exempel 1. - En punktkonstruktion 1, 2, 3 enligt FIG. 4 belastas med en yttre kraft genom punkt 3 till påkänningsstillståndet  $\varphi = 0,8$ . Pålastningstillståndet har studerats i exempel 8 i PSS. Från denna behandling vet vi att den yttre kraften är  $N_\varphi = 1,884 P_0$  och att vridmedelpunktens läge i det här nyttjade koordinatsystemet har koordinaterna  $(-7,73249, 1,16170)$  svarande mot punkt A i figuren. Streckade kraftvektorer anger kraftbilden efter pålastningen.

Sök kvarstående punktkrafter efter total avlastning, d.v.s. för  $\alpha = 0$ .

För punkter inom den elastiska zonen, punkterna 1 och 2, beräknas det gemensamma värdet på  $\theta_1$  enligt följande

$$\begin{aligned} R_M &= R_3 = 15,02553 \\ R_O &= \varphi \cdot R_M = 0,8 \cdot 15,02553 = 12,02043 \\ \theta_1 &= \frac{1}{R_O} = 0,0831917 \end{aligned}$$

Under avlastningsfasen är tillskottskraften enligt (8)

$$\Delta N = - (1-\alpha) \cdot N_\varphi = - 1,884 \cdot P_0$$

med det tillhörande momentet, dividerat med  $P_0$ , kring tyngdpunkten C.G.

$$M_g = \Delta N \cdot e = - 1,884 \cdot (5,65684 - 0,70711) = - 9,32529$$

Gruppens polära tröghetsmoment beräknas till

$$I_O = 2^2 + 2 \cdot (8^2 + 1^2) = 134$$

vilket ger

$$\tau = \frac{M}{I_0} = - \frac{9.32529}{134} = - 0.0695917$$

Vinkeländringen för den elastiska zonens sammansatta rotation är nu

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau = 0.0831917 - 0.0695917 = 0.0136000$$

varför

$$\beta = \frac{\theta_1}{\theta_2} = 6.117$$

Koordinaterna till vridmedelpunkten under fas 2, punkt B, fås enligt följande beräkning (jfr PSS)

$$e \cdot f = \frac{I_0}{S} = \frac{134}{3} = 44.66667$$

$$f = \frac{44.66667}{4.94973} = 9.02406$$

$$u = 0.70711 - 9.02406 = - 8.31695$$

$$v = 0.70711$$

Läget för vridmedelpunkten vid den sammansatta rotationen, punkt  $C_{1,2}$ , ges av (22)

$$x_2 = - 8.31695 - 6.117 (- 8.31695 + 7.73249) = - 4.74181$$

$$y_2 = 0.70711 - 6.117 (0.70711 - 1.16170) = 3.48784$$

Det således beräknade läget ger radierna med avseende på  $C_{1,2}$

$$R_1 = 2.35411 \quad R_2 = 6.99783$$

varför slutligen ur (19) erhålles

$$P_1:P_0 = 2.35411 \cdot 0.0136 = 0.032$$

$$P_2:P_0 = 6.99783 \cdot 0.0136 = 0.095$$

För punkten i den plastiska zonen, punkt 3, beräknas analogt

$$\theta_1 = \frac{1}{R_M} = \frac{1}{15.02553} = 0.0665534$$

$$\theta_2 = - 0.0695917 + 0.0665534 = - 0.0030383$$

$$\beta = \frac{\theta_1}{\theta_2} = - 21.905$$

varefter momentancentrum, punkt  $C_3$ , hörande till den resulterande rörelsen för punkt 3, bestäms till

$$x_2 = - 8.31695 + 21.905 \cdot (- 8.31695 + 7.73249) = - 21.11955$$

$$y_2 = 0.70711 + 21.905 \cdot (0.70711 - 1.16170) = - 9.25068$$

vilket ger radien med avseende på  $C_3$

$$R_3 = 27.01671$$

och

$$P_3:P_0 = - 27.01671 \cdot 0.0030383 = - 0.082$$

De således beräknade kvarstående krafterna efter avlastning visas heldragna i FIG. 4 i en 10 gånger större skala än den, som använts för de ursprungliga krafterna efter pålastning. Som framgår av figuren går residualkrafternas verkningslinjer genom samma punkt samtidigt som den av krafterna bildade kraftpolygonen sluter sig, vilket anger att ett jämviktsläge råder.

Som framgår av det ovan genomräknade exemplet är det under förutsättning av helt elastisk återgång möjligt att bestämma det kvarstående krafttillståndet vid hel eller delvis avlastning med elementära beräkningar, för vilka i princip datamaskin ej behöver tillgripas.

Med den valda nivån på  $\alpha$  har avlastningsfasen haft ett renodlat elastiskt förlopp, vilket innebär, att det är reversibelt och att således en förnyad pålastning till ursprungsnivån  $N = N_0$  återför det inre krafttillståndet till det, som rådde omedelbart före avlastning. Varje skede av en således applicerad andra pålastning uppvisar därför proportionalitet mellan yttre last och inre krafter i motsats till förhållandena vid den första pålastningen, där proportionaliteten upphävdes, då  $\psi$  passerade värdet 1.0. Den inträffade flytningen under första pålastningen har således höjt konstruktionens proportionalitetsgräns.

### 2.1.3 Specialfallet $\theta_2 = 0$

Vi skall avslutningsvis specialstudera den beräkningsmässiga behandlingen av en punkt, för vilken det inträffar, att  $\theta_2 = 0$ . Enligt (16) uppkommer denna situation då  $\theta_1 = -\tau$ . Detta har som konsekvens att  $\beta$  enligt (21) blir oändligt stor och att

enligt (22) momentancentrum C för den sammansatta rörelsen flyttas till oändligheten. Geometriskt innebär detta, att den resulterande punktkraften P är vinkelrät mot linjen genom punkterna A och B, -jfr FIG 5. Punkten kan därför behandlas som om den deltagar i en fiktiv rotation kring en godtyckligt vald punkt C på en linje genom punkten, parallell med linjen genom A och B.

Av figuren framgår att krafttriangeln vid punkten D är likformig med triangeln ADB, vilket ger relationen

$$\frac{P'}{P} = \frac{r}{l}$$

Väljer vi nu läget för punkten C så att detta motsvarar den arbiträra vridningsvinkeln  $\theta_1'$ , erhålles med utnyttjande av den ovan angivna relationen jämte sambandet

$$P' = g \cdot k \cdot r \cdot \theta_1'$$

den resulterande punktkraften

$$P = \frac{l}{r} \cdot P' = g \cdot k \cdot l \cdot \theta_1'$$

Med  $R = l$  och (11) erhålles sedan

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \frac{P_0}{k} \cdot \theta_1$$

och slutligen den dimensionslösa kraften

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot R \cdot \theta_1 \quad (25)$$

En jämförelse med (19) visar att punkt D kan hanteras som övriga punkter inom gruppen, om i (16) insätts det fiktiva värdet  $\tau = 0$  och om samtidigt momentancentrum C läggs på avståndet  $l$  från punkten D. Koordinaterna för C beräknas ur

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x - (u - x_1) \\ y_2 &= y - (v - y_1) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

vilka samband här ersätter de allmänna uttrycken (22).

## 2.2 Icke helt elastisk återgång efter flytning

### 2.2.1 Avlastningsfasens jämviktsekvationer

En icke tidigare belastad punktkonstruktion pålastas genom en



yttre last,  $N_0$  eller  $M_0$ , till ett påkänningstillstånd  $\varphi < 1$ , varvid flytning inträffar vid en eller flera punkter. Den häremot svarande, enligt PSS bestämda vridmedelpunkten betecknas som förut med A.

Vid den påföljande avlastningen väljes ett så lågt värde på  $\alpha$ , att flytning med säkerhet inträffar vid åtminstone en punkt vid avlastningens slut. Ordet "avlastning" ges här en vidare betydelse än vanligt genom att vi låter det omfatta även en minskning av den yttre lasten förbi noll, d.v.s. lasten kan efter total avlastning åter få öka numeriskt, men nu med ombytt tecken.

Med i princip samma betraktelsesätt som i 2.1 kan följande konstateras. Rotationen under pålastningsfasen, fas 1, kan under hela sitt förlopp uppfattas ske kring den kända punkten A. Den ger upphov till en kraft  $P_A$  enligt FIG. 6, i vilken den visade punkten får representera en punkt, vid vilken flytning inträffar vid avslutad avlastning.

Vid avlastningsfasens början är förloppet helt elastiskt, varför den mot denna fas svarande vridmedelpunkten B kan bestämmas enligt föregående avsnitt. Just då flytning inträffar vid den betraktade punkten är kraftkomponenten hörande till fas 2 lika med  $P_B$  och den resulterande punktkraften  $g \cdot P_0$ . Vid fortsatt avlastning kan den resulterande kraften ej växa ytterligare, varför en vinkeländring av kraften inleds.  $P_B$  ändras härvid till  $P'_B$ , vilket innebär att vridcentrum B nu icke längre ligger fast utan förskjuts i punktgruppens plan. Då avlastningen är helt avslutad har vridmedelpunkten intagit ett läge B' med koordinaterna  $(u, v)$ , vilka tillsammans med vridningsvinkeln  $\tau$  nu närmast återstår att beräkna.

Problemets tre obekanta  $u$ ,  $v$  och  $\tau$  kan implicit bestämmas genom tillämpning av planets tre jämviktsekvationer, varför vi börjar med att teckna dessa. Inledningsvis antas därvid den yttre lasten vara en kraft. Det härigenom funna resultatet kan sedan enkelt anpassas till att gälla, då den yttre lasten utgörs av ett moment.

Den efter avslutad fas 2 kvarstående yttre kraften är enligt (7)

$N = \alpha \cdot N_0$ . Med beteckningar enligt FIG. 7 kan projektionsekvationerna skrivas

$$\left. \begin{aligned} - \Sigma P \cdot \cos \gamma + N &= 0 \\ - \Sigma P \cdot \sin \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Med beteckningarna

$$a = x - x_2 \quad b = y - y_2 \quad (28)$$

och med beaktande av att

$$\cos \gamma = \frac{a}{R} \quad \sin \gamma = \frac{b}{R} \quad (29)$$

erhålles genom insättning i (27)

$$\left. \begin{aligned} - \Sigma P \cdot \frac{a}{R} + N &= 0 \\ - \Sigma P \cdot \frac{b}{R} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Så länge elastiska förhållanden råder vid en punkt är enligt (19)

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot R \cdot \theta_2 = g \cdot R \cdot v \quad (31)$$

Flytning inträffar då absolutvärdet av kraften blir  $g \cdot P_0$ , alltså då

$$g \cdot R \cdot \text{abs } \theta_2 \cdot P_0 = g \cdot P_0$$

varur gränsvärdet av  $\theta_2$  bestämmes till

$$\text{abs } \theta_2 = \frac{1}{R} \quad (32)$$

Då plasticering vid en punkt har inletts är kraften vid punkten bestämd av

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot \text{sign } \theta_2 = g \cdot R \cdot \frac{\text{sign } \theta_2}{R} = g \cdot R \cdot v \quad (33)$$

Generellt gäller därför enligt (31), (32) och (33) sambandet

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot R \cdot v \quad (34)$$

där

$$\left. \begin{aligned} v &= \theta_2 && \text{för } \text{abs } \theta_2 < \frac{1}{R} \\ v &= \frac{1}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 && \text{för } \text{abs } \theta_2 \geq \frac{1}{R} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(34) insatt i (30) ger slutligen projektionsekvationerna under

formen .

$$\left. \begin{aligned} - \Sigma g \cdot v \cdot a + \frac{N}{P_o} &= 0 \\ - \Sigma g \cdot v \cdot b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Momentekvationen skrivs med avseende på punkt B, varvid med beteckningar enligt FIG. 7 erhålles

$$\Sigma (p-a) \cdot P \cdot \cos \gamma + \Sigma (q-b) \cdot P \cdot \sin \gamma + d \cdot N = 0 \quad (37)$$

Efter division med  $P_o$  och insättning av (29) övergår (37) i

$$-\Sigma \frac{P}{P_o} \cdot (a^2 + b^2 - ap - bq) \cdot \frac{1}{R} + d \cdot \frac{N}{P_o} = 0 \quad (38)$$

Införs beteckningen

$$c = R^2 - ap - bq \quad (39)$$

och punktkraften P enligt (34) får slutligen momentekvationen formen

$$-\Sigma g \cdot v \cdot c + d \cdot \frac{N}{P_o} = 0 \quad (40)$$

Det nu uppställda ekvationssystemet (36), (40) bestämmer problemets tre obekanta u, v och r. Systemet är emellertid föga lämpat för algebraiska lösningsmetoder, varför vi i avsnitt 3 kommer att angripa problemet enligt ett annat betraktelsesätt.

Vi skall avsluta denna härledning med att överföra de tre jämviktsekvationerna i matrisform. Först sammanfattas de ovan funna resultaten i vektoriell form och tecknas

$$-\begin{Bmatrix} \Sigma g \cdot v \cdot a \\ \Sigma g \cdot v \cdot b \\ \Sigma g \cdot v \cdot c \end{Bmatrix} + \frac{N}{P_o} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

vilket uttryck är tillämpligt då den yttre lasten är en kraft N. Sambandet modifieras till

$$-\begin{Bmatrix} \Sigma g \cdot v \cdot a \\ \Sigma g \cdot v \cdot b \\ \Sigma g \cdot v \cdot c \end{Bmatrix} + \frac{M}{P_o} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

då den yttre lasten är ett moment M.

Låter vi nu  $n$  beteckna antalet punkter i konstruktionen, kan vi definiera följande matriser.

$G$  = viktmatrisen av typ  $(n \times 1)$  med matriselementen lika med punktkonstruktionens enskilda vikter.

$V$  = rotationsmatrisen - en diagonalmatris av typ  $(n \times n)$  med elementen i huvuddiagonalen lika med till varje punkt hörande  $v$  beräknat enligt (35) och med övriga element lika med noll.

$D$  = formmatrisen av typ  $(n \times 3)$  innehållande till varje punkt hörande geometriska storheter  $a$ ,  $b$  och  $c$ .

$Q$  = lastmatrisen av typ  $(3 \times 1)$ . Matrisen är uppbyggd av sista termen i vänstersidan av ekvationen (41) eller (42) med  $N$  utbytt mot  $N_\phi$  respektive  $M$  utbytt mot  $M_\phi$ .

Med de så definierade matriserna insatta i (41) respektive (42) får dessa den sammanfattande formen

$$- G^* \cdot V \cdot D + \alpha \cdot Q^* = 0 \quad (43)$$

där asterisk anger transponering.

Lösningen till ekvation (43) ger med  $\alpha$  som parameter den inre kraftbildens variation under avlastningsfasen.

### 2.2.2 Fenomenologisk diskussion

En punktgrupps beteende under avlastning kan - utan lösning av ekvationen (43) - kvalitativt beskrivas på följande sätt.

Låt enligt FIG. 8  $N_\phi$  vara den yttre kraften omedelbart efter första pålastningen till ett givet påkänningstillstånd  $\psi < 1$ . Låt vidare den i figuren visade punkten S vara den punkt i konstruktionen, för vilken flytning först inträffar under den efterföljande avlastningsfasen. Den mot  $N_\phi$  svarande punktkraften är  $F$ .

Med  $j$  betecknar vi nu en enhetsvektor i den yttre kraftens verkningslinje, motriktad kraftvektorn  $N_\phi$ . Alltså är

$$j = - \frac{N_\phi}{|N_\phi|}$$

Vektorn  $i$  representerar den kraft som uppkommer vid den betraktade punkten om konstruktionen angrips av den yttre kraften  $j$  vid helt elastiska förhållanden. Vid superposition av de två yttre krafterna  $N_\phi$  och en skalär  $\psi$  gånger  $j$  kan den yttre kraften under ett godtyckligt skede av avlastningen tecknas som

$$N = \alpha \cdot N_\phi = N_\phi + \psi \cdot j$$

Härur erhålls mellan  $\psi$  och den tidigare använda parametern sambandet

$$\psi = (1-\alpha) \cdot |N_\phi|$$

Den samtidigt med  $N$  uppträdande inre punktkraften  $P$  fås som den vektoriella summan av  $F$  hörande till fas 1 och kraften  $K = \psi \cdot i$  hörande till fas 2. Härav framgår att den geometriska orten för ändpunkten till den resulterande kraftvektorn  $P$  blir den linje, som börjar vid vektorn  $F$ 's ändpunkt och vars riktning är parallell med  $i$ . Då värdet av  $\psi$  ökar, uppnås så småningom den situation att  $P = g \cdot P_0$ , d.v.s. plasticering av punkten inleds. Därefter kan punktkraften icke växa ytterligare, varför den, vid fortsatt ökning av  $\psi$ , börjar rotera kring punkten  $S$ .

För en annan punkt  $T$  i punktgruppen, för vilken flytning inträffar senare än vid punkt  $S$  blir förloppet följande. Omedelbart vid avlastningens början förflyttar sig den resulterande punktkraftens ändpunkt efter en rät linje vars riktning är bestämd av tillskottskraftens riktning vid punkt  $T$ . Då kraften vid punkt  $S$  har uppnått sitt maximala värde  $g \cdot P_0$ , övergår emellertid denna linje från att vara rät till att vara krökt. Då plasticering inleds även vid punkt  $T$  blir kraftens rörelse även här en rotation.

Det summariskt beskrivna förloppet kommer att illustreras detaljerat av i 3.3 genomräknade exempel.

Avslutningsvis skall påpekas, att en förnyad pålastning till lastnivån  $N = N_\phi$  här ordinärt icke återför konstruktionen till det ursprungliga påkänningstillståndet  $\psi$ , utan ett nytt elasto-plastiskt tillstånd etableras med för varje punkt individuellt momentancentrum.

Exempel 2. - En dubbelsymmetrisk punktkonstruktion med utformning enligt FIG. 9 belastas med moment  $M$ , varvid konstruktionens vridmedelpunkt sammanfaller med dess tyngdpunkt för alla grader av plasticering. Antalet obekanta reduceras härigenom från tre till en, nämligen vridningsvinkeln  $\tau$ , vilket gör det aktuella problemet åtkomligt för en detaljstudie över enbart handräkning.

Vi förutsätter att konstruktionens alla punkter har vikten  $g = 1$  och flytkraften  $P_0 = 1$ .

Vi antar, att konstruktionen pålastas till påkänningstillståndet  $\psi = 0.4$  med tillhörande yttre moment  $M_\psi$ . Sedan låter vi momentet växla mellan yttergränserna  $M_\psi$  och  $-M_\psi$  och beräknar häremot svarande variationer i punktkrafter.

Vi betraktar först initialuppspänningen genom pålastning. Med det polära tröghetsmomentet

$$I_0 = 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 10^2 = 216$$

fås inom det elastiska skedet av pålastningen sambanden

$$P_1 = \frac{M}{216} \cdot 10 \quad P_2 = \frac{M}{216} \cdot 2$$

Plasticeringen inleds då  $P_1 = 1$ , alltså då det yttre momentet har vuxit till  $M = 21.6$ , varvid samtidigt  $P_2 = 0.2$ . Tillståndet anges genom punkterna  $a_1$  och  $a_2$  i det i figuren visade M-P-diagrammet.

Pålastningens sluttillstånd erhålles enligt följande. Med  $R_M = 10$  och  $\psi = 0.4$  fås  $R_0 = \psi \cdot R_M = 4$ , vilket ger punktkrafterna  $P_1 = 1.0$  och  $P_2 = 0.5$  och det tillhörande momentet

$$M_\psi = 4 \cdot 0.5 \cdot 2 + 2 \cdot 1.0 \cdot 10 = 24$$

Tillståndet markeras med punkterna  $b_1$  och  $b_2$  i diagrammet. Det fullständiga pålastningsförloppet beskrivs därför av kurvgrenarna  $0 - a_1 - b_1$  och  $0 - a_2 - b_2$  för punkterna 1 respektive 2.

Vi övergår härfter till ett studium av momentväxlingen från  $M_\psi$  till  $-M_\psi$ . Vid avlastningens början är förloppet helt elastiskt.

Plasticering inträffar enligt (32) först då

$$\text{abs } \theta_2 = \frac{1}{R}$$

vid någon punkt. Med  $\theta_2$  negativ fås för punkt 1, vilken är den mest ansträngda, villkoret

$$\text{abs } \theta_2 = -\theta_2 = -(\theta_1 + \tau) = \frac{1}{10}$$

Med enligt (24)  $\theta_1 = \frac{1}{10}$  fås härur

$$\frac{1}{10} + \tau = -\frac{1}{10}$$

eller

$$\tau = -\frac{1}{5}$$

Kraften vid punkt 1 är nu  $P_1 = R \cdot v = R \cdot \theta_2 = -1.0$ .

Den samtidigt uppträdande kraften vid punkt 2 fås ur följande beräkning. Enligt (12) är  $\theta_1 = \frac{1}{R_0} = \frac{1}{4}$  och således

$$v = \theta_2 = \theta_1 + \tau = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

och därmed

$$P_2 = R \cdot v = 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

Det mot de beräknade punktkrafterna svarande värdet av det yttre momentet blir därför

$$M = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 10 = -19.2$$

Det beräknade tillståndet har markerats i diagrammet med punkterna  $c_1$  och  $c_2$ .

För bestämning av punktkrafterna vid  $M = -M_0 = -24$  tillämpas momentekvationen enligt (42)

$$-\left[2 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot 10^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \tau\right) \cdot 2^2\right] - 24 = 0$$

vilket ger

$$\tau = -\frac{1}{2}$$

Kraften vid punkt 1 är fortfarande  $P_1 = 1$ . För punkt 2 gäller att

$$\theta_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

varför kraften vid denna punkt blir

$$P_2 = -2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Tillståndet efter avslutad momentväxling har markerats med  $d_1$  och  $d_2$  i diagrammet. Den studerade momentväxlingen följer således kurvgrenarna  $b_1 - c_1 - d_1$ , gällande för punkt 1, och  $b_2 - c_2 - d_2$ , gällande för punkt 2.

En analog behandling av momentväxlingen från  $-M_\phi$  till  $M_\phi$  ger sambandet mellan  $M$  och  $P$  enligt kurvgrenarna  $d_1 - f_1 - b_1$  respektive  $d_2 - f_2 - b_2$ , vilka leder fram till det tillstånd, som rådde omedelbart efter den första pålastningen. Fortsatt lastväxling vill därför i det aktuella fallet medföra punktkraftvariationer efter de framräknade hysteresiskurvorna till dess utmattningsbrott inträffar.

Det skall observeras att till givet värde på  $M$  hör två skilda jämviktstillstånd, ett svarande mot att  $M$  uppnåtts genom avlastning och ett annat svarande mot att  $M$  uppnåtts genom förnyad pålastning.

Av speciellt intresse är situationen vid total avlastning. Här fås residualkrafterna  $P_1 = -\frac{1}{9}$  och  $P_2 = \frac{5}{18}$ , om tillståndet har nåtts ovanifrån, och  $P_1 = \frac{1}{9}$ ,  $P_2 = -\frac{5}{18}$  om det i stället nåtts underifrån.

### 2.3 Datamaskinberäknade illustrationsexempel

Den ovan framlagda beräkningsmetoden skall i det följande belysas med några exempel, beräknade på datamaskin via det i avsnitt 6 beskrivna programmet. Kunskap om programmets utformning och verkningsätt krävs icke för förståelsen av de exempel som följer nedan och de som i illustrerande syfte analogt avslutar avsnitten 3, 4, 5 och 6.

Exempel 3. - Den i FIG. 10 visade punktkonstruktionen har åtta punkter, alla med vikten  $g = 1$ . Den belastas excentriskt enligt figuren med en kraft, vars maximala storlek är  $N:P_0 = 5.958$ , vilket svarar mot  $\psi = 0$ . Konstruktionens samtliga punkter har



härvid uppnått flytning med riktningar enligt vänstra delfiguren. Efter total avlastning till  $N = 0$  kvarstår det residualsysteem av krafter i inre jämvikt, som visas i den högra delfiguren. Det observeras att punkterna i slutstadiet har individuella momentancentra i överensstämmelse med teorin. Det framgår vidare, att restkrafternas storlek kan uppgå till icke obetydliga värden.

Exempel 4. - I detta exempel studeras samma trepunktskonstruktioner, som vi tidigare mött i exempel 1 - jfr FIG. 11. Med det här valda läget på konstruktionen karakteriseras den av koordinaterna  $(-8,0)$  för punkt 1,  $(0,3)$  för punkt 2 och  $(8,0)$  för punkt 3. Alla punkter antas ha vikten  $g=1$ . Den yttre kraften antas gå genom punkten 3 och bilda en vinkel om  $135^\circ$  med x-axeln.

I exempel 1 studerade vi kvarstående krafter i konstruktionen efter avlastning svarande mot  $\alpha = 0$  då initialtillståndet bestämdes av  $\psi = 0.8$ . Vi skall i detta exempel generalisera behandlingen till att omfatta en pålastning till en godtyckligt vald pålastningsnivå med därpå följande total avlastning.

De beräknade resultaten redovisas i de tre diagrammen till vänster i figuren. I dessa anger de övre kurvorna sambandet mellan påkänningstillståndet  $\psi$  och punktkrafternas storlek inom det elasto-plastiska området. Diagrammens undre kurvor anger storleken av kvarstående krafter vid avlastning efter pålastning till den nivå som abscissan anger. Som exempel visas till höger i den övre delfiguren krafttillståndet efter belastning till  $\psi = 0.2$ , vilket uppnås då den yttre kraften antar värdet  $N = 2.123 P_0$ , med den för alla punkter gemensamma vridmedelpunkten, gällande vid förloppets slut. Den undre högra delfiguren visar motsvarande residualkrafttillstånd efter avlastning med för varje punkt individuellt momentancentrum. Ett jämviktsvillkor har med streckade linjer antytts i figuren.

Exempel 5. - I PSS har effekten av en temperaturexpansion för en punktgrupp studerats på ett sådant sätt, att det förutsatta kongruensvillkoret tolkats som att punkterna ingår i en ur

elastisk synpunkt icke deformabel plåt parallell med ett stelt underlag. Vid en likformig uppvärmning av denna plåt vill punktgruppen expandera, varvid kongruensvillkoret upphör att gälla och ersätts av ett affinitetsvillkor. Som huvudresultat av detta studium fann vi i PSS att vid expansion, som resulterade i plasticering inom gruppen, kunde jämviktstillståndet beräknas som vid belastning med renodlat moment med efterföljande vridning av punktkrafterna  $90^\circ$  moturs. Vad som vid momentbelastning är momentancentrum omtolkas därvid till att vara expansionens affinitetspol. Beräkningsmetoden illustreras i PSS av ett exempel, varur ett delresultat återges i FIG. 12. De i denna visade tre punktkrafterna, markerade med övre index  $w$ , representerar därvid det inre krafttillstånd, som uppnås vid en temperaturökning, svarande mot momentlast vid  $\psi = 2/3$ . Flytning inträffar vid punkterna 1 och 3 men ej vid punkt 2 där kraften är  $P_2^w : P_0 = 0.736$ . Punktkrafterna går alla genom affinitetspolen ( $-0.18, 1.52$ ).

Tillståndet efter avsvälning till ursprungstemperaturen erhålles analogt genom att residualkrafterna efter en ekvivalent momentavlastning vrids  $90^\circ$  moturs. Härigenom erhålles de med  $c$  indexerade krafterna, vilka för ökad tydlighet ritats i en fem gånger större skala än krafterna hörande till det uppvärmda initialtillståndet. Efter avsvälning hör till varje punkt i punktgruppen en individuell pol, vilket fastlägger punktkraftens riktning. Som framgår av figuren uppfyller det erhållna residualkraftssystemet jämviktstvillkoren.

### 3. TILLSTÄNDSFÖRÄNDRINGAR UNDER EN LASTCYKEL

#### 3.1 Inre arbetets gradient

I detta avsnitt skall dels anvisas en metod för lösning av den i 2.2 uppställda jämviktsekvationen (43) och dels, som ett förstudium till den senare behandlade beräkningsgången för upprepade lastväxlingar, ges ett klarläggande av mekanismen för en punktgrupp vid en enstaka, enkelt uppbyggd lastcykel.

Den lastcykel, som kommer att studeras, illustreras av FIG. 13, i vilken tiden  $t$  har avsatts som abscissa och den yttre kraften  $N$  som ordinata. Figuren är helt schematisk och anger icke något reellt tidsberoende för den yttre kraften.

Cykeln föregås av en pålastningsfas 0-1 som leder till initialtillståndet 1, karakteriserat av den valda påkänningsnivån  $\psi$  och en till denna hörande yttre kraft  $N_\psi = N_{\max}$ . Härfter följer den egentliga lastcykeln, i vilken den nedåtgående grenen i sin första del återspeglar en minskning av den yttre kraftens storlek fram till total avlastning, vilket uppnås vid punkt 2, för att sedan svara mot en ny stegring av  $N$  med omkastad riktning, tills ett andra extremvärde  $N_{\min}$ , bestämt av valt värde  $\alpha_{\min}$ , uppnås vid punkt 3. Cykelns därpå följande, uppåtgående gren återges analogt med först en avlastning fram till punkt 4 och sedan återigen en pålastning tills initialkraften uppnås i punkt 5.

Första pålastningen, d.v.s. grenen 0-1, har utförligt behandlats i PSS. Vi fann där - ekvation (67), sidan 22, i kombination med ekvation (21), sidan 12 - att derivatorna till det i systemet lagrade inre arbetet  $\psi$  med avseende på den obekanta vridmedelpunktens koordinater  $u$  och  $v$  kunde tecknas

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \frac{\omega}{1+\omega} \cdot \frac{P_o^2}{k \cdot R_o} \cdot \left( -\frac{1}{R_o} \sum_e g_a - \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= \frac{\omega}{1+\omega} \cdot \frac{P_o^2}{k \cdot R_o} \cdot \left( -\frac{1}{R_o} \sum_e g_b - \sum_p g \frac{b}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

där  $\omega$  är en faktor beroende av belastningssituationens geometri.

Vi skall här komplettera dessa samband med att härleda ett uttryck för det inre arbetets derivata med avseende på rotationen  $\theta$ . För att uppnå enhetlighet i behandlingen av första pålastningen återgår vi här tillfälligt till beteckningarna i PSS, vilket bl a innebär att  $\theta$  avser konstruktionens verkliga rotation. Med hänvisning till PSS, sidan 20, ekvationerna (54) och (56), fås bidraget till det inre arbetet från en punkt tillhörande den elastiska zonen ur sambandet

$$\Delta \psi_e = \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot R \cdot P \quad (45)$$

och från en punkt inom den plastiska zonen ur sambandet

$$\Delta \psi_p = \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot R_o \cdot g \cdot P_o + (R - R_o) \cdot \theta \cdot g \cdot P_o \quad (46)$$

Insätts värdet på punktkraften beräknat ur (1) i (45) och summeras därefter över hela punktgruppen erhålles det totala inre arbetet

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot P_o \cdot \theta \cdot \left( \frac{1}{R_o} \sum_e g R^2 + 2 \sum_p g R - R_o \sum_p g \right) \quad (47)$$

där e och p, som förut, anger summation över den elastiska respektive den plastiska zonen.

Sambandet (4) insatt i (47) ger nu

$$\psi = \frac{1}{2} P_o \left( \frac{1}{\lambda} \theta^2 \sum_e g R^2 + 2 \theta \sum_p g R - \lambda \sum_p g \right)$$

vilket deriverat med avseende på  $\theta$  ger

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = P_o \left( \frac{\theta}{\lambda} \cdot \sum_e g R^2 + \sum_p g R \right) \quad (48)$$

Nu är emellertid enligt (4)

$$\frac{\theta}{\lambda} = \frac{1}{R_o}$$

varför (48) alternativt kan skrivas under formen

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = P_o \left( \frac{1}{R_o} \cdot \sum_e g R^2 + \sum_p g R \right) \quad (49)$$

Enligt PSS, sidan 18, ekvation (42), är det av den yttre kraften  $N$  samtidigt utförda arbetet

$$\phi = - \omega \cdot d \cdot \theta \cdot N \quad (50)$$

vilket deriverat med avseende på  $\theta$  ger

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - P_o \cdot d \cdot \frac{N}{P_o} \quad (51)$$

Addition av (49) och (51) ger därefter

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = P_0 \left( \frac{1}{R_0} \cdot \sum_e g R^2 + \sum_p g R - d \cdot \frac{N}{P_0} \right)$$

eller med beaktande av att  $\psi - \phi = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\omega}{1+\omega} \cdot P_0 \cdot \left( \frac{1}{R_0} \cdot \sum_e g R^2 + \sum_p g R - d \cdot \frac{N}{P_0} \right) \quad (52)$$

I detta uttryck (52) är innehållet inom parentesens residuum till momentekvationen på samma sätt som innehållet inom parenteserna i (44) är residua till projektionsekvationerna.

Tillämpning för den egentliga lastcykeln av samma metod, som vi i PSS och ovan använt för bestämning av de obekanta  $u$  och  $v$  för pålastningsfasen, leder till följande.

Problemets tre obekanta  $u$ ,  $v$  och  $\tau$  kan bestämmas som det värdeset, som ger minimum eller maximum av inre tillskottsarbete vid övergång från ett lasttillstånd till ett annat, då detta set entydigt beskriver den tillhörande tillskottsdeformationen.

I analogi med vad vi har funnit för första pålastningen, beräknas komposanterna till det inre tillskottsarbetets gradientvektor som residua till planets tre jämviktsekvationer. Härigenom överförs problemet att lösa ekvationen (43) från ett algebraiskt till ett analytiskt problem, nämligen att bestämma extremum för en funktion av de tre variablerna  $u$ ,  $v$  och  $\tau$ . Detta problem kan relativt enkelt lösas med hjälp av en datamaskin. En detaljerad anvisning på hur en sådan lösning kan genomföras, lämnas i 6.1.

Med utelämnande av en för varje jämviktsekvation karakteristisk faktor kan vi för lastfallet yttre kraft  $N$  enligt (41) teckna gradientkomposanterna

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= - \sum g v a + \frac{N}{P_0} &= A \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= - \sum g v b &= B \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= - \sum g v c + d \cdot \frac{N}{P_0} &= C \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Det enligt (42) alternativa fallet med yttre belastning av ett moment  $M$  kan behandlas helt analogt.

Att de mot i sambanden (44) och (52) svarande faktorerna har utelämnats i sambanden (53) innebär reellt en skalning av gradientkomposanternas absolutvärden. Detta saknar emellertid betydelse i detta sammanhang där den primära uppgiften är att bestämma de förskjutningsparametrar som gör gradienten till en nollvektor.

Vid uppställande av jämviktsekvationerna har tillämpats godtyckligt valda teckenregler, varför vi icke kan vara säkra på, att de i (53) givna sambanden äger giltighet överallt inom cykeln. Vid annat val av teckenregler hade vi funnit de alternativa sambanden

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= -A \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -B \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= -C \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

och det blir därför vår närmaste uppgift att fastlägga gradientkomposanternas eventuella teckenväxling inom lastcykeln.

Uppgiften kan lösas genom ett studium av det inre arbetets andra derivator, vilka framräknas i det följande med utgångspunkt från teckenvalet svarande mot (53).

Deriveras de två första av ekvationerna (53) med avseende på u respektive v erhålles

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} &= - \sum g_v \frac{\partial a}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} &= - \sum g_v \frac{\partial b}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Med (22) insatt i (28) fås för a och b uttrycken

$$\left. \begin{aligned} a &= x - u + \beta (u - x_1) \\ b &= y - v + \beta (v - y_1) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

vilka deriverade med avseende på u och v respektive och med insättning av (21) och (16) ger

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} = -1 + \beta = -\frac{1}{\theta_2} \quad (57)$$

För en punkt med elastiskt beteende gäller enligt (35)

$$v = \theta_2$$

vilket med (57) ger

$$v \frac{\partial a}{\partial u} = v \frac{\partial b}{\partial v} = -\tau \quad (58)$$

För en punkt med plastiskt beteende gäller enligt (35) och (32) det motsvarande uttrycket

$$v = \frac{1}{R} \cdot \text{sign } \theta_2$$

vilket med (57) ger

$$v \frac{\partial a}{\partial u} = v \frac{\partial b}{\partial v} = -\tau \cdot \frac{1}{R \cdot \text{abs } \theta_2} \quad (59)$$

Införs den ständigt positiva faktorn

$$\mu = \frac{1}{R \cdot \text{abs } \theta_2} \quad (60)$$

kan (59) skrivas under den alternativa formen

$$v \frac{\partial a}{\partial u} = v \frac{\partial b}{\partial v} = -\tau \cdot \mu \quad (61)$$

Genom insättning av (58) och (61) i (55) erhålles sambanden

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \tau \left( \sum_e g + \sum_p \mu g \right) \quad (62)$$

För en punkt tillhörande den plastiska zonen är  $\mu$  definierad av uttrycket (60), vilket i kombination med (35) ger  $0 < \mu \leq 1$ .

Definierar vi nu motsvarande enligt (58)  $\mu = 1$  för en punkt inom den elastiska zonen, kan (62) slutligen skrivas på den sammanfattande formen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \tau \cdot \sum \mu g \quad (63)$$

Summationen skall här utsträckas över konstruktionens samtliga punkter. Summan är alltid positiv, varför derivatornas tecken är beroende enbart av  $\tau$ .

Vi övergår härfter till ett studium av det sista av sambanden (53). Deriveras detta med avseende på  $\tau$ , erhålles

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = - \sum g \left( v \frac{\partial c}{\partial \tau} + c \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \quad (64)$$

Med  $c$  beräknat enligt definitionen (39), erhålles

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = 2 R \frac{\partial R}{\partial \tau} - \left( a \frac{\partial p}{\partial \tau} + p \frac{\partial a}{\partial \tau} + b \frac{\partial q}{\partial \tau} + q \frac{\partial b}{\partial \tau} \right)$$

Nu är emellertid enligt FIG. 7

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad \text{och} \quad \frac{\partial b}{\partial \tau} = \frac{\partial q}{\partial \tau}$$

varigenom uttrycket för  $\frac{\partial c}{\partial \tau}$  förenklas till

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = 2R \frac{\partial R}{\partial \tau} - (a + p) \frac{\partial a}{\partial \tau} - (b + q) \frac{\partial b}{\partial \tau} \quad (65)$$

Ur det geometriska sambandet (56) erhålles

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = (u - x_1) \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \quad (66)$$

(22) ger därefter uttrycket

$$\beta(u - x_1) = u - x_2 = p \quad (67)$$

vilket insatt i (66) ger

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \quad (68)$$

Nu är emellertid enligt definitionen - jfr (21) och (16) -

$$\beta = \theta_1 \cdot (\theta_1 + \tau)^{-1} \quad (69)$$

vilket deriverat med avseende på  $\tau$  ger

$$\frac{\partial \beta}{\partial \tau} = - \frac{\theta_1}{(\theta_1 + \tau)^2} = - \frac{\beta}{\theta_2}$$

eller efter insättning i (68)

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = - p \cdot \frac{1}{\theta_2} \quad (70)$$

Analogt beräknas

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} = - q \cdot \frac{1}{\theta_2} \quad (71)$$

Enligt FIG. 7 är

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Deriverat med avseende på  $a$  respektive  $b$  ger detta samband

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{R} \\ \frac{\partial R}{\partial b} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{R} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$



I identiteten

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \tau} + \frac{\partial R}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial \tau}$$

insättes nu (70), (71) och (72), varvid erhålles

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = - \frac{1}{\theta_2} \cdot \frac{pa + qb}{R} \quad (73)$$

vilket tillsammans med uttrycken (70) och (71) insatta i (65) ger

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{1}{\theta_2} \cdot (p^2 + q^2 - ap - bq) \quad (74)$$

För en punkt med elastiskt beteende gäller enligt ovan

$$v = \theta_2 = \theta_1 + \tau$$

vilket ger

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = 1 \quad (75)$$

Ur (74), (75) och (39) kan därefter beräknas

$$\begin{aligned} v \frac{\partial c}{\partial \tau} + c \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \\ &= p^2 + q^2 - ap - bq + a^2 + b^2 - ap - bq = \\ &= (p - a)^2 + (q - b)^2 = r^2 \end{aligned} \quad (76)$$

där  $r$  enligt FIG. 7 betecknar en punkts radie med avseende på tillskottsdeformationens vridmedelpunkt B.

För en punkt med plastiskt beteende gäller motsvarande uttryck

$$v = \frac{1}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 \quad (77)$$

vilket skall deriveras med avseende på  $\tau$ . Punktens förflyttning vid rotation kring punkt C kan skrivas under de alternativa formerna

$$\delta = R_0 \cdot \theta_2 = R \cdot v \quad (78)$$

där  $R_0$  betecknar den radie med avseende på C, som punkten skulle ha haft, om flytning nätt och jämnt skulle ha inträffat vid punkten.

Sambandet (78) ger

$$v = \frac{R_0}{R} \cdot \theta_2 = \frac{R_0}{R} \cdot (\theta_1 + \tau)$$

varur efter derivation med avseende på  $\tau$  erhålls

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{R_0}{R}$$

Med (78), (77) och (60) erhålles sedan

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{v}{\theta_2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\text{sign } \theta_2}{\theta_2} = \frac{1}{R \cdot \text{abs } \theta_2} = \mu \quad (79)$$

Ur (74), (77), (39) och (79) kan därefter beräknas

$$\begin{aligned} v \frac{\partial c}{\partial \tau} + c \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \\ &= \mu (p^2 + q^2 - ap - bq + a^2 + b^2 - ap - bq) = \mu \cdot r^2 \end{aligned} \quad (80)$$

Insätts slutligen (76) och (80) i (64) erhålles

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = - \sum_g g r^2 - \sum_p \mu g r^2$$

eller - med den ovan givna definitionen med  $\mu = 1$  för en elastisk punkt i minnet - sambandet

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = - \sum \mu g r^2 \quad (81)$$

Denna derivata är således alltid negativ.

Som sammanfattning av den genomförda undersökningen kan följande konstateras. Med teckenval för gradientvektorns komponenter enligt (53) fås de nedan uppställda samhörande värden på inre arbetets första och andra derivator

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= + A & \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} &= \tau \cdot \sum \mu g \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= + B & \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} &= \tau \cdot \sum \mu g \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= + C & \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= - \sum \mu g r^2 \end{aligned} \right\} \quad (82 a)$$

Med teckenval enligt (54) erhålles alternativt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= -A & \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} &= -\tau \cdot \Sigma \mu g \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -B & \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} &= -\tau \cdot \Sigma \mu g \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= -C & \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= \Sigma \mu g r^2 \end{aligned} \right\} \quad (82 \text{ b})$$

Vi kan nu enkelt följa teckenväxlingen för gradientkomposanterna till det inre tillskottsarbetet inom hela den betraktade lastcykeln.

Vid övergång från ett tillstånd till ett annat menar vi i det följande alltid en tillståndsförändring i pilspetsarnas riktning enligt FIG. 13.

Under en tillståndsförändring på grendelen 1-2 förlorar konstruktionen energi. Enligt principen om att det totala inre arbetet skall vara minimum i ett stabilt jämviktsläge skall energiförlusten vara maximal. I en maximumsituation gäller att

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} < 0 \quad (83)$$

Då  $\tau < 0$  på den betraktade grenen, är dessa villkor uppfyllda om vi väljer gradientkomposanternas tecken enligt (82 a), varvid erhålles

$$\text{grad } \psi = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (\text{grendel 1-2})$$

Under övergång från ett tillstånd till ett annat på grendelen 2-3 tillförs konstruktionen på nytt energi. Då tillskottsenergin måste vara minimal för att det totala inre arbetet skall bli minimum måste gälla att

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} > 0 \quad (84)$$

Här är fortfarande  $\tau < 0$ , varför villkoren uppfylls, om tecken väljs enligt (82 b). Detta ger

$$\text{grad } \psi = \begin{pmatrix} -A \\ -B \\ -C \end{pmatrix} \quad (\text{grendel 2-3})$$

Grendelen 3-4 karakteriseras av energiförlust, d.v.s. jämviktsläget svarar mot ett maximum av förlust, varför villkoren (83) skall uppfyllas. Då  $\tau > 0$  på denna gren fås tecken för första och andra gradientkomposanten enligt alternativet (82 b) och tecken för tredje komposanten enligt alternativet (82 a). Alltså blir

$$\text{grad } \psi = \begin{pmatrix} -A \\ -B \\ C \end{pmatrix} \quad (\text{grendel 3-4})$$

Slutligen karakteriseras grendelen 4-5 av ny energitillförsel. Här skall således en minimipunkt bestämmas svarande mot att villkoren (84) måste uppfyllas. Fortfarande är  $\tau > 0$ , varför tecken för gradientkomposanterna måste väljas enligt följande. Första och andra komposanten väljs enligt (82 a) och den tredje enligt (82 b), vilket ger

$$\text{grad } \psi = \begin{pmatrix} A \\ B \\ -C \end{pmatrix} \quad (\text{grendel 4-5})$$

Resultatet av den genomförda undersökningen sammanfattas i FIG. 13.

### 3.2 Symmetrisk lastcykel

I det allmänna fallet inträffar plasticering vid cykelns båda yttergränser. Systemet blir härigenom dissipativt, varför en tillståndsförändring mot en cykelgräns är irreversibel. Detta innebär att man generellt icke återvänder till initialtillståndet efter genomgång av en cykel, trots att den yttre belastningen gör detta.

Ett undantag från denna regel utgör den symmetriska cykeln, d.v.s. den cykel, som karakteriseras av samma absolutvärde på den yttre lasten vid cykelns övre och undre gräns ( $N_{\max} = |N_{\min}|$ ). Att så är fallet beror på, att den "skevhet" på grund av irreversibilitet, som uppkommer vid den ena cykelgränsen, tas ut av en lika stor men motsatt riktad "skevhet" vid den andra gränsen. En illustration till detta har vi redan fått i exempel 2.

Vi skall belysa förhållandet närmare i det följande genom ett studium av tillståndsförändringen för en punktgrupp vid dess

övergång från tillstånd 1 till tillstånd 3 i FIG. 13 under förutsättning av att dessa tillstånd bildar yttergränser i en symmetrisk cykel.

Vi påför en icke tidigare belastad punktkonstruktion last med en vald påkänningsnivå  $\psi$  och antar, att minst en av punktgruppens punkter i sluttillståndet uppför sig elastiskt, d.v.s. har en radie  $R < R_0$  med avseende på momentancentrum hörande till sluttillståndet.  $R_0$  betecknar därvid som i PSS radien i gränscirkeln mellan plastiskt och elastiskt område.

Låt den mot det uppnådda tillståndet 1 svarande, för alla punkter gemensamma vridmedelpunkten ha koordinaterna  $(u_1, v_1)$ . Dessa koordinater satisfierar planets två projektionsekvationer (5), då den mot tillståndet  $\psi$  svarande yttre kraften beräknas ur sambandet (6).

Det skall nu visas, att lösningen till jämviktsekvationerna (41) vid symmetrisk cykel i tillståndet 3 antar formen

$$(u_3, v_3, \tau_3) = (u_1, v_1, -\frac{2}{R_0}) \quad (85)$$

vilket bl.a. innebär att momentancentrum för tillskottsdeformationen sammanfaller med vridmedelpunkten för första pålastning. Att (85) satisfierar jämviktsekvationerna (41) påvisas genom insättning i dessa.

För en punkt hörande till den elastiska zonen fås ur (12) och (16)

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau = \frac{1}{R_0} - \frac{2}{R_0} = -\frac{1}{R_0}$$

varefter (35) ger

$$v = \theta_2 = -\frac{1}{R_0} \quad (86)$$

För en punkt hörande till den plastiska zonen ger (16) och (24) det motsvarande sambandet

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau = \frac{1}{R} - \frac{2}{R_0} \quad (87)$$

Med utgångspunkt från relationen

$$\frac{2}{R_0} > \frac{2}{R}$$

fås efter subtraktion av  $\frac{1}{R}$  i relationens båda sidor och med utnyttjande av (87)

$$\frac{2}{R_0} - \frac{1}{R} = \text{abs } \theta_2 > \frac{1}{R}$$

varför enligt (35)

$$v = \frac{1}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 = -\frac{1}{R} \quad (88)$$

Med  $x_1 = u_3$  och  $y_1 = v_3$  ger det geometriska sambandet (22) för konstruktionens alla punkter

$$x_2 = x_1 = u_3$$

$$y_2 = y_1 = v_3$$

varför enligt (39) för alla punkter gäller

$$c = R^2 \quad (89)$$

Genom insättning av (86), (88) och (89) i (41) och med beaktande av att den yttre kraften är  $-N$  i tillståndet 3 erhålles slutligen

$$-\sum g v a + \frac{N}{P_0} = \frac{1}{R_0} \sum_e g a + \sum_p g \frac{a}{R} - \frac{N}{P_0}$$

$$-\sum g v b = \frac{1}{R_0} \sum_e g b + \sum_p g \frac{b}{R}$$

$$-\sum g v c + d \cdot \frac{N}{P_0} = \frac{1}{R_0} \sum_e g R^2 + \sum_p g R - d \cdot \frac{N}{P_0}$$

men enligt (5) och (6) är högersidorna i dessa tre samband alla lika med noll, vilket visar att den antagna lösningen (85) satisfierar jämviktsekvationerna (41).

Genom att låta den yttre kraften genomlöpa en halv cykel, symmetriskt från  $N$  till  $-N$ , ändras således den inre kraftbilden från ett initialtillstånd till ett tillstånd, som fås ur initialtillståndet genom omkastning av riktningen för alla inre krafter. Det vunna resultatet implicerar att inom symmetriska gränsvärden för den yttre belastningen vill upprepning av cykeln ge en period-

isk variation av det inre krafttillståndet vid stabila material-egenskaper.

Slutligen skall nämnas, att vid punktgruppens totala plasticering bestäms lösningen till jämviktsekvationerna i tillstånd 3 som

$$(u_3, v_3, \tau_3) = \left( u_1, v_1, -\frac{2}{R_{\min}} \right)$$

Bevisföringen härför följer samma mönster, som tillämpats ovan, för en punkt hörande till den plastiska zonen.

Härmed har vi belyst några väsentliga förhållanden för en enkel belastningscykel. I det följande avsnittet kommer problemet att ytterligare fenomenologiskt belysas genom några datamaskinberäknade exempel.

### 3.3 Datamaskinberäknade illustrationsexempel

Det i 6.1 beskrivna programmets möjligheter för en detaljanalys av en lastcykel skall nedan demonstreras genom nio beräknings-exempel, av vilka de åtta första behandlar den enkla trepunkts-konstruktion, som vi tidigare mött i exempel 4. Att i huvudsak denna konstruktion har studerats beror på flera omständigheter. Dels har en punktgrupp med endast tre punkter i vilken en vinkel mellan punkternas sammanbindningslinjer är större än  $120^\circ$  ett extremt beteende (jfr vad som sägs härom i avsnittet om Toricellis punkt i PSS), varför den lämpar sig väl för program-testning. Dels ger en punktgrupp med ett ringa antal punkter fördelar i form av hanterligt redovisningsarbete och renodling av karakteristiska fenomen, vad avser variationer i det inre kraftmönstret under en lastcykel.

Slutligen har det bedömts vara mera givande att studera en och samma konstruktion vid ett stort antal belastningssituationer i stället för att splittra en analys på ett stort antal konstruktionstyper med var och en beräknad för endast ett lastfall.

I exemplen 6-13 redovisas grafiskt variationen i det inre kraftmönstret under en lastcykel vid olika yttergränser för denna och vid olika lastlägen. Cykeln har genomlöpts i 24 beräkningssteg,

av vilka i allmänhet endast vart annat har redovisats i kraftmönstret. Bara vid cykelgränserna där kraftvariationen har ett snabbare och mera oregelbundet förlopp har mellanliggande beräkningssteg medtagits i redovisningen. I exemplens huvudfigurer, visande kraftvariationen vid punktgruppens enskilda punkter, har i förtydligande syfte i allmänhet endast visats kraftvektorn vid cykelgränserna. I exemplen med symmetrisk cykel har dessutom medtagits kraftvektorn hörande till första totala avlastningen. I övrigt har visats enveloppen till kraftvektorernas banor.

En separat delfigur i halv skala orienterar i varje exempel om beräkningsförutsättningarna. Punktnumreringen är i de åtta exemplen densamma, som tillämpats i exempel 4.

Till höger i varje figur återfinns slutligen tre diagram utvisande punktkrafternas absoluta storlek som funktion av den yttre lasten.

Beräkningsstegen nr 6 och 18 motsvarar total avlastning i de fall, som lastcykeln är symmetrisk. Å figur hörande till exempel med symmetrisk cykel har ett jämviktsvillkor antytts vid dessa beräkningssteg.

Exempel 6. - I detta exempel studeras en symmetrisk lastcykel enligt FIG. 14. Påkänningstillståndet  $\psi = 0.4$  har valts så, att plasticering inträffar vid två av konstruktionens punkter men ej vid den tredje i belastningssteg nr 0.

Vi observerar att kraftvariationen vid den mest ansträngda punkten - punkt 3 - principiellt överensstämmer med den i 2.2 kvalitativt beskrivna med en bana för kraftvektorns ändpunkt, som sammansättes av räta linjer och cirkelbågar. Vid punkt 2 iakttas ett förlopp, som i stort överensstämmer med förloppet vid punkt 3, men där störningar inträffar omedelbart efter beräkningsstegen 10 och 22 samtidigt med att flytning initieras vid punkt 3. För punkt 1 slutligen är tillståndet elastiskt under hela belastningscykeln, vilket innebär en principiellt annan typ av kraftvariation vid denna punkt.

Beräkningsstegen 0 och 24 ger identiskt samma resultat, i överensstämmelse med vad som visats i 3.2 om symmetriska cykler.



Studeras diagrammen över kraftstorleken som funktion av den yttre lasten iakttas här en snabbare krafttillväxt vid en punkt omedelbart efter det att flytning inträffar vid en mer ansträngd punkt. Med det valda antalet beräkningssteg inom en cykel kan denna hastighetsökning i krafttillväxten icke redovisas i detalj.

Exempel 7. - Låter vi vid i övrigt oförändrade förutsättningar, cykelgränserna för den i exempel 6 studerade punktgruppen växa till  $N = \pm 2.154 P_0$ , inträffar flytning vid konstruktionens samtliga punkter vid gränslasterna. Den angivna kraften svarar således mot en initallast med påkänningsnivå  $\psi = 0$ .

Den till en lastcykel hörande situationen återges i FIG. 15, av vilken framgår, att enveloppen till kraftvektorns ändpunkt har breddats vid punkterna 2 och 3, jämfört med situationen i det föregående exemplet. Att kurvan hörande till punkt 1 i princip är av samma typ som i exempel 6 sammanhänger med, att den yttre kraften här har stegrats så långt att flytning nått och jämnt uppnås vid den betraktade punkten vilket innebär, att den principiellt mycket nära kan betraktas som en punkt i ett helt elastiskt tillstånd.

I övrigt är punktgruppens beteende vid denna högsta möjliga lastnivå av samma natur som vid den lägre lastnivå, som studerats i exempel 6.

Exempel 8. - I detta exempel, vilket illustreras av FIG. 16, gäller samma förutsättningar som för exempel 6 med som enda skillnad, att vikten för punkt 2 ökats till  $g = 2$ . Effekten härav framgår direkt av figuren, vilken i övrigt framvisar samma principiella kraftförlopp som de två föregående exemplens.

Exempel 9. - Som framgår av FIG. 17 har i detta exempel den yttre kraftens verkningslinje, med bibehållen riktning, flyttats närmare punktgruppens tyngdpunkt. Initialtillståndet, svarande mot  $\psi = 0.3$ , har även här valts så, att flytning inträffar vid två av gruppens punkter men ej vid den tredje. Cykeln är symmetrisk och den inre kraftvariationen följer i princip mönstret från det ovan studerade exemplet 6.

Exempel 10. - I detta exempel har enligt FIG. 18 riktningen för den yttre kraften ändrats, vilket har medfört en radikal - men dock icke principiell - förändring av punktgruppens inre kraftmönster. Även här är cykeln symmetrisk med flytning vid endast två punkter vid cykelgränserna. Som framgår av figuren, fås här en i det närmaste rätlinjig variation av punktkrafterna, bortsett från förhållanden vid cykelgränserna.

Exempel 11. - Som sista exempel med symmetrisk cykel har enligt FIG. 19 valts en belastning av punktgruppen med ett renodlat moment. En symmetrisk last på en symmetrisk konstruktion ger, som framgår av figuren, ett symmetriskt kraftmönster. Vid punkt 2 varierar kraften utan rotation. Anmärkningsvärd är den snabba ändringen i kraftens storlek vid punkt 2 efter det att flytning har inletts vid punkterna 1 och 3.

Exempel 12. - Exemplet illustrerar kraftmönstrets variation vid en osymmetrisk lastcykel. Som framgår av FIG. 20 har initialuppspänningen valts så, att flytning inträffar vid samtliga konstruktionspunkter, d.v.s.  $\psi = 0$ . Den häremot svarande yttre kraften är  $N_\psi = N_{\max} = 2.154 P_0$ . Avlastning sker därefter till den undre cykelgränsen  $N_{\min} = -0.9 N_{\max}$ , där flytning inträffar vid punkterna 2 och 3 men ej vid punkt 1. Cykeln avslutas sedan med förnyad ökning av den yttre kraften till initialvärdet  $N_{\max}$ , där flytning återigen inträffar vid samtliga punkter, men där de inre krafterna nu har andra riktningar än vid första pålastningen. Betraktas glappen 0-24 vid punktkrafterna som kraftvektorer, skall dessa bilda en sluten kraftpolygon, eftersom den yttre kraften är densamma vid dessa två beräkningssteg, såväl till storlek som till riktning. Osymmetrin i händelseförloppet illustreras även av de tre P-N-diagrammen.

Exempel 13. - Även detta exempel belyser kraftmönstrets variation vid en osymmetrisk lastcykel. Som framgår av FIG. 21, går emellertid cykelns skevhet här åt motsatt håll jämfört med skevheten för den cykel som studerades i det föregående exemplet. Den valda påkänningsnivån vid första pålastning är  $\psi = 0.8$ , vilket svarar mot ett värde av den yttre kraften av  $N_{\max} = 1.884 P_0$ . Detta beräkningssteg, steg 0 i figuren, ger flytning endast vid

punkt 3: Som undre cykelgräns bestämdes vid den datamaskinmässiga behandlingen  $N_{\min} = -1.25 N_{\max}$ . Denna gräns visade sig emellertid ligga utanför den möjliga undre gräns, vid vilken punktgruppen totalplasticeras. Som följd härav ändrade programmet den undre cykelgränsen till  $N_{\min} = -1.144 N_{\max}$ , vilken ger utbredd flytning vid punkterna 2 och 3 och nätt och jämnt flytning vid punkt 1. Förnyad pålastning till initialkraften  $N_{\max}$  ger nu flytning vid såväl punkt 2 och 3, men ej vid punkt 1. Även här måste glappen 0-24 betraktade som kraftvektorer bilda en sluten kraftpolygon. Exemplet uppvisar en anmärkningsvärt stor avvikelse mellan de inre kraftmönstren vid cykelns början och dess slut.

Exempel 14. - I detta exempel studeras samma punktgrupp, som vi tidigare mött i exempel 3, FIG. 22 visar punktgruppen två gånger och båda gångerna belastad med den excentriskt angripande yttre kraften  $N = 4.941 P_0$ . Trots identitet beträffande geometrisk utformning och yttre belastning är som framgår av figuren det inre krafttillståndet olika i de två fallen. Detta beror på att de två grupperna har olika förhistoria. Gruppen a har i ett icke tidigare belastat tillstånd påförts kraften  $N$  svarande mot påkänningstillståndet  $\psi = 0.95$ . Gruppen b följer grupp a fram till initialtillståndet  $\psi = 0.95$ . Den yttre kraften reverteras därefter med bibehållen verkningslinje till värdet  $-5.958 P_0$ , vid vilket konstruktionen totalplasticeras. Slutligen återförs den yttre kraften till initialvärdet  $N = 4.941 P_0$ . Det vid detta tillstånd etablerade inre kraftmönstret är det, som visas i delfigur b. Konstruktionen har således utsatts för en osymmetrisk lastcykel. Sluttillståndet för denna, grupp b, kan jämföras med cykelns initialtillstånd, grupp a. Det ses härvid att flytning inträffar vid fyra punkter i grupp b, däremot bara vid två punkter i grupp a. Punktkrafterna är i varje delfigur parvis lika stora, varför deras storlek noterats vid endast hälften av punkterna.

#### 4. PUNKTKONSTRUKTION AV PUNKTER MED FLERA FLYTNIVÅER

##### 4.1 Arbetslinjens approximation

Vi har hittills förutsatt en beräkningsmodell karakteriserad av ett bilineärt samband mellan deformation och kraft svarande mot ett idealelastoplastiskt beteende hos den betraktade punkten.

Denna modell kan appliceras för ett flertal i praktiken förekommande punktkonstruktioner och därvid speciellt för en principiell analys av konstruktivt verkningssätt.

En grupp av konstruktioner, vars punkter uppvisar ett elasto-plastiskt beteende, som markant avviker från de nämnda förutsättningarna, är friktionsförbanden. Sådana har för den enskilda punkten ett kraft-deformationssamband med två flytnivåer.

Den ena nivån svarar därvid mot den kraft, för vilken förbandets friktion övervinnes och glidning inom förbandet uppträder. Den andra nivån bestäms av materialets flytgräns.

För att bättre anpassa beräkningsmodellen till denna betydelsefulla punktkonstruktionstyp kommer i det följande den ovan deducerade beräkningsmetoden att modifieras till giltighet för punktgrupp med ett godtyckligt valt antal flytnivåer för den enskilda punkten. Härigenom uppnås, att punktgrupper med mera generella kraft-deformationssamband kan studeras. Som exempel visar därvid FIG. 23, hur en krökt arbetslinje för en enskild punkt kan approximeras, med varierande noggrannhet, av en idealiserad sådan stegformad linje innehållande flera flytnivåer.

I FIG. 24 a åskådliggörs det för den följande deduktionen antagna sambandet mellan deformation och kraft för en punkt med vikten  $g = 1$ . Sambandet indelas enligt figuren i ett antal områden, numrerade från 1 till  $k + 1$ . För de  $k$  första områdena gäller följande. Varje område består av en elastisk zon och en flytzon. Om samma elasticitetskoefficient antas gälla för alla elastiska zoner, är område nr  $i$  helt karakteriserat genom flytnivån  $\eta_i P_0$  och flytdeformationen  $\Delta_i$ . Deformationer svarande mot

flytzonens gränser i område nr  $i$  betecknas enligt figuren med respektive  $\delta_i'$  och  $\delta_i''$ , varav följer sambandet

$$\delta_i'' - \delta_i' = \Delta_i \quad (90)$$

För området  $k + 1$  gäller speciellt att dess flytnivå är punktens ultimativa, svarande mot gränsdeformationen  $\delta_0$ , och att dess flytzon ej är begränsad till storlek, varför vi för denna nivå inför beteckningen plastisk zon.

#### 4.2 Första pålastning

Vi övergår nu till att studera en punktkonstruktion, vars enskilda punkter har elasto-plastiska egenskaper enligt de ovan beskrivna. Vi antar, att konstruktionen aldrig tidigare har varit belastad, och att den nu påförs deformation genom en yttre kraft (eller ett yttre moment) i sitt eget plan. Deformationen blir generellt en rotation kring en tills vidare okänd punkt i planet, konstruktionens momentana vridmedelpunkt med koordinaterna  $(u, v)$ . Planet uppdelas vid deformationen i två zoner genom cirkeln med centrum i vridmedelpunkten och radien  $R_0 = \frac{\delta_0}{\theta'}$ , där  $\theta'$  är storleken av den påtvungna deformationen. Utanför denna cirkel ligger den plastiska zonen, inom vilken alla punktkrafter antar sitt maximala värde  $gP_0$ .

Ytan innanför cirkeln uppvisar såväl områden med flytning som områden med elastiskt tillstånd, varför vi betecknar den som den blandade zonen.

Inom den blandade zonen fördelar sig tillståndet på cirkulära koncentriskt band med vridmedelpunkten som centrum. Mönstret omfattar i huvudsak  $k$  stycken dubbelband med vart och ett uppdelat i ett elastiskt innerband och ett yttre flytband. Bandens läge och utbredning bestäms av deformationen  $\theta'$  samt av höjden på flytnivåerna.

Tillståndet framgår närmare av FIG. 24 b, där  $R_M$  liksom tidigare betecknar avståndet från vridmedelpunkten till gruppens yttersta punkt. I figuren sammanfaller således vridmedelpunkten och origo.

Bredden av ett flytband bestäms enligt (90) ur

$$R_i'' \cdot \theta' - R_i' \cdot \theta' = \Delta_i$$

d.v.s.

$$\text{bandbredden} = R_i'' - R_i' = \frac{\Delta_i}{\theta'} \quad (91)$$

Av (91) följer, att bandbredden avtar med växande deformation  $\theta'$ .

Övergår vi sedan till samma dimensionslösa framställning som tillämpats i PSS kan det inom gruppen rådande krafttillståndet återges enligt FIG. 24 c. Härvid har införts de dimensionslösa storheterna

$$\pi = \frac{P}{P_0} \quad \vartheta = \frac{R}{R_M}$$

samt den dimensionslösa koefficienten  $\beta_i$ , definierad genom sambandet

$$\Delta_i = \frac{P_0}{k} \cdot \beta_i = \lambda \cdot \beta_i \quad (92)$$

I analogi med tidigare använd terminologi talar vi även här om "påkänningstillståndet"  $\varphi$ , varmed avses den dimensionslösa formen av radien i gränscirkeln mot den plastiska zonen. Det skall emellertid observeras att  $\varphi$  nu icke entydigt bestämmer det inom konstruktionen uppträdande påkänningstillståndet. Bredden av ett flytband i den blandade zonen ges i dimensionslös form av (91) och (92) till

$$\text{bandbredden} = \vartheta_i'' - \vartheta_i' = \frac{\lambda \cdot \beta_i}{\theta' \cdot R_M} = \frac{\beta_i}{\theta \cdot R_M} \quad (93)$$

där  $\theta$  som förut är definierat genom sambandet  $\theta' = \lambda \cdot \theta$

Rotationsdeformationen  $\theta$  beräknas i det följande. Vi tänker oss alla flytnivåer i den blandade zonen förflyttade efter arbetslinjen till flytnivån  $\eta_0 = 0$ . Flytdeformationerna bildar då en sammanhängande sträcka på deformationsaxeln med början i origo och med längden  $\sum_0^k \Delta_i$ . Vi kan på detta sätt uppdelat en deformation i två delar: en första del som är plastisk och ej medför någon kraft, och en andra del som är helt elastisk.

Tillämpas detta betraktelsesätt på en fiktiv punkt belägen på gränscirkeln med radien  $R_0$  beräknas punktens elastiska förskjutning till följd av den verkliga vinkelvridningen  $\theta'$  ur sambandet

$$\delta_0^e = R_0 \cdot \theta' - \sum_0^k \Delta_i$$

Motsvarande punktkraft fås sedan ur

$$P = g \cdot k \cdot \delta_0^e = gk (R_0 \cdot \theta' - \sum_0^k \Delta_i) \quad (94)$$

Men på grund av punktens speciella läge på gränscirkeln är även

$$P = g \cdot P_0 \quad (95)$$

Ur (94) och (95) fås sambandet

$$P_0 = k (R_0 \cdot \theta' - \sum_0^k \Delta_i)$$

vilket med (92) kan skrivas

$$P_0 = k (R_0 \cdot \frac{P_0}{k} \cdot \theta - \frac{P_0}{k} \cdot \sum_0^k \beta_i) \quad (96)$$

(96) ger

$$\theta = \frac{1}{R_0} (1 + \sum_0^k \beta_i)$$

vilket med beteckningen

$$\omega_0 = 1 + \sum_0^k \beta_i \quad (97)$$

blir

$$\theta = \frac{\omega_0}{R_0} \quad (98)$$

Insätts nu (98) i (93), fås för flytbandets bredd i band nr i uttrycket

$$g_i'' - g_i' = \frac{R_0}{R_M} \cdot \frac{\beta_i}{\omega_0} = \frac{\varphi}{\omega_0} \cdot \beta_i \quad (99)$$

Som tidigare angivits, antages samma elasticitetskoefficient inom alla band. Detta kan motiveras med, att i allmänhet de plastiska deformationerna dominerar, varför någon mindre divergens i elasticitetskoefficienterna ej är av avgörande betydelse. Skulle det emellertid i någon tillämpning vara av stor vikt att arbeta med olika elasticitetskoefficienter inom banden, kan detta åstadkommas genom att en eller flera diagramdelar i

FIG. 24 c approximeras på ett sådant sätt, som visas i FIG. 23 för en krökt arbetslinje.

Den gemensamma elasticitetskoefficienten  $\epsilon$  gällande för samtliga elastiska band kan beräknas ur villkoret

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} + \frac{\varphi}{\omega_0} \cdot \sum_0^k \beta_i$$

varur med utnyttjande av (97) erhålles

$$\frac{1}{\epsilon} = \varphi \left( 1 - \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0} \right) = \frac{\varphi}{\omega_0}$$

och därmed

$$\epsilon = \frac{\omega_0}{\varphi} \quad (100)$$

I systematiserande syfte har här och i det följande summationerna påbörjats vid index 0, vilket förutsätter ett fiktivt  $\beta_0 = 0$ .

Den yttre begränsande radien  $\vartheta_i''$  för band nr i kan nu beräknas ur sambandet

$$\vartheta_i'' = \frac{\eta_i}{\epsilon} + \sum_0^i \frac{\varphi}{\omega_0} \cdot \beta_j$$

vilket med beteckningen

$$\omega_{i+1} = \sum_0^i \beta_j \quad (101)$$

och (100) ger

$$\vartheta_i'' = \frac{\varphi}{\omega_0} (\eta_i + \omega_{i+1}) \quad (102)$$

Inom band nr i beräknas sedan radien  $\vartheta_i'$  till gränsen mellan det elastiska bandet och flytbandet enligt (99) ur

$$\vartheta_i' = \vartheta_i'' - \frac{\varphi}{\omega_0} \cdot \beta_i = \frac{\varphi}{\omega_0} (\eta_i + \omega_i) \quad (103)$$

För en konstruktionspunkt liggande inom band nr i kan punktkraften härefter beräknas enligt följande.

Om  $\vartheta < \vartheta_i'$  erhålles



$$\epsilon = \frac{\omega_o}{\phi} = \frac{\eta_i - \frac{\pi}{g}}{\varrho_i' - \varrho}$$

varur löses

$$\frac{\pi}{g} = \eta_i - \frac{\omega_o}{\phi} (\varrho_i' - \varrho)$$

Insättes häri värdet på  $\varrho_i'$  beräknat enligt (103) fås

$$\frac{\pi}{g} = \frac{\omega_o}{\phi} \cdot \varrho - \omega_i \quad (104)$$

Om  $\varrho \geq \varrho_i'$  erhålles motsvarande

$$\frac{\pi}{g} = \eta_i \quad (105)$$

Lämnar vi nu den dimensionslösa framställningen och övergår till en behandling med verkliga krafter och längder, fås som motsvarighet till (104)

$$\begin{aligned} P &= g \cdot P_o \cdot \left( \omega_o \cdot \frac{R_M}{R_o} \cdot \frac{R}{R_M} - \omega_i \right) = \\ &= g \cdot P_o \cdot \frac{R}{R_o} \cdot \left( \omega_o - \frac{R_o}{R} \cdot \omega_i \right) \end{aligned} \quad (106)$$

och som motsvarighet till (105)

$$P = \eta_i \cdot g \cdot P_o \quad (107)$$

Det skall observeras att de här framtagna uttrycken för beräkning av punktkraften är tillämpbara inom hela konstruktionen, alltså såväl i den blandade som i den plastiska zonen.

Med nu kända värden på punktkrafterna kan planets tre jämviktsekvationer uppställas i analogi med i PSS genomförd behandling (jfr FIG. 2).

Den vertikala projektionsekvationen får formen

$$- \Sigma P \cdot \cos \gamma + N = 0$$

Insätts häri P med värden enligt (106) respektive (107) observeras att  $\cos \gamma = a/R$  och divideras med  $P_o$  erhålles

$$- \frac{1}{R_o} \cdot \Sigma g a \left( \omega_o - \frac{R_o}{R} \cdot \omega_i \right) - \eta_i \cdot \Sigma g \frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} = 0 \quad (108)$$

där index e betecknar, att summationen skall omfatta samtliga punkter i elastiska band, och index p summation över samtliga punkter i flytband jämte den plastiska zonen.

Motsvarande ger den horisontella projektionsekvationen

$$-\frac{1}{R_0} \cdot \sum_e g b \left( \omega_0 - \frac{R_0}{R} \cdot \omega_i \right) - \eta_i \cdot \sum_p g \frac{b}{R} = 0 \quad (109)$$

Momentekvationen ger med beteckningar enligt FIG. 2

$$\sum P \cdot R - d \cdot N = 0$$

Insättning häri av punktkrafterna P enligt (106) och (107) respektive samt division med  $P_0$  ger

$$\frac{1}{R_0} \cdot \sum_e g R^2 \left( \omega_0 - \frac{R_0}{R} \cdot \omega_i \right) + \eta_i \sum_p g R - d \cdot \frac{N}{P_0} = 0 \quad (110)$$

Då konstruktionen första gången belastas till det givna påkänningstillståndet  $\psi$ , blir beräkningsgången följande. Först bestäms läget av vridmedelpunkten (u, v) ur villkoret att de inre krafternas arbete skall vara minimum. Det inre arbetets gradientkomponenter (exklusive en konstant faktor) beräknas därvid i analogi med tidigare behandling (se (105) i PSS pg 32) ur sambanden

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= -\frac{1}{R_0} \sum_e g a \left( \omega_0 - \frac{R_0}{R} \omega_i \right) - \eta_i \sum_p g \frac{a}{R} + \\ &+ \frac{1}{d} \left( \frac{1}{R_0} \sum_e g R^2 \left( \omega_0 - \frac{R_0}{R} \omega_i \right) + \eta_i \sum_p g R \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -\frac{1}{R_0} \sum_e g b \left( \omega_0 - \frac{R_0}{R} \omega_i \right) - \eta_i \sum_p g \frac{b}{R} \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Därefter beräknas storleken på den yttre kraften N ur (110) och sedan de inre punktkrafterna P ur (106) alternativt (107).

#### 4.3 Tillståndsförändring

I det följande skall studeras vad som inträffar då den yttre kraften (momentet) efter pålastning reverteras.

Vi har i kapitel 2 sett att konstruktionens punkter därvid i det generella fallet roterar kring individuella vridmedelpunkter.

Läget av dessa kan oförändrat beräknas med hjälp av sambanden (22) och den resulterande vridningens storlek  $\theta_2$  ur (16), om alla ingående rotationer svarar mot gruppens faktiska elasto-plastiska egenskaper.

Det kvarstående problemet blir således att undersöka hur faktorn  $v$ , vilken ingår i uttrycken (53) för beräkning av gradienten till de inre krafternas arbete, skall beräknas under de nu rådande förutsättningarna. Detta problem kan behandlas på följande sätt.

Vi betraktar en av konstruktionens punkter jämte dess på avståndet  $R$  från punkten liggande momentana vridmedelpunkt. Antar vi att en rotation med storleken  $\theta_2'$  sker kring denna vridmedelpunkt, resulterar detta i uppkomsten av samhöriga koncentrisk "virtuella" tillståndsband i konstruktionens plan och med centrum i den betraktade punktens momentana vridmedelpunkt. Detta är helt i analogi med de "reella" tillståndsband som bildades vid den första pålastningen. Bandmönstrets utbredning är direkt beroende av  $\theta_2'$  på ett sådant sätt, att en ökning av  $\theta_2'$  medför en sammandragning av cirkelarna kring momentancentrum och en minskning av  $\theta_2'$  en förskjutning av cirkelarna utåt från centrum. Uppgiften blir därför att fastlägga konstruktionspunktens läge i relation till bandmönstret vid en given storlek på rotationen. Med detta delproblem löst, kan punktkraften och därmed  $v$  beräknas.

Antag att den aktuella punkten ligger i band nr  $i$ . Antag vidare att den tillhör detta bands elastiska zon.

Enligt samma betraktelsesätt som vid behandling av första pålastningen kan punktens elastiska förskjutning  $\delta_e$  beräknas ur sambandet

$$\delta_e = R \cdot \theta_2' - \sum_0^{i-1} \Delta_j$$

vilket med (15), (92) och (101) ger

$$\delta_e = R \cdot \lambda \cdot \theta_2 - \lambda \cdot \sum_0^{i-1} \beta_j = \lambda \cdot (R \cdot \theta_2 - \omega_1) \quad (112)$$

varefter genom insättning av (112) i (10) med beaktande av (92) erhålles

$$P = g \cdot P_0 \cdot (R \cdot \theta_2 - \omega_i) \quad (113)$$

Eftersom flytdeformationerna på de olika flytnivåerna räknas som absolutvärden måste (113) justeras med avseende på aktuell rotationsriktning. Härvid fås

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot R \cdot (\theta_2 - \frac{\omega_i}{R} \cdot \text{sign } \theta_2) = g \cdot R \cdot v$$

vilket i sin tur ger

$$v = \theta_2 - \frac{\omega_i}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 \quad (114)$$

Antar vi i stället att punkten tillhör band nr  $i$ 's flytzon beräknas punktkraften med hänsyn tagen till rotationsriktningen ur sambandet

$$P = g \cdot \eta_i \cdot P_0 \cdot \text{sign } \theta_2$$

eller

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot R \cdot \frac{\eta_i}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 = g \cdot R \cdot v$$

vilket ger

$$v = \frac{\eta_i}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 \quad (115)$$

Gränsen mellan giltighetsområdena för sambanden (114) och (115) erhålles genom att sätta de båda uttrycken lika. Detta ger

$$\theta_2 = \frac{\eta_i + \omega_i}{R} \cdot \text{sign } \theta_2$$

eller

$$\text{abs } \theta_2 = \frac{\eta_i + \omega_i}{R} \quad (116)$$

Genom (116) är det sökta sambandet mellan en punkts läge och det av  $\theta_2$  styrda tillståndsmönstret kring punktens momentancentrum känt. Vi kan därför nu formulera följande generella beräkningsregel, vilken gäller för punktgrupper vars individuella punkter karakteriseras av ett godtyckligt valt antal flytnivåer, nämligen att

$$\left. \begin{aligned} v &= \theta_2 \cdot \frac{\omega_i}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 \quad \text{för} \quad \text{abs } \theta_2 < \frac{\eta_i + \omega_i}{R} \\ v &= \frac{\eta_i}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 \quad \text{för} \quad \text{abs } \theta_2 \geq \frac{\eta_i + \omega_i}{R} \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Den analoga beräkningsregel som tidigare härletts och angivits i (35) är ett specialfall av (117), gällande för en punkt med endast en flytnivå.

Ur (117) kan punktkraftens storlek beräknas, då man vet inom vilket band punkten ligger. Det återstår därför att bestämma punktläget i relation till det totala bandspektrat vilket innebär att (117) måste kompletteras med ytterligare en beräkningsregel. Denna fås genom att bestämma läget av gränsen mellan två konsekutiva band. Sätts uttrycket för  $v$  i flytzone hos band nr  $i$  lika med uttrycket för  $v$  i den elastiska zonen hos band nr  $i+1$ , erhålls

$$\text{abs } \theta_2 = \frac{\eta_i + \omega_{i+1}}{R}$$

varför den sökta kompletterande beräkningsregeln kan formuleras så att

$$\left. \begin{aligned} \text{punkten tillhör band nr } i, & \text{ om } \text{abs } \theta_2 < \frac{\eta_i + \omega_{i+1}}{R} \\ \text{punkten tillhör band nr } i+1, & \text{ om } \text{abs } \theta_2 \geq \frac{\eta_i + \omega_{i+1}}{R} \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Genom successiv tillämpning av denna regel över bandspektrat från dess centrum och utåt, kan det band finnas, till vilket den aktuella punkten hör.

#### 4.4 Tillämpningsexempel

Exempel 15. - Vi betraktar samma konstruktion som i exempel 2, belastad av renodlat moment  $M$ . Den geometriska utformningen av punktgruppen framgår av FIG. 9 och detalj av FIG. 25. Vid aktuell belastning sammanfaller vridcentrum med gruppens symmetricentrum och är därmed känt för alla belastningssteg, varför endast en obekant - rotationens storlek - återstår att bestämma. Detta medför som beräkningsteknisk fördel, att en serie belastningsvariationer kan följas genom enbart handräkning.

Vi låter nu punktgruppen representera ett friktionsförband med två flytnivåer för den enskilda punkten. Kraft-deformationssambandet för varje punkt förutsätter vi därvid vara karakteriserat av höjden på första flytnivån  $\eta_1 = 0.6$  och motsvarande flytdeformation  $\beta_1 = 0.5$ .

Vid första pålastningen deformerar vi konstruktionen till "påkänningstillståndet"  $\psi = 0.4$ , d.v.s. till samma  $\psi$  som tidigare tillämpats i exempel 2. Därefter genomförs en hel belastningscykel med det mot  $\psi = 0.4$  svarande värdet på det yttre momentet som cykelgränser.

Den nedan genomgångna beräkningen kan i detalj följas i FIG. 25. Av figurens vänstra del framgår därvid punktkrafterna  $P_1$  och  $P_2$  som funktion av det yttre momentet  $M$  och av dess högra del sambandet mellan rotationen  $\theta$  och det yttre momentet  $M$ . För enkelhetens skull har i figuren, liksom i beräkningarna,  $P_0$  tilldelats värdet 1 och därför utelämnats i behandling och redovisning.

#### 1. Första pålastningen

$$\sum_0^k \beta_i = 0.5 \quad \omega_0 = 1 + 0.5 = 1.5 \quad (\text{jfr (97)})$$

$$\eta_1 = 0.6 \quad \eta_2 = 1.0$$

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0.5$$

##### 1 a. Första flytning börjar vid punkt 1:

$$\xi'_1 = \frac{10}{10} = 1 = \frac{\psi}{\omega_0} (\eta_1 + \omega_1) = \frac{\psi}{1.5} (0.6 + 0) = 0.4 \cdot \psi \quad (\text{jfr (103)})$$

$$\psi = 2.5 \quad R_0 = \psi \cdot R_M = 2.5 \cdot 10 = 25$$

$$\theta = \frac{\omega_0}{R_0} = \frac{1.5}{25} = 0.06 \quad (\text{jfr (98)})$$

$$P_1 = \eta_1 = 0.6 \quad (\text{jfr (107)})$$

$$P_2 = \frac{2}{25} (1.5 - 0) = 0.12 \quad (\text{jfr (106)})$$

$$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.12 + 2 \cdot 10 \cdot 0.6 = 0.96 + 12.00 = 12.96$$

1 b. Första flytning avslutas vid punkt 1:

$$\vartheta_1'' = \frac{10}{10} = 1 = \frac{\varphi}{\omega_0} (\eta_1 + \omega_2) = \frac{\varphi}{1.5} (0.6 + 0.5) = \frac{1.1}{1.5} \cdot \varphi \quad (\text{jfr (102)})$$

$$\varphi = 1.364 \quad R_0 = 1.364 \cdot 10 = 13.64$$

$$\theta = \frac{1.5}{13.64} = 0.11 \quad (\text{jfr (98)})$$

$$P_1 = \eta_1 = 0.6 \quad (\text{jfr (107)})$$

$$P_2 = \frac{2}{13.64} (1.5 - 0) = 0.22 \quad (\text{jfr (106)})$$

$$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.22 + 2 \cdot 10 \cdot 0.6 = 1.76 + 12.00 = 13.76$$

1 c. Andra flytning börjar vid punkt 1:

$$\vartheta_2' = \frac{10}{10} = 1 = \frac{\varphi}{\omega_0} (\eta_2 + \omega_2) = \frac{\varphi}{1.5} (1.0 + 0.5) = \varphi$$

$$R_0 = 10$$

$$\theta = \frac{1.5}{10} = 0.15$$

$$\vartheta_1'' = \frac{\varphi}{\omega_0} (\eta_1 + \omega_2) = \frac{1}{1.5} (0.6 + 0.5) = 0.73$$

För punkt 2 är  $\vartheta = 0.2 < 0.73$ . Punkten ligger således i band 1.

$$\vartheta_1' = \frac{\varphi}{\omega_0} (\eta_1 + \omega_1) = \frac{1}{1.5} (0.6 + 0) = 0.40$$

$\vartheta = 0.2 < 0.40$  varför punkten fortfarande är elastisk.

$$P_1 = 1.0$$

$$P_2 = \frac{2}{10} (1.5 - 0) = 0.30$$

$$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.30 + 2 \cdot 10 \cdot 1.0 = 2.4 + 20.0 = 22.40$$

1 d. Första flytning börjar vid punkt 2:

$$\vartheta_1' = \frac{2}{10} = 0.2 = \frac{\varphi}{1.5} (0.6 + 0) = 0.40 \cdot \varphi$$

$$\psi = 0.5 \quad R_0 = 0.5 \cdot 10 = 5$$

$$\theta = \frac{1.5}{5} = 0.30$$

$$P_1 = \eta_2 = 1.0 \quad P_2 = \eta_1 = 0.6$$

$$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.6 + 2 \cdot 10 \cdot 1.0 = 4.80 + 20.0 = 24.80$$

Vid påkänningstillståndet  $\psi = 0.5$  har vi således flytning vid konstruktionens alla punkter, vid punkterna 1 å nivån  $\eta_2 = 1.0$  och vid punkterna 2 å nivån  $\eta_1 = 0.6$ . Enligt förutsättningarna fortsätter deformationen utöver denna gräns, nämligen till dess tillståndet  $\psi = 0.4$  inträffar.

För  $\psi = 0.4$  finner vi följande

$$R_0 = 0.4 \cdot 10 = 4$$

$$\theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$$

Punkt 1 tillhör band nr 2. Kraften är  $P_1 = \eta_2 = 1.0$

$$\vartheta_1'' = \frac{0.4}{1.5} (0.6 + 0.5) = 0.29$$

För punkt 2 är således  $\vartheta = 0.2 < \vartheta_1''$ . Flytningen fortsätter alltså här med kraften oförändrad  $P_2 = \eta_1 = 0.6$ . Varken inre krafter eller yttre moment har därför påverkats av en ytterligare deformation från  $\psi = 0.5$  till  $\psi = 0.4$ .

2. Momentändring från  $M = + 24.8$  till  $M = - 24.8$

Utgångsläget är följande. Vid punkt 1 gäller relationen

$$\text{abs } \theta_2 = 0.375 > \frac{\eta_2 + \omega_2}{R} = \frac{1 + 0.5}{10} = 0.15 \quad (\text{jfr (117)})$$

varför

$$\theta_1 = \nu = \frac{1}{10} = 0.10$$

Vid punkt 2 gäller relationen

$$\text{abs } \theta_2 = 0.375 > \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30 \quad (\text{jfr (117)})$$



varför.

$$\theta_1 = v = \frac{0.6}{2} = 0.30$$

För den studerade momentvariationen gäller således

$$\theta_2 = 0.10 + \tau \quad \text{vid punkt 1} \quad (\text{jfr (16)})$$

$$\theta_2 = 0.30 + \tau \quad \text{vid punkt 2}$$

där  $\tau$  som förut är tillskottsdeformationen.

2 a. Första flytning börjar vid punkt 1:

För punkt 1 gäller vid gränsen likheten

$$\text{abs } \theta_2 = -0.10 - \tau = \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{10} = 0.06$$

$$\text{vilket ger } \tau = -0.16 ; \theta_2 = 0.10 - 0.16 = -0.06 ;$$

$$v = -\frac{0.6}{10} = -0.06 \quad \text{och} \quad P_1 = -10 \cdot 0.06 = -0.6$$

För punkt 2 erhålles  $\theta_2 = 0.30 - 0.16 = 0.14$ , vilket ger relationen

$$\text{abs } \theta_2 = 0.14 < \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30$$

$$\text{varför } v = \theta_2 = 0.14 \quad \text{och} \quad P_2 = 2 \cdot 0.14 = 0.28$$

$$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.28 - 2 \cdot 10 \cdot 0.6 = 2.24 - 12.00 = -9.76$$

2 b. Första flytning avslutas vid punkt 1:

För punkt 1 gäller vid gränsen likheten

$$\text{abs } \theta_2 = -0.10 - \tau = \frac{\eta_1 + \omega_2}{R} = \frac{0.6 + 0.5}{10} = 0.11$$

$$\text{vilket ger } \tau = -0.21 ; \theta_2 = 0.10 - 0.21 = -0.11 ; P_1 = -0.6$$

För punkt 2 erhålles  $\theta_2 = 0.30 - 0.21 = 0.09$ , vilket ger relationen

$$\text{abs } \theta_2 = 0.09 < \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30$$

$$\text{varför } v = \theta_2 = 0.09 \quad \text{och} \quad P_2 = 2 \cdot 0.09 = 0.18$$

$$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.18 - 2 \cdot 10 \cdot 0.6 = 1.44 - 12.00 = - 10.56$$

2 c. Andra flytning börjar vid punkt 1:

För punkt 1 gäller vid gränsen likheten

$$\text{abs } \theta_2 = - 0.10 - \tau = \frac{\eta_2 + \omega_2}{R} = \frac{1.0 + 0.5}{10} = 0.15$$

$$\text{vilket ger } \tau = - 0.25 ; \quad \theta_2 = 0.10 - 0.25 = - 0.15 ; \quad P_1 = - 1.0$$

För punkt 2 erhålles  $\theta_2 = 0.30 - 0.25 = 0.05$ , vilket ger relationen

$$\text{abs } \theta_2 = 0.05 < \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30$$

$$\text{varför } v = \theta_2 = 0.05 \quad \text{och} \quad P_2 = 2 \cdot 0.05 = 0.10$$

$$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.10 - 2 \cdot 10 \cdot 1.0 = 0.80 - 20.00 = - 19.20$$

2 d. Första flytning börjar vid punkt 2:

För punkt 2 gäller vid gränsen likheten

$$\text{abs } \theta_2 = - 0.30 - \tau = \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30$$

$$\text{vilket ger } \tau = - 0.60 ; \quad \theta_2 = 0.30 - 0.60 = - 0.30 ; \quad P_2 = - 0.6$$

$$\text{Samtidigt är vid punkt 1: } \theta_2 = 0.10 - 0.60 = - 0.50 ;$$

$$\text{abs } \theta_2 = 0.50 > \frac{\eta_2 + \omega_2}{R} = \frac{1.0 + 0.5}{10} = 0.15 ; \quad v = - \frac{1}{10} = - 0.10$$

$$P_1 = - 10 \cdot 0.10 = - 1.0$$

$$M = - 4 \cdot 2 \cdot 0.6 - 2 \cdot 10 \cdot 1.0 = - 4.8 - 20.0 = - 24.80$$

3. Momentförändring från  $M = - 24.80$  till  $M = + 24.80$

Utgångsläget är nu karakteriserat av följande

$$\text{punkt 1 : } \quad \theta_1 = - 0.10$$

$$\text{punkt 2 : } \quad \theta_1 = - 0.30$$

varför förloppet, vid denna momentvariation blir detsamma som det i föregående avsnitt studerade, men med omkastat tecken.

O-M-diagrammet i FIG. 25 visar, att första flytningen inom konstruktionen under första pålastningsfasen inträffar vid momentet  $M = 12.96$  medan samma situation vid momentrevertering inträffar redan vid  $M = - 9.76$ . För andra flytningen är motsvarande värden  $M = 22.40$  respektive  $M = - 19.20$ . Orsaken härtill är den kända Bauschingereffekten.

#### 4.5 Konsekvenser för en lastcykel

Då man tillämpar den generaliserade arbetslinjen enligt ovan, ställs man inför frågan om avlastningskurvans utseende. Problem i samband härmed belyses genom ett studium av FIG. 8, vilken åskådliggör en punktkrafts principiella variation i början av en lastcykel omedelbart efter första pålastning. Av figuren framgår att punktkraftens absolutvärde först avtar, tills ett minsta värde uppnåtts, varefter den återigen börjar växa samtidigt som kraften successivt ändrar riktning. Det senare förhållandet medför en obestämthet vid definition av punktens deformationsegenskaper, som gör en exakt behandling av problemet svårhanterlig. Av denna anledning väljs här för den fortsatta behandlingen en approximation, som bygger på följande förenklande antaganden.

Inledningsvis konstateras att kraftriktningarna vid återgången, vilken är helt elastisk, i stort är de samma som kraftriktningarna vid första pålastningen. Det kan därför vara motiverat att räkna med återgång svarande mot en rak gren på arbetslinjen parallell med dennas initialtangens. Sedan kraftens absolutvärde har passerat sitt minimum kommer den därpå successivt växande punktkraften i stort att vara motriktad kraften i cykelns inledande skede, varvid - t.ex. för ett nitförband - icke tidigare ansträngt material deformeras. Det må därför för detta stadium vara rimligt att antaga förlopp, som följer den generaliserade arbetslinjen för pålastning.

Då den yttre lasten reverteras och därmed andra halvcykeln inleds, är förhållandena analoga med de, som råder vid cykelns början. Punktkraftens variation bör således här räknas efter en rak avlastningskurva, vilken får gälla fram till cykelns andra kraftminimum.

Då punktkraften slutligen på nytt växer, får den riktningar, som i stort sammanfaller med kraftriktningarna under första pålastningen. För att undvika ytterligare, ej befogad komplikation av problemet, införs vidare approximationen, att förloppet vid slutet av första och andra halvcykeln är det samma. Sammanfattat leder de gjorda antagandena alltså till att under de delar av cykeln, vid vilka punktkraften är avtagande, skall en rak återgångskurva tillämpas, medan under resterande delar av cykeln den generaliserade pålastningskurvan skall gälla.

Detta introducerar ett nytt problem i samband med beräkning av gradienten till systemets inre arbete. I en viss situation kan nämligen vissa av gruppens punkter vara under avlastning samtidigt som andra punkter är under pålastning. Punktkrafternas bidrag till det inre arbetet beror av detta förhållande, varför det blir nödvändigt att uppställa ett kriterium för om en punktkraft i ett givet ögonblick är växande eller avtagande. Detta delproblem behandlas i det följande.

Deriveras punktkraften, skriven i sin generella form

$$P = g \cdot P_0 \cdot R \cdot v \quad (119)$$

med avseende på  $\tau$  erhålles

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = g \cdot P_0 \cdot \left( R \frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial R}{\partial \tau} \right) \quad (120)$$

I de perioder av cykeln, under vilka  $\text{abs } P$  avtar, är tillståndet vid den betraktade punkten helt elastiskt. Härav följer att

$$v = \theta_2 = \theta_1 + \tau \quad (121)$$

och därmed

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = 1 \quad (122)$$

Insätts nu (73), (121) och (122) i (120) erhålles

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = g \cdot P_0 \cdot \frac{1}{R} \cdot (R^2 - p_a - q_b)$$

vilket med (39) förenklas till

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = g \cdot P_0 \cdot \frac{c}{R} \quad (123)$$

Vi studerar nu fallet då  $\text{abs } P$  avtar i första halvcykeln, för vilken gäller att  $\partial r < 0$ . Om  $P$  härvid är positiv är enligt förutsättningen  $\partial P < 0$ . Sambandet (123) ger således  $c > 0$ . Är å andra sidan  $P$  negativ, är  $\partial P > 0$  och därför  $c < 0$ .

Med beaktande av att enligt (119) och (121)  $P$  och  $\theta_2$  har samma tecken kan det funna sammanföras i följande relation

$$c \cdot \text{sign } \theta_2 > 0 \quad (124)$$

För andra halvcykeln är  $\partial r > 0$ , vilket leder till en relation analog med (124) men med omkastat relationstecken.

För en helcykel kan resultatet således formuleras

$$\chi \cdot c \cdot \text{sign } \theta_2 > 0 \quad (125)$$

där  $\chi = +1$  i den första och  $\chi = -1$  i den andra halvcykeln. Är relationen (125) uppfylld, är punktkraften avtagande, och i annat fall växande.

#### 4.6 Datamaskinberäknade illustrationsexempel

Exempel 16. - Exemplet utgör en motsvarighet till exempel 4, i vilket en trepunktskonstruktion med utformning och belastning enligt FIG. 11 studerats med avseende på punktkraftvariation under en första pålastning.

Skillnaden mellan den i exempel 4 studerade gruppen och den här behandlade ligger i en nu införd förutsättning av elasto-plastiska egenskaper för gruppens enskilda punkter. Vid den första behandlingen i exempel 4 antogs ett idealelasto-plastiskt beteende, medan det nu förutsätts en arbetslinje med två flytnivåer, karakteriserad av  $\eta_1 = 0.6$  och  $\Delta_1 = 0.5 \cdot \delta_0$  för den lägre flytnivån.

De tre diagrammen i FIG. 26 belyser verkningssättet för gruppens punktkrafter  $P_1$ ,  $P_2$  och  $P_3$ . Den övre kurvan i varje diagram anger därvid sambandet mellan påkänningstillståndet  $\psi$  och punktkraftens storlek i intervallet  $0 \leq \psi \leq 2$  vid en första pålastning. Det är därvid att observera, att, då arbetslinje med flera flytnivåer tillämpas, är belastningssituationer svarande mot  $\psi \geq 1$  ej längre triviala. Diagrammens undre kurvor anger storleken

av kvarstående krafter vid avlastning efter pålastning till den nivå, som abscissan anger.

Exempel 17. - I detta exempel, som illustreras av FIG. 27 kommer den tidigare i exemplen 4 och 16 studerade trepunktkonstruktionen att bli föremål för ytterligare en modifierad behandling. Nu antages en krökt arbetslinje enligt FIG. 23 för beskrivning av de enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper. Vid den numeriska behandlingen har tillämpats den i FIG. 23 visade approximationen med en arbetslinje med åtta flytnivåer. Som i det föregående exemplet anger de tre diagrammen i FIG. 27 genom sina övre kurvor punktkrafterna  $P_1$ ,  $P_2$  och  $P_3$  som funktion av påkänningsstillståndet  $\psi$  efter pålastning och genom sina undre kurvor residualkrafterna vid avlastning efter pålastning till påkänningsstillståndet  $\psi$ .

I figuren har därjämte inritats banan för vridmedelpunktens vandring vid successiv plasticering av gruppen. Punkten  $\psi = \infty$  anger vridmedelpunktens läge vid renodlad elastisk rotation och punkten  $\psi = 0$  motsvarande läge vid renodlad plastisk deformation.

Exempel 18. - I exemplen 6-13 har studerats en punktgrupps verkningssätt under en hel belastningscykel vid olika förutsättningar beträffande konstruktionens utformning och belastning. Gemensamt för exemplen var en förutsättning om idealelasto-plastiska egenskaper för punkterna. I föreliggande och följande exempel skall den nämnda studien kompletteras med en analog analys av inverkan av lastcykler för punktgruppen, då denna har punkter med egenskaper, som karakteriseras av flera flytnivåer.

I FIG. 28 visas beräknad punktkraftvariation under förhållanden, som är jämförbara med de i FIG. 15 studerade med skillnaden att punkternas arbetslinje nu förutsatts ha två flytnivåer, av vilka den lägre bestäms av värdena  $\eta_1 = 0.6$  och  $\Delta_1 = 0.5 \cdot \delta_0$ .

Punktkraften  $P_3$  uppvisar i början av sin variation samma förlopp som i FIG. 15. Då kraften uppnår värdet  $0.6 \cdot P_0$  kan den emellertid icke växa ytterligare förrän en viss flytdeformation har in-

träffat vid punkten, varför kraften med oförändrad storlek roterar kring punkten. När sedan flytdeformationen på den lägre flytnivån har utnyttjats, fortsätter krafttillväxten fram till slutgiltig flytkraft, varefter rotation kring punkten återigen vidtar under det att övriga krafter växer till värdet på maximal flytkraft.

I diagrammen till höger i FIG. 28 kan för punktkrafterna  $P_2$  och  $P_3$  iakttas de olika flytnivåernas inverkan på kraftvariationen.

Exempel 19. - FIG. 29 visar kraftvariationen under en lastcykel med cykelgränser bestående av  $\psi = 0$ , då de elasto-plastiska egenskaperna vid en punkt beskrivs av den i FIG. 23 angivna kontinuerligt krökta arbetslinjen. Vid den numeriska behandlingen har tillämpats den i FIG. 23 visade approximerande arbetslinjen med åtta flytnivåer. De härav följande beräkningsresultaten har i FIG. 29 redovisats med små cirklar. För att få anknytning till den ursprungligt antagna krökta arbetslinjen har kraftenvelopperna ritats med ett uppskattat jämnt förlopp.

## 5. PUNKTKONSTRUKTION MED UPPREPAD LASTVARIATION

### 5.1 Val av strain hardening funktion

I kapitel 3 följde vi tillståndsvariationen inom en punktgrupp under en lastcykel vars övre och undre gräns låg i det ideal-elasto-plastiska området och fann att sluttillståndet avvek från starttillståndet vid osymmetrisk lastcykel. Detta väcker frågan om på vilket sätt förloppet av en lastcykel förändras från cykel till cykel då gruppen utsätts för en serie osymmetriska lastcykler mellan fixerade cykelgränser liggande i det elasto-plastiska området och då gruppens enskilda punkter utmärks av ideal-elasto-plastiskt beteende i initialskelet. Problem av denna typ kommer att belysas i det följande.

Inledningsvis konstateras att en stor del av de punktgrupper, vilka förekommer i praktiken, har sådana egenskaper, att flytning vid en punkt medför förändring av materialstrukturen i punkten eller i dess närmaste omgivning. Av primärt intresse i föreliggande sammanhang är därvid den kallbearbetning som inträffar vid metalliskt material och som resulterar i en successiv höjning av punktens flytkraft, strain hardening effekten. Beaktas denna effekt, blir förhållandena vid upprepad symmetrisk belastning ej triviala och någon funktionellt dikterad gräns mellan symmetriskt och osymmetriskt lastcykels inverkan på en punktgrupps verkningssätt existerar ej längre.

Vanligtvis tar man hänsyn till kallbearbetningens inverkan via ett experimentellt bestämt samband mellan flytgränshöjd och deformation, varvid förutsätts, att den senare alltid inträffar i en fixerad riktning. Detta förfarande är emellertid ej tillämpligt på en punktgrupp, då kraften och därmed deformationen vid en punkt ändrar riktning under en cykel. För ett principiellt beaktande av strain hardening effektens inverkan på en punktgrupps beteende vid upprepade lastväxlingar räknas i det följande med den approximerande hypotesen, att flytkraften vid en punkt är en funktion av endast antalet flyttillfällen vid punkten. Det beräkningsmässiga resultatet av ett sådant förfarande torde ge en icke alltför grov, kvalitativ bild av vad



som i realiteten inträffar med gruppen. För den numeriska behandlingen erfordras således ett analytiskt samband för beräkning av aktuell flytkraft  $P_\sigma$  som funktion av antalet flyttillfällen  $\sigma$  vid en punkt. Med den dimensionslösa momentana flytkraften

$$\kappa = \frac{P_\sigma}{P_0} \quad (126)$$

kan ett sådant samband generellt tecknas

$$\kappa = f(\sigma) \quad (127)$$

Litteraturen ger inga anvisningar på strukturen av ett sådant samband. Med ledning av de experimentella resultat som uppnåtts i andra sammanhang avseende relationen mellan flytspänning och deformation väljs här för den fortsatta behandlingen för  $\kappa$  uttrycket

$$\kappa = (1 + k_1 \cdot \sigma)^{k_2} \quad (128)$$

där  $k_1$  och  $k_2$  är dimensionslösa koefficienter, som förutsätts  $\geq 0$ .

Sambandet (128) illustreras i FIG. 30. Med  $k_1 = 0$  erhålles konstant flytkraft oberoende av antalet flyttillfällen. Med  $k_2 = 1$  fås ett linjärt samband mellan  $\kappa$  och  $\sigma$ . Med  $k_1 \neq 0$  och  $k_2 \neq 0$  och 1 erhålls krökta tillväxtkurvor med form enligt figuren. För  $\sigma = 0$  d.v.s. före första flyttillfälle fås alltid  $\kappa = 1$  oberoende av värdet på  $k_1$  och  $k_2$ . Sambandet ger vidare  $\kappa \rightarrow \infty$  för  $\sigma \rightarrow \infty$ . I realiteten kan emellertid denna situation aldrig inträffa beroende på att brott uppkommer vid en till upprepad flytning ansträngd punkt efter ett ändligt antal flyttillfällen. Exemplifierat framgår förhållandet av följande diskussion.

Antag att den yttre lasten pulserar mellan fixa gränser vid vilka punktgruppen antar elasto-plastiska tillstånd. Antag vidare, för enkelhets skull, att förloppet är symmetriskt. Detta medför kraftväxling vid gruppens mest ansträngda punkt mellan två plastiska tillstånd. Genom strain hardening sker därvid en ökning av flytkraften enligt den kurva, som avbildar sambandet (128) - jfr FIG. 31. Samtidigt uppkommer emellertid en minskning av punktens hållfasthet enligt den till punkten hörande Wöhler-kurvan svarande

mot ett  $P_{\min}/P_{\max}$ , som approximativt är lika med -1. Efter ett ändligt antal lastväxlingar  $\sigma_1$  skär dessa två kurvor varandra och brott inträffar vid den betraktade punkten.

Diskussionen har här förts på basis av Wöhler-kurvan, vilket ej är fullt korrekt, eftersom denna förutsätter konstant kraftamplitud. Den införda approximationen, som leder till en viss underskattning av till brott hörande lastväxlingsantal, torde emellertid vid en måttlig hastighet på flytkrafttillväxten vara praktiskt försumbar.

Med hänsyn till det ovan anförda om tillväxtfunktionens egenskaper och med hänsyn till den goda styrning av tillväxttakten, som det i (128) presenterade funktionella sambandet medger, accepteras detta samband som grundval för den fortsatta behandlingen av punktgrupper åverkade av upprepade lastvariationer.

Vid den praktiska tillämpningen av (128) möter man emellertid svårigheten att välja adekvata värden för koefficienterna  $k_1$  och  $k_2$ . Denna svårighet kan undvikas genom att låta koefficienterna bestämmas av andra, mera åskådliga parametrar. Väljs således som första parameter två samhörande värden  $\sigma_0$  och  $\kappa_0$ , kan genom den häremot svarande punkten och den obligatoriska punkten (0,1) läggas en enkel oändlighet av kurvor, bland vilka en kurva kan utväljas genom att som andra parameter införa initialtangentialutningen  $\zeta_0$ . Sambandet mellan de således definierade parametrarna och de ursprungliga koefficienterna  $k_1$  och  $k_2$  bestäms enligt följande.

Insättning i (128) av den valda punktens koordinater ger

$$\kappa_0 = (1 + k_1 \cdot \sigma_0)^{k_2} \quad (129)$$

Deriveras (128) med avseende på  $\sigma$  erhålles

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} = k_1 k_2 (1 + k_1 \cdot \sigma)^{k_2-1} \quad (130)$$

vilket med  $\sigma = 0$  ger

$$\zeta_0 = k_1 \cdot k_2 \quad (131)$$

Elimineras nu  $k_1$  mellan (129) och (131), erhålles ekvationen

$$\kappa_0 = \left(1 + \frac{\zeta_0 \cdot \sigma_0}{k_2}\right)^{k_2} \quad (132)$$

varur  $k_2$  kan lösas. Insättning av  $k_2$  i (131) ger sedan  $k_1$ .

## 5.2 Modifikation av flytvillkoret

Vi skall nu analysera, vilka korrektioner av tidigare uppställda samband, som måste införas som konsekvens av en övergång från konstant till växande flytkraft.

Generellt gäller för en punktkraft under elastiska förhållanden sambandet

$$P = g \cdot k \cdot \delta$$

vilket tillämpat på punkten i FIG. 3 ger den resulterande kraften

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \theta_2'$$

Insätts i detta uttryck (15) och (3), erhålles

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \lambda \cdot \theta_2 = g \cdot R \cdot P_0 \cdot \theta_2$$

eller med kraften i dimensionslös form

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot R \cdot \theta_2 = g \cdot R \cdot v \quad (133)$$

Flytning inträffar, då absolutvärdet av punktkraften uppgår till  $g \cdot \kappa \cdot P_0$ , alltså då

$$g \cdot R \cdot \text{abs } \theta_2 \cdot P_0 = g \cdot \kappa \cdot P_0$$

vilket bestämmer gränsvärdet för  $\theta_2$  till

$$\text{abs } \theta_2 = \frac{\kappa}{R} \quad (134)$$

För en punkt, vid vilken plasticering har inletts, är kraften

$$P = g \cdot \kappa \cdot P_0 \cdot \text{sign } \theta_2$$

eller dimensionslöst

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot \kappa \cdot \text{sign } \theta_2 = g \cdot R \cdot \frac{\kappa}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 = g \cdot R \cdot v \quad (135)$$

Allmänt gäller därför enligt (133), (134) och (135) sambandet

$$\frac{P}{P_0} = g \cdot R \cdot v \quad (136)$$

där

$$\begin{aligned} v &= \theta_2 & \text{för } \text{abs } \theta_2 < \frac{\kappa}{R} \\ v &= \frac{\kappa}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 & \text{för } \text{abs } \theta_2 \geq \frac{\kappa}{R} \end{aligned} \quad (137)$$

De tidigare uppställda jämviktsekvationerna (43) liksom de härpå baserade uttrycken för det inre arbetets gradient (53) är fortfarande giltiga under förutsättning av att punktkrafterna beräknas enligt sambanden (136) och (137) i stället för enligt de under förutsättning av konstant flytkraft härledda uttrycken (34) och (35).

Beträffande det inre arbetets andra derivator medför övergången till växande flytkraft endast den förändringen att koefficienten  $\mu$ , vilken ingår i uttrycken (63) och (81) nu skall beräknas ur sambandet

$$\mu = \frac{\kappa}{R \cdot \text{abs } \theta_2} \quad (138)$$

Eftersom  $\kappa > 0$  innebär detta att tidigare uppställda regler för teckenvariation för det inre arbetets gradient under en lastcykel kvarstår oförändrade.

### 5.3 Beräkningsgång vid upprepade lastcykler

Vi skall i det följande beskriva beräkningsgången för tillståndsvariationen inom en punktgrupp utsatt för upprepade lastcykler under de ovan preciserade förutsättningarna. Till beskrivningen hör ett för den numeriska utvärderingen, erforderligt datamaskinprogram, vilket utförligt presenteras i avsnitt 6.

En beräkning omfattar genomgång av ett föreskrivet totalt antal lastcykler. Dessa är uppdelade på lika långa cykelperioder, vilka vardera omfattar ett föreskrivet antal cykler. Sista cykelperioden tilläts dock ha en från de andra avvikande längd. Under genomgången av lastcyklerna studeras parallellt två förlopp, vilka närmare beskrivs i det följande.

Under det ena förloppet beräknas i huvudsak tillstånden vid cykelgränserna. Det inleds med att en obelastad, icke tidigare till

flytning belastad punktgrupp, påtvingas en deformation, vars storlek bestäms av ett givet påkänningstillstånd  $\varphi$ . Den häremot svarande yttre lasten  $N_\varphi$  (eller momentet  $M_\varphi$ ) i ett givet lastläge beräknas enligt metoden, som anges i PSS. Påkänningstillståndet väljs därvid så, att det inre tillståndet blir elasto-plastiskt. Det beräknade tillståndet redovisas. Den således bestämda lasten är övre gräns i de följande lastcyklerna. Motsvarande undre gräns bestäms som  $\alpha \cdot N_\varphi$  (eller  $\alpha \cdot M_\varphi$ ), där  $\alpha < 0$  är ett givet tal. Om den undre gränsen härvid hamnar under gruppens undre brottgräns, justeras den till att sammanfalla med denna brottgräns i det etablerade initialtillståndet. Nästa fas i beräkningen är en upprepad variation av den yttre lasten mellan cykelgränserna föreskrivet antal gånger med avbrott efter varje cykelperiod för redovisning av det aktuella inre krafttillståndet vid övre cykelgräns. Sedan det totala antalet cykler genomlöpts, avlastas konstruktionen svarande mot en nedgång av den yttre lasten från dess övre cykelgräns till noll, varefter kvarvarande inre krafter redovisas.

Under det andra förloppet undersöks i huvudsak förändringarna av konstruktionens flyt- och brottgräns. Inledningsvis bestäms för den icke tidigare belastade konstruktionen det intervall, inom vilket den yttre lasten måste ligga för att tillståndet skall vara elasto-plastiskt. Detta intervalls undre gräns betecknas som punktgruppens flytgräns, då det motsvarar den last, som precis ger flytning vid gruppens mest ansträngda punkt. Intervalllets övre gräns betecknas som punktgruppens brottgräns, då vid motsvarande last plasticeringen är total och därvid gruppens hela bärförmåga tagen i anspråk. De beräknade gränserna redovisas tillsammans med till dessa hörande inre krafttillstånd jämte förhållandet  $\Gamma$  mellan brott- och flytgränsen, vilket kan anses vara ett mått på konstruktionens seghet i den aktuella situationen. Efter varje genomgången cykelperiod beräknas och redovisas aktuella flytgräns- och brottgränstillstånd som i initialskedet.

En koppling äger rum mellan de två skisserade förloppen, därigenom, att motstående flytgräns beräknas och jämförs med närliggande cykelgräns omedelbart före varje riktningsändring av

den yttre lasten. Om därvid den successivt växande flytgränsen har passerat cykelgränsen med som följd, att den förestående halvcykeln leder till ett renodlat elastiskt och trivialt tillstånd, justeras den tillhörande cykelgränsen till ett sådant värde, att det inbördes förhållandet mellan flytgräns, cykelgräns och brottgräns blir det samma som i initialskedet.

Om ingen tillväxt i punkternas flytkraft har föreskrivits, d.v.s. om  $k_1 = 0$ , utgår det andra förloppet ur beräkningarna.

#### 5.4 Övergång från ett elasto-plastiskt till ett elastiskt tillstånd

Som framgår av 5.3 är det i vissa situationer aktuellt med en övergång från ett elasto-plastiskt tillstånd till ett tillstånd, som kan betraktas som renodlat elastiskt. En sådan tillståndsändring kan beräknas på samma sätt som en variation mellan två elasto-plastiska tillstånd, men beräkningstid kan sparas genom ett mera direkt angrepp av problemet.

Låt i FIG. 32  $N_a$  vara en yttre kraft svarande mot ett inre elasto-plastiskt tillstånd. Vi vill nu gå från tillståndet A till det helt elastiska tillståndet B i figuren. Tillskottsdeformationen har under denna övergång sin vridmedelpunkt  $(u, v)$  i den till elastisk deformation hörande vridmedelpunkten, vilken är känd. Av obekanta storheter återstår därför endast rotationsvinkeln  $\tau$ , vilken i figuren har avsatts som abscissa.

En vertikal projektionsekvation ger enligt (36) för godtyckligt valt värde på den yttre vertikalkraften  $N$

$$\frac{N}{P_0} = \sum g v a$$

Då enligt förutsättningen övergången är elastisk, gäller för alla punkter  $v = \theta_2$ , vilket insatt i jämviktsekvationen ovan ger

$$\frac{N}{P_0} = \sum g \theta_2 a \quad (139)$$

Då sambandet mellan deformation och kraft är linjärt kan (139)

alternativt skrivs under formen

$$\frac{N}{P_0} = c_1 \cdot \tau + c_2 \quad (140)$$

där  $c_1$  och  $c_2$  är konstanter, vilka kan bestämmas på följande sätt.

Deriveras uttrycket (139) med avseende på  $\tau$ , erhålles

$$\frac{1}{P_0} \cdot \frac{\partial N}{\partial \tau} = \sum g \left( \theta_2 \frac{\partial a}{\partial \tau} + a \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} \right) \quad (141)$$

Insättning av  $\frac{\partial a}{\partial \tau}$  enligt (70) och  $\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = 1$  i (141) ger sedan

$$\frac{1}{P_0} \cdot \frac{\partial N}{\partial \tau} = \sum g \left( -\theta_2 \cdot \frac{p}{\theta_2} + a \cdot 1 \right)$$

eller med (140) deriverad

$$c_1 = \sum g (a - p) \quad (142)$$

Detta samband, som är beroende enbart av punktgruppens geometri, kan vidareutvecklas med hjälp av de geometriska relationer, som framgår av FIG. 7, till

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum g (x - x_2 - u + x_2) = \sum g x - \sum g u = \\ &= S \cdot \frac{\sum g x}{S} - u \cdot \sum g = (x_g - u) \cdot S \end{aligned} \quad (143)$$

där  $S = \sum g$  och  $x_g$  är abscissan till gruppens viktade tyngdpunkt.

För  $\tau = 0$  fås ur (140)

$$c_2 = \frac{N_a}{P_0} \quad (144)$$

Insättning av (143) och (144) i (140) ger slutligen den mot vertikal projektion svarande jämviktsekvationen under formen

$$\frac{N}{P_0} = (x_g - u) \cdot S \cdot \tau + \frac{N_a}{P_0} \quad (145)$$

För fallet yttre belastning av moment  $M$  ger momentekvationen (40) det analoga sambandet

$$\frac{M}{P_0} = \sum g v c = \sum g \theta_2 c \quad (146)$$

vilket kan skrivas under den alternativa formen

$$\frac{M}{P_0} = c_3 \cdot \tau + c_4 \quad (147)$$

där  $c_3$  och  $c_4$  är konstanter, som kan bestämmas på följande sätt.

Deriveras uttrycket (146) med avseende på  $\tau$ , erhålles

$$\frac{1}{P_0} \cdot \frac{\partial M}{\partial \tau} = \sum g \left( \theta_2 \frac{\partial c}{\partial \tau} + c \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} \right) \quad (148)$$

Insättning av (74) och  $\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = 1$  i (148) ger

$$\frac{1}{P_0} \cdot \frac{\partial M}{\partial \tau} = \sum g (p^2 + q^2 - ap - bq + c)$$

vilket vid jämförelse med derivatan av sambandet (147) och efter insättning av (39) ger

$$\begin{aligned} c_3 &= \sum g (p^2 + q^2 + a^2 + b^2 - 2ap - 2bq) = \\ &= \sum g ((p - a)^2 + (q - b)^2) = \\ &= \sum g r^2 \end{aligned}$$

eller

$$c_3 = I \quad (149)$$

där  $I$  betecknar punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på den elastiska vridmedelpunkten ( $u, v$ ), jfr FIG. 7.

För  $\tau = 0$  erhålles ur (147)

$$c_4 = \frac{M_a}{P_0} \quad (150)$$

Insätts slutligen (149) och (150) i (147) fås

$$\frac{M}{P_0} = I \cdot \tau + \frac{M_a}{P_0} \quad (151)$$

Rotationsvinkeln  $\tau$  vid övergång från det elasto-plastiska tillståndet A till det elastiska tillståndet B enligt FIG. 32 kan således, då den yttre lasten är en kraft  $N$ , enligt (145) beräknas ur sambandet



$$\tau = \frac{N_b - N_a}{P_o \cdot (x_g - u) \cdot S} \quad (152)$$

och, då den yttre lasten är ett moment  $M$  enligt (151), ur sambandet

$$\tau = \frac{M_b - M_a}{I \cdot P_o} \quad (153)$$

Speciellt då en punktgrupp relaxeras, är  $N_b = 0$  eller  $M_b = 0$ , varför den till relaxation hörande tillskottsdeformationen bestäms ur respektive

$$\tau = - \frac{N_a}{P_o \cdot (x_g - u) \cdot S} \quad (154)$$

eller

$$\tau = - \frac{M_a}{I \cdot P_o} \quad (155)$$

Ett annat specialfall, som karakteriseras av en övergång från ett elasto-plastiskt till ett elastiskt tillstånd, utgör en bestämning av punktgruppens aktuella flytgräns. I detta fall är emellertid från början såväl deformationskomponenten  $\tau$  som slutkraften  $N_b$  respektive  $M_b$  okända, varför en av dessa måste bestämmas på annat sätt.

Kriteriet för att flytgränsen uppnås ger primärt  $\tau$  enligt följande. Vi bildar först hjälpfunktionen

$$F(\tau) = \min \left( \frac{\kappa}{R} - \text{abs } \Theta_2 \right) \quad (156)$$

För ett givet värde på  $\tau$  kan argumentet till denna funktion beräknas för samtliga punkter i gruppen. Det minsta av dessa är funktionsvärdet  $F$ . Genom iteration kan ett sådant  $\tau = \tau_1$  bestämmas, som ger  $F(\tau_1) = 0$ . Enligt villkoret (137) är det så bestämda  $\tau$ -värdet identiskt med det, som svarar mot gruppens flytgräns, vilken sedan kan beräknas genom insättning av  $\tau_1$  i (145) respektive (151).

### 5.5 Datamaskinberäknade illustrationsexempel

Exempel 20. - I detta exempel studeras den punktgrupp, vars geometri visas i FIG. 9. Den yttre lasten är ett växlande moment,

vilket efter första pålastning genomgår 20 lastcykler, varefter konstruktionen avlastas. För beräkning av strain hardening effekten  $\kappa$  har antagits att aktuell flytkraft växer linjärt med antalet flytningar  $\sigma$  enligt sambandet  $\kappa = 1 + 0.008 \cdot \sigma$ . Initialskedet bestäms av påkänningstillståndet  $\gamma = 0.4$  och symmetriskt belägna cykelgränser.

Beräkningsresultaten redovisas i FIG. 33. I den övre delfiguren visas hur gruppens brottgräns växer och dess flytgräns varierar till följd av momentväxlingarna. Cykelgränserna har markerats med streckprickade linjer. Som framgår av dessa, var växlingarna från början symmetriska. Mellan cyklerna 7 och 8 inträffar emellertid den situationen, att den successivt minskande undre flytgränsen (ej visad i figuren) passerar undre cykelgränsen, varför denna har flyttats neråt för de följande lastväxlingarna. Detta upprepas mellan cyklerna 15 och 16. För den övre cykelgränsen har liknande justeringar vidtagits första gången under cykel 11 och andra gången under cykel 19. Här kan direkt i figuren ses, hur den växande övre flytgränsen vill passera cykelgränsen.

Den undre delfiguren visar variationen i de individuella punktkrafterna vid övre cykelgränserna under belastningsförloppet. Kraften vid den mest ansträngda punkten växer linjärt i överensstämmelse med den antagna strain hardening kurvan. Kraften vid de fyra centralt belägna punkterna visar en tillhörande successiv minskning omväxlande med plötsliga stegringar varje gång den övre cykelgränsen justeras uppåt. I diagrammet kan också storleken av residualkrafterna efter avlastning avläsas.

Betraktar man kurvan för övre flytgränsen, kan en sänkning av denna iakttas efter första lastrevertering, svarande mot Bauschingereffekten. Fenomenet återkommer varje gång undre cykelgränsen flyttas neråt.

Exempel 21. - Den i FIG. 34 visade dubbelsymmetriska punktgruppen belastas med växlande last med läge enligt figuren. Punkternas strain hardening egenskaper karakteriseras av att 100 flytningar medför en ökning av den relativa flytkraften till  $\kappa = 1.2$  och av att  $\zeta_0 = 0.01$ . Detta motsvarar värdena  $k_1 = 0.15314$  och

$k_2 = 0.06530$  i sambandet (128). Konstruktionen belastas först till sin ursprungliga brottgräns, d.v.s. till påkänningstillståndet  $\varphi = 0$ . Därefter utsätts den för tio symmetriska lastcykler, varefter den avlastas.

I det övre diagrammet visas, vilken effekt detta belastningsförlopp har på den övre brottgränsen och på den övre flytgränsen. I det undre diagrammet redovisas motsvarande punktkraftvariation vid den övre cykelgränsen. I detta diagram har dessutom markerats de residualkrafter, som uppkommer vid avlastning efter genomgång av det antal cykler, som abscissan anger. Det framgår, att residualkrafterna successivt minskar i takt med att övre flytgränsen växer, vilket innebär, att konstruktionen är på väg mot ett renodlat elastiskt beteende, vid vilket residualkrafterna blir noll.

I FIG. 35 detaljbelyses det inre krafttillståndet för varje gång den övre flytgränsen passeras. Efter cykel nr 0, d.v.s. under första pålastningen, karakteriseras konstruktionens deformation av rotation kring en för alla punkter gemensam vridmedelpunkt. Under de följande cyklerna beskriver momentancentrum för krafterna  $P_3$  och  $P_4$  en mindre förskjutning, medan momentancentrum för krafterna  $P_1$  och  $P_2$  däremot uppvisar en betydande förflyttning. Denna sker först åt vänster med växande "hastighet" för att vid ungefär cykel 4 försvinna långt ut till vänster, varefter momentancentrum med avtagande "hastighet" kommer in från höger. Efter cykel 10 karakteriseras förskjutningen av en återgång mot en gemensam vridmedelpunkt för alla fyra punktkrafterna.

I samband med den första lastväxlingen, under vilken Bauschinger-effekten inträffar, sker en riktningsomkastning och en minskning av krafterna  $P_1$  och  $P_2$ . Kraftminskningen fortsätter under de följande cyklerna och leder till att krafterna helt försvinner samtidigt med att momentancentrum försvinner ut till vänster. Då det återigen kommer in från höger, är kraftriktningen ånyo omkastad och punktkrafterna växer nu under de följande cyklerna.

Exempel 22. - I detta exempel studeras samma punktgrupp med identiskt lastläge som i exempel 21 (jfr FIG. 34). Punkternas strain

hardening egenskaper karakteriseras nu av att 100 flytningar medför en höjning av den relativa flytkraften till  $\kappa = 1.5$  och av att  $\zeta_0 = 0.02$ . Motsvarande parametrar i sambandet (128) blir därvid  $k_1 = 0.13027$  och  $k_2 = 0.15353$ . Konstruktionen belastas först till sin brottgräns varefter den utsätts för 20, till en början symmetrisk, lastcykler för att sedan avlastas.

Förloppet illustreras av det övre diagrammet i FIG. 36, vilket även visar den gradvisa förändringen av konstruktionens övre brott- och flytgräns. Det undre diagrammet i FIG. 36 återger motsvarande punktkraftvariation.

Den beskrivna proceduren har upprepats, men denna gång med 100 lastcykler före avlastningen, och med redovisning av tillstånden efter var femte cykel. Resultatet av denna beräkning återges i FIG. 37, vilken i sin uppläggning är analog med FIG. 36. Någon detaljskärpa beträffande förhållandena vid den upprepade Baushinger-effekten fås givetvis icke med denna glesa redovisning. Däremot framträder nu andra fenomen tydligt. För det första kan konstateras, att för en punktkonstruktion med strain hardening egenskaper, vilken utsätts för växlande last med gränser i det elasto-plastiska området, vill den zon, som plasticeras, dra åt sig en ständigt större andel av lasten från den elastiska zonen. För det andra framgår, att vid fasthållna cykelgränser uppnås ett renodlat elastiskt beteende för gruppen efter ett visst antal upprepningar av lastcykeln. Slutligen visar figurerna, att en upprepning av lastcykeln successivt minskar konstruktionens seghet på grund av en snabbare tillväxtstakt för flytgränsen än för brottgränsen.

Exempel 23. - Vi studerar i detta exempel en punktgrupp med utformning och belastning enligt FIG. 38. Exemplet vill belysa betydelsen av punktvikternas fördelning inom gruppen. I figurens tabell anges viktfördelningen i tre undersökta fall. Totalsumman av gruppens punktvikter är den samma i de tre fallen.

Fall a karakteriseras av lika vikt för alla punkter. Genomgång av 20 symmetriska lastcykler med cykelgränser bestämda av den initiala brottgränsen ger den i FIG. 39 visade variationen av gruppens brott- och flytgräns. Härvid har förutsatts en strain harde-

ning effekt, vilken beskrivs genom det linjära sambandet  $\kappa = 1 + 0.008 \cdot \sigma$ . Diagrammet uppvisar en kraftig inverkan av Bauschingereffekten efter första lastväxling. Kraftbilden till vänster i figuren är den, som fås vid relaxation omedelbart efter första pålastning och den till höger motsvarande kraftbild vid relaxation efter 20 lastcykler. Krafterna har därvid, för tydlighets skull, i den senare kraftbilden ritats i en tio gånger större skala. Som framgår, har relaxationskrafterna minskat till små värden genom lastväxlingarna, vilket stämmer med att flytgränsen efter 20 lastcykler nu ligger mycket nära cykelgränsen.

De två följande fallen förutsätter samma strain hardening egenskaper för konstruktionen som i fall a.

Viktfördelningen i fall b karakteriseras av proportionalitet mellan en punkts vikt och dess avstånd från x-axeln. Förändringar i konstruktionens egenskaper under 20 lastväxlingar visas i FIG. 40. Lastcyklerna är från början symmetriska, men på grund av att Bauschingereffekten här är mindre utpräglad än vad, som var fallet vid likformigt fördelade punktvikter, och kurvan för flytgränsvariationen därför ligger närmare cykelgränsen, hinner tre cykelgränsjusteringar inträffa under belastningsförloppet. Diagrammet visar motsvarande tre karakteristiska Bauschingersprång med för varje upprepning minskad storlek. Kraftbilden till vänster i figuren återger residualkrafttillståndet vid avlastning omedelbart efter första pålastning och kraftbilden till höger motsvarande residualkrafttillstånd vid avlastning efter genomgång av 20 cykler. De senare krafterna återges därvid i en tio gånger större skala än de i kraftbilden till vänster.

Det tredje studerade alternativet, fall c, gäller en punktgrupp med en viktfördelning, som karakteriseras av omvänd proportionalitet mellan en punkts vikt och dess avstånd från x-axeln. Här sker lastväxlingen mellan symmetriskt belägna cykelgränser under samtliga 20 lastcykler enligt FIG. 41. Mest iögonfallande i diagrammet är det stora Bauschingersprånget efter första lastväxling. Det medför en sänkning av flytgränsen till nära noll, vilket resulterar i en extrem seghet hos konstruktionen under det efterföljande belastningsförloppet. Relaxationskrafttillståndet

vid avlastning omedelbart efter första pålastning, vilket framgår av den vänstra kraftbilden, uppvisar i förhållande till fallen a och b mycket stora punktkrafter. Dessa reduceras genom de 20 lastväxlingarna till vad som visas i den högra kraftbilden. Här har de två kraftbilderna ritats i samma skala. Även dessa residualkrafter är betydande jämförda med motsvarande krafter i fallen a och b, vilket är en effekt av den lågt liggande flytgränsen.

Av de tre studerade fallen framgår, att ett nära samband råder mellan Bauschingersprångets storlek och residualkrafternas storlek omedelbart före språnget. Ett stort Bauschingersprång ger stora residualkrafter och vice versa. Detta är naturligt, eftersom det inbyggda krafttillståndet betingar Bauschingereffekten. Den genomförda studien visar vidare, att stor seghet för en punktkonstruktion kan uppnås genom koncentration av punktvikterna kring dess tyngdpunkt. Den ökade segheten vinnas emellertid på bekostnad av en reduktion av bärförmågan, jämfört med bärförmågan för en konstruktion med centrifugal viktfördelning, vilken å andra sidan har liten seghet.

Av beräkningarna till detta exempel - vilket behandlar en konstruktion med ett så stort antal punkter att fenomenet framträder - framgår slutligen att flytzonernas utbredning inom en punktkonstruktion med strain hardening egenskaper successivt minskas under inverkan av upprepade lastcykler med fasta cykelgränser i det elasto-plastiska området.

## 6. DATAMASKINPROGRAMMET "POINT SET STRUCTURE"

### 6.1 Programbeskrivning

Jämviktsläget för en punktkonstruktion efter övergång från ett tillstånd till ett annat är entydigt bestämt av en extremvärdepunkt till systemets inre arbete, då detta betraktas som en funktion av de tre parametrarna  $u$ ,  $v$  och  $\tau$ . Hjälpsstorheter vid bestämning av ett sådant extremvärde utgör funktionens första och andra derivator.

Att ur dessa villkor analysera tillståndsvariationen via handräkning är praktiskt omöjligt utom i mycket speciella fall, varför det är naturligt att upprätta ett datamaskinprogram med vilket det omfattande beräkningsarbetet kan styras. Ett sådant program ges i 6.2 med beteckningen "POINT SET STRUCTURE GENERAL PROGRAM". Programmet har skrivits i det problemorienterade språket ALGOL 60 med notation i enlighet med de konventioner, som tillämpas vid maskinsystemet UNIVAC 1108. Programmets struktur illustreras i FIG. 42 och skall genomgås i det följande.

Inledningsvis belyses översiktligt programmets beräkningsmöjligheter. Tre alternativa beräkningsvägar är förutsedda.

Av dessa ger alternativ 1 i stort samma möjligheter, som det program, som publicerats i PSS. Uppläggningsen är emellertid här mera förfinad därigenom, att en beräkning nu kan genomföras med den i kapitel 4 introducerade approximationen av en godtyckligt vald arbetslinje för konstruktionens enskilda punkter. I den tidigare versionen kunde endast idealelasto-plastiska punktegenskaper beaktas. Konstruktionens första pålastning fram till brott kan följas i maximalt 20 steg. Denna gräns är godtyckligt vald och kan vid behov enkelt justeras uppåt. Efter varje steg ges som resultat beskrivning av jämviktstillståndet samt av det residualtillstånd, som svarar mot avlastning från den aktuella lastnivån.

Med beräkningsalternativ 2 kan en lastcykel detaljstuderas. Som resultat ges här tillståndet efter första pålastning till föreskrivet påkänningstillstånd  $\varphi$  samt den inre kraftbildens variation

under en eller flera därpå följande lastcykler. Cykelgränserna bestäms därvid av  $N_{\max}$  svarande mot  $\varphi$  och  $N_{\min} = \alpha \cdot N_{\max}$  där  $\alpha$  är en vald koefficient. Väljs  $\alpha$  - avsiktligt eller oavsiktligt - så att  $N_{\min}$  blir mindre än konstruktionens negativa brottgräns, läggs undre cykelgränsen i stället vid denna. Under en cykel varierar den yttre lasten med ekvidistanta steg mellan cykelgränserna och systemets tillstånd redovisas efter varje laständring. Antalet steg kan härvid väljas godtyckligt (antalet har dock i föreliggande programversion maximerats till 20). Den generaliserade arbetslinjen kan tillämpas även i detta beräkningsalternativ.

Programmet möjliggör en variant, betecknad alternativ 20. Detta innebär samma beräkningsgång som alternativ 2 men förutsätter, att konstruktionens beskrivande data redan finns tillgängliga i maskinens minne. Det tillämpas, då en alternativ 2-beräkning skall utföras i direkt följd till en alternativ 1-beräkning av samma konstruktion.

Beräkningsalternativ 3 har tillkommit för studium av inverkan av upprepade last med hänsyn tagen till strain hardening effekt. Även här inleds behandlingen med pålastning till ett givet påkänningstillstånd  $\varphi$ , varefter övre och undre cykelgräns bestäms som vid alternativ 2. Den yttre lasten reverteras därefter mellan cykelgränserna ett föreskrivet antal gånger. Antalet indelas i perioder med ett valt antal cykler i varje period. Efter varje avslutad period utskrivs dels det rådande krafttillståndet inom konstruktionen och dels aktuella värden för dennas övre flytgräns och brottgräns jämte tillhörande interna kraftbilder.

Med hänsyn till de enskilda punkternas kraftdeformationsegenskaper är beräkningsalternativet begränsat till idealelasto-plastisk arbetslinje, dikterat av att en från början krökt arbetslinje raknar vid lastupprepning. I stället kan effekten av strain hardening beaktas genom att flytkraften vid en punkt har gjorts beroende av antalet flyttillfällen vid punkten enligt ett funktionellt samband, som närmare diskuterats i kapitel 5. Detta kan resultera i att konstruktionens flytgräns successivt höjs. Skulle det därvid inträffa, att flytgränsen kommer över cykelgränsen blir det fortsätta verknings sättet renodlat elastiskt och därmed trivialt



för de återstående cyklerna. Programmet justerar därför cykelgränsen i en sådan situation så, att omedelbart efter justeringen samma relationer råder mellan flytgräns, cykelgräns och brottgräns som vid den första lastreverteringen.

Programmet möjliggör en variant, benämnd alternativ 30. Denna innehåller samma beräkningsgång som alternativ 3, men förutsätter att konstruktionens beskrivande data redan finns lagrade i minnet. Den tillämpas då en alternativ 3-beräkning skall utföras i omedelbar följd efter en beräkning av samma konstruktion enligt något av beräkningsalternativen 1, 2 eller 20.

I FIG. 42 anges med svarta punkter, vilka av nedan beskrivna procedurer, som anropas vid de olika beräkningsalternativen.

#### 6.1.1 Till huvudprogrammet hörande procedure-deklarationer

Före huvudprogrammet ligger ett antal procedure-deklarationer, vilka kommenteras i det följande. Sifferhänvisningen avser därvid radnummer i den i 6.2 återgivna programlistan, jfr även den generella programstrukturen i FIG. 42.

DATAIN (16-49)

Denna procedure omfattar inläsning av datakort. Följande indatakort kan därvid förekomma.

IDENT-kort. Innehåller i allmänhet ett heltal mellan 0 och 9999 för identifiering av beräkningen. Ett negativt tal i detta kort medför uthopp från programmet.

ALT-kort. Innehåller ett heltal, som anger önskat beräkningsalternativ. Heltalet får vara 1, 2, 3, 20 eller 30.

NOP-kort. Innehåller ett positivt heltal, som maximalt är 20. Talet anger antalet punkter i konstruktionen.

POINT-kort. Ett eller flera kort, som i löpande följd innehåller för varje punkt gällande punktnummer, abscissa, ordinata och vikt.

Punktnumren är härvid heltal, de övriga reella tal. Talen åtskiljs av en eller flera blanka.

PSI-kort. Detta innehåller antingen vinkeln  $\psi$  mellan x-axelns positiva riktning och verkningslinjen för den yttre kraften ( $0^\circ \leq \psi < 180^\circ$ ) eller, då den yttre lasten är ett moment, värdet  $\psi = -1$ .

XNEYNE-kort. Innehåller koordinaterna till en godtyckligt vald punkt på den yttre kraftens verkningslinje. Detta kort utgår, då  $\psi = -1$ .

NYLEV-kort. Innehåller ett heltal mellan 0 och 20, vilket anger antalet flytnivåer, exklusive den högsta.

STST-kort. Ett eller flera kort, som innehåller en beskrivning av den generaliserade arbetslinjen. För varje flytnivå, exklusive den högsta anges nivåns relativa höjd och längd. Höjden ges därvid i relation till den högsta flytnivån och längden i relation till gränsen mot den plastiska zonen. Nivåerna måste vara sorterade efter växande höjd. Talen stansas i löpande följd, åtskilda av en eller flera blanka. Dessa kort utgår, då NYLEV = 0.

NPFI-kort. Innehåller ett heltal mellan 1 och 20, vilket anger antalet påkänningstillstånd  $\varphi$ , som önskas studerade vid beräkningsalternativ 1.

NFI-kort. Ett eller flera kort innehållande de  $\varphi$ -värden, som önskas undersökta vid beräkningsalternativ 1. Talen stansas i löpande följd, åtskilda av en eller flera blanka.

ALT 2-kort. Detta kort omfattar påkänningstillståndet  $\varphi$ , faktorn  $\alpha$  för beräkning av undre cykelgränsen, antalet steg i en halv-cykel NOSTIC och antalet cykler NOCY.

STRAINHARDENING-kort. Innehåller tre parametrar, vilka bestämmer den successiva tillväxten av flytkraft vid en punkt. Det reella talet SLOPE anger initialvärdet för tangentlutningen hos tillväxtfunktionen och svarar således mot  $\zeta_0$  enligt (131). Sätts

SLOPE = .0, erhålles ingen strain hardening effekt. NY och CAPPA är ett set kopplade värden, hörande till tillväxtfunktionen  $\kappa$ . De har sin motsvarighet i  $\sigma_0$  och  $\kappa_0$  i uttrycket (132). Heltalet NY är således ett antal flyttillfällen och det reella talet CAPPA är mot NY svarande relativa flytkraft.

ALT 3-kort. Kortet omfattar påkänningsstillståndet  $\psi$  för bestämning av övre cykelgränsen, faktorn  $\alpha$  för bestämning av undre cykelgränsen, antalet cykler i en period CNIPER och totala antalet cykler NOCY.

Korten används i följande kombinationer

Alt. 1 : IDENT

ALT

NOP

POINT ett eller flera

PSI

XNEYNE utelämnas då  $\psi = -1$

NYLEV

STST ett eller flera, utelämnas då NYLEV = 0

NPHI

NFI ett eller flera

Alt. 2 : IDENT

ALT

NOP

POINT ett eller flera

PSI

XNEYNE utelämnas då  $\psi = -1$

NYLEV

STST ett eller flera, utelämnas då NYLEV = 0

ALT 2

Alt. 20: IDENT

ALT

ALT 2

Alt. 3 : IDENT

ALT

NOP  
 POINT           ett eller flera  
 PSI  
 XNEYNE           utelämnas då  $\psi = -1$   
 STRAINHARDENING  
 ALT 3

Alt. 30: IDENT  
 ALT  
 STRAINHARDENING  
 ALT 3

Ett run kan omfatta en serie beräkningar med som första beräkning den till beräkningsalternativ 1, 2 eller 3 hörande. Det sista datakortet inom ett run måste vara ett IDENT-kort, innehållande ett negativt heltal.

RUBRIC (51-58)

Anrop av denna procedure medför framflyttning av radskrivarens papper till ny sida, utskrift av rubrik samt paginering. Den betjänar samtliga PRINTprocedurer.

TEXT (60-66)

Proceduren betjänar flera PRINTprocedurer, jfr FIG. 42. Den ger utskrift av text, som är gemensam för flera resultatupställningar.

TABLE (68-76)

Proceduren betjänar flera PRINTprocedurer, jfr FIG. 42. Den ger utskrift av tabell, som är likartad i flera resultatupställningar.

PRINT 1 (78-130)

Anrop av denna procedure ger utskrift av ingångsdata (datakvitto) i en form, som är anpassad till aktuellt beräkningsalternativ. Exempel på effekten av denna procedure och flertalet av de efterföljande PRINTprocedurerna visas i 6.3, vilket avsnitt återger kompletta beräkningsresultat från tre beräkningar enligt alternativen 1, 20 och 30.

## PRINT 2. (132-150)

Denna procedure ger utskrift av tillståndet efter pålastning för varje  $\varphi$ -värde i en beräkning enligt alternativ 1 och efter första pålastning vid en beräkning enligt alternativ 2.

## PRINT 3 (152-164)

Proceduren ger utskrift av tillståndet efter ett laststeg i en cykelberäkning enligt alternativ 2.

## PRINT 4 (166-172)

Denna procedure anropas efter relaxation för redovisning av det inre residualkrafttillståndet. Den används i beräkningsalternativen 1 och 3.

## PRINT 5 (174-179)

Proceduren utskriver vid anrop meddelande om att beräkning av återstående halvcykel slopats på grund av symmetri. Den används i beräkningsalternativ 2.

## PRINT 6 (181-185)

Då den yttre kraften går genom konstruktionens tyngdpunkt, blir deformationen en ren translation. Situationen är ointressant, varför aktuell beräkning annulleras. Anrop av PRINT 6 meddelar ett sådant förhållande.

## PRINT 7 (187-204)

Proceduren anropas av YIELDFUNC och är således aktuell endast vid beräkningsalternativ 3. Den förmedlar utskrift av det funktionella sambandet mellan antalet flytningar vid en punkt och punktens häremot svarande relativa flytkraft. Sambandet belyses ytterligare genom tryckning av en tabell. Då strainhardening effekten icke beaktas meddelas detta i stället.

## PRINT 8 (206-222)

Anrop av denna procedure ger utskrift av konstruktionens tillstånd vid såväl dess övre flytgräns som dess övre brottgräns. Utskriften ges efter varje avslutad cykelperiod i beräkningsalternativ 3.

## PRINT 9.

(224-240)

Anrop av denna procedure ger utskrift av det inre krafttillståndet vid övre cykelgränsen efter en fullbordad cykelperiod i beräkningsalternativ 3. Med NOY (= number of yield) anges antalet flyttillfällen vid en punkt och med KAPPA värdet på punktens aktuella relativa flytkraft.

## TRANSFORM

(242-250)

Proceduren betjänar vissa PRINT-procedurer genom förberedande arbete i form av koordinattransformation från internt till externt system jämte beräkning av punktkrafternas storlek.

## YIELDPATTERN

(252-270)

Denna procedure har två funktioner. Den ena är att komplettera inlästa flytnivåer med en lägsta sådan  $\eta = 0$  och en högsta  $\eta = 1$ , samt att på basis av till flytnivåerna hörande relativa tjöningar först beräkna de motsvarande  $\beta_i$ -värdena och sedan  $\omega_i$ -värdena enligt uttryck (101). Procedurens andra funktion är att beräkna de dimensionslösa radierna  $\xi'$  och  $\xi''$  i gränscirklarna mellan de uppkomna elastiska banden och flytbanden, svarande mot det aktuella påkänningstillståndet  $\varphi$  enligt sambanden (102) och (103). Den förstnämnda funktionen behöver aktiveras endast en gång vid varje beräkningstillfälle, den andra måste aktiveras för varje nytt värde på  $\varphi$ .

## YELDFUNC

(272-292)

Det antagna sambandet mellan antalet flyttillfällen vid en punkt och punktens aktuella flytkraft med beaktande av strain hardening effekten ges av (128). För beräkning av i detta samband ingående koefficienter  $k_1$  och  $k_2$  ur de valda parametrarna  $\zeta_0$ ,  $\sigma_0$  och  $\kappa_0$  har tidigare uppställts ekvationssystemet (131) och (132). Ekvation (132) löses med avseende på  $k_2$  enligt Newton-Raphsons metod av proceduren YELDFUNC. Logaritmeras sambandet (132) erhålles

$$\ln \kappa_0 = k_2 \cdot \ln \left( 1 + \frac{\zeta_0 \cdot \sigma_0}{k_2} \right) \quad (157)$$

Med beteckningen

$$K = \frac{\zeta_0 \cdot \sigma_0}{k_2}$$

introduceras den på (157) baserade funktionen

$$F = k_2 \cdot \ln(1 + K) - \ln \kappa_0$$

Deriveras  $F$  med avseende på  $k_2$ , erhålles

$$\frac{\partial F}{\partial k_2} = \ln(1 + K) - \frac{K}{1+K}$$

Det värde på  $k_2$ , vilket ger  $F = 0$ , kan sedan beräknas iterativt ur rekursionsformeln

$$k_{2,i+1} = \frac{\ln \kappa_0 - k_{2,i} \cdot \frac{K}{1+K}}{\ln(1+K) - \frac{K}{1+K}} \quad (158)$$

varefter  $k_1$  ges ur (131).

STRAINHARD (294-306)

Vid anrop av denna procedure genomgås konstruktionen punkt för punkt. Om därvid enhetskraften vid en punkt är lika med för tillfället gällande flytkraft vid punkten, ökas räkneverket NOY för antalet flyttillfällen med 1 och mot det uppräknade värdet svarande ny flytkraft KAPPA beräknas ur (128).

REX (P, Q) (308-321)

REX antar vid anrop ett värde, som är lika med det största avståndet från punkten (P, Q) till någon punkt inom punktgruppen. Som biresultat erhålles med referens till punkten (P, Q) samtliga radier, samtliga raders kvadrat och samtliga raders projektioner på koordinataxlarna.

MAXANG (323-328)

MAXANG antar vid anrop ett värde, som är lika med den största vinkelrotation, som uppträder inom punktgruppen i det aktuella ögonblicket.

FIRSTSTEP (E) (330-408)

Denna procedure bestämmer jämviktstillståndet för en icke tidigare belastad punktkonstruktion efter deformation, svarande mot påkänningstillståndet  $\varphi (= E)$ .

Proceduren inleds med följande fyra interna procedurer.

MAXGRAD. Denna procedure utväljer av två gradientkomposanter den, som har det största absolutvärdet. Vid anrop antar MAXGRAD värdet av index till denna komposant.

STRIP (A). Proceduren ger, för punkt med index A, numret på det band i flytmönstret, inom vilket punkten ligger.

REALSTRIP. Denna procedure omräknar det genom proceduren YIELD-PATTERN fastlagda dimensionslösa flytmönstret till absolutvärden, svarande mot aktuellt värde på den största radien  $R_M$  inom gruppen.

GRADIENT. Proceduren beräknar värdet av det inre arbetets två gradientkomposanter enligt uttrycken (111).

Procedurekroppen i FIRSTSTEP har i huvuddrag följande struktur.

Med start i en av huvudprogrammet bestämd punkt (u, v) beräknas gradientvektorn till det inre arbetet. Är denna vektors euklidiska norm mindre än ett givet litet tal  $\epsilon$ , anses jämviktsläget uppnått. Om så icke är fallet, ges u eller v ett tillskott H i den riktning, vars gradientkomposant har det största absolutvärdet. Gradientkomposantens tecken avgör, om tillskottet skall vara positivt eller negativt. Koordinaten för den för tillfället aktuella operationsriktningen ges index K.

Efter ett steg i K-riktningen beräknas gradientvektorn i stegets andra ändpunkt och den nya K-komposanten jämförs med den först beräknade. Har dessa samma tecken, upprepas det beskrivna förloppet med den nya punkten som startpunkt. Har komposanterna däremot motsatta tecken interpoleras rätlinjigt till det läge u eller v, som ger K-komposanten värdet noll, och den således bestämda punkten väljs som utgångspunkt för omstart med den till hälften reducerade steglängden.

Efter varje tio steg multipliceras steglängden med en störfaktor 0.95 för att motverka den olägenhet, som kan uppkomma, om med oförändrad steglängd K's variation blir periodisk.

Sedan jämviktsläget fastställts, beräknas varje punkts rotationsdeformation med hänsyn tagen till den generaliserade arbetslinje,



som gäller för aktuell konstruktion. Slutligen beräknas mot jämviktsläget svarande storlek på den yttre kraften eller det yttre momentet.

STORE (410-418)

Proceduren mellanlagrar, efter en ändring av den yttre lasten, av ändringen orsakade rotationsdeformationer  $\theta_2$  samt momentan-centra C, hörande till konstruktionen enskilda punkter. Dessutom lagras den vid iterationen funna deformationsparametern  $(u, v, \tau)$ .

UNSTORE (420-428)

Proceduren flyttar, före en ändring av den yttre lasten, de av STORE lagrade matriserna  $\theta_2$  och C till initialmatriserna  $\theta_1$  respektive A. Koordinaterna till startpunkten för den förestående iterationen tilldelas därjämte värdena  $(u, v, \tau)$ .

MOVE (430-500)

Denna procedure bestämmer jämviktstillståndet efter en variation av den yttre lastens storlek.

Proceduren inleds med två interna procedurer, vilka behandlas i det följande.

MAXGRAD. Denna procedure utväljer av tre gradientkomposanter den, som har det största absolutvärdet. Vid anrop antar MAXGRAD värdet av index till denna komposant.

GRADIENT. Proceduren beräknar för givna värden av deformationsparametrarna  $(u, v, \tau)$  det inre arbetets tre gradientkomposanter enligt uttrycken (53) med beaktande av dels den teckenvariation för gradientkomposanterna, som belyses i kapitel 3, dels de villkor, som alternativt uttrycks genom relationerna (116) vid tillämpning av generaliserad arbetslinje, eller genom relationerna (137), då strain hardening effekten beaktas, samt slutligen av om kraftvariationen vid en punkt följer en av- eller pålastningskurva, vilket avgörs av kriteriet (125). Proceduren MOVE är så konstruerad, att den alltid uppsöker en minimipunkt. Som framgår av kapitel 3 måste man emellertid i vissa perioder av en cykel alternativt kunna fastlägga en maximipunkt, varför gradientkomposanternas tecken måste kunna omkastas. Denna möjlighet till-

godoses. av styrvariabeln  $\chi$ , vilken efter gällande situation tilldelas värdet +1 eller -1.  $\chi$  har således en dubbel funktion, eftersom den är identisk med det  $\chi$ , som introducerats vid uppställandet av relationen (125).

Procedurekroppen i MOVE genomlöper följande beräkningsschema. Deformationsparametrarna ( $u$ ,  $v$ ,  $\tau$ ) har redan före proceduranropet tilldelats initialvärden av huvudprogrammet. Med dessa som startvärden inleds iterationen genom anrop av GRADIENT, varvid gradientvektorn bildas. Är dennas euklidiska norm mindre än  $\epsilon$ , anses jämvikt råda. Är så icke fallet, ges  $u$ ,  $v$  eller  $\tau$  ett tillskott  $H$  i den riktning, vars gradientkomposant har det största absolutvärdet. Om steget därvid skall vara positivt eller negativt, avgörs av komposantens tecken. Komposanten för aktuell operationsriktning har index  $K$ .

Efter steget i  $K$ -riktningen, beräknas gradienten i stegets andra ändpunkt och komposanten i  $K$ -riktningen jämförs med motsvarande i stegets början. Har dessa samma tecken upprepas det beskrivna förfarandet med den nya punkten som startpunkt. Har komposanterna däremot motsatta tecken, interpoleras rätlinjigt fram till det läge  $u$ ,  $v$  eller  $\tau$ , som ger  $K$ -komposanten värdet noll, och den således bestämda punkten tas som utgångspunkt för omstart med den till hälften reducerade steglängden.

Av deformationsparametrarna är  $u$  och  $v$  längder, medan  $\tau$  är en vinkeländring, innebärande att storleksordningen är olika för de tre koordinatriktningarna. Med anledning härav tillämpas två olika värden på  $H$ , ett, som är gemensamt för variation i  $u$  eller  $v$ , och ett annat för variation av  $\tau$ .

Ett överlappande förlopp har inlagts i den beskrivna iterationen för att övervaka  $K$ -riktningens variation. Efter varje tio steg kontrolleras således, om  $K$  har ändrats inom denna period. Är så ej fallet, d.v.s. om alla tio stegen har tagits i samma riktning, ökas steglängden med faktorn 1.25.

Om den yttre lastens storlek skulle överstiga det för tillfället gällande värdet på konstruktionens brottgräns, kan ett jämvikts-

läge ej etableras. Iterationen i MOVE blir då divergent med oändlig beräkningstid till följd. För att bemästra en sådan situation, bevakas ständigt storleken på vinkeländringen  $\tau$ . Om därvid denna har ökat till ett värde, som överstiger gränsvinkeländringen LIMANG, avbryts iterationen och kontrollen återlämnas till det anropande programmet, vilket får vidtaga erforderliga åtgärder.

YIELDLIM (502-546)

Med denna procedure beräknas konstruktionens aktuella flytgräns. Den föregås av den internt deklarerade proceduren MIN, vilken vid anrop antar värdet  $F(\tau)$  enligt uttrycket (156).

Proceduren bestämmer iterativt det mot flytgränsen svarande värdet på  $\tau$ , d.v.s. det värde, som ger  $F(\tau) = 0$ . Genom stegning från ett beräknat utgångsvärde, ändras  $\tau$  successivt tills ett tillstånd inträffar, som karakteriseras av att  $F(\tau)$  har motsatt tecken vid stegets två ändpunkter. Avser de två  $F$ -värdena härvid en och samma konstruktionspunkt, väljs det  $\tau$ , som vid rätlinjig interpolation ger  $F(\tau) = 0$ , som startvärde för fortsatt iteration med till en fjärdedel reducerad steglängd.

Avser  $F$ -värdena å andra sidan olika punkter, halveras steglängden och iterationsprocessen fortlöper.

Sedan  $\tau$  bestämts, ges sökt flytgräns ur (145) respektive (151).

FAILURE (548-598)

Denna procedure beräknar konstruktionens brottgräns enligt följande.

Problemet har fyra obekanta, nämligen de tre deformationsparametrarna  $u$ ,  $v$  och  $\tau$  jämte brottgränsen  $N_0$ . Problemet löses genom att efter ett visst system tilldela  $N$  (eller  $M$ ) provvärden och sedan för vart och ett av dessa utvärdera jämviktstillståndet med hjälp av proceduren MOVE. Kriterium för att det provade värdet för  $N$  (eller  $M$ ) sammanfaller med brottgränsen är att ett jämviktsläge kan etableras och att i detta summan av punktkrafternas absolutvärde är lika med det maximala värdet, som denna summa kan anta,  $\Sigma g \kappa$ . Proceduren inleds med följande två internt deklarerade procedurer.

ABSUM antar vid anrop värdet av  $i$  i aktuell situation rådande absolutkraftsumma.

EXHAU antar värdet "sann", då ABSUM (med viss tolerans) är lika med maximalsumman  $\Sigma g \kappa$ . I motsatt fall antar EXHAU värdet "falsk".

Procedurekroppen arbetar enligt följande strategi, vilket illustreras i FIG. 43. Med utelämnande av divisorn  $P_0$ , visar denna figurs streckade kurva sambandet mellan den yttre kraften och summan av punktkrafternas absolutvärden. Två punkter på denna kurva, markerade 1 och 2, antas bestämda. SF är  $\Sigma g \kappa$ , varför kurvans skärning med denna linje bestämmer brottgränsen  $N_0$ .

En ny punkt på kurvan fixeras enligt följande. Genom punkterna 1 och 2 läggs en andragradsparabel med linjen  $\Sigma P = SF$  som axel. Avståndet  $t$ , mätt i N-axelns riktning mellan punkt 2 och parabelns vertex beräknas. Därefter ökas  $N_2$  med  $t/3$  till värdet  $N$ , MOVE anropas och mot  $N$  svarande ordinata beräknas. Förfarandet upprepas tills EXHAU blir "sann", vilket medför uthopp.

Vid övertramp av  $N_0$ , blir MOVE divergent resulterande i uthopp från denna procedure, då  $t$  har växt till ett orimligt värde. I en sådan situation provas omräkning med ett nytt värde på den yttre kraften, svarande mot undre tredjedelspunkten i intervallet  $N_2 - N$ . Misslyckas även denna ansats, fortsätts tredelningen, tills  $N$  blir mindre än  $N_0$ , varefter övergår till det först skisserade förloppet.

### 6.1.2 Huvudprogrammet

Huvudprogrammet, vilket börjar vid läget BEGINPROGRAM, är disponerat i fyra avsnitt. Det första av dessa omfattar en serie förberedande åtgärder, gemensamma för samtliga beräkningsalternativ. Det andra, tredje och fjärde avsnitten behandlar därpå var sitt beräkningsalternativ.

#### Förberedande åtgärder

Efter inläsning av data, trycks datakvitton som kontroll av att beräkningarna genomförs med rätta ingångsvärden.

För att undvika olägenheter i samband med den extrema deformation, som uppkommer, då en av gruppens punkter ligger alldeles intill vridcentrum samtidigt som  $\varphi = 0$ , utesluts detta fall ur beräkningarna genom ersättning av  $\varphi = 0$  med det mindre känsliga värdet  $\varphi = \text{ZERO} = 0.001$ . I normala fall saknar denna approximation betydelse.

Sedan punktgruppens viktade tyngdpunkt beräknats, vrids gruppen i förhållande till det använda koordinatsystemet så att den yttre kraftens verkningslinje blir parallell med y-axeln. Detta görs dels för att nedbringa beräkningstiden och dels för att direkt kunna tillämpa de tidigare uppställda sambanden. Vid yttre belastning av moment utgår denna transformation.

Härpå beräknas några hjälpstorheter för de iterativa procedurerna FIRSTSTEP och MOVE. Uthoppskriteriet för dessa är, att gradientens euklidiska norm är mindre än eller lika med toleransen EPSILON, bestämd ur sambandet

$$\varepsilon = 0.00001 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Här är  $S = \Sigma g$  och  $n = \text{NOP}$  = antalet punkter i konstruktionen. Uttrycket för  $\varepsilon$  har därvid baserats på överväganden, analoga med de i PSS gjorda i samband med kontroll av jämviktsekvationerna.  $\varepsilon$  växer linjärt med  $S/n$ , d.v.s. ungefärligen linjärt med den maximala punktkraftens medelvärde, samt linjärt med  $\sqrt{n}$ . I förhållande till i PSS har toleranskravet här skärpts med en 10-potens för att motverka den ogynnsamma effekten av felanhopning, då som i beräkningsalternativ 3, nya krafttillstånd bygger på tidigare bestämda.

Initialvärdet för steglängden vid den iterativa bestämningen av läget av vridmedelpunkten sätts till 0.1 av  $R_M$ , där  $R_M$  räknas med avseende på punktgruppens viktade tyngdpunkt. Initialvärdet för steglängden av den i samma iteration beräknade rotationsdeformationen sätts för en halvcykel till 0.1 av LIMANG. Den senare definieras som den absolut största vinkeländringen (ökad med 5%), som för den aktuella konstruktionen kan komma i fråga vid övergång från ett tillstånd till ett annat.

Nästa förberedande åtgärd är beräkning av vridmedelpunktens läge

under renodlade elastiska förhållanden. I samband härmed kontrolleras, om den yttre kraften går genom gruppens tyngdpunkt. Om så är fallet, är beräkningssituationen trivial, förhållandet meddelas och vidare beräkning inställs.

Slutligen bestäms konstruktionens flyt- och brottgräns vid första pålastning. Brottgränsen erhålles därvid genom anropet FIRSTSTEP (ZERO). Flytgränsen  $N_1$  (eller  $M_1$ ) beräknas enligt följande.

Flytgränsen karakteriseras av att  $R_O = R_M$  varför det övre sambandet (5) direkt ger

$$\frac{N_1}{P_O} = \frac{\sum g a}{R_M}$$

då den yttre lasten är en kraft.

Då lasten är ett moment, erhålles ur det mot (6) svarande uttrycket

$$\frac{M_1}{P_O} = \frac{\sum g R^2}{R_M}$$

De nu genomgångna förberedande åtgärderna överhoppas av beräkningsalternativen 20 och 30, då dessa alltid uppträder som följdberäkningar till tidigare utförd beräkning enligt alternativ 1 eller 2.

#### Beräkningsalternativ 1

Programmets följande avsnitt (654-677), vilket avser alternativ 1, har följande funktion.

För vart och ett av de föreskrivna  $\varphi$ -värdena bestäms först det mot aktuellt  $\varphi$  svarande flytmönstret, varefter jämviktstillståndet bestäms och redovisas. Slutligen beräknas residualtillståndet efter avlastning och detta utskrivs.

#### Beräkningsalternativ 2 eller 20

Programmets nästa avsnitt (678-740), vilket behandlar en punkt-konstruktion enligt beräkningsalternativ 2 eller 20, inleds med några förberedande åtgärder före den egentliga cykelberäkningen. Först bestäms jämviktstillståndet svarande mot föreskrivet  $\varphi$  och

detta redovisas. Härmed är övre cykelgränsen definierad. Sedan beräknas undre cykelgränsen svarande mot givet värde på  $\alpha$  och denna justeras vid behov uppåt till den negativa brottgränsen.

Då en cykelgräns sammanfaller med motsvarande brottgräns, kan ett jämviktsläge praktiskt icke etableras, eftersom konstruktionens rotationsdeformation blir oändligt stor. Iterationen i proceduren MOVE blir i en sådan situation divergent och beräkningstiden oändlig. För att utesluta denna olägenhet flyttas en sådan cykelgräns inåt sträckan  $\epsilon$ , då den yttre lasten är en kraft, och sträckan  $R_M \cdot \epsilon$ , då den yttre lasten är ett moment.  $R_M$  räknas i detta sammanhang med avseende på vridmedelpunkten hörande till total plasticering. Det skall i samband härmed påpekas att vid övertramp av brottgränsen konstruktionspunkternas tillhörande individuella momentancentra konvergerar mot en gemensam vridmedelpunkt. Att så är fallet framgår av följande. Då  $\tau \rightarrow \infty$  vill enligt (21)  $\beta \rightarrow 0$ , vilket i sin tur, enligt (22) medför att  $x_2 \rightarrow u$  och  $y_2 \rightarrow v$ .

Sedan cykelns yttergränser är fastlagda, kan storleken på kraftförändringen hörande till ett beräkningssteg beräknas som differensen mellan cykelgränserna dividerad med det föreskrivna antalet steg i en halvcykel.

Vid läget START börjar första halvcykeln. Efter varje förändring av den yttre lastens storlek förfäres enligt följande. De tre variablerna, vars storlek skall beräknas, tilldelas lämpliga initialvärden. Anrop av MOVE medför därefter att variablerna antar mot jämvikt svarande värden och hela jämviktstillståndet skrivs ut. En extra säkerhetsåtgärd har inbyggts, innebärande en minskning av den yttre lastens absolutvärde med 0.1 % för varje gång MOVE ej leder till jämvikt. Detta får betydelse endast vid cykelgränserna.

Efter avslutad genomgång av den första halvcykeln kontrolleras om cykeln är symmetrisk. Är så fallet, avbryts ytterligare beräkning och orsaken härtill meddelas. Är så icke fallet, fortsätts med andra halvcykeln, där den yttre lasten stegvis ökas till sitt initialvärde. Även här redovisas tillståndet efter

varje steg. Eventuellt kan det nu genomgånga förloppet upprepas en eller flera gånger.

#### Beräkningsalternativ 3 eller 30

Även programmets sista avsnitt (741-849), vilket behandlar beräkningar enligt alternativen 3 eller 30, inleds med ett antal förberedande åtgärder, av vilka några skall kommenteras i det följande. Inledningsvis bestäms det funktionella sambandet mellan antalet flyttillfällen vid en punkt och dennas flytkraft utifrån de tre givna parametrarna  $\zeta_0$ ,  $\sigma_0$  och  $\kappa_0$ . Därefter bestäms övre cykelgränsen, svarande mot givet  $\varphi$ -värde samt till första pålastningen hörande flyt- och brottgräns. Ytterligare beräknas förhållandet mellan brott- och flytgräns, vilket är ett mått på den hållfasthetsreserv, som står till förfogande, sedan flytgränsen har uppnåtts. Slutligen beräknas undre cykelgränsen på analogt sätt som för alternativ 2 och alla uppnådda resultat skrivs ut.

Så bestäms lämpliga startvärden för iterativ beräkning av rotationsdeformationerna i olika situationer samt de koefficienter, som används för omräkning av cykelgränserna vid inträffad risk för övergång till elastiskt beteende hos konstruktionen. Om strain hardening effekten icke beaktas i den aktuella beräkningen, justeras övre och undre cykelgräns med  $\epsilon$  eller  $R_M \cdot \epsilon$ , då respektive cykelgräns sammanfaller med brottgränsen i analogi med för alternativ 2.

Härmed är de förberedande åtgärderna avslutade och den egentliga cykelberäkningen startar vid läget BEGINCYCLE.

Först beräknas konstruktionens undre flytgräns och det kontrolleras, att denna är högre än undre cykelgränsen. Skulle så ej vara fallet, måste även undre brottgränsen bestämmas och cykelgränsen sänkas enligt tidigare angiven regel för att hindra övergång till elastiskt beteende.

Härefter kan jämviktstillståndet vid undre cykelgränsen etableras och vid lastväxlingen uppkomna ändringar i punkternas materialegenskaper noteras.



Andra halvcykeln inleds med beräkning av övre flytgränsen och en motsvarande kontroll av att denna är lägre än övre cykelgränsen. Skulle så ej vara fallet, måste även övre brottgränsen bestämmas och cykelgränsen justeras uppåt före fortsatt lastvariation.

Sist etableras jämviktstillståndet vid övre cykelgränsen och uppträdande ändringar i punkternas flytkraft antecknas.

Det beskrivna förloppet, vilket täcker en helcykel, upprepas så, tills en cykelperiod har avslutats, varefter nu rådande tillstånd jämte aktuella gränstillstånd meddelas genom utskrift. Därefter fortsättes med periodvis redovisning, tills det föreskrivna antalet cykler genomlöpts, varpå som sista åtgärd konstruktionen relaxeras och residualtillståndet beräknas och meddelas.

## 6.2 Programlista

```

1 BEGIN COMMENT POINT SET STRUCTURE GENERAL PROGRAM;
2 INTEGER ALT,CNIPER,CYN,CYP,I,IDENT,K,NOCY,NOP,NOSTIC,
3 NPHI,NY,NYLEV,POC,STEN;
4 REAL ALPHA,CAPPA,CO,D,DTAU,E,EPSILON,F,FI,HV,PO,IB,IG,TAU1,TAU2,TAU3,
5 TAU4,RO,S,SFS,S1,SLOPE,STEM,SY,T,TAU,UP,UO,UOE,VP,VO,VOE,X,
6 XE,XG,XGE,XN,XNE,Y,YE,YG,YNE,ZERO,COEF1,COEF2,K1,K2,UL,VL,
7 LIMANG,M,MULN,MYLN,M0,N,NMAX,NMIN,N0,OMZE,PK,PS1,Q1,Q2,RMAX,ON,
8 HSI;
9 BOOLEAN BOTTOM,DOWN,PAGE,PRENT,EXTREME;
10 LOCAL LABEL FIN,ALT1,ALT3;
11 INTEGER ARRAY NOY,PN(1:20);
12 ARRAY B,LOAD(1:3),SOL(1:6),BETA,ROPRIM,ROBISS(0:20),
13 G,PHI,R,RA,RANG,RB,R2,TAUX,T1,V,KAPPA(1:20),OMEGA(0:21),
14 ETA,RRPRIM,RBISS(0:21),EXIT(1:20,1:9),A,C,CAUX,Z,ZE(1:20,1:2);
15
16 PROCEDURE DATIN;
17 BEGIN I:INTEGER K;
18 LIST POINT(FOR K=(1,1,NOP) DO (PN(K),ZE(K,1),ZE(K,2),G(K))),
19 STST(FOR K=(1,1,NYLEV) DO (ETA(K),RANG(K))),
20 NFI(FOR K=(1,1,NPHI) DO PHI(K));
21 READ(IDENT);
22 IF IDENT LSS 0 THEN GO TO FIN;
23 READ(ALT);
24 IF ALT EQL 20 THEN GO TO L2;
25 IF ALT EQL 30 THEN GO TO L3;
26 READ(NOP);
27 READ(POINT);
28 READ(PSI);
29 IF PSI GEQ 0 THEN READ(XNE,YNE);
30 IF ALT EQL 1 THEN
31 BEGIN READ(NYLEV);
32 READ(STST);
33 READ(NPHI);
34 READ(NFI);
35 GO TO OUT;
36 END ALT 1;
37 IF ALT EQL 2 THEN
38 BEGIN READ(NYLEV);
39 READ(STST);
40 L2: READ(FI,ALPHA,NOSTIC,NOCY);
41 GO TO OUT;
42 END ALT 2;
43 IF ALT EQL 3 THEN
44 L3: BEGIN READ(SLOPE,NY,CAPPA);
45 READ(FI,ALPHA,CNIPER,NOCY);
46 NYLEV=0;
47 END ALT 3;
48 OUT:
49 END DATIN;
50
51 PROCEDURE RUBRIC;
52 BEGIN J:INTEGER K;
53 FORMAT TLX(2,AB,'POINT SET STRUCTURE',X43,'PAGE',I4,A1,X8,
54 'GENERAL PROGRAM',A1,X6,'CALCULATION NO',I5,A1.3);
55 IF PAGE THEN BEGIN K=0; PAGE=FALSE END;
56 K=1+K;
57 WRITE(TEXT,K,IDENT);
58 END RUBRIC;
59
60 PROCEDURE TEXT(K);
61 VALUE K: INTEGER K;
62 BEGIN FORMAT XT(X8,'CENTRE OF ADDITIONAL TWIST',X10,'U=',D7.2,X5,
63 'V=',D7.2,A1,X8,'ANGLE OF ADDITIONAL TWIST',X9,
64 'TAU=',D8.5,A1.1);
65 WRITE(XT,SOL(K),SOL(K+1),SOL(K+2))
66 END TEXT;
67
68 PROCEDURE TABLE(K);
69 VALUE K: INTEGER K;
70 BEGIN INTEGER A;
71 FORMAT F(A9,'NO',X8,'XC',X8,'YC',X6,'FORCE',A1.1),
72 S(A8,I3,X2,2D10.2,D9.3,A1);
73 WRITE(F);
74 FOR A=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
75 WRITE(S,PN(A),EXIT(A,K),EXIT(A,K+1),EXIT(A,K+2))
76 END TABLE;
77
78 PROCEDURE PRINT1;
79 BEGIN INTEGER A,B,I,K,K1;
80 LIST LIST(FOR I=(A,1,B) DO PHI(I));
81 FORMAT DATA(X8,I3,X2,3D10.2,A1),
82 F1(X8,'POINT SET DATA',A1.1,X9,'NO',X9,'X',X9,'Y',X9,'G',A1.1),
83 FORCE(X8,'POSITION OF EXTERNAL FORCE N XN=',D7.2,X4,'YN=',
84 D7.2,X4,'PSI=',D6.2,A2);

```

```

85      MONT(X8,'EXTERNAL MOMENT M',A2),
86      CALT(X8,'CALCULATION ALTERNATIVE NO',I3,A2.1),
87      F2(X8,'YIELDLEVEL YIELDRANGE',A1.1),
88      ETAK(A3,2E13.4,A1),
89      VOP(X8,'VALUES OF PHI',A2),
90      DOP(X7,4:(D6.3),A1),
91      UL(X8,'UPPER LIMIT',X8,'CORRESPONDOS TO PHI =',D6.3,A2),
92      LL(X8,'LOWER LIMIT',X8,'CORRESPONDOS TO ALPHA=',D6.3,A1),
93      MA(X20,'NMAX',A), MI(X20,'NMIN',A),
94      NA(X20,'NMAX',A), NI(X20,'NMIN',A),
95      CYC(X8,'NUMBER OF CYCLES=',I5,A2),
96      SIH(X8,'STEPS IN A HALFCYCLE=',I5,A1),
97      PER(X8,'PERIOD OF CYCLES=',I5,A1),
98      STRAIN(X8,'CAPPA=',D6.3,' AT NY CYCLES',A2,X8,'NY =',I8,A1,
99      X8,'BETA =',D8.5,A1),
100  RUBRIC:
101  WRITE(F1);
102  FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
103  WRITE(DATA,PK(K),ZE(K,1),ZE(K,2),G(K));
104  IF PSI LSS 0 THEN WRITE(MONT) ELSE WRITE(FORCE,XNL,YNE,PSI);
105  WRITE(CALT,ALT);
106  IF ALT EGL 1 OR ALT EGL 2 OR ALT EGL 20 THEN
107  BEGIN IF NYLEV NEG 0 THEN WRITE (F2);
108  FOR K=1 STEP 1 UNTIL NYLEV DO WRITE(ETAK,ETA(K),RANG(K))
109  END;
110  IF ALT EGL 1 THEN
111  BEGIN WRITE(VOP);
112  A=1;
113  B=1 IF NPHI GTR 10 THEN 10 ELSE NPHI;
114  WRITE(DOP,LISP);
115  IF NPHI GTR 10 THEN
116  BEGIN A=1; B=NPHI; M=NPHI-10; WRITE(DOP,LISP) END;
117  END;
118  IF ALT NLO 1 THEN
119  BEGIN WRITE(UL,F1);
120  IF PSI LSS 0 THEN WRITE(MA) ELSE WRITE(NA);
121  WRITE(LL,ALPHA);
122  IF PSI LSS 0 THEN WRITE(MI) ELSE WRITE(NI)
123  END;
124  IF ALT EGL 2 OR ALT EGL 20 THEN
125  BEGIN WRITE(CYC,NOCY); WRITE(SIH,NOSTIC) END;
126  IF ALT EGL 3 OR ALT EGL 30 THEN
127  BEGIN WRITE(CYC,NOLY); WRITE(PER,CNIPER);
128  WRITE(STRAIN,CAPPA,IIY,SLOPE)
129  END
130  END PRINT1;
131
132  PROCEDURE PRINT2;
133  BEGIN INTEGER K;
134  FORMAT SUS(X8,'STATE OF STRESS PHI=',D6.3,A1.1),
135  FORCE(X8,'EXTERNAL FORCE N=',D6.3,A1.1),
136  MONT(X8,'EXTERNAL MOMENT M=',D9.3,A1.1),
137  REST(X8,'CENTRE OF GRAVITY',X30,'XG=',D7.2,X3,'YG=',D7.2,A1,
138  X8,'CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS',X7,'UE=',
139  D7.2,X3,'VE=',D7.2,A1,X8,'CENTRE OF TWIST UNDER ',
140  'ELASTOPLASTIC CONDITIONS UP=',D7.2,X3,'VP=',D7.2,A1,
141  X8,'RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0=',D7.3,A2.2,
142  X9,'NO',X6,'RADIUS',X8,'FORCE',A1.1),
143  VAL(X8,I3,D12.2,D11.3,A1);
144  RUBRIC:
145  WRITE(SUS,PK);
146  IF PSI GEG 0 THEN WRITE(FORCE,NMAX) ELSE WRITE(MONT,NMAX);
147  WRITE(REST,XGE,YGE,UE,VE,SOL(1),SOL(2),SOL(3));
148  FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
149  WRITE(VAL,PK(K),EXIT(K,1),EXIT(K,2))
150  END PRINT2;
151
152  PROCEDURE PRANT3;
153  BEGIN FORMAT FIX8,'STATE AFTER STEP NO',I3,' IN CYCLE NO',I2,A1.1),
154  FORCE(X8,'EXTERNAL FORCE N=',D8.3,A1),
155  MONT(X8,'EXTERNAL MOMENT M=',D9.3,A1),
156  EMPTY(X8,A1.1),
157  DOWN(X8,'ACCORDING TO ALPHA=',D6.3,A1.1);
158  RUBRIC:
159  WRITE(F,SIEN,CYN);
160  IF PSI GEG 0 THEN WRITE(FORCE,LOAD(1)) ELSE WRITE(MONT,LOAD(1));
161  IF BOTTOM THEN WRITE(DOWN,ALPHA) ELSE WRITE(EMPTY);
162  TEXT(1);
163  TABLE(4)
164  END PRINT3;
165
166  PROCEDURE PRINT4;
167  BEGIN FORMAT FIX8,'AFTER RELAXATION',A1.1);
168  RUBRIC:
169  WRITE(F);
170  TEXT(4);
171  TABLE(1)
172  END PRINT4;

```

```

173
174 PROCEDURE PRINT5;
175 BEGIN FORMAT TEXT(X8,'THE REMAINDER OF THIS CALCULATION HAS BEEN',
176 'OMITTED BECAUSE OF SYMMETRY',A1);
177 RUBRIC;
178 WRITE(TEXT1)
179 END PRINT5;
180
181 PROCEDURE PRINT6;
182 BEGIN FORMAT TEXT(X8,'NO EXECUTION BECAUSE OF PURE TRANSLATION',A1);
183 RUBRIC;
184 WRITE(TEXT)
185 END PRINT6;
186
187 PROCEDURE PRINT7;
188 BEGIN INTEGER Z;
189 REAL A;
190 FORMAT YES(X8,D7.5,A1,X8,'STRAIN HARDENING ACCORDING TO',X3,
191 'KAPPA=(',D7.5,'*NY+1)',A1.1,X40,'NY',X8,'KAPPA',A2.1);
192 NO(X8,'STRAIN HARDENING DOES NOT OCCUR',A1);
193 TAL(X38,I4,D13.3,A1);
194 RUBRIC;
195 IF K1 EQL 0 AND K2 ENL 0 THEN WRITE(NO) ELSE
196 BEGIN WRITE(YES,K2,K1);
197 FOR Z=0 STEP 1 UNTIL 9,10 STEP 10 UNTIL 90,
198 100 STEP 100 UNTIL 1000 DO
199 BEGIN A=K1*Z+1;
200 A=IF K2 EQL 1 THEN A ELSE A**K2;
201 WRITE(TAL,Z,A)
202 END
203 END IF
204 END PRINT7;
205
206 PROCEDURE PRINT8;
207 BEGIN FORMAT LIM(X8,'LIMIT STATES AFTER CYCLE NO',I5,A1.1);
208 YF(X8,'YIELD VALUE OF EXTERNAL FORCE',X5,'NL1=',D8.3,A1);
209 YM(X8,'YIELD VALUE OF EXTERNAL MOMENT',X4,'ML1=',D9.3,A1);
210 UF(X8,'ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL FORCE',X6,'ML0=',D8.3,A2);
211 UM(X8,'ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL MOMENT',X6,'ML0=',D9.3,A2);
212 GAMMA(X8,'GAMMA=',D5.2,A2);
213 RUBRIC;
214 WRITE(LIM,CYN);
215 IF PSI LSS 0 THEN WRITE(YM,LOAD(1)) ELSE WRITE(YF,LOAD(1));
216 TEXT(1);
217 TABLE(4);
218 IF PSI LSS 0 THEN WRITE(UM,LOAD(2)) ELSE WRITE(UF,LOAD(2));
219 TEXT(4);
220 TABLE(7);
221 WRITE(GAMMA,LOAD(3))
222 END PRINT8;
223
224 PROCEDURE PRINT9;
225 BEGIN INTEGER H;
226 FORMAT STA(X8,'STATE AFTER CYCLE NO',I5,A1.1);
227 FORCE(X8,'NMAX=',D8.3,A1,X8,'NMIN=',D8.3,A1.1);
228 MOMT(X8,'MMAX=',D9.3,A1,X8,'MMIN=',D9.3,A1.1);
229 RAD(X9,'NO',X7,'NOY',X5,'KAPPA',X6,'XC',X8,'YC',X6,
230 'FORCE',A1.1);
231 TAL(X8,I3,I10,D10.3,2D10.2,D9.3,A1);
232 RUBRIC;
233 WRITE(STA,CYN);
234 IF PSI LSS 0 THEN WRITE(MOMT,LOAD(1),LOAD(2))
235 ELSE WRITE(FORCE,LOAD(1),LOAD(2));
236 TEXT(1);
237 WRITE(RAD);
238 FOR H=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
239 WRITE(TAL,PN(H),NOY(H),KAPPA(H),EXIT(H,1),EXIT(H,2),EXIT(H,3))
240 END PRINT9;
241
242 PROCEDURE TRANSFORM(K);
243 VALUE K; INTEGER K;
244 BEGIN INTEGER A;
245 FOR A=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
246 BEGIN EXIT(A,K)=SI*C(A,1)+CO*C(A,2);
247 EXIT(A,K+1)=SI*C(A,2)-CO*C(A,1);
248 EXIT(A,K+2)=G(A)*R(A)*V(A)
249 END
250 END TRANSFORM;
251
252 PROCEDURE YIELDPATTERN(FI,A);
253 VALUE FI,A;
254 INTEGER A; REAL FI;
255 BEGIN INTEGER N; REAL F,S;
256 IF A NEQ 1 THEN GO TO M1;
257 ETA(0)=BETA(0)=OMEGA(0)=0;
258 ETA(1+NYLEV)=1;
259 S=0;

```

```

260      FOR N=1 STEP 1 UNTIL NYLEV DO S=S+RANG(N);
261      OMZE=1/(1-S);
262      FOR N=1 STEP 1 UNTIL NYLEV DO BETA(N)=OMZE*RANG(N);
263      S=0;
264      FOR N=0 STEP 1 UNTIL NYLEV DO OMEGA(1+N)=S+S*BETA(N);
265      M: F=FI/OMZL;
266      FOR N=0 STEP 1 UNTIL NYLEV DO
267        BEGIN NOPRIM(N)=F*(ETA(N)+OMEGA(N));
268        RUBIS(N)=F*(ETA(N)+OMEGA(N+1));
269      END
270      END YIELDPAITER;
271
272      PROCEDURE YIELDFUNC;
273      BEGIN REAL A,B,D,E,F,INC,K,L,OLDB;
274        IF SLOPE EQL 0 THEN BEGIN K1=K2=0; GO TO PRINT END;
275        INC=(CAPPA-1)/NY;
276        IF ABS(SLOPE-INC) LSS INC/1000 THEN
277          BEGIN K1=SLOPE; K2=1; GO TO PRINT END;
278        A=LN(CAPPA);
279        L=SLOPE*NY;
280        F=0.5; OLDB=0;
281        FOR J=F WHILE ABS(D-OLDB) GTR 0.00001 DO
282          BEGIN K=L/D;
283            D=K/(1+K); L=LN(1+K);
284            IF ABS(L-D) LSS 0.00001 THEN
285              BEGIN F=IF D LSS 0.5 THEN D/2 ELSE (1+D)/2; GO TO CONT END;
286            F=(A-B*D)/(L-D);
287            IF F LEQ 0 THEN BEGIN F=B/2; GO TO CONT END;
288            OLDB=D;
289          CONT: END WHILE;
290          K1=SLOPE/F; K2=F;
291        PRINT:PRINT7
292      END YIELDFUNC;
293
294      PROCEDURE STRAINHARD;
295      BEGIN INTEGER A,K;
296      REAL B,F;
297      FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
298        BEGIN F=ABS(R(K)*V(K));
299        IF ABS(KAPPA(K)-F) LSS 0.0001 THEN
300          BEGIN NOY(K)=A+1+NOY(K);
301          IF K2 EQL 0 THEN GO TO NEXT;
302          D=K1*A+1;
303          KAPPA(K)=IF K2 EQL 1 THEN D ELSE B**K2
304        END IF;
305      NEXT: END A
306      END STRAINHARD;
307
308      REAL PROCEDURE REX(P,Q);
309      VALUE P,Q; REAL P,Q;
310      BEGIN INTEGER K;
311      REAL RR,RS,U;
312      U=0;
313      FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
314        BEGIN RAK(K)=Z(K,1)-P;
315        RB(K)=Z(K,2)-Q;
316        R2(K)=RR=RA(K)**2+RB(K)**2;
317        R(K)=RS=SQR(R2(K));
318        IF RS GTR U THEN U=RS
319      END K;
320      REX=U
321      END REX;
322
323      REAL PROCEDURE MAXANG;
324      BEGIN INTEGER I; REAL S;
325      S=T1(1);
326      FOR I=2 STEP 1 UNTIL NOP DO IF S LSS T1(I) THEN S=T1(I);
327      MAXANG=S
328      END MAXANG;
329
330      PROCEDURE FIRSTSTEP(E);
331      VALUE E; REAL E;
332      BEGIN INTEGER I,K,TE1,TE2,ZEN;
333      REAL D1,D2,H,M;
334      ARRAY GRAD(1:2);
335
336      INTEGER PROCEDURE MAXGRAD;
337      MAXGRAD=IF ABS(GRAD(1)) GTR ABS(GRAD(2)) THEN 1 ELSE 2;
338
339      INTEGER PROCEDURE STRIP(A);
340      VALUE A; INTEGER A;
341      BEGIN INTEGER K,N;
342      N=0;
343      FOR K=N WHILE R(A) GTR RUBISS(K) DO N=1+N;
344      STRIP=N
345      END STRIP;
346

```

```

347     PROCEDURE REALSTRIP;
348     BEGIN INTEGER K;
349         RMAX=RLX(B(1)+B(2));
350         KPRIM(1+NYLEV)=R0+E*RMAX;
351         R0ISS(1+NYLEV)=RMAX;
352         FOR K=0 STEP 1 UNTIL NYLEV DO
353             BEGIN KPRIM(K)=RMAX+R0PRIM(K);
354                 R0ISS(K)=RMAX+R0ISS(K)
355             END
356     END REALSTRIP;
357
358     PROCEDURE GRADIENT;
359     BEGIN INTEGER I,K;
360         REAL D,F,SA1,SA2,SB1,SB2,SC1,SC2;
361         REALSTRIP;
362         SA1=SA2=SB1=SB2=SC1=SC2=0;
363         FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
364             BEGIN K=STRIP(I);
365                 IF R(I) LSS KPRIM(K) THEN
366                     BEGIN F=IF R(I) EGL 0 THEN 0 ELSE
367                         G(I)*(UMZE-OMEGA(K)*R0/R(I));
368                         SA1=SA1+F*RA(I); SB1=SB1+F*RB(I);
369                         IF PSI GTR 0 THEN SC1=SC1+F*R2(I)
370                     END ELSE
371                     BEGIN F=G(I)*ETA(K);
372                         SA2=SA2+F*RA(I)/R(I); SB2=SB2+F*RB(I)/R(I);
373                         IF PSI GTR 0 THEN SC2=SC2+F*R(I)
374                     END
375                 END IF;
376                 IF PSI GTR 0 THEN XN=B(1) ELSE 1;
377                 GRAD(1)=-SA1/R0-SA2*(SC1/R0+SC2)/D;
378                 GRAD(2)=-SB1/R0-SB2
379             END GRADIENT;
380
381             H=H0;
382             L1: GRADIENT;
383             IF SQR(GRAD(1)**2+GRAD(2)**2) LSS EPSILON THEN GO TO L3;
384             ZEN=0;
385             L2: ZEN=1+ZEN;
386                 K=MAAGRAU; D1=GRAD(K); TE1=SIGN(D1);
387                 H=-TE1+ABS(H);
388                 B(K)=B(K)+H;
389                 IF ZEN EGL 10 THEN BEGIN H=0.95*H; GO TO L1 END;
390                 GRADIENT; D2=GRAD(K); TE2=SIGN(D2);
391                 IF TE1 EGL TE2 THEN GO TO L2;
392                 B(K)=B(K)+H*D2/(D1-D2);
393                 H=H/2;
394                 GO TO L1;
395             L3: X=B(1); Y=B(2);
396                 XE=X+Y+Y*CO;
397                 YE=Y+Y+Y*CO;
398                 M=0;
399                 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
400                     BEGIN FOR K=1,2 DO A(I,K)=C(I,K)=CAUX(I,K)=B(K);
401                         K=STRIP(I);
402                         T1(I)=V(I)=TAUX(I)=0; IF R(I) LSS KPRIV(K) THEN
403                             UMZE/R0-OMEGA(K)/R(I) ELSE ETA(K)/R(I);
404                         M=M+D1*G(I)*R2(I)
405                     END;
406                     IF PSI LSS 0 THEN BEGIN M0=M; N0=0 END ELSE
407                         BEGIN M0=0; N0=M/(XN-X) END
408                 END FIRSTSTEP;
409
410     PROCEDURE STORE;
411     BEGIN INTEGER I,K;
412         FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
413             BEGIN TAUX(I)=V(I);
414                 FOR K=1,2 DO CAUX(I,K)=C(I,K)
415             END;
416             UL=B(1); VL=B(2);
417             IF DOWN THEN TAU1=B(3) ELSE TAU2=B(3)
418         END STORE;
419
420     PROCEDURE UNSTORE;
421     BEGIN INTEGER I,K;
422         FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
423             BEGIN T1(I)=TAUX(I);
424                 FOR K=1,2 DO A(I,K)=CAUX(I,K)
425             END;
426             B(1)=UL; B(2)=VL;
427             B(3)=IF DOWN THEN TAU1 ELSE TAU2
428         END UNSTORE;
429
430     PROCEDURE MOVE;
431     BEGIN INTEGER DIR,K,KI,KK,TE1,TE2,ZEN;
432         REAL D1,D2,NORM;
433         BOOLEAN STRAIGHT;
434         ARRAY H,GRAD(1:3);
435

```

```

436 INTEGER PROCEDURE MAXGRAD;
437 BEGIN INTEGER T;
438 IF ABS(GRAD(1)) GTR ABS(GRAD(2)) THEN T=1 ELSE T=2;
439 IF ABS(GRAD(3)) GTR ABS(GRAD(T)) THEN T=3;
440 MAXGRAD=T;
441 END MAXGRAD;
442
443 PROCEDURE GRADIENT;
444 BEGIN INTEGER I,K,T;
445 REAL F,H,P,Q,R2,S,T2;
446 ARRAY U(1:3);
447 FOR K=1,2,3 DO GRAD(K)=0;
448 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
449 BEGIN R2=S=0;
450 T2=T1(I)+U(3);
451 IF ABS(T2) LSS 1E-30 THEN T2=T1(I);
452 F=T1(I)/T2;
453 FOR K=1,2 DO
454 BEGIN H=IF F EQL 1 THEN Z(I,K) ELSE U(K);
455 U(I,K)=P=H-F*(B(K)-A(I,K));
456 U(K)=Q=Z(I,K)-P;
457 R2=R2+Q*Q;
458 S=S+Q*(U(K)-P);
459 END K;
460 U(3)=R2+S;
461 K(I)=P=SQRT(R2);
462 IF P LSS 1E-30 THEN P=0 ELSE P=KAPPA(1)/P;
463 IF K(I)*U(3)*SIGN(T2) GEG 0 THEN V(I)=Q=T2 ELSE
464 BEGIN K=1+NYLEV;
465 FOR T=K-1 WHILE ABS(T2) LSS P*(ETA(T)+OMEGA(T+1)) DO K=K-1;
466 V(I)=Q=IF ABS(T2) LSS P*(LTA(K)+OMEGA(K)) THEN
467 T2=P+OMEGA(K)*SIGN(T2) ELSE P*ETA(K)*SIGN(T2) END;
468 S=Q*U(I);
469 FOR K=1,2,3 DO GRAD(K)=GRAD(K)+S*U(K)
470 END I;
471 IF PSI LSS 0 THEN GRAD(3)=GRAD(3)-M ELSE
472 BEGIN GRAD(1)=GRAD(1)-N; GRAD(3)=GRAD(3)-(XN-P(1))*N END;
473 FOR K=1,2 DO GRAD(K)=K1*GRAD(K)
474 END GRADIENT;
475
476 EXTREME=FALSE;
477 KI=IF DOWN THEN 1 ELSE -1;
478 H(1)=H(2)=H0; H(3)=HV;
479 L1: GRADIENT;
480 NORM=SQRT(GRAD(1)**2+GRAD(2)**2+GRAD(3)**2);
481 IF NORM LSS EPSILON THEN GO TO L3;
482 LEN=AA=0;
483 DIR=1;
484 L2: K=MAXGRAD; D1=GRAD(K); TE1=SIGN(D1);
485 LEN=1+LEN;
486 IF K EQL KK THEN DIR=1+DIR;
487 STRAIGHT=LEN EQL DIR;
488 KK=K;
489 IF LEN EQL 10 THEN
490 BEGIN ZEN=DIR=0; IF STRAIGHT THEN H(K)=1.25*H(K) END;
491 H(K)=-TE1*ABS(H(K));
492 B(K)=B(K)+H(K);
493 GRADIENT; D2=GRAD(K); TE2=SIGN(D2);
494 IF TE1 EQL TE2 THEN GO TO L2;
495 U(K)=B(K)+H(K)+D2/(U1-D2);
496 IF ABS(B(3)) GTR LIMANG THEN BEGIN EXTREME=TRUE; GO TO L3 END;
497 IF K EQL 3 THEN H(3)=H(K)/2 ELSE H(1)=H(2)=H(K)/2;
498 GO TO L1;
499 L3:
500 END MOVE;
501
502 REAL PROCEDURE YIELDLM;
503 BEGIN INTEGER D1,D2,TE1,TE2,X;
504 REAL D,DIA,F,F1,F2,SMALL,TAW;
505 ARRAY W(1:2);
506
507 REAL PROCEDURE MIN;
508 BEGIN INTEGER I,K;
509 REAL F,H,P,Q,R2,S,T2;
510 S=1000;
511 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
512 BEGIN R2=0;
513 T2=V(I)=T1(I)+TAW;
514 IF ABS(T2) LSS 1E-30 THEN T2=T1(I);
515 F=T1(I)/T2;
516 FOR K=1,2 DO
517 BEGIN H=IF F EQL 1 THEN Z(I,K) ELSE W(K);
518 U(I,K)=P=H-F*(W(K)-A(I,K));
519 Q=Z(I,K)-P;
520 R2=R2+Q*Q;
521 END K;
522 K(I)=P=SQRT(R2);

```

```

523       Q=KAPPA(1)/P-ABS(T2);
524       IF Q LSS 5 THEN BEGIN S=Q; X=I END
525       END IF;
526       MIN=5;
527       END MIN;
528
529       SMALL=0.00001*LIMANG;
530       W(1)=0; W(2)=V;
531       D=IF DOWN THEN RMAX ELSE NMIN;
532       TAW=TAU=-2*Q/T;
533       DTAW=TAW/10;
534       L1: F=MIN;
535       L2: D1=X; F1=F; T1=SIGN(F1);
536       IF ABS(F) LSS SMALL THEN GO TO L3;
537       TAW=TAU+T1+DTAW;
538       F=MIN;
539       D2=X; F2=F; T2=SIGN(F2);
540       IF T1 EQL T2 THEN GO TO L2;
541       IF D1 NEQ D2 THEN BEGIN DTAW=DTAW/2; GO TO L2 END;
542       TAW=TAU+T1+DTAW+F1/(F1-F2);
543       DTAW=SIGN(TAW)*ABS(DTAW)/4;
544       GO TO L1;
545       L3: YIELD=LIM+TAW+D;
546       END YIELD;
547
548       REAL PROCEDURE FAILURE;
549       BEGIN INTEGER I;
550       REAL N1,N2,SF,S1,S2,X,Y;
551
552       REAL PROCEDURE ABSUM;
553       BEGIN INTEGER K; REAL W;
554       W=0;
555       FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO W=W+ABS(G(K)*R(K)*V(K));
556       ABSUM=W;
557       END ABSUM;
558
559       BOOLEAN PROCEDURE EXHAU;
560       EXHAU=ABS(ABSUM-SF) LSS 0.0001*S;
561
562       B(1)=UP; B(2)=VP;
563       D(3)=IF DOWN THEN TAU3 ELSE TAU4;
564       SF=0;
565       FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO SF=SF+KAPPA(I)*G(I);
566       N1=N2=IF DOWN THEN -G2 ELSE G1;
567       MOVE;
568       S1=ABSUM;
569       N1=N2=SF*N1/SFS;
570       X=B(1); Y=B(2);
571       TRY: MOVE;
572       IF EXTREME THEN
573       BEGIN N1=N2=(N1+N2)/2;
574       L(1)=X; B(2)=Y; B(3)=0.8*B(3);
575       GO TO TRY;
576       END;
577       IF EXHAU THEN GO TO OK;
578       S2=ABSUM;
579       CONT: X=SF-S1; Y=SF-S2;
580       IF ABS(X-Y) LSS 1E-30 THEN GO TO OK;
581       N1=((X*N1+N2-Y*N1)/(X+Y)+(X-Y)+2*N2)/3;
582       X=B(1); Y=B(2);
583       AGAIN: MOVE;
584       IF EXTREME THEN
585       BEGIN N1=N2=(2*N2+N)/3;
586       B(1)=X; B(2)=Y; B(3)=0.8*B(3);
587       GO TO AGAIN;
588       END;
589       IF EXHAU THEN GO TO OK;
590       N1=N2; N2=N1;
591       S1=S2; S2=ABSUM;
592       GO TO CONT;
593       OK: UP=B(1); VP=B(2);
594       IF DOWN THEN
595       BEGIN TAU3=B(3); G2=-N END ELSE BEGIN TAU4=B(3); G1=N END;
596       SFS=SF;
597       FAILURE=N;
598       END FAILURE;
599
600       BEGIN PROGRAM;
601       CYN=CYPE=0;
602       PAGE=TRUE;
603       DATIN;
604       PRINT1;
605       IF ALT LUL 20 THEN GO TO ALT2;
606       IF ALT EQL 30 THEN GO TO ALT30;
607       ZERO=0.001;
608       SX=SY=SIG=LB=0;
609       FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO

```



```

010      BEGIN T=G(I);
011      S=S+T;
012      SX=SA+T*ZE(I,1);
013      SY=SY+T*ZE(I,2)
014      END;
015      UUE=XGE=AE=DX/S;
016      VUE=YGE=YE=DY/S;
017      U=IF PSI LESS 0 THEN 1.5707963 ELSE PSI/57.295780;
018      SI=SIN(U); CO=COS(U);
019      XG=UUE*XL*SI-YE*CO;
020      YG=VUE*XL*CO+YE*SI;
021      XN=XNE*SI-YNE*CO;
022      FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
023      BEGIN Z(I,1)=ZE(I,1)*SI-ZE(I,2)*CO;
024      Z(I,2)=ZE(I,1)*CO+ZE(I,2)*SI
025      END;
026      EPSILON=0.00001*S/SGRT(NOP);
027      NU=REX(XG,YG)/10;
028      FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO IG=IG+G(I)*R2(I);
029      IF PSI GEQ 0 THEN
030      BEGIN EEXN=XG;
031      IF ABS(E) LESS NU/20 THEN BEGIN PRINT6; GO TO BEGINPROGRAM END;
032      F=IG/S/L;
033      UUE=XG-F;
034      VUE=UUE*SI+V0*CO;
035      VUE=V0*SI-UU*CO
036      END;
037      RMAX=REX(UU,VU);
038      FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
039      BEGIN KAPPA(1)=1;
040      NO(1)=0;
041      IG=IG+G(1)*(IF PSI LESS 0 THEN P2(I) ELSE KA(I))
042      END;
043      MYLN=IG/RMAX;
044      T=IF PSI LESS 0 THEN ID ELSE S*(XG-JG);
045      ALT30;
046      B(1)=U0; B(2)=V0;
047      YIELDPATTERN(ZERO,1);
048      FIRSTSTEP(ZERO);
049      LIMANG=2.1*MAXANG;
050      HS=LIMANG/10;
051      MULN=U1=U2=NU*MO;
052      U=IF PSI LESS 0 THEN RMAX*EPSILON ELSE EPSILON;
053      UP=U; VP=V;
054      ALT1;
055      IF ALT EQL 1 THEN
056      BEGIN
057      FOR I=1 STEP 1 UNTIL NPHI DO
058      BEGIN PK=PHI(I);
059      B(1)=(U0+UP)/2; B(2)=(V0+VP)/2;
060      IF PK EQL 0 THEN PK=ZERO;
061      YIELDPATTERN(PK,1);
062      FIRSTSTEP(PK);
063      NMAX=NU+VU;
064      SOL(1)=XE; SOL(2)=YE; SOL(3)=RU;
065      FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
066      BEGIN EXIT(K,1)=R(K); EXIT(K,2)=G(K)*R(K)*T1(K) END;
067      PKIN12;
068      DOWN=TRUE;
069      NM=0;
070      B(1)=U0; B(2)=V0; B(3)=-NMAX/T;
071      HV=HS/10;
072      MOVE;
073      SOL(4)=UUE; SOL(5)=VUE; SOL(6)=B(3);
074      TRANSFORM(1);
075      PRINT4
076      END 1
077      END ALT 1 ;
078      ALT2;
079      IF ALT EQL 2 OR ALT EQL 20 THEN
080      BEGIN B(1)=(U0+UP)/2; B(2)=(V0+VP)/2;
081      IF FI EQL 0 THEN FI=ZERO;
082      YIELDPATTERN(FI,2);
083      FIRSTSTEP(FI);
084      NMAX=NU+MU;
085      PK=FI;
086      SOL(1)=XE; SOL(2)=YE; SOL(3)=R0;
087      FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
088      BEGIN EXIT(K,1)=R(K); EXIT(K,2)=G(K)*R(K)*T1(K) END;
089      PRINT2;
090      NMIN=ALPHA*NMAX;
091      IF NMAX GEQ MULN THEN NMAX=MULN-DN;
092      IF NMIN LEQ -MULN THEN BEGIN NMIN=-MULN+DN; ALPHA=NMIN/NMAX END;
093      HV=HS/NOSTIC;
094      STEM=(NMAX-NMIN)/NOSTIC;
095      TAU=2*MAXANG;
096      DTAU=-STEM/T;

```

```

697 START:
698 CYN=1+CYN;
699 IF CYN GTR NOCY THEN GO TO BEGINPROGRAM;
700 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
701 BEGIN T1(I)=V(I); FOR K=1,2 DO A(I,K)=C(I,K) END;
702 B(1)=U0; B(2)=V0;
703 DOWN=TRUE;
704 FOR STEN=1 STEP 1 UNTIL NOSTIC DO
705 BEGIN NME=LOAD(1)=NMAX-STEN*STEM;
706 BOTTOM=STEN EQL NOSTIC;
707 LAB1: IF STEN LEJ ENTIER(0.5*NOSTIC+0.5) THEN B(3)=STEN*DTAU;
708 IF BOTTOM THEN B(3)=IF ALPHA LSS -1 THEN -2*TAU ELSE -TAU;
709 MOVE;
710 IF EXTREME THEN
711 BEGIN NME=LOAD(1)=0.9999*N;
712 TAU=0.99*TAU;
713 GO TO LAB1
714 END;
715 SOL(1)=B(1)*SI+B(2)*CO; SOL(2)=B(2)*SI-B(1)*CO; SOL(3)=B(3);
716 TRANSFORM(4);
717 PRINT3
718 END STEN;
719 IF ABS(1+ALPHA) LSS 0.0001 THEN
720 BEGIN PRINT3; GO TO BEGINPROGRAM END;
721 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
722 BEGIN T1(I)=V(I); FOR K=1,2 DO A(I,K)=C(I,K) END;
723 B(1)=U0; B(2)=V0;
724 DOWN=JOTTOM=FALSE;
725 FOR STEN=1+NOSTIC STEP 1 UNTIL 2*NOSTIC DO
726 BEGIN NME=LOAD(1)=NMIN+(STEN-NOSTIC)*STEM;
727 LAB2: IF STEN LEJ ENTIER(1.5*NOSTIC+0.5) THEN B(3)=(NOSTIC-STEN)*DTAU;
728 IF STEN EQL 2*NOSTIC THEN B(3)=TAU;
729 MOVE;
730 IF EXTREME THEN
731 BEGIN NME=LOAD(1)=0.9999*N;
732 TAU=0.99*TAU;
733 GO TO LAB2
734 END;
735 SOL(1)=B(1)*SI+B(2)*CO; SOL(2)=B(2)*SI-B(1)*CO; SOL(3)=B(3);
736 TRANSFORM(4);
737 PRINT3
738 END STEN;
739 GO TO START
740 END ALT2;
741 ALT3:
742 IF ALT EQL 0 OR ALT EQL 30 THEN
743 BEGIN SOL(4)=XE; SOL(5)=YE; SOL(6)=MAXANG;
744 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
745 BEGIN EXIT(I,7)=XE; EXIT(I,8)=YE; EXIT(I,9)=G(I)*R(I)*T1(I) END;
746 YIELDFUNC;
747 IF F1 EQL 0 THEN F1=ZERO;
748 IF F1 NEQ ZERO THEN
749 BEGIN B(1)=UP+(U0-UP)*F1;
750 B(2)=VP+(V0-VP)*F1;
751 FIRSTSTEP(F1)
752 END;
753 UL=X; VL=Y;
754 SOL(1)=XL; SOL(2)=YL; SOL(3)=TAU=MAXANG;
755 NMAX=LOAD(1)=N0+M0;
756 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
757 BEGIN EXIT(I,1)=XL;
758 EXIT(I,2)=YL;
759 EXIT(I,3)=G(I)*R(I)*T1(I);
760 V(I)=T1(I)
761 END;
762 STRAINHARD;
763 NMIN=LOAD(2)=ALPHA*NMAX;
764 IF NMIN LSS -MULN THEN NMIN=LOAD(2)=-MULN;
765 PRINT9;
766 LOAD(1)=MYLN; LOAD(2)=MULN; LOAD(3)=MULN/MYLN;
767 RMAX=REX(U0,V0);
768 SOL(1)=U0E; SOL(2)=V0E; SOL(3)=1/RMAX;
769 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
770 BEGIN EXIT(I,4)=U0E; EXIT(I,5)=V0E; EXIT(I,6)=G(I)*R(I)/RMAX END;
771 PRINT8;
772 HV=HS;
773 IF NMAX NEQ MULN AND NMIN NEQ -MULN THEN
774 BEGIN TAU1=-2*TAU; TAU2=2*TAU; TAU3=-4*TAU; TAU4=4*TAU END;
775 IF NMAX NEQ MULN AND NMIN EQL -MULN THEN
776 BEGIN TAU1=TAU3=-4*TAU; TAU2=2*TAU; TAU4=4*TAU END;
777 IF NMAX EQL MULN AND NMIN NEQ -MULN THEN
778 BEGIN TAU1=-TAU; TAU3=-2*TAU; TAU2=TAU4=TAU END;
779 IF NMAX EQL MULN AND NMIN EQL -MULN THEN
780 BEGIN TAU1=TAU3=-2*TAU; TAU2=TAU4=2*TAU END;
781 COEF1=(NMAX+MYLN)/(MULN-MYLN);
782 COEF2=(NMIN+MYLN)/(MYLN-MULN);
783 SFS=S;

```

```

784         IF SLOPE EQL 0 THEN
785             BEGIN IF NMAX GEQ MULN THEN NMAX=MULN-DN;
786                 IF NMIN LEQ -MULN THEN NMIN=-MULN+DN
787             END;
788     BEGINCYCLE:
789         CYN=1+CYN;
790         CYP=1+CYP;
791         PRENT=CYN EQL NOCY OR CYP EQL CNIPER;
792         DOWN=TRUE;
793         IF SLOPE EQL 0 THEN GO TO DESCEND;
794         UNSTORE;
795         MYLN=YIELDLN;
796         IF NMIN LSS MYLN THEN GO TO DESCEND;
797         MULN=FAILURE;
798         NMIN=MYLN-COEF2*(MYLN-MULN);
799     DESCEND:
800         NEM=NMIN;
801     TRY1: UNSTORE;
802         MOVE;
803         IF EXTREME THEN BEGIN NEM=NMIN=0.9999*NMIN; GO TO TRY1 END;
804         STORE;
805         STRAINHARD;
806         DOWN=FALSE;
807         IF SLOPE EQL 0 THEN GO TO ASCEND;
808         UNSTORE;
809         MYLN=YIELDLN;
810         IF PRENT THEN
811             BEGIN TRANSFORM(4); MULN=FAILURE; TRANSFORM(7) END;
812         IF NMAX GTR MYLN THEN GO TO ASCEND;
813         IF NOT PRENT THEN MULN=FAILURE;
814         NMAX=MYLN+COEF1*(MULN-MYLN);
815     ASCEND:
816         NEM=NMAX;
817     TRY2: UNSTORE;
818         MOVE;
819         IF EXTREME THEN BEGIN NEM=NMAX=0.9999*NMAX; GO TO TRY2 END;
820         STORE;
821         STRAINHARD;
822         IF PRENT THEN
823             BEGIN LOAD(1)=NMAX; LOAD(2)=NMIN;
824                 SOL(1)=UL*SI+VL*CO;
825                 SOL(2)=VL*SI-UL*CO;
826                 SOL(3)=TAU2;
827                 TRANSFORM(1);
828                 PRINT9;
829                 CYP=0;
830                 IF SLOPE NEQ 0 THEN
831                     BEGIN LOAD(1)=MYLN; LOAD(2)=MULN; LOAD(3)=MULN/MYLN;
832                         SOL(1)=VUE; SOL(2)=VUE; SOL(3)=TAU;
833                         SOL(4)=UP*SI+VP*CO;
834                         SOL(5)=VP*SI-UP*CO;
835                         SOL(6)=TAU4;
836                         PRINT8
837                     END IF SLOPE
838                 END PRENT;
839                 IF CYN NEQ NOCY THEN GO TO BEGINCYCLE;
840                 DOWN=TRUE;
841                 NEM=0;
842                 UNSTORE;
843                 B(1)=00; B(2)=VU;
844                 B(3)=-NMAX/T;
845                 MOVE;
846                 SOL(4)=VUE; SOL(5)=VUE; SOL(6)=B(3);
847                 TRANSFORM(4);
848                 PRINT4
849             END ALT 3;
850             GO TO BEGINPROGRAM;
851     FIN:
852     END

```

### 6.3 Exempel på resultatredovisning

En punktgrupp med utformning och belastning enligt FIG. 44 väljs som exempel för att belysa utskrift av beräkningsresultatet för de tre beräkningsalternativen 1, 2 och 3. Gruppens samtliga punkter har vikten  $g = 1$  och för alternativen 1 och 2 en arbetslinje enligt figuren. I alternativet 3 beaktas strain hardening effekten, vilken förutsätts karakteriserad av parametervärdena  $\zeta_0 = 0.04$ ,  $\sigma_0 = 100$  och  $\kappa_0 = 1.2$ .

För de tre visade exemplen väljs en gemensam pålastningsfas, svarande mot påkänningstillståndet  $\varphi = 0.5$ . I det första exemplet undersöks ytterligare två tillstånd på vägen mot  $\varphi = 0.5$ , nämligen  $\varphi = 2.0$  respektive  $\varphi = 1.0$ . I det andra exemplet redovisas resultat från genomgång av en lastcykel där undre gränsen bestäms av  $\alpha = -1$ , d.v.s. en symmetrisk cykel. En halvcykel är här uppdelad i fyra steg. I det tredje exemplet genomförs två kompletta lastcykler före avlastning. Även här är förloppet symmetriskt.

#### 6.3.1 Beräkning enligt alternativ 1

Utskrift av page 1 fås genom anrop av proceduren PRINT 1, vilken återger de givna ingångsvärdena. Först ges i tabellform en beskrivning av den aktuella punktgruppen, omfattande för varje punkt: punktnummer (NO), punktens koordinater (X,Y) samt punktens vikt (G). Sedan beskrivs läget av verkningslinjen för den yttre kraften genom koordinaterna (XN, YN) till en punkt på linjen samt genom vinkeln PSI (i grader) mellan x-axelns positiva riktning och verkningslinjen.

Följande rad upplyser om önskat beräkningsalternativ. I tabellform ges sedan en beskrivning av den tillämpade generaliserade arbetslinjen, då denna avviker från den idealelasto-plastiska. Tabellen omfattar två kolumner, av vilka den första YIELDLEVEL innehåller flytnivåerna utöver den högsta och den andra YIELD-RANGE anger motsvarande relativa flyttöjningar. Utskriften avslutas med en uppräkning av de  $\varphi$ -värden, för vilka beräkningen skall genomföras.

Utskrift av page 2 (samt 4 och 6) erhålles genom anrop av PRINT 2. I denna anges först till vilket påkänningstillstånd (PHI) pålastning har skett samt motsvarande värde för den yttre lasten (N alternativt M). Sedan ges koordinaterna för tre för konstruktionen karakteristiska punkter, nämligen den viktade tyngdpunkten (XG, YG), vridmedelpunkten hörande till renodlat elastiskt beteende (UE, VE) samt den mot påkänningstillståndet PHI svarande vridmedelpunkten (UP, VP). I den följande raden ges storleken av radien (RO) i den gränscirkel, som har centrum i (UP, VP) och som delar punktgruppen i en elastisk (eventuellt blandad) och en plastisk zon. Slutligen fås i tabellform för varje punkt punktnummer (NO), punktens radie (RADIUS) med avseende på (UP, VP) samt punktkraftens storlek, dividerad med  $P_0$  (FORCE).

Utskrift av page 3 (samt 5 och 7) fås, då PRINT 4 aktiveras. Här beskrivs residualkrafttillståndet, sedan den yttre kraften avlastats till noll. Först ges de tre deformationsparametrar, som bestämmer tillskottsdeformationen, nämligen vridmedelpunkten (U, V) för rotationen jämte rotationens storlek (TAU). Den inre kraftbilden beskrivs slutligen i tabell, omfattande för varje punkt: punktnummer (NO), punktens momentana vridcentrum (XC, YC) samt punktkraftens storlek, dividerad med  $P_0$  (FORCE).

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO. 1053

PAGE 1

## POINT SET DATA

NO	X	Y	G
11	-2.00	-4.00	1.00
13	2.00	-4.00	1.00
22	0.00	-2.00	1.00
31	-2.00	0.00	1.00
33	2.00	0.00	1.00
42	0.00	2.00	1.00
51	-2.00	4.00	1.00
53	2.00	4.00	1.00
62	0.00	6.00	1.00

POSITION OF EXTERNAL FORCE : XN= 5.00 YN= 0.00 PSI= 75.00

CALCULATION ALTERNATIVE NO 1

YIELDLEVEL YIELDRANGE

.5000	.3333
.5633	.0606
.6667	.0606
.7500	.0606
.8333	.0606
.9167	.0606

VALUES OF PHI  
2.000 1.000 .500

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 1053

PAGE 2

STATE OF STRESS PHI= 2.000

EXTERNAL FORCE N= 2.467

CENTRE OF GRAVITY	XG= 0.00	YG= .67
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS	UE= -2.75	VE= 1.40
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTOPLASTIC CONDITIONS	UP= -2.40	VP= 1.68

RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0= 14.377

NO	RADIUS	FORCE
11	5.70	.500
13	7.19	.500
22	4.40	.500
31	1.73	.331
33	4.71	.500
42	2.43	.464
51	2.35	.450
53	4.98	.500
62	4.94	.500

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 1053

PAGE 3

AFTER RELAXATION

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.75 V= 1.40  
TAU= -.09639

NO	XC	YC	FORCE
11	-6.23	-1.44	-.043
13	-3.63	.68	-.197
22	-.50	3.23	.091
31	-2.06	1.97	.186
33	1.01	4.46	.044
42	-2.06	1.97	.195
51	-2.06	1.97	.193
53	5.71	8.30	.023
62	4.51	7.32	.022

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 1053

PAGE 4

STATE OF STRESS PHI= 1.000

EXTERNAL FORCE N= 3.664

CENTRE OF GRAVITY	XG= 0.00	YG= .67
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS	UE= -2.75	VE= 1.40
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTOPLASTIC CONDITIONS	UP= -2.59	VP= 1.31

RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0= 7.017

NO	RADIUS	FORCE
11	5.34	.750
13	7.02	1.000
22	4.20	.583
31	1.44	.500
33	4.77	.667
42	2.68	.500
51	2.75	.500
53	5.32	.750
62	5.36	.750

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 1053

PAGE 5

AFTER RELAXATION

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.75 V= 1.40  
TAU= -.14318

NO	XC	YC	FORCE
11	-10.72	5.97	-.037
13	-38.55	20.78	-.031
22	-7.86	4.33	-.044
31	-2.47	1.25	.273
33	-9.29	5.16	-.042
42	-2.06	1.01	.100
51	-1.99	.97	.117
53	-13.41	7.52	-.033
62	-9.90	5.50	-.031

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 1053

PAGE 6

STATE OF STRESS PHI= .500

EXTERNAL FORCE N= 4.758

CENTRE OF GRAVITY	XG=	0.00	YG=	.67
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS	UE=	-2.75	VE=	1.40
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTOPLASTIC CONDITIONS	UP=	-2.50	VP=	1.54

RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0= 3.567

NO	RADIUS	FORCE
11	5.56	1.000
13	7.13	1.000
22	4.33	1.000
31	1.62	.500
33	4.75	1.000
42	2.54	.709
51	2.51	.688
53	5.13	1.000
62	5.11	1.000



POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 1053

PAGE 7

AFTER RELAXATION

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.75      V= 1.40  
TAU= -.18596

NO	XC	YC	FORCE
11	-10.10	-2.57	-.050
13	-3.51	.99	-.340
22	-1.47	2.09	.196
31	-2.12	1.74	.215
33	-.81	2.56	.089
42	-2.00	1.80	.187
51	-1.97	1.82	.191
53	2.61	4.30	.006
62	2.34	4.15	.028

### 6.3.2 Beräkning enligt alternativ 2

Utskriften av page 1, vilken innehåller datakvitto och ombesörjs av PRINT 1, följer till och med tabellen för beskrivning den generaliserade arbetslinjen uppläggningsen enligt beräkningsalternativ 1.

Därpå följer först de båda talen (PHI) och (ALPHA), vilka bestämmer lastcykelns övre och undre gräns, sedan antalet cykler (i detta beräkningsalternativ i allmänhet lika med 1) och slutligen antalet ekvidistanta laststeg i en halvcykel.

Page 2 är till sin uppläggning identisk med motsvarande sida i beräkningsalternativ 1. Här ges tillståndet omedelbart före lastcykelns inledning.

Utskrift av page 3 (samt 4, 5 och 6) fås genom aktivering av PRINT 3. Här ges krafttillståndet inom konstruktionen efter avslutning av ett laststeg. Utskriften omfattar information om aktuellt steg och cykel, gällande värde för den yttre kraften (N), värden för deformationsparametrarna U, V och TAU jämte en beskrivning av den inre kraftbilden i tabell med för varje punkt punktnummer (NO), punktens momentana vridcentrum (XC, YC) samt punktkraftens storlek, dividerad med  $P_0$  (FORCE).

Efter sista steget i en halvcykel kompletteras de ovan angivna upplysningarna med information om vilket värde på ALPHA, som har tillämpats vid beräkning av undre cykelgränsen, se page 6. Detta kan vara ett annat värde än det, som anges på page 1, beroende på den justering av undre cykelgränsen, som äger rum vid övertramp av den undre brottgränsen.

Utskrift av page 7 erhålles vid anrop av PRINT 5. Denna utskrift är aktuell endast för symmetriska cykler.

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 2054

PAGE 1

## POINT SET DATA

NO	X	Y	G
11	-2.00	-4.00	1.00
13	2.00	-4.00	1.00
22	0.00	-2.00	1.00
31	-2.00	0.00	1.00
33	2.00	0.00	1.00
42	0.00	2.00	1.00
51	-2.00	4.00	1.00
53	2.00	4.00	1.00
62	0.00	6.00	1.00

POSITION OF EXTERNAL FORCE N XN= 5.00 YN= 0.00 PSI= 75.00

CALCULATION ALTERNATIVE NO 20

YIELDLEVEL YIELDRANGE

.5000	.3333
.5833	.0606
.6667	.0606
.7500	.0606
.8333	.0606
.9167	.0606

UPPER LIMIT NMAX CORRESPONDS TO PHI = .500  
LOWER LIMIT NMIN CORRESPONDS TO ALPHA=-1.000

NUMBER OF CYCLES= 1  
STEPS IN A HALFCYCLE= 4

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 2054

PAGE 2

STATE OF STRESS PHI= .500

EXTERNAL FORCE N= 4.758

CENTRE OF GRAVITY	XG= 0.00	YG= .67
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS	UE= -2.75	VE= 1.40
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTOPLASTIC CONDITIONS	UP= -2.50	VP= 1.54

RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0= 3.567

NO	RADIUS	FORCE
11	5.56	1.000
13	7.13	1.000
22	4.33	1.000
31	1.62	.500
33	4.75	1.000
42	2.54	.709
51	2.51	.688
53	5.13	1.000
62	5.11	1.000

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 2054

PAGE 3

STATE AFTER STEP NO 1 IN CYCLE NO 1

EXTERNAL FORCE N= 2.379

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.75 V= 1.40  
TAU= -.09298

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.23	1.68	.494
13	-2.01	1.80	.333
22	-2.33	1.63	.595
31	-2.39	1.59	.355
33	-2.30	1.64	.541
42	-2.37	1.60	.448
51	-2.37	1.61	.438
53	-2.27	1.66	.497
62	-2.27	1.66	.502

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 2054

PAGE 4

STATE AFTER STEP NO 2 IN CYCLE NO 1

EXTERNAL FORCE N= 0.000

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.75 V= 1.40  
TAU= -.18596

NO	XC	YC	FORCE
11	-10.10	-2.57	-.050
13	-3.51	.99	-.340
22	-1.47	2.09	.196
31	-2.12	1.74	.215
33	-.61	2.56	.089
42	-2.00	1.80	.187
51	-1.97	1.82	.191
53	2.61	4.30	.006
62	2.34	4.15	.028

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 2054

PAGE 5

STATE AFTER STEP NO 3 IN CYCLE NO 1

EXTERNAL FORCE ME -2.379

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.56 V= 1.52  
TAU= -.37390

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.62	1.50	-.500
13	-2.60	1.50	-.593
22	-2.66	1.48	-.500
31	-2.87	1.41	-.107
33	-2.84	1.49	-.500
42	-2.75	1.45	-.266
51	-2.73	1.46	-.265
53	-2.63	1.49	-.500
62	-2.63	1.49	-.500

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 2054

PAGE 6

STATE AFTER STEP NO 4 IN CYCLE NO 1

EXTERNAL FORCE ME -4.758  
ACCORDING TO ALPHA=-1.000

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.50 V= 1.54  
TAU=-1.04746

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.50	1.54	-1.000
13	-2.50	1.54	-1.000
22	-2.50	1.54	-1.000
31	-2.50	1.54	-.500
33	-2.50	1.54	-1.000
42	-2.50	1.54	-.705
51	-2.50	1.54	-.692
53	-2.50	1.54	-1.000
62	-2.50	1.54	-1.000

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 2054

PAGE 7

THE REMAINDER OF THIS CALCULATION HAS BEEN OMITTED BECAUSE OF SYMMETRY

### 6.3.3 Beräkning enligt alternativ 3

Utskriften av page 1, vilken innehåller datakvitto och ombesörjs av PRINT 1, följer till och med upplysningen om värdena för PHI och ALPHA uppläggningsen enligt beräkningsalternativen 1 och 2. Här utelämnas dock alltid den tabell vilken beskriver den generaliserade arbetslinjen, eftersom denna ej är aktuell för alternativ 3.

I de följande två raderna anges dels hur många lastcykler beräkningen skall omfatta och dels antalet cykler i en redovisningsperiod. Slutligen anges de tre parametrar, som bestämmer strain hardening förloppet

$\kappa_0$  (= KAPPA)

$\sigma_0$  (= NY)

$\zeta_0$  (= BETA)

Page 2, vilken utskrivs vid anrop av PRINT 7, ger det funktionella sambandet mellan antalet flyttillfällen (NY) vid en punkt och aktuell relativ flytkraft (KAPPA) vid samma punkt. Sambandet redovisas även i tabellform.

Utskriften av page 3 (samt 5 och 7) erhålles vid anrop av PRINT 9. Denna inleds med ett angivande av avsett cykelnummer. Cykelnummer 0 svarar därvid mot tillståndet omedelbart efter första pålastning. Aktuella cykelgränser dividerade med  $P_0$  anges å de följande två raderna samt därefter aktuella deformationsparametrar (U, V och TAU).

Utskriften avslutas med en redovisning av det inre tillståndet vid övre cykelgränsen. Redovisningen ges i form av en tabell omfattande för varje punkt: punktnummer (NO), antalet flyttillfällen vid punkten (NOY), aktuellt värde för den relativa flytkraftens storlek (KAPPA), beräknat enligt sambandet å page 2, punktens momentana vridcentrum (XC, YC) och slutligen punktkraftens storlek, dividerad med  $P_0$  (FORCE).

Utskriften av page 4 (samt 6 och 8) erhålles genom aktivering av PRINT 8. Här anges först avsett cykelnummer (med nr 2 avses

därvid förhållandena omedelbart efter cykel 2). Därefter redovisas först det aktuella tillståndet vid konstruktionens övre flytgräns (NLL) och sedan det aktuella tillståndet vid dess övre brottgräns (NLO). För varje sådant tillstånd anges utöver storleken av den yttre kraften dividerad med  $P_0$  de aktuella deformationsparametrarna (U, V och TAU) samt i tabellform den inre kraftbilden. Tabellerna omfattar därvid för varje punkt: punktnummer (NO), punktens momentana vridcentrum (XC, YC) och punktkraftens storlek, dividerad med  $P_0$  (FORCE).

Utskriften avslutas med förhållandet (GAMMA) mellan storleken på den övre brottgränsen och den övre flytgränsen.

För utskriften i page 9, vilken avser tillståndet efter relaxation, hänvisas till beskrivning av motsvarande utskrift under beräkningsalternativ 1.

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 1

POINT SET DATA

NO	X	Y	G
11	-2.00	-4.00	1.00
13	2.00	-4.00	1.00
22	0.00	-2.00	1.00
31	-2.00	0.00	1.00
33	2.00	0.00	1.00
42	0.00	2.00	1.00
51	-2.00	4.00	1.00
53	2.00	4.00	1.00
62	0.00	6.00	1.00

POSITION OF EXTERNAL FORCE N XN= 5.00 YN= 0.00 PSI= 75.00

CALCULATION ALTERNATIVE NO 30

UPPER LIMIT NMAX CORRESPONDS TO PHI = .500  
LOWER LIMIT NMIN CORRESPONDS TO ALPHA=-1.000

NUMBER OF CYCLES= 2  
PERIOD OF CYCLES= 1

KAPPA= 1.200 AT NY CYCLES  
NY = 100  
BETA = .04000

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 2

STRAIN HARDENING ACCORDING TO KAPPA=(1.01596\*NY+1) .03937

NY	KAPPA
0	1.000
1	1.028
2	1.045
3	1.057
4	1.066
5	1.074
6	1.080
7	1.086
8	1.091
9	1.096
10	1.100
20	1.128
30	1.145
40	1.158
50	1.168
60	1.176
70	1.183
80	1.190
90	1.195
100	1.200
200	1.233
300	1.253
400	1.267
500	1.278
600	1.287
700	1.295
800	1.302
900	1.308
1000	1.313



POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 3

STATE AFTER CYCLE NO 0

NMAX= 4.751  
NMIN= -4.751

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.50 V= 1.58  
TAU= .27889

NO	NOY	KAPPA	XC	YC	FORCE
11	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
13	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
22	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
31	0	1.000	-2.50	1.58	.463
33	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
42	0	1.000	-2.50	1.58	.708
51	0	1.000	-2.50	1.58	.689
53	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
62	1	1.028	-2.50	1.58	1.000

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 4

LIMIT STATES AFTER CYCLE NO 0

YIELD VALUE OF EXTERNAL FORCE  
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

NL1= 3.558  
U= -2.75 V= 1.40  
TAU= .13906

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.75	1.40	.758
13	-2.75	1.40	1.000
22	-2.75	1.40	.608
31	-2.75	1.40	.221
33	-2.75	1.40	.688
42	-2.75	1.40	.391
51	-2.75	1.40	.376
53	-2.75	1.40	.752
62	-2.75	1.40	.745

ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL FORCE  
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

NL0= 5.062  
U= -2.37 V= 1.48  
TAU= .65524

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.37	1.40	1.000
13	-2.37	1.48	1.000
22	-2.37	1.48	1.000
31	-2.37	1.40	1.000
33	-2.37	1.48	1.000
42	-2.37	1.48	1.000
51	-2.37	1.48	1.000
53	-2.37	1.40	1.000
62	-2.37	1.48	1.000

GAMMA= 1.42

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 5

STATE AFTER CYCLE NO 1

NMAX= 4.751  
NMIN= -4.751

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.60 V= 1.53  
TAU= .43834

NO	NOY	KAPPA	XC	YC	FORCE
11	3	1.057	-2.01	1.55	1.045
13	3	1.057	-2.01	1.54	1.045
22	2	1.045	-2.00	1.58	.892
31	0	1.000	-2.58	1.59	.301
33	3	1.057	-2.00	1.56	1.045
42	0	1.000	-2.58	1.59	.508
51	0	1.000	-2.58	1.59	.559
53	3	1.057	-2.01	1.55	1.045
62	3	1.057	-2.01	1.55	1.045

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 6

LIMIT STATES AFTER CYCLE NO 1

YIELD VALUE OF EXTERNAL FORCE  
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

NL1= 2.621  
U= -2.75 V= 1.40  
TAU= .28810

NO	XC	YC	FORCE
11	-3.05	1.22	.545
13	-2.92	1.30	1.045
22	-3.44	1.02	.236
31	-3.12	1.25	.125
33	-3.20	1.15	.399
42	-3.12	1.25	.241
51	-3.12	1.25	.224
53	-3.10	1.20	.531
62	-3.10	1.20	.515

ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL FORCE NL0= 5.249  
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.43  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .87274

V= 1.47

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.39	1.40	1.045
13	-2.40	1.40	1.045
22	-2.37	1.40	1.045
31	-2.37	1.47	.999
33	-2.38	1.40	1.045
42	-2.37	1.47	1.000
51	-2.37	1.47	1.000
53	-2.39	1.40	1.045
62	-2.39	1.40	1.045

GAMMA= 2.00

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 7

STATE AFTER CYCLE NO 2

NMAX= 4.751  
NMIN= -4.751

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.65 V= 1.55  
TAU= .41014

NO	NOY	KAPPA	XC	YC	FORCE
11	5	1.074	-2.06	1.56	1.066
13	5	1.074	-2.05	1.55	1.066
22	2	1.045	-2.05	1.60	.856
31	0	1.000	-2.62	1.61	.371
33	3	1.057	-2.05	1.58	1.005
42	0	1.000	-2.62	1.61	.569
51	0	1.000	-2.62	1.61	.531
53	5	1.074	-2.65	1.57	1.066
62	5	1.074	-2.05	1.57	1.066

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 8

LIMIT STATES AFTER CYCLE NO 2

YIELD VALUE OF EXTERNAL FORCE  
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

NL1= 2.800  
U= -2.75 V= 1.40  
TAU= .29507

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.94	1.17	.553
13	-2.86	1.27	1.066
22	-3.03	1.11	.332
31	-2.88	1.24	.152
33	-2.90	1.14	.457
42	-2.88	1.24	.298
51	-2.88	1.24	.289
53	-2.97	1.14	.540
62	-2.98	1.10	.524

ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL FORCE  
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

NL0= 5.321  
U= -2.45 V= 1.48  
TAU= .84959

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.40	1.40	1.066
13	-2.41	1.47	1.066
22	-2.38	1.47	1.045
31	-2.38	1.40	.999
33	-2.39	1.47	1.057
42	-2.38	1.48	1.000
51	-2.38	1.40	1.000
53	-2.39	1.40	1.066
62	-2.39	1.40	1.066

GAMMA= 1.90

POINT SET STRUCTURE  
GENERAL PROGRAM  
CALCULATION NO 3055

PAGE 9

AFTER RELAXATION

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST  
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST

U= -2.75  
TAU= -.18566

V= 1.40

NO	XC	YC	FORCE
11	1.02	8.06	.057
13	-3.10	.82	-.271
22	.54	7.85	.058
31	-1.81	2.92	.086
33	-1.68	3.35	.094
42	-1.81	2.92	.060
51	-1.81	2.92	.032
53	-1.65	3.37	.065
62	-1.81	3.09	.072

## 7. SLUTORD

I PSS och dess fortsättning i föreliggande skrift presenteras en metod för beräkning av elasto-plastiska tillståndsförändringar inom en punktgrupp till följd av intensitetsväxlingar för den yttre lasten. Denna kan därvid vara en kraft i ett fixerat läge eller ett moment med sin vektor vinkelrät mot gruppens plan. Den framlagda metoden har kompletterats med ett datamaskinprogram, med vilket olika typer av punktkonstruktioner funktionellt studerats - dels med avseende på residualkrafttillståndet efter avlastning dels för en detaljerad analys av kraftspelet under en genomgång av en enkel lastcykel och slutligen dels med hänsyn till de förändringar i konstruktionens egenskaper, som en serie konsekutiva lastcykler åstadkommer, då effekten av strain hardening beaktas.

För residualkrafttillståndet efter avlastning kan därvid observeras att detta, som kan vara betydande vid relaxation från den första pålastningen, kan avsevärt reduceras eller helt avlägsnas genom en serie lastcykler med upprepade flytning vid cykelgränserna.

Genom redovisat studium av enkel lastcykel belyses klart kraftvariationen för punktgruppens enskilda punkter under cykelgenomgången, såväl då den enskilda punkten har idealelasto-plastiska egenskaper som då dess egenskaper beskrivs av mera generaliserade arbetslinjer.

Studiet av punktgruppens beteende under upprepade lastväxlingar med hänsyn tagen till strain hardening visar bl a Bauschingereffekten efter varje stegring av cykelgränsen samt en för denna effekt avklingande tendens vid upprepning. Samtidigt noteras att avståndet mellan konstruktionens flyt- och brottgräns successivt minskas, innebärande en ökad sprödhet för konstruktionen, vid upprepade lastväxlingar. Detta resulterar i - vid lastväxlingar mellan fixerade cykelgränser i det elasto-plastiska området - att konstruktionens beteende så småningom antar en helt elastisk karaktär. Vidare belyser studiet förändringen av fördelningen av den kraftupptagande förmågan mellan punktgruppens plastiska och elastiska zoner under en serie lastväxlingar vid fixerade cykelgränser, in-

nebärande en successiv överflyttning av lasten från den elastiska till den plastiska zonen. Samtidigt härmed ökar utbredningen av den elastiska zonen på den plastiska zonens bekostnad.

Det presenterade datamaskinprogrammet torde primärt tjäna som hjälpmedel vid fortsatt teoretisk eller teoretisk-experimentell forskning inom området för punktkonstruktioner, utsatta för växlande last. I andra hand bör programmet kunna utnyttjas vid en praktisk dimensionering av punktkonstruktioner. För att öka den framlagda metodens - och därmed programmets - allmänna användbarhet har nämligen genomgående eftersträfvats en obundenhet vid absoluta materialdata. Hållfasthetsläran och materialläran får sedan i varje enskilt fall ge de materialdata, som erfordras, då metoden skall tillämpas vid konkret dimensionering. Då metoden skall utnyttjas i samband med fenomenologiska studier av punktkonstruktioner är sådana uppgifter däremot ordinärt ej nödvändiga.

Några exempel på beräkningsmetodens användning ges i det följande.

1. Dimensionering av nit- och skruvförband påverkade av periodiskt varierande last med aktualitet då dessa uppträder som konstruktionselement i t ex maskiner, varvid förbanden utsätts för inverkan av tröghetskrafter från svängande eller roterande massor. Ett studium av kraftspelets variation inom förbandet under en svängningsperiod torde här ge värdefulla upplysningar om förbandets utmattningskänslighet.

2. Val av geometri för samt dimensionering av nit- eller skruvförband i byggnader i jordbävningsområden. Förbanden måste därvid primärt utformas på ett sådant sätt, att de medger största möjliga energiupptagning före brott.

3. Gränslastteoretisk dimensionering av statiskt obestämda balkar och ramar med punktkonstruktioner i flytsnitt. Då gränslastmetoder tillämpas vid bärverksdimensionering, måste, vid bestämning av elementarmekanismernas gränslastmoment, hänsyn tagas till läget av enskild mekanisms verkliga rotationscentrum. Då en flytled därvid utbildas i t ex en infästning, utformad som en punktkonstruktion, sammanfaller rotationscentrum i allmänhet icke med den

teoretiska knutpunkten. Förhållandet kan ytterligare kompliceras av att rotationscentrum ändrar läge vid lastupprepning. För en noggrann analys av sådana problem bör framlagd beräkningsmetod kunna ge värdefull information.

4. Funktionsanalys av friktionsförbands verkningssätt. Använd som komplement till experimentella undersökningar kan den framlagda metoden medge fördjupade studier av friktionsförbands verkningssätt. En sådan förbandstyp karakteriseras av att det kraftöverförande mediet utgörs av ett antal till sin utbredning okända ytor och icke, som beräkningstekniskt ordinärt förutsätts, av en samling diskreta punkter, sammanfallande med de tillhörande punktidealiserade skruvar, som åstadkommer förbandets klämkraft. Troligen är en sådan beräkningsteknisk förutsättning realistisk för de punkter inom förbandet, för vilka flytning äger rum vid den högsta flytnivån. Däremot torde förutsättningen ej vara tillfredsställande uppfylld för förbandets övriga punkter.

Föreliggande arbete har begränsats till ett studium av inverkan från variationer av den yttre kraftens storlek vid fixerad verkningsslinje. En närliggande generalisering utgör den framlagda metoden utbyggd till att omfatta även sådana fall, där den elasto-plastiska tillståndsvariationen förorsakas av laster, som antingen utför translation eller roterar. En sådan utvidgning torde principiellt kunna genomföras enligt samma linjer, som de här presenterade, d.v.s. via ett studium av variationer i systemets inre arbete. I själva verket fordras härför endast smärre ändringar i det framlagda programmet. Genom kombination av tre kraftvariationsformer kan sedan effekten av helt godtyckligt valda förändringar för den yttre lasten studeras.

## REFERENSER

Bibliography on Bolted and Riveted Joints, 1967, (ASCE.) Manuals and Reports on Engineering Practice, 48, New York.

Bufler, H, 1968, Theorie diskontinuierlicher und kontinuierlicher Verbindungen. (Springer-Verlag.) Ingenieur-Archiv, Band XXXVII häfte 3, Berlin/Heidelberg/New York.

De Jonge, A.E.R, 1945, Riveted Joints, A Critical Review of the Literature Covering Their Development. (ASME.) New York.

Gullander, P, 1907, Bidrag till teorien för nitförbindningar. Teknisk tidskrift, väg- och vattenbyggnadskonst, 21 sept., Stockholm.

Plem, E, 1968, Design of Point Set Structures. (Statens råd för byggnadsforskning.) Rapport 21, Stockholm.



## FIGURFÖRTECKNING

- FIG. 1 Påkänningsfördelning inom en punktgrupp i det ideal-elasto-plastiska tillståndet.
- FIG. 2 Geometriska storheter för en punkt i en punktkonstruktion i samband med uppställandet av jämviktsekvationerna.
- FIG. 3 Sammansättning av rotationen  $\theta_1'$  under pålastningsfasen och rotationen  $\tau'$  under avlastningsfasen till resulterande rotation  $\theta_2'$  för en punkt i en punktkonstruktion.
- FIG. 4 Beräknat residualtillstånd efter avlastning av en trepunktskonstruktion efter pålastning till påkännings-tillståndet  $\varphi = 0.8$ .
- FIG. 5 Specialbehandling av punkt för vilken  $\theta_2 = 0$ .
- FIG. 6 Punktkraft och punktkraftkomposanter vid en punkt sedan flytning har inträffat.
- FIG. 7 Fundamentala geometriska storheter för en punkt i en punktkonstruktion i samband med uppställandet av de tre jämviktsekvationerna.
- FIG. 8 Den principiella variationen hos en punktkraft  $P$  till följd av avlastning av den yttre kraften  $N_\varphi$ .
- FIG. 9 En punktgrupp med sex punkter med lika vikt åverkad av växlande moment jämte sambandet mellan punktkrafternas storlek och det yttre momentet.
- FIG. 10 Punktkonstruktion belastad med excentrisk kraft  $N:P_0 = 5.958$  svarande mot påkänningsstillståndet  $\varphi = 0$ . Delfiguren till vänster visar punktkrafterna hörande till maximal yttre kraft. Delfiguren till höger visar residualkrafttillståndet efter avlastning.

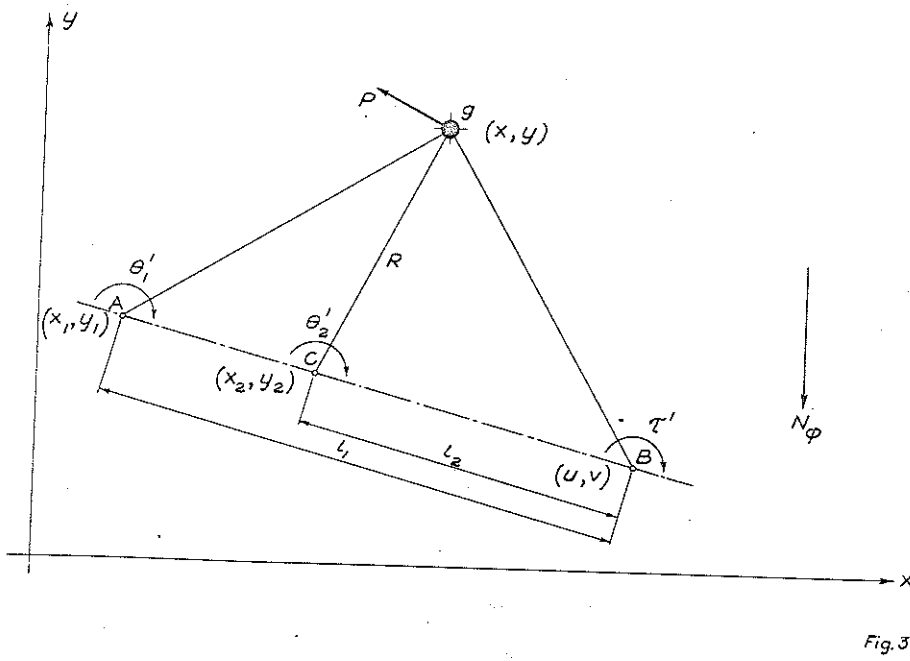
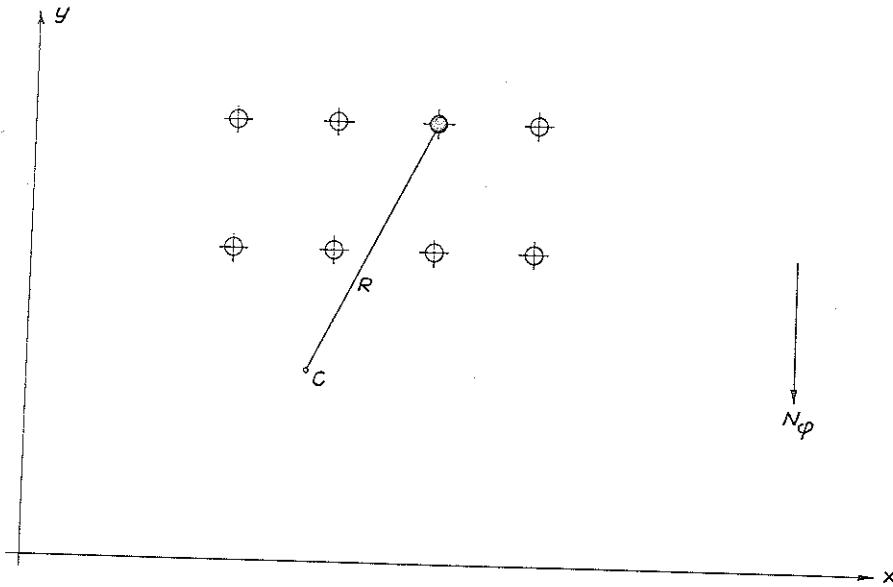
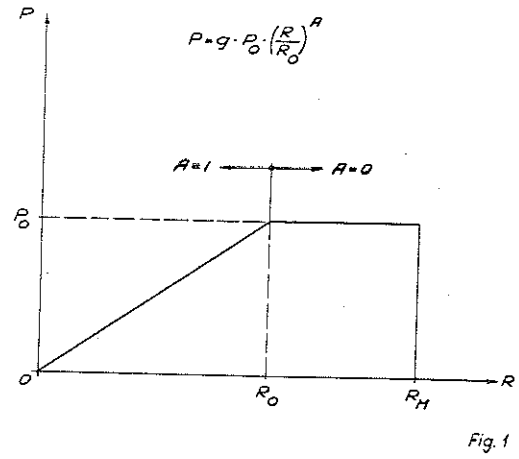
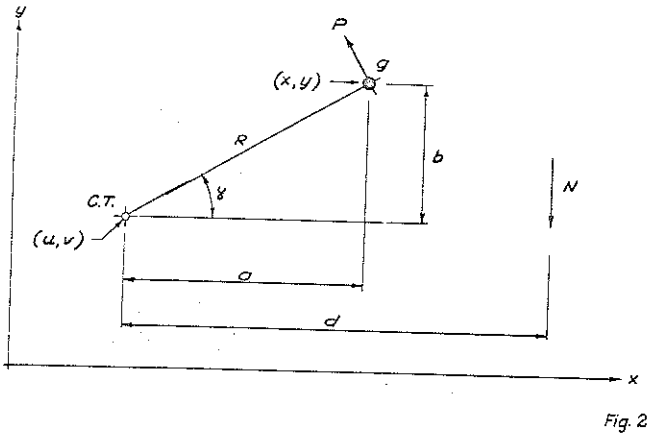
- FIG. 11. Punktkrafterna som funktion av påkänningstillståndet  $\varphi$  för det i figuren visade läget för den yttre kraften efter pålastning (övre kurvor) samt tillhörande residualkrafter efter avlastning från mot  $\varphi$  svarande yttre last (undre kurvor). Delfigurerna till höger visar tillstånden före och efter avlastning då  $\varphi = 0.2$ .
- FIG. 12 Punktkrafter vid uppvärmning och residualkrafter efter avsvälning. Med w markerade krafter svarar mot det varma tillståndet med c markerade mot det kalla. De senare har ritats i fem gånger större skala än de förra.
- FIG. 13 Schematisk återgivning av en lastcykel jämte teckenvariation för komposanterna till det inre arbetets gradient.
- FIG. 14 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk cykel med cykelgränser bestämda av det initialtillstånd som svarar mot  $\varphi = 0.4$ .
- FIG. 15 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk cykel med cykelgränser svarande mot konstruktionens brottgräns.
- FIG. 16 Punktkonstruktion karakteriserad av att punkterna 1 och 3 har vikten  $g = 1$  och punkt 2 vikten  $g = 2$ . Figuren visar kraftvariationen vid konstruktionens punkter under en symmetrisk cykel med cykelgränser svarande mot initialtillståndet  $\varphi = 0.4$ .
- FIG. 17 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk lastcykel med cykelgränser bestämda av det initialtillstånd som svarar mot  $\varphi = 0.3$ .
- FIG. 18 Figuren visar kraftvariationen vid en punktkonstruktions punkter under en symmetrisk lastcykel med sådana cykelgränser att beteendet i dominerande grad är elastiskt.
- FIG. 19 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk cykel då den yttre lasten är ett moment och initialtillståndet svarar mot  $\varphi = 0.3$ .

- FIG. 20. Punktkraftvariation under osymmetrisk lastcykel karakteriserad av att övre cykelgränsen är numeriskt större än undre cykelgränsen.
- FIG. 21. Punktkraftvariation under osymmetrisk lastcykel karakteriserad av att övre cykelgränsen är numeriskt mindre än undre cykelgränsen.
- FIG. 22. Två lika punktgrupper med samma last. Den inre kraftbilden är olika på grund av att punktgrupperna har olika förhistoria (vänstra delfiguren: tillstånd efter första pålastning, högra delfiguren: tillstånd efter ytterligare en osymmetrisk lastcykel).
- FIG. 23. Krökt arbetslinje för en punkt approximerad med idealiserad arbetslinje uppbyggd av elastiska delar med konstant elasticitetskoefficient samt av flytnivåer av varierande längd.
- FIG. 24. a. Idealiserad arbetslinje för en punkt.  
b. Fördelning av flytband och elastiska band inom en punktgrupp.  
c. Samma som b men i dimensionslös form.
- FIG. 25. Punktkraftvariation som funktion av yttre moment hos samma punktgrupp som visas i FIG. 9 men här med två flytnivåer vid de enskilda punkterna (delfigur a) samt motsvarande samband mellan yttre moment  $M$  och rotationsdeformation  $\theta$  (delfigur b).
- FIG. 26. Diagrammen visar punktkrafterna som funktion av påkänningstillståndet  $\varphi$  för den i enlighet med FIG. 27 utformade och belastade punktgruppen efter första pålastning (övre kurvor). De enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper karakteriseras av två flytnivåer ( $\eta_1 = 0.6$  ;  $\eta_2 = 1.0$ ). De undre kurvorna anger residualkraften efter avlastning från mot  $\varphi$  svarande yttre kraft.

- FIG. 27. Diagrammen visar punktkrafterna som funktion av påkänningstillståndet  $\varphi$  för den i figuren visade yttre lasten efter pålastning (övre kurvor). De enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper karakteriseras av en krökt arbetslinje approximerad med en idealiserad arbetslinje med flera flytnivåer enligt FIG. 23. De undre kurvorna anger residualkraften efter avlastning från mot  $\varphi$  svarande yttre kraft.
- FIG. 28. Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk lastcykel med cykelgränser bestämda av det initialtillstånd som svarar mot  $\varphi = 0$ . De enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper karakteriseras av två flytnivåer ( $n_1 = 0.6$ ,  $n_2 = 1.0$ ).
- FIG. 29. Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk lastcykel med cykelgränser bestämda av det initialtillstånd som svarar mot  $\varphi = 0$ . De enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper svarar mot den i FIG. 23 visade approximerande arbetslinjen med flera flytnivåer.
- FIG. 30. Exempel på möjliga former för förloppet av det antagna funktionella sambandet mellan aktuell flytkraft  $\kappa$  och antalet flyttillfällen  $\sigma$  vid en punkt.
- FIG. 31. En punkts relativa utmattningshållfasthet och dess relativa flytkraftförhöjning (strain hardening) som funktion av antalet flyttillfällen  $\sigma$ .
- FIG. 32. Övergång från ett elasto-plastiskt tillstånd A till ett renodlat elastiskt tillstånd B.  $\tau$  betecknar härvid rotation svarande mot tillskottsdeformationen.
- FIG. 33. Den övre delfiguren visar momentväxlingar som belastar punktgrupp med utformning enligt FIG. 9. Resultierande brottgräns och flytgräns har markerats. Den undre delfiguren visar motsvarande punktkraftsvariation.

- FIG. 34 Diagrammen visar för dubbelsymmetrisk punktgrupp med belastning enligt figuren variationen hos gruppens flytgräns och brottgräns jämte punktkraftvariationen under tio symmetriska lastcykler. Det undre diagrammet utvisar även storleken av residualkrafterna efter avlastning som funktion av antalet förutgående lastcykler.
- FIG. 35 Inre krafttillståndet vid passage av övre flytgränsen under tio konsekutiva lastcykler för det i FIG. 34 visade lastfallet.
- FIG. 36 Variationen för brottgräns och flytgräns jämte tillhörande punktkraftvariation under 20 lastcykler för det i FIG. 34 visade lastfallet.
- FIG. 37 Variationen för brottgräns och flytgräns jämte tillhörande punktkraftvariation för det i FIG. 34 visade lastfallet under 100 lastcykler och med redovisning av tillståndet efter varje period om fem cykler.
- FIG. 38 Punktgrupp med tillhörande last. I tabellen ges tre alternativa fördelningar av punktvikter inom gruppen. Totalsumman av punktvikter är den samma i de tre fallen.
- FIG. 39 Variation av brottgräns och flytgräns under 20 lastväxlingar för det i FIG. 38 visade lastfallet under förutsättning av likformig fördelning av punktvikter över konstruktionen. De nedre figurerna visar residualkrafttillstånden vid avlastning efter cyklerna 0 och 20 respektive. Krafterna i den högra figuren har ritats i en 10 gånger större skala än krafterna i den vänstra.
- FIG. 40 Variation av brottgräns och flytgräns under 20 lastväxlingar för det i FIG. 38 visade lastfallet vid en punktviktsfördelning enligt kolumn b. De nedre figurerna visar residualkrafttillstånden efter cyklerna 0 och 20 respektive. Krafterna i den högra figuren har ritats i en 10 gånger större skala än krafterna i den vänstra.

- FIG. 41 Variation av brottgräns och flytgräns under 20 lastväxlingar för det i FIG. 38 visade lastfallet vid en punktviktsfördelning enligt kolumn c. De undre figurerna visar residualkrafttillstånden vid avlastning efter cyklerna 0 och 20 respektive.
- FIG. 42 Schematisk återgivning av strukturen i datamaskinprogrammet "POINT SET STRUCTURE GENERAL PROGRAM". De svarta punkterna anger vilka procedurer som aktiveras i de olika beräkningsalternativen.
- FIG. 43 Strategi vid bestämning av en punktkonstruktions brottgräns.
- FIG. 44 Punktkonstruktion med tillhörande belastning jämte arbetslinjen för den enskilda punkten. Exempel använt vid redovisning av resultatuppställningar.



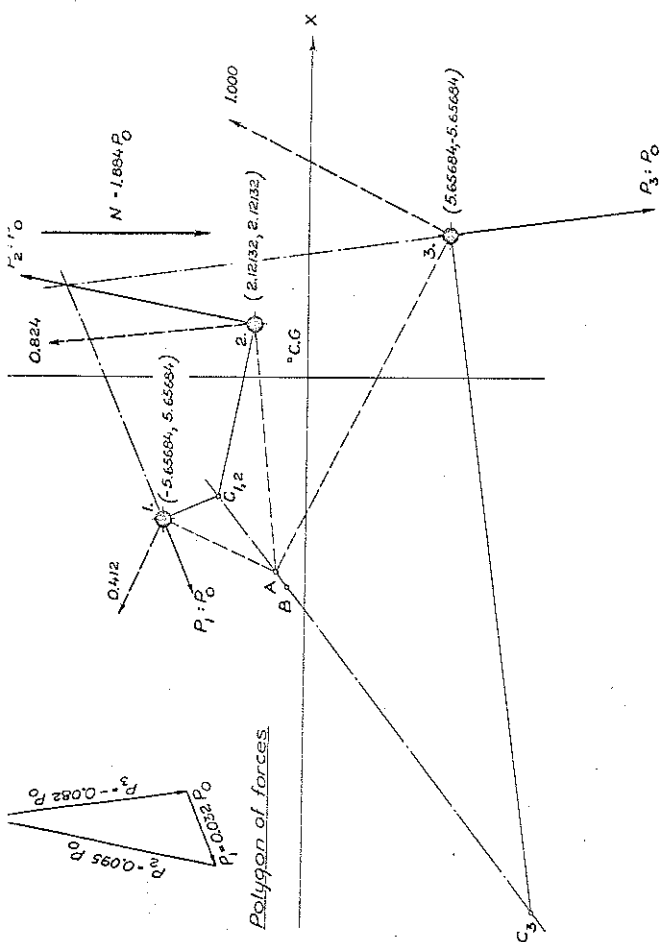


Fig. 4 (ex. 1)

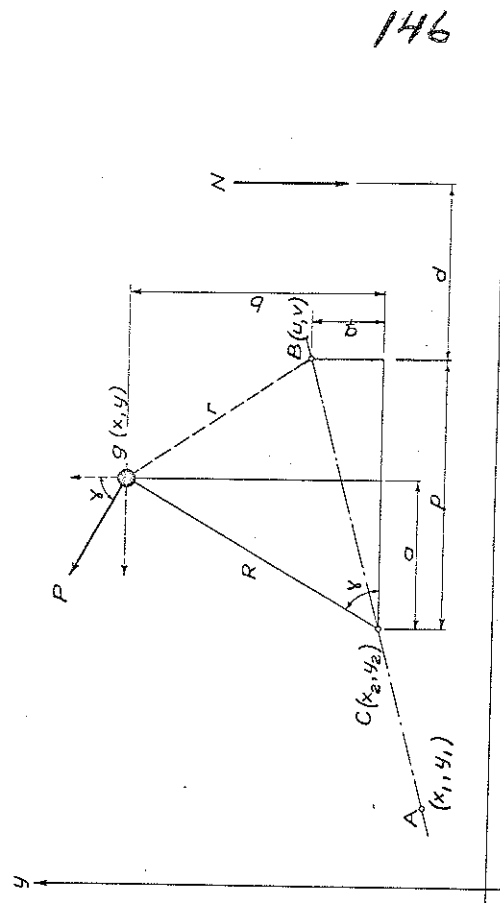
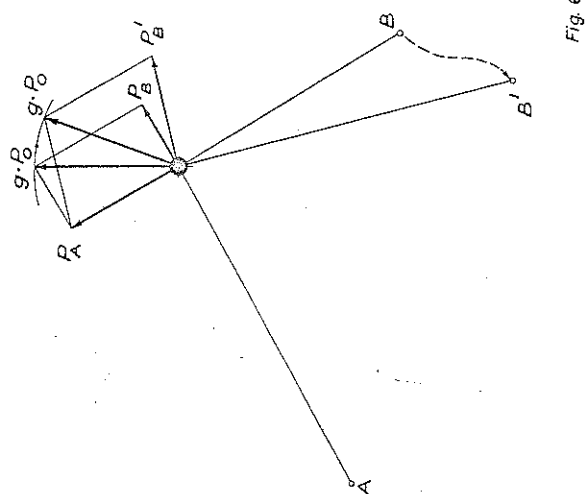


Fig. 5





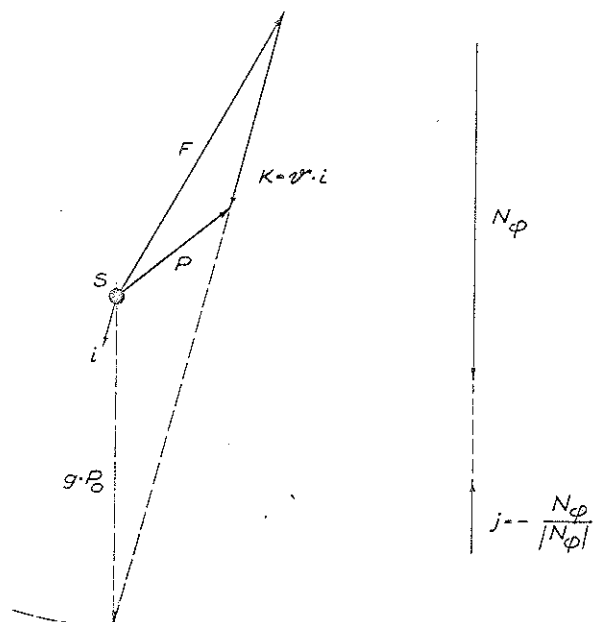


Fig. 8

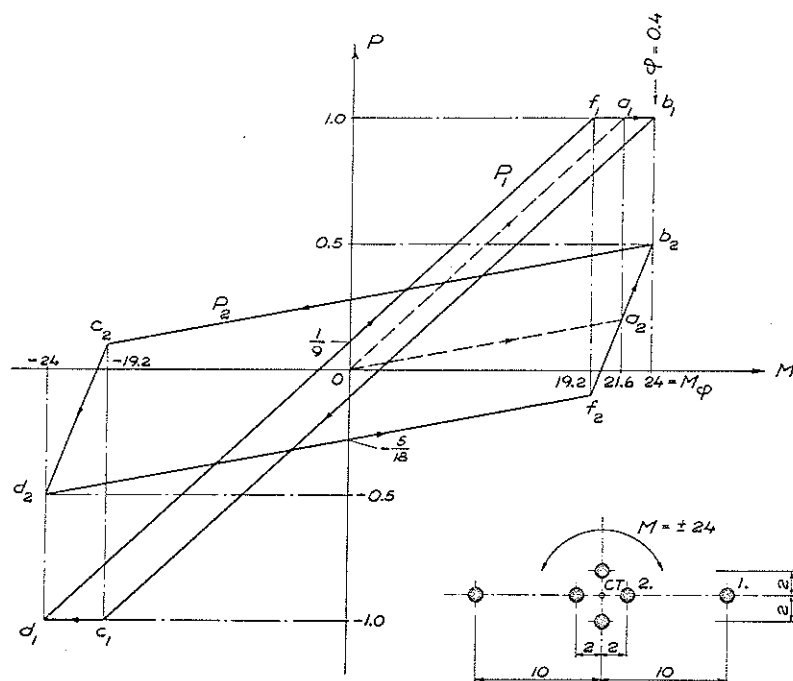


Fig. 9 (ex. 2)

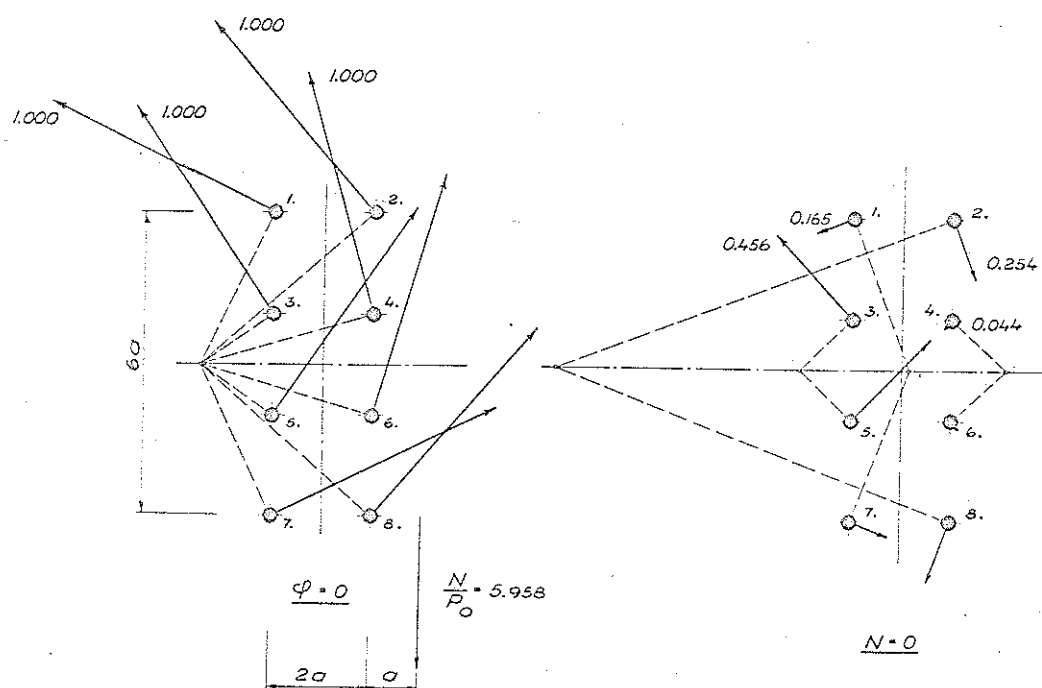


Fig. 10 (ex. 3)

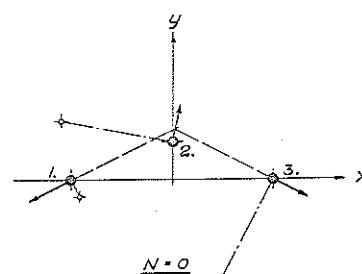
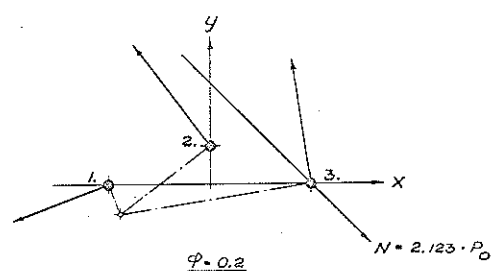
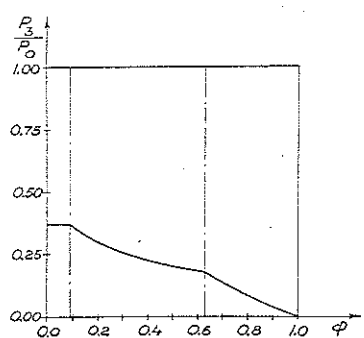
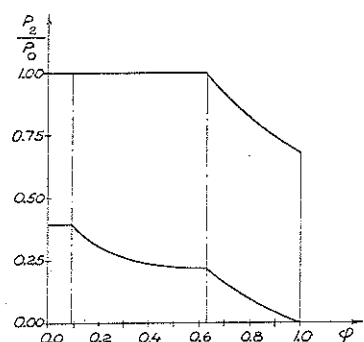
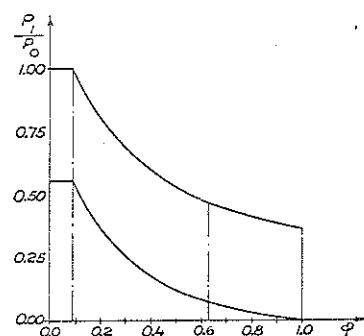


Fig. 11 (ex. 4)

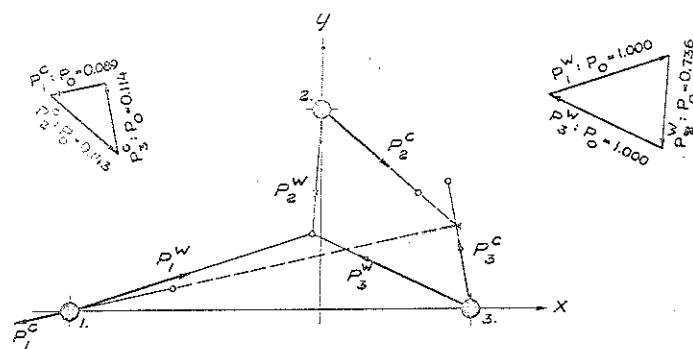


Fig. 12 (ex. 5)

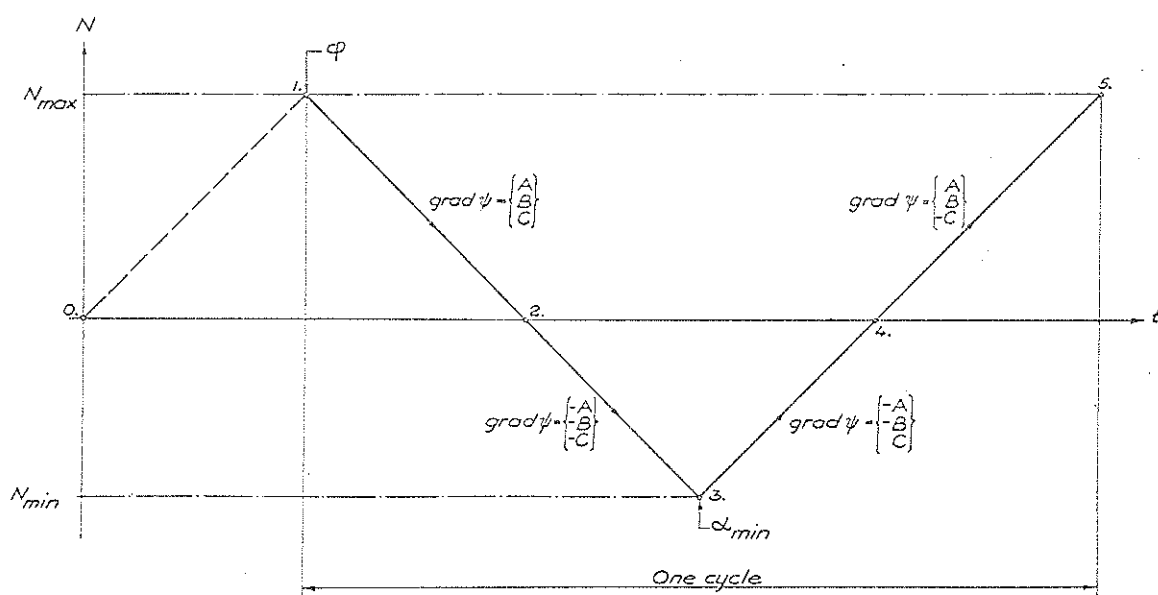


Fig. 13

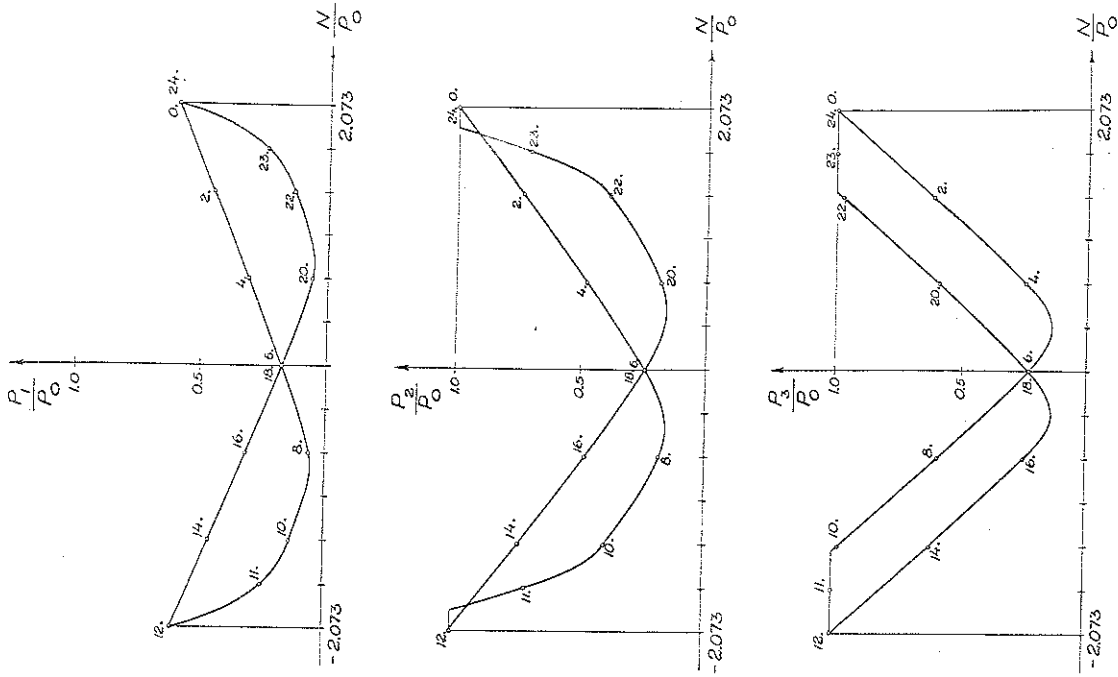
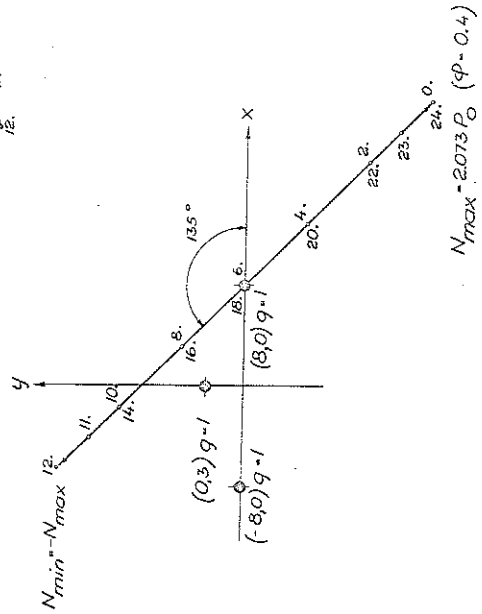
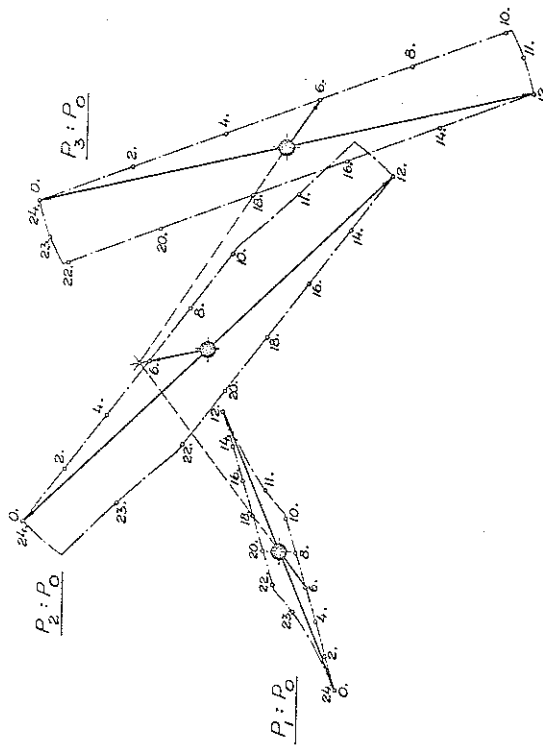


Fig 44 (ex. 6)



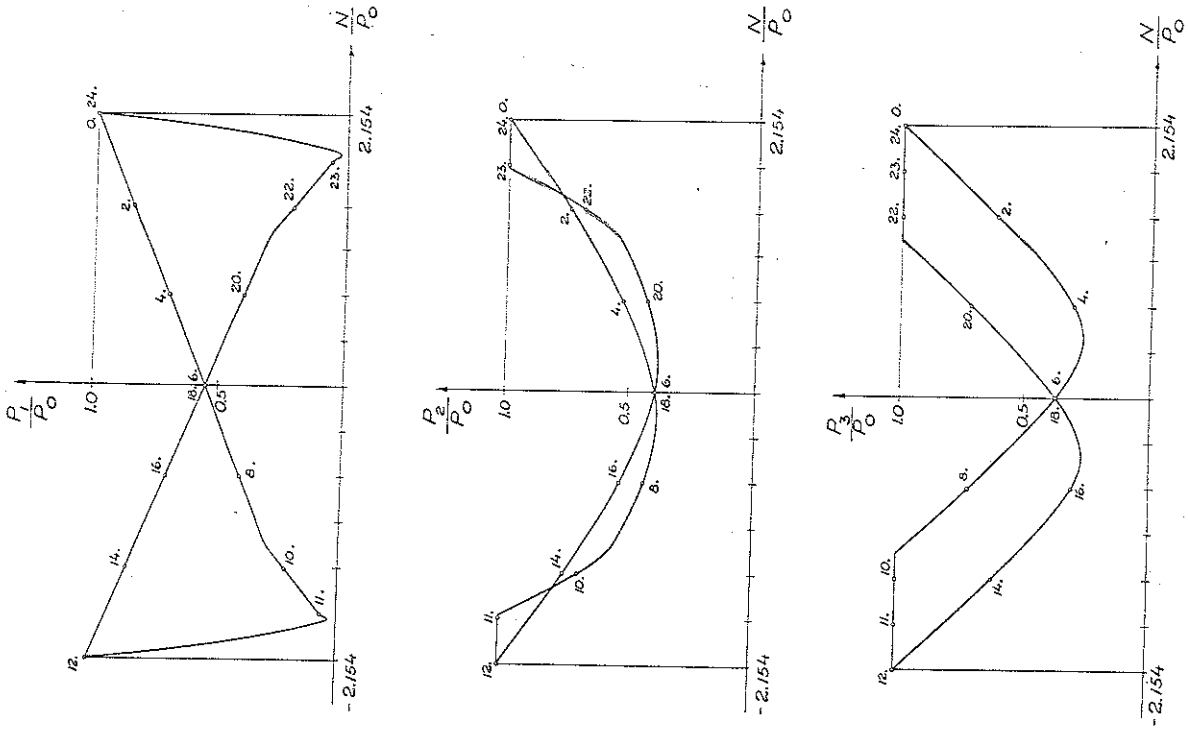
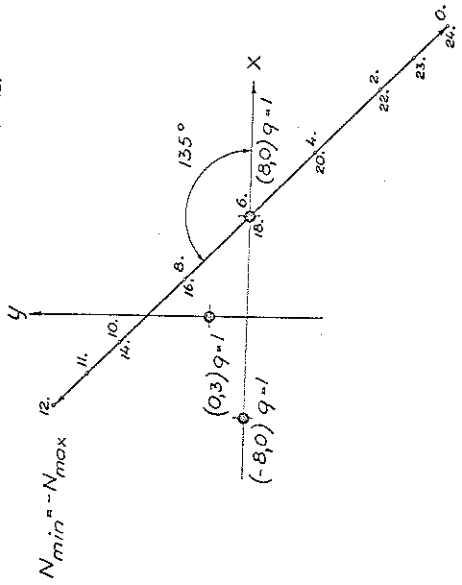
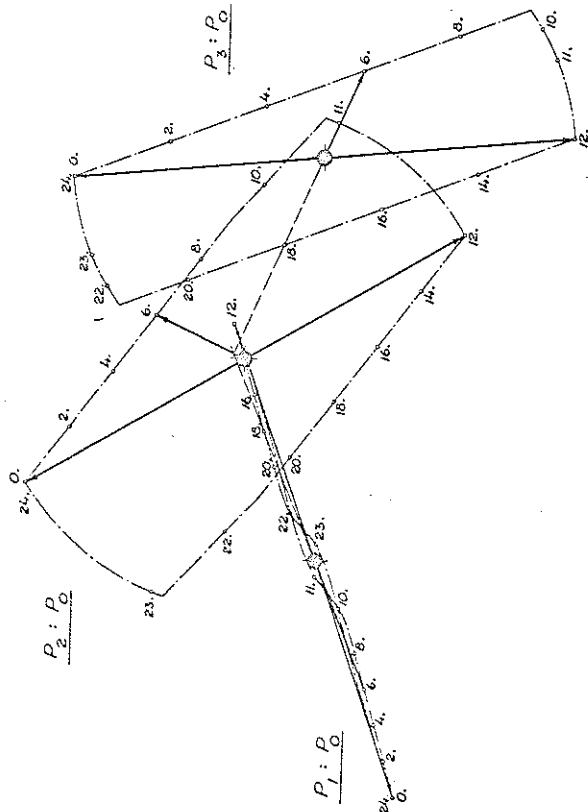


Fig. 15 (ex.7)



$N_{min} = -N_{max}$

$N_{max} = 2.154 P_0 \quad (\varphi = 0)$

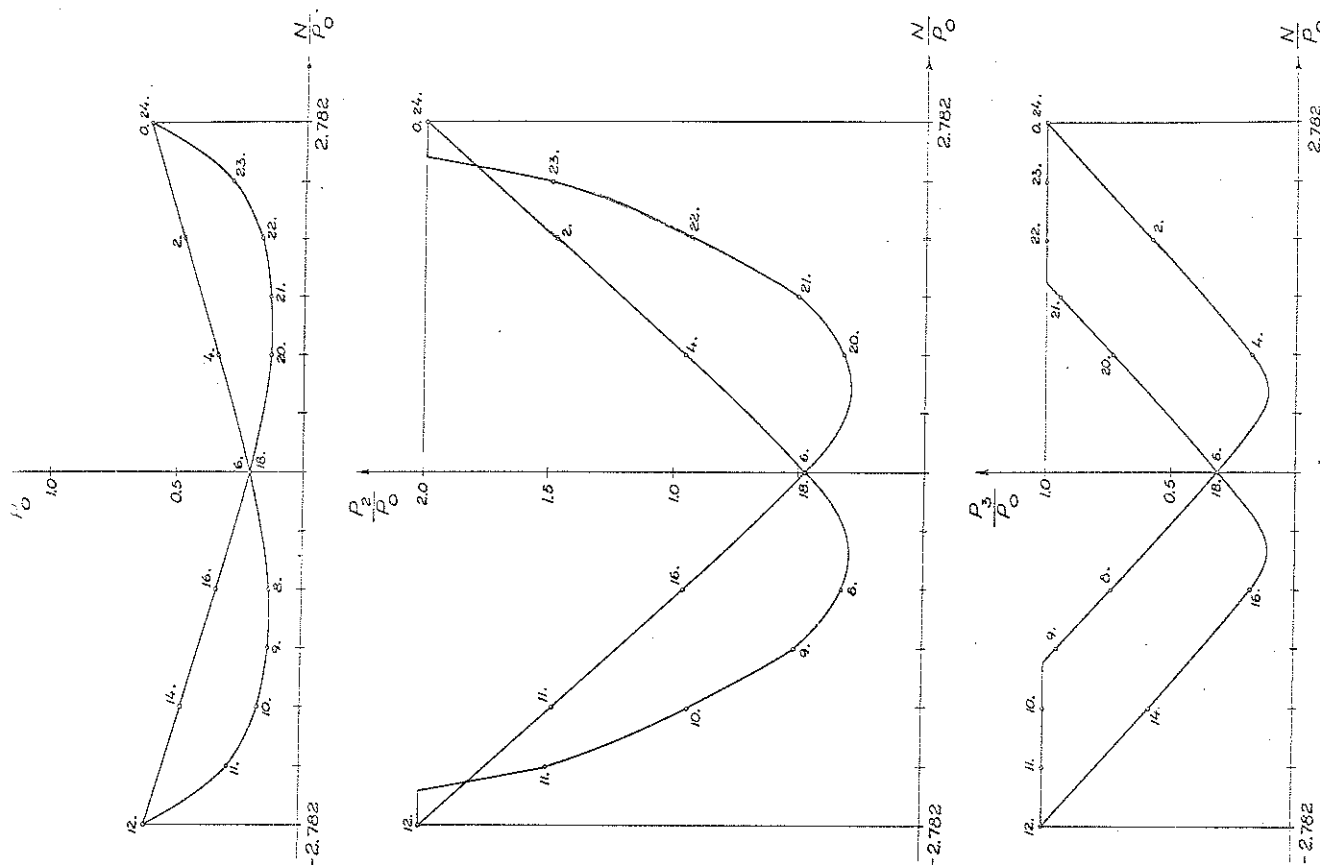
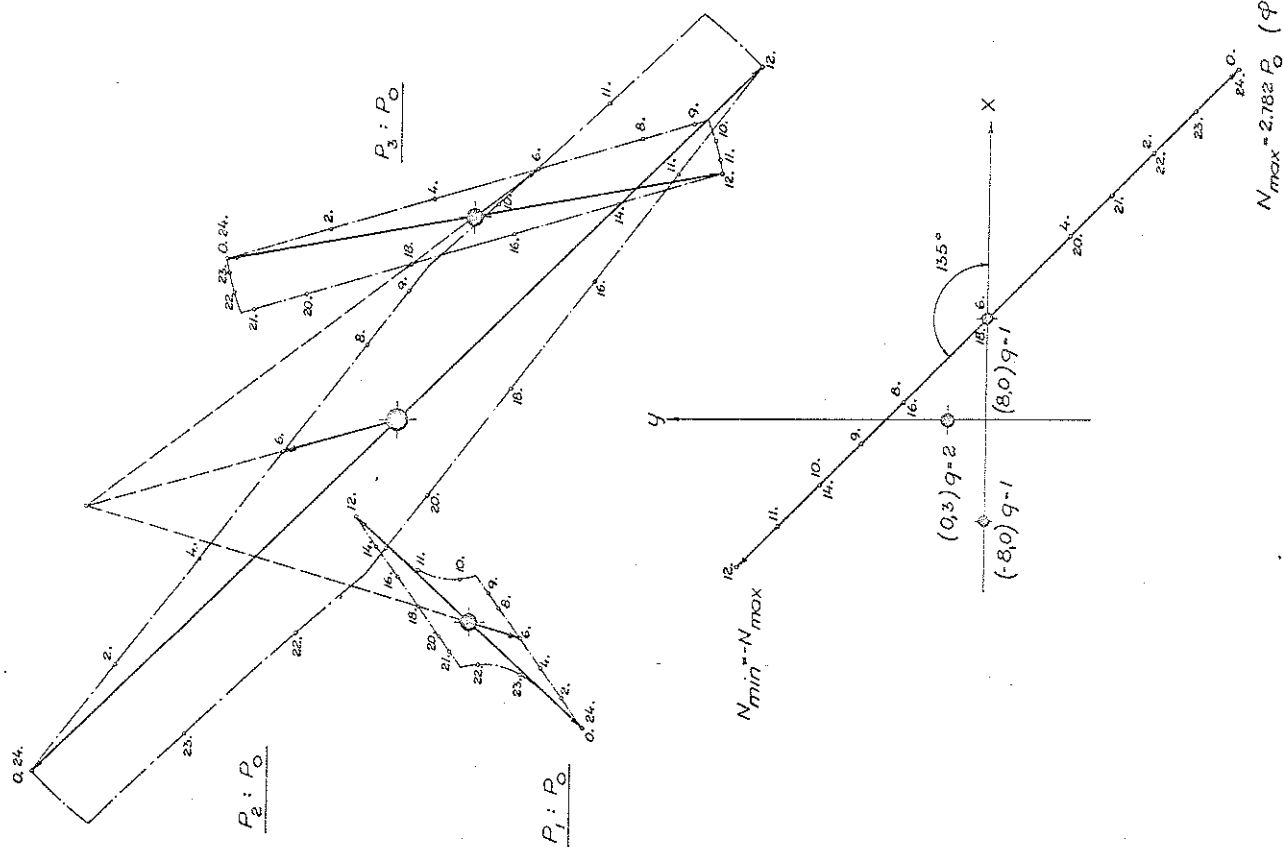


Fig. 16 (ex. 8)



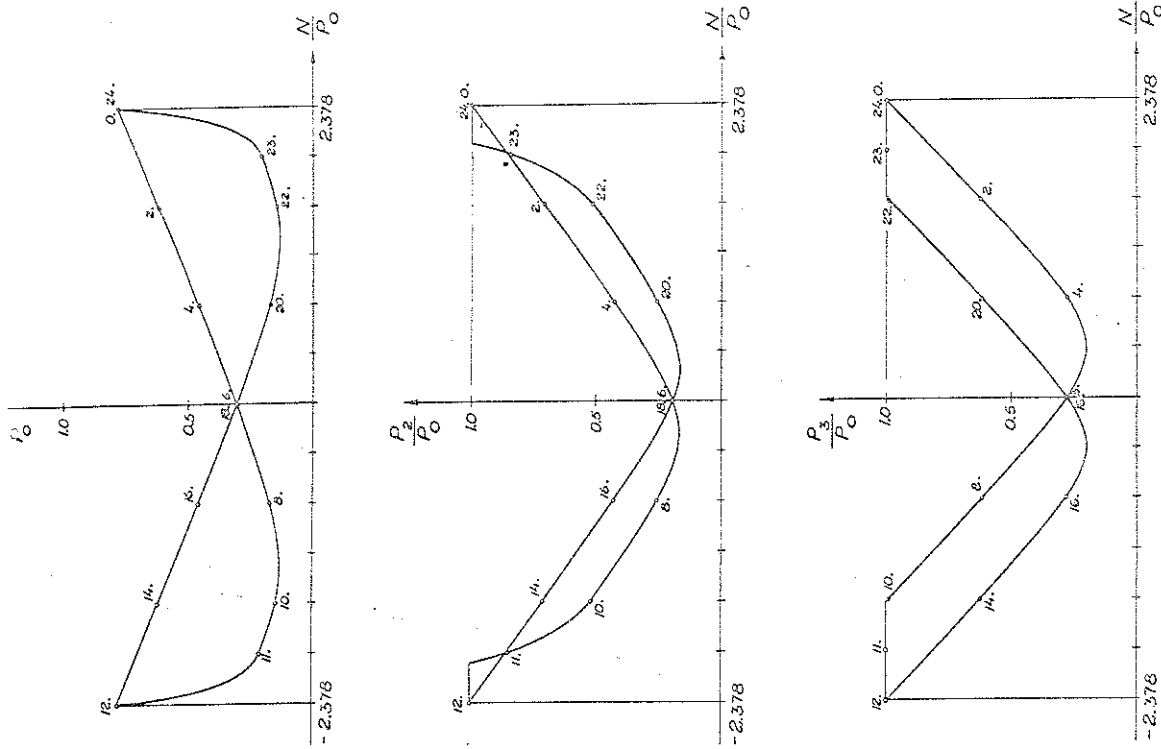
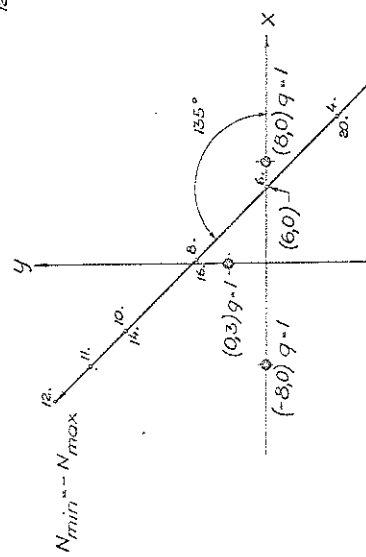
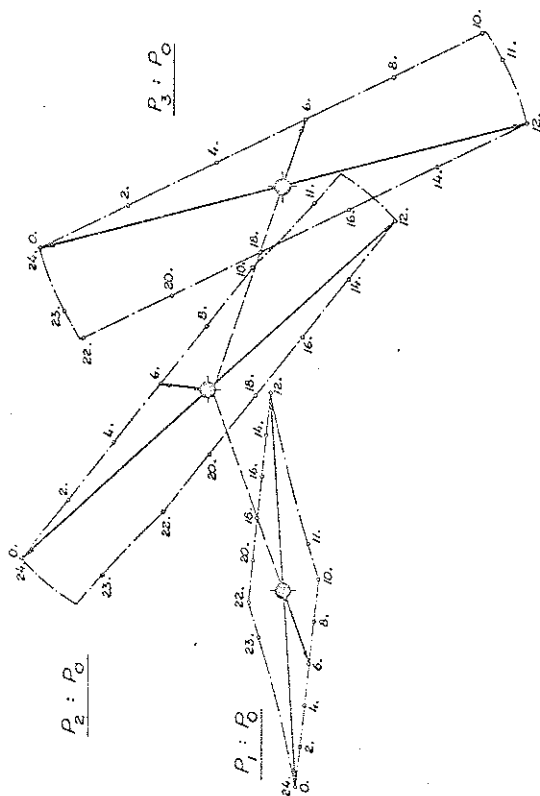


Fig. 17 (ex. 9)



$N_{max} - 2.378 P_0 (q = 0.3)$

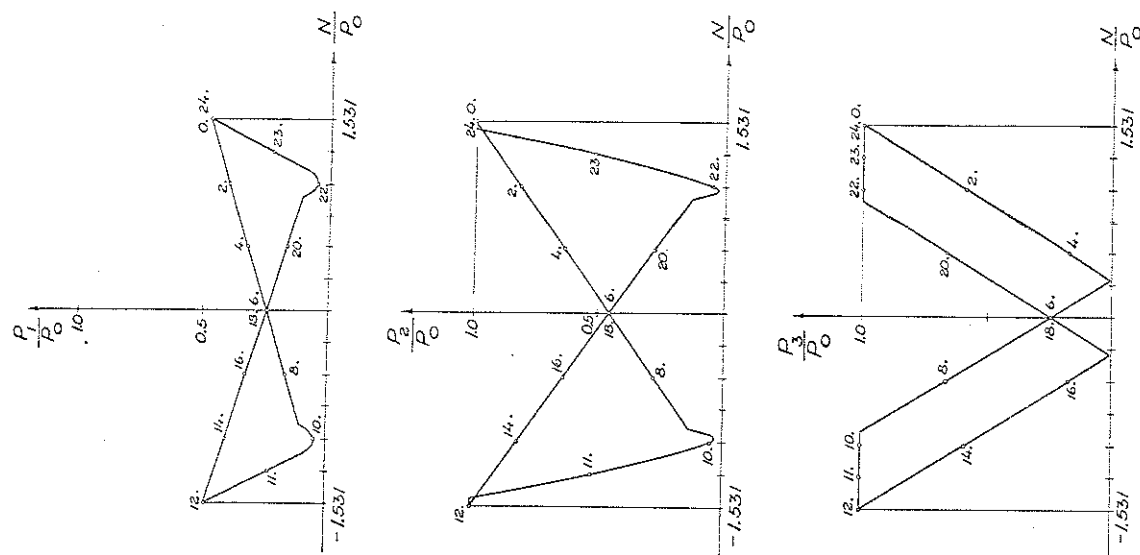
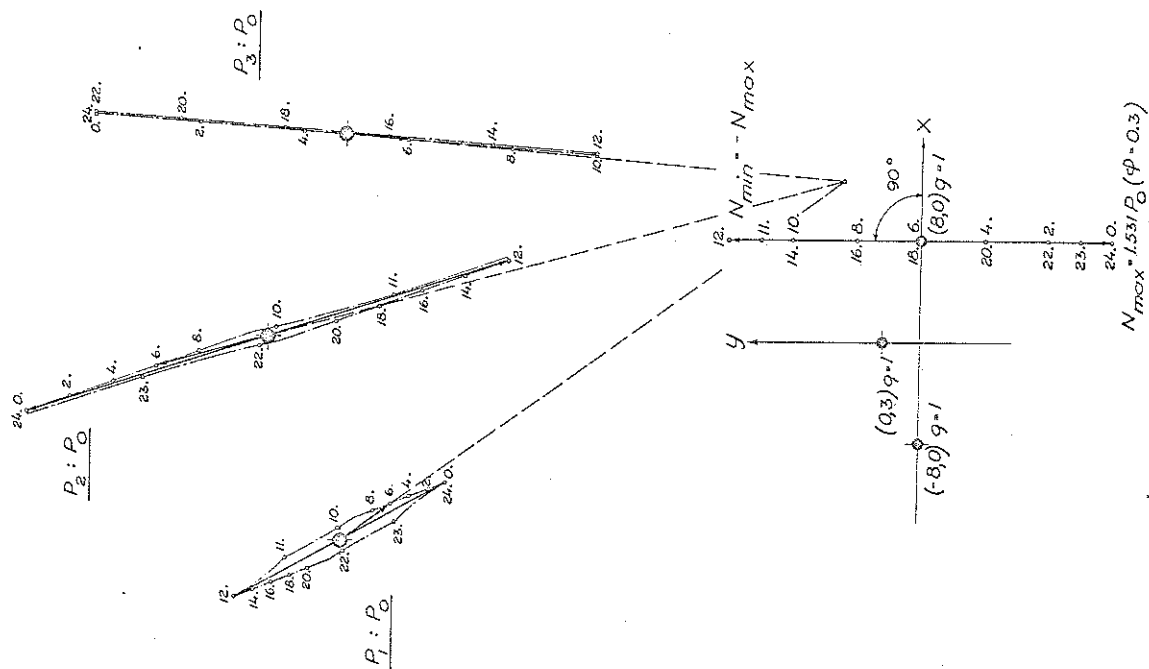


Fig. 18 (ex. 10)





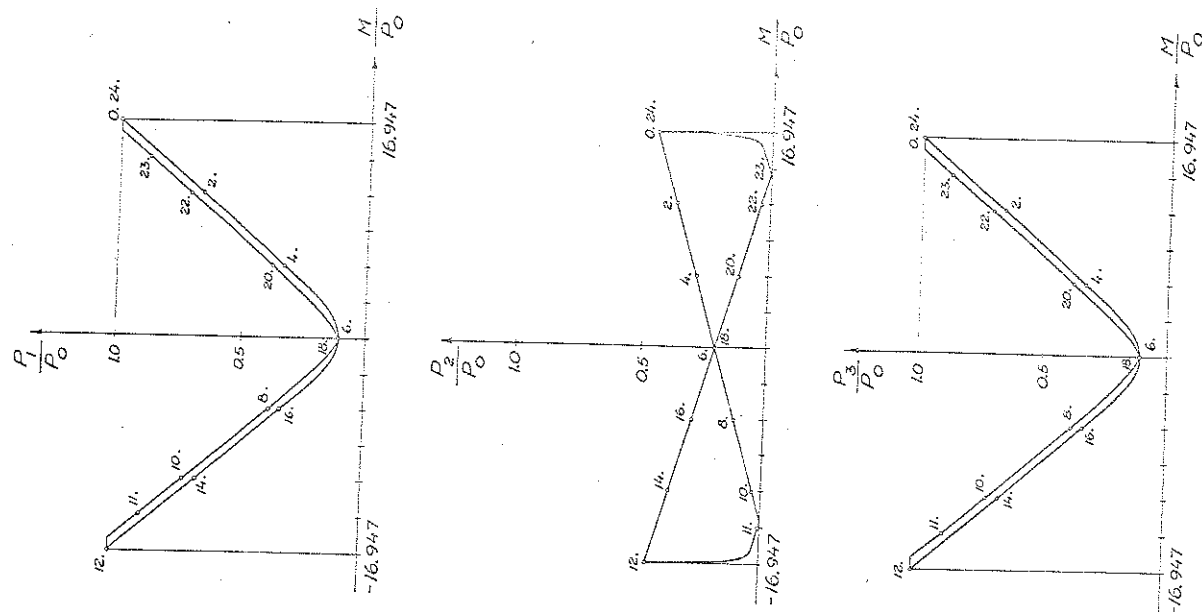
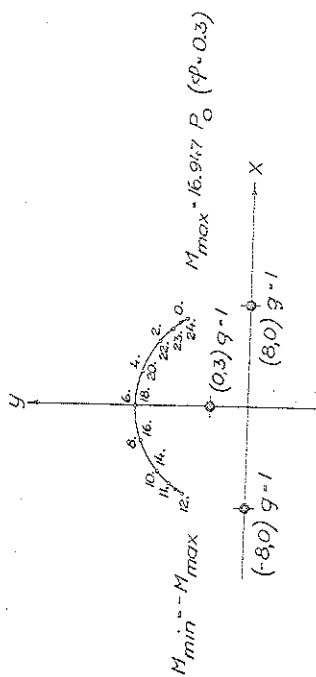
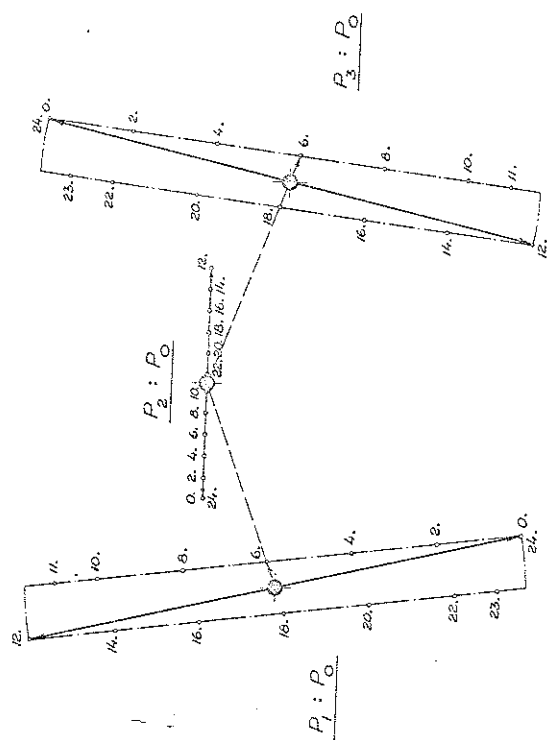


Fig. 19 (ex. 1f)



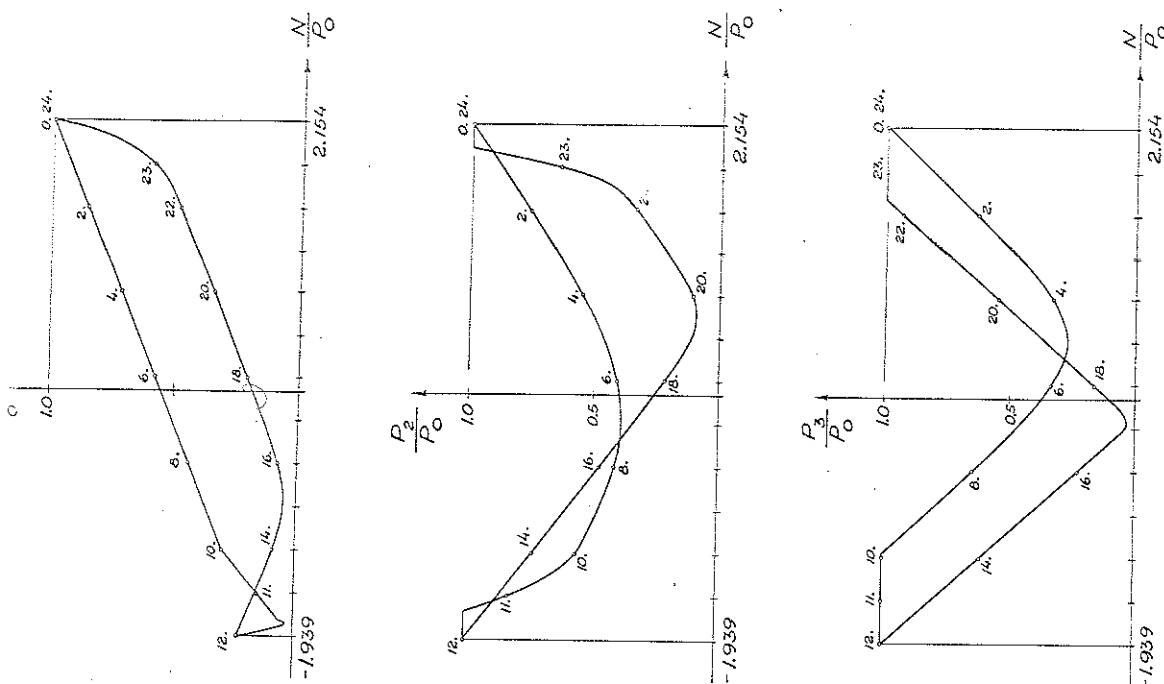
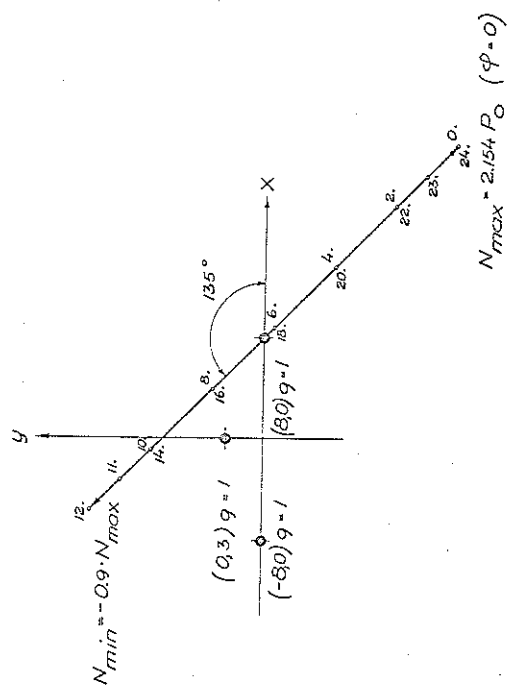
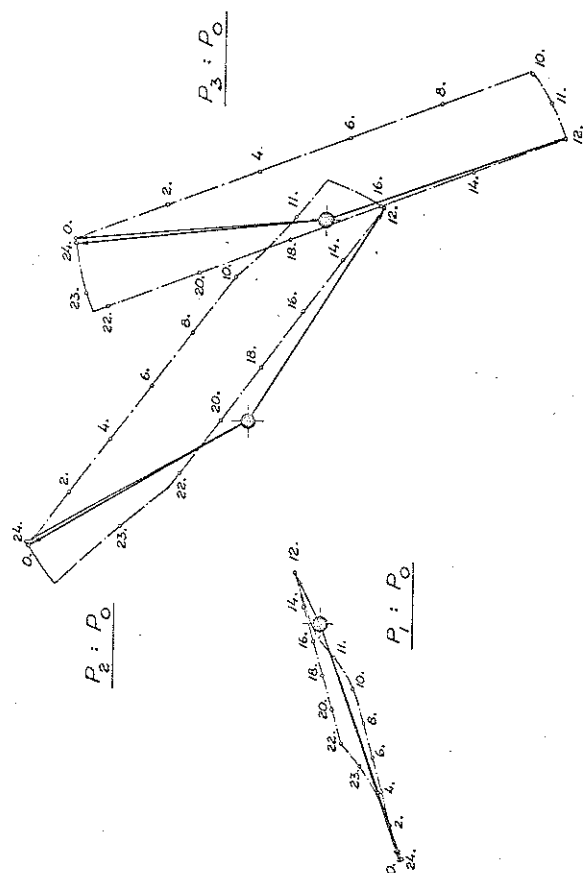
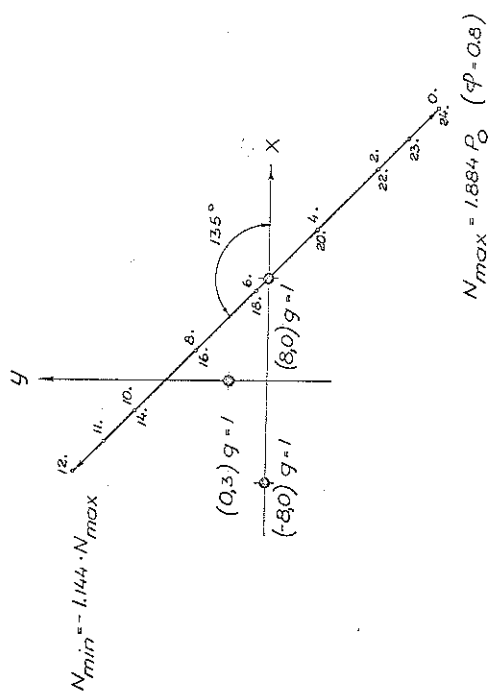
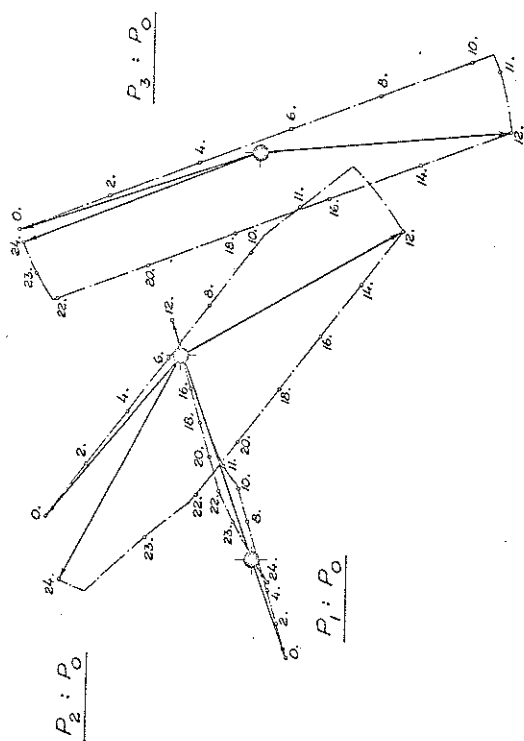
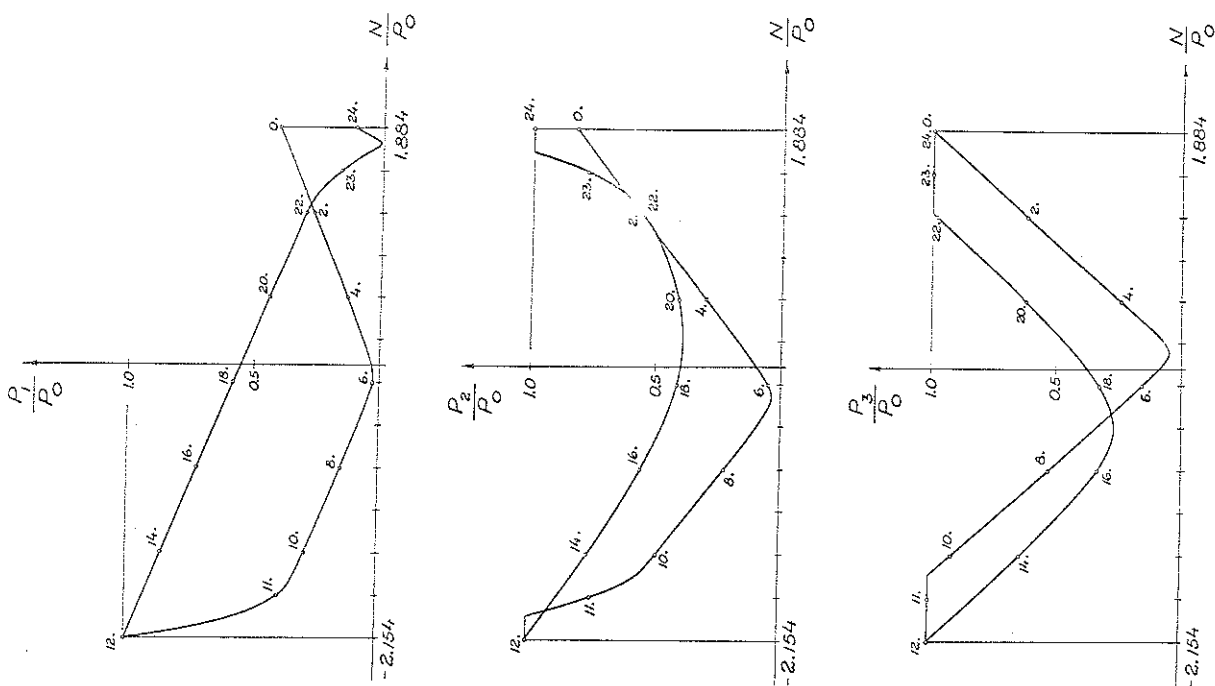


Fig. 20 (ex. 12)





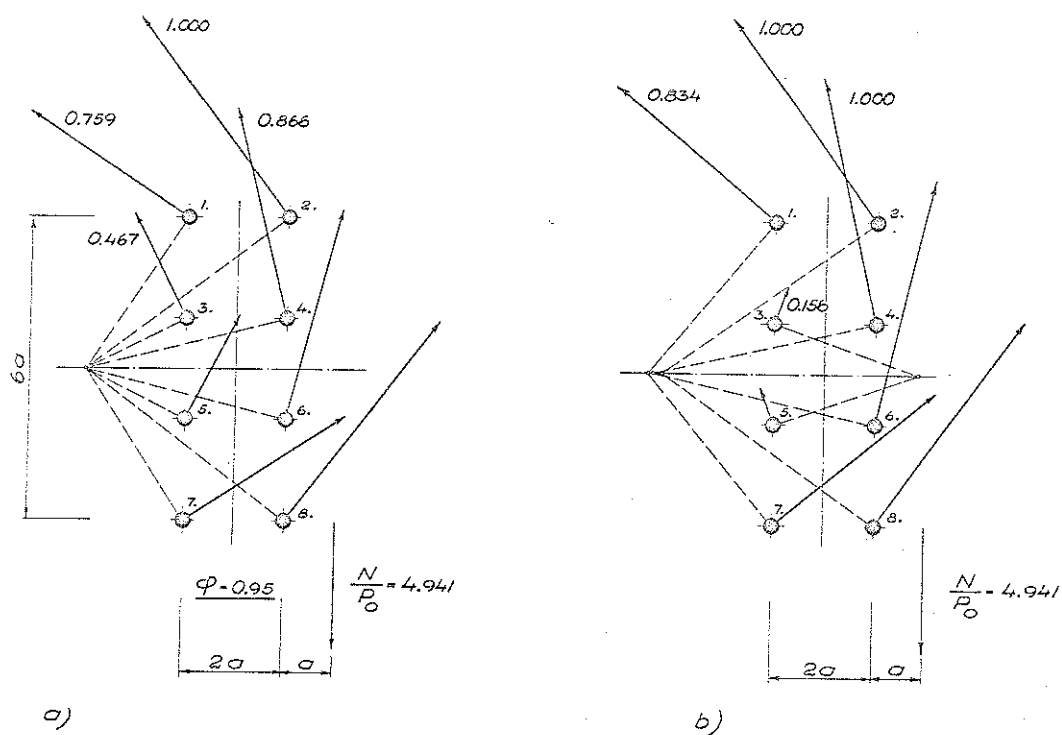


Fig. 22 (ex. 14)

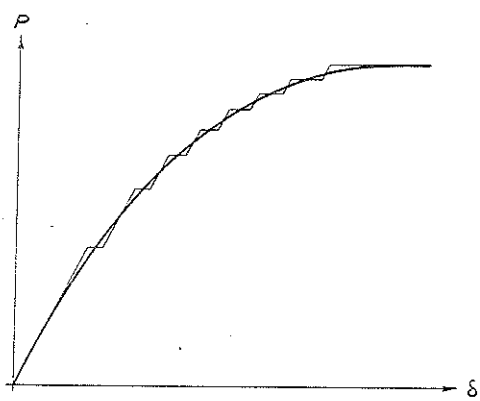


Fig. 23

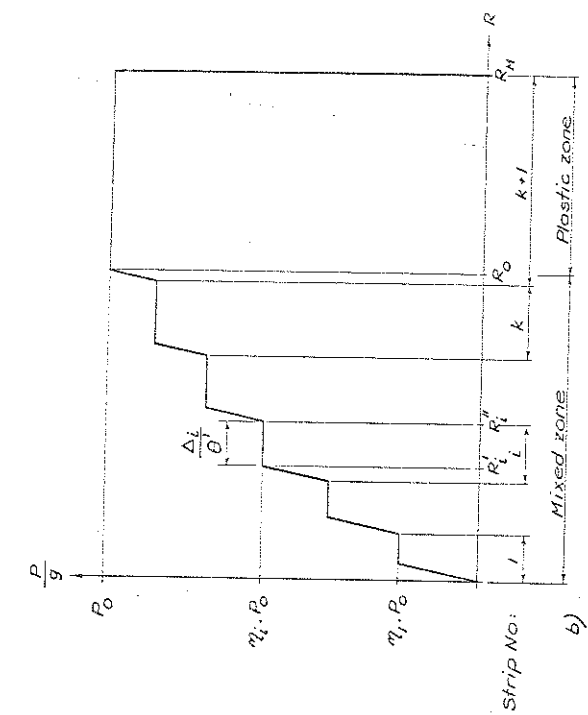
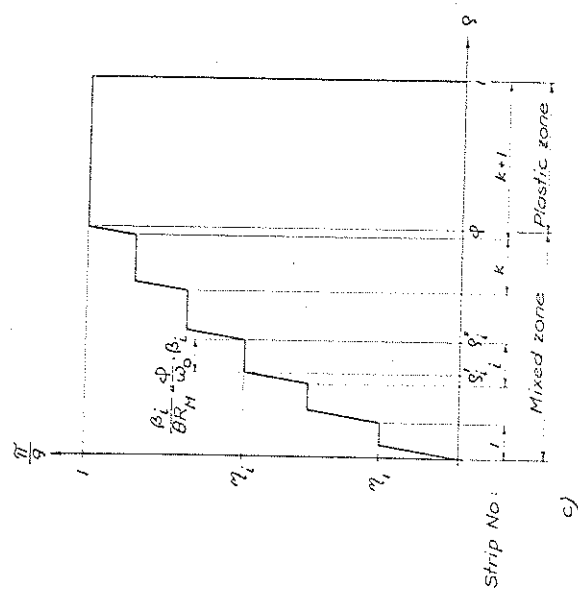
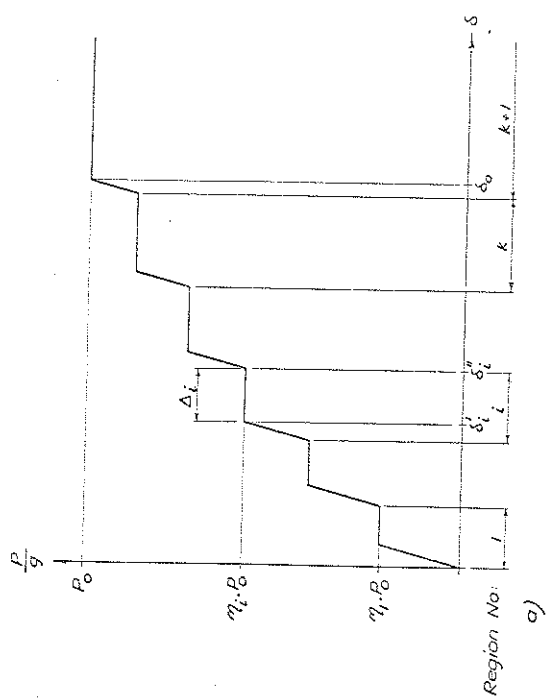


Fig. 24



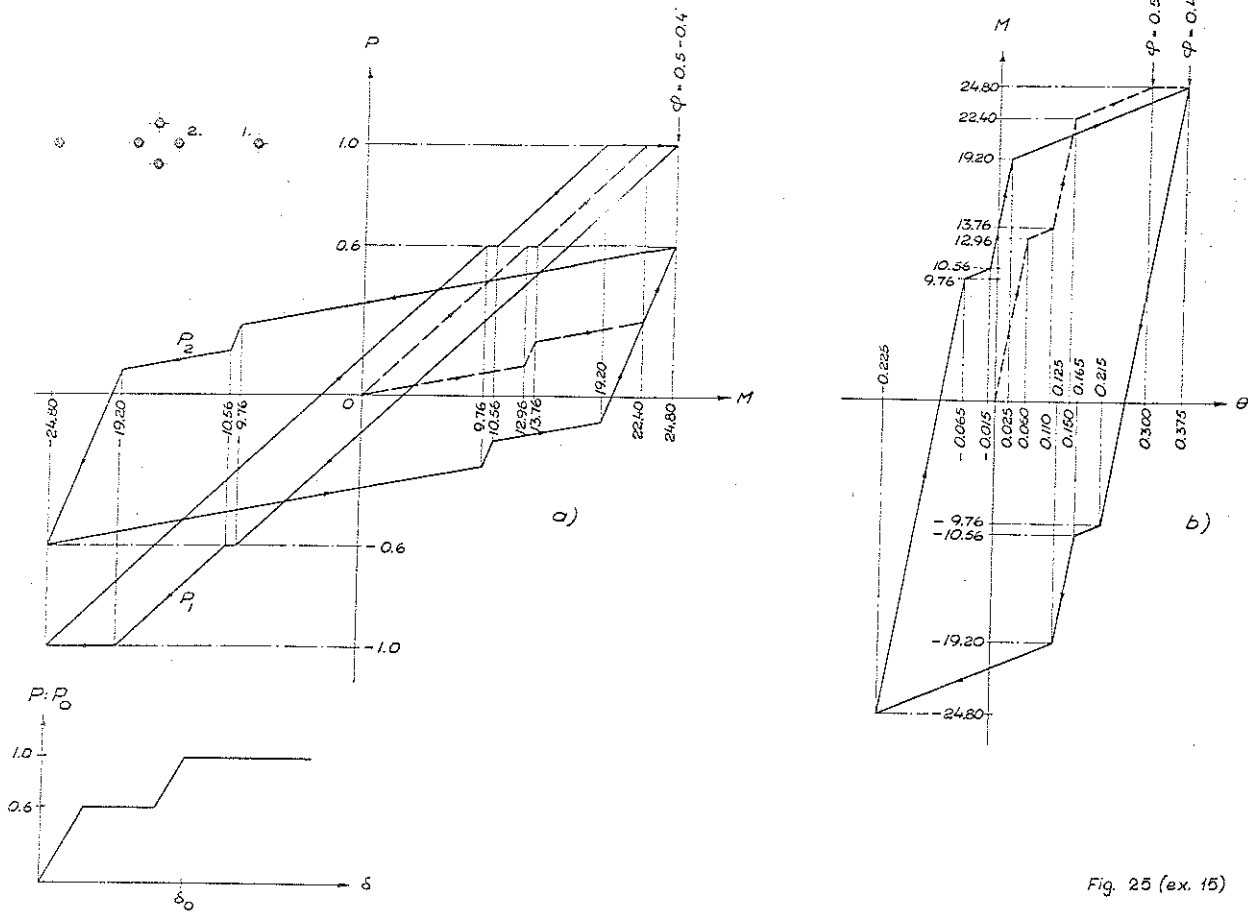
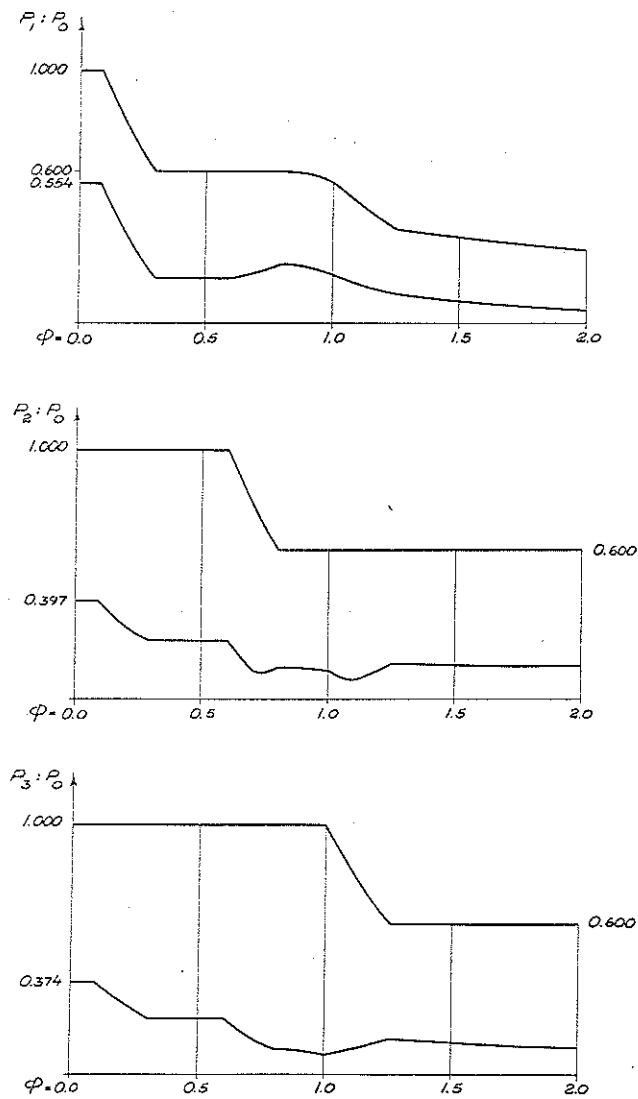


Fig. 25 (ex. 15)



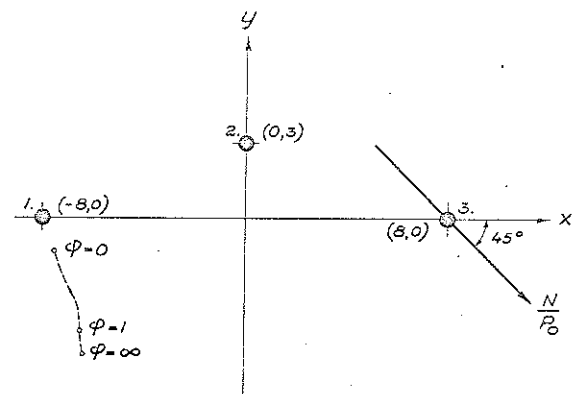
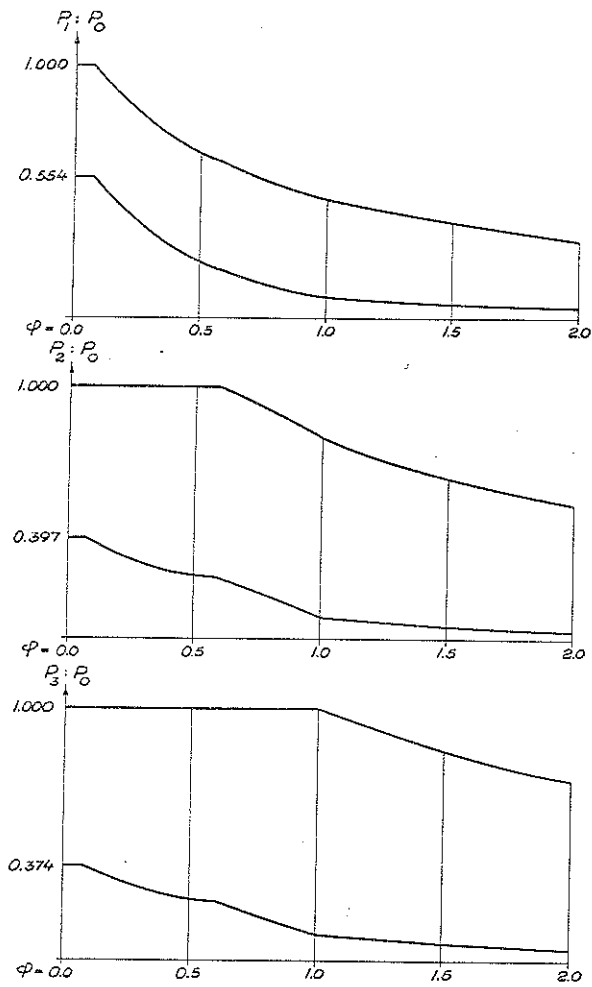


Fig. 27 (ex. 17)

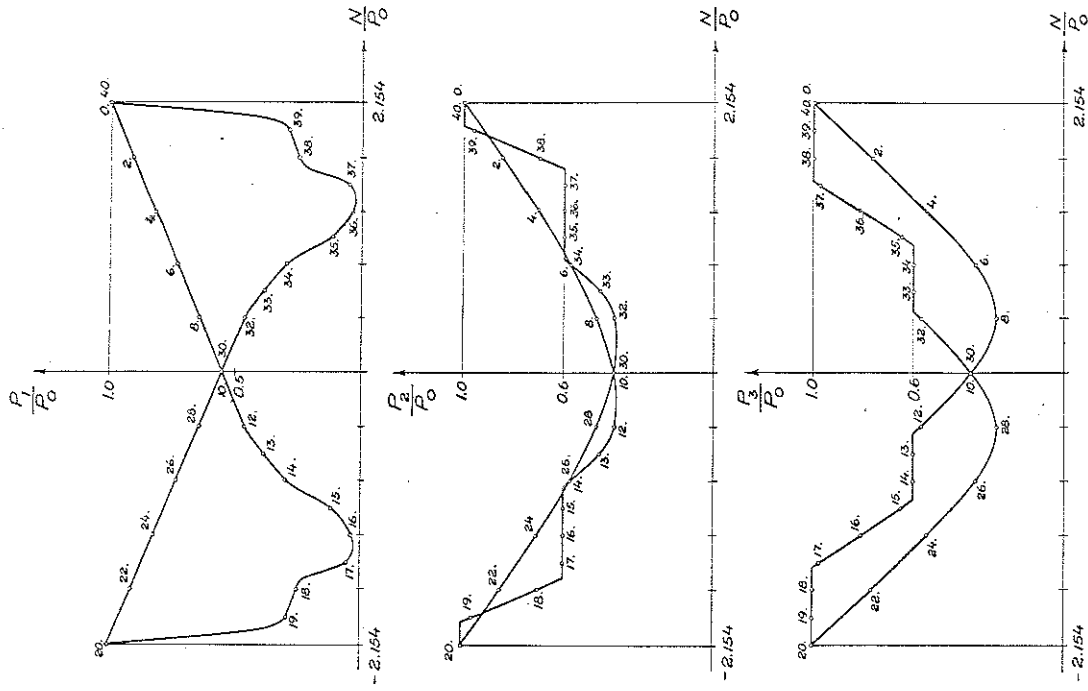
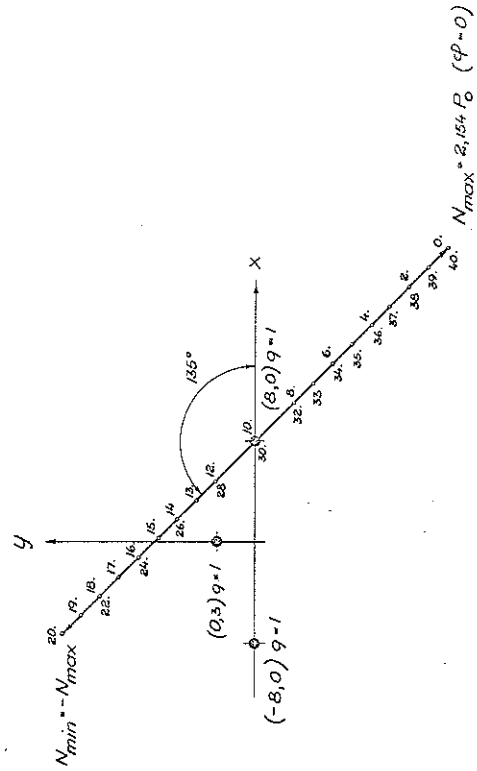
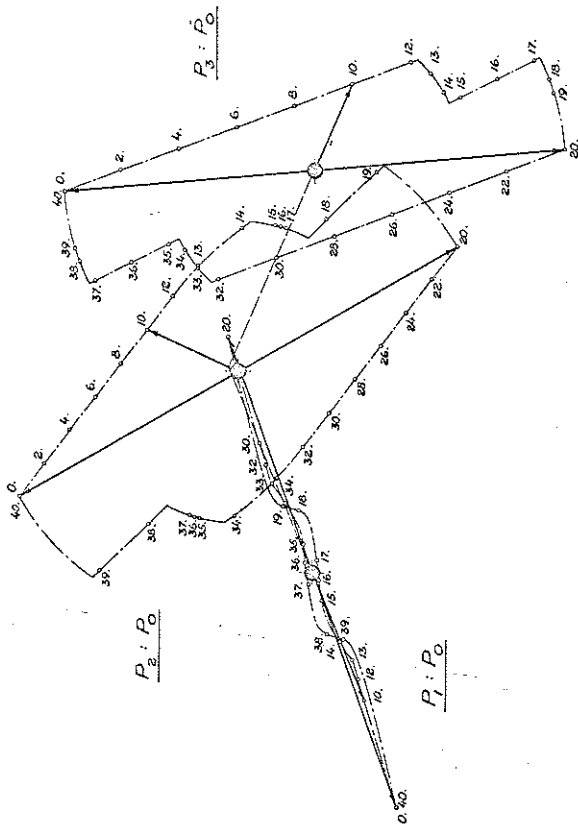


Fig. 28 (ex. 18)





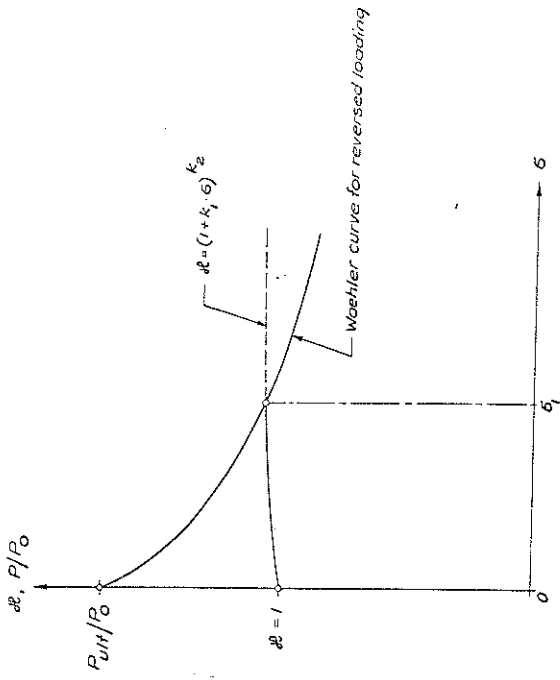


Fig. 31

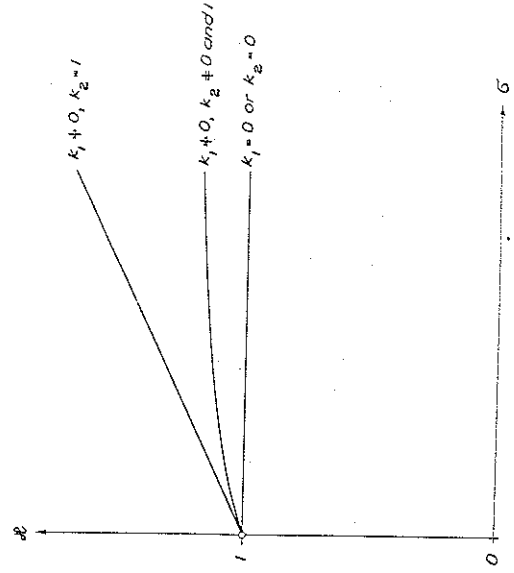


Fig. 30

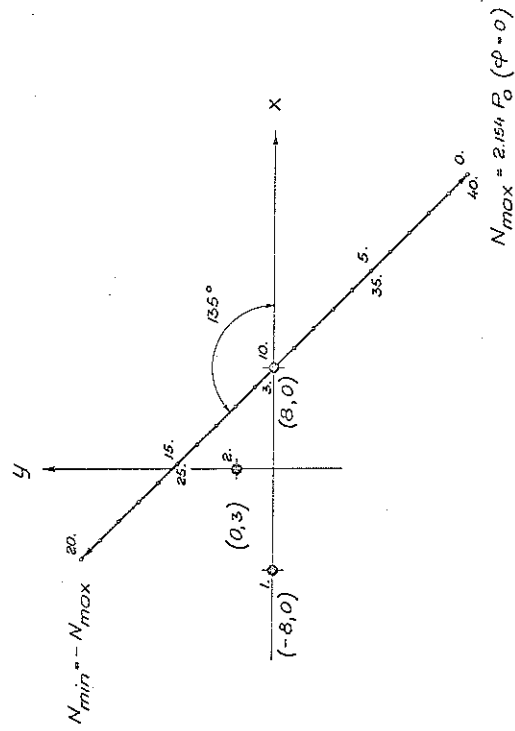
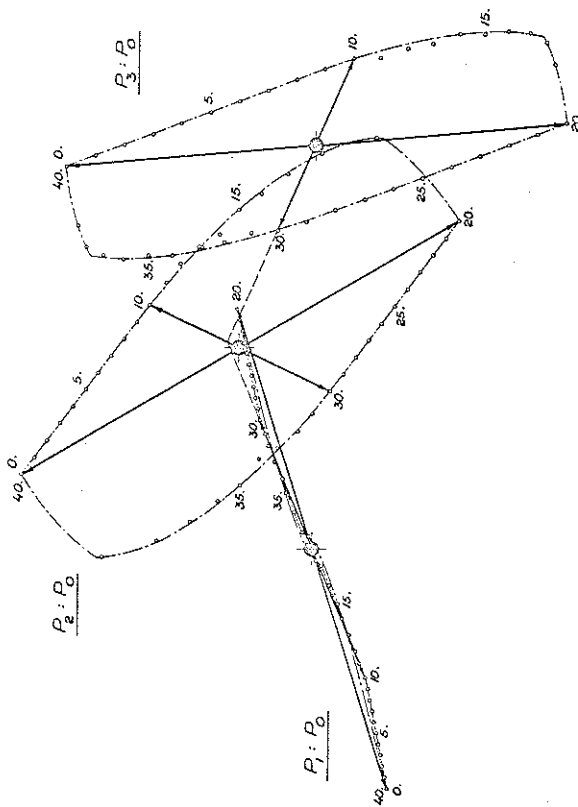


Fig. 29 (ex. 19)

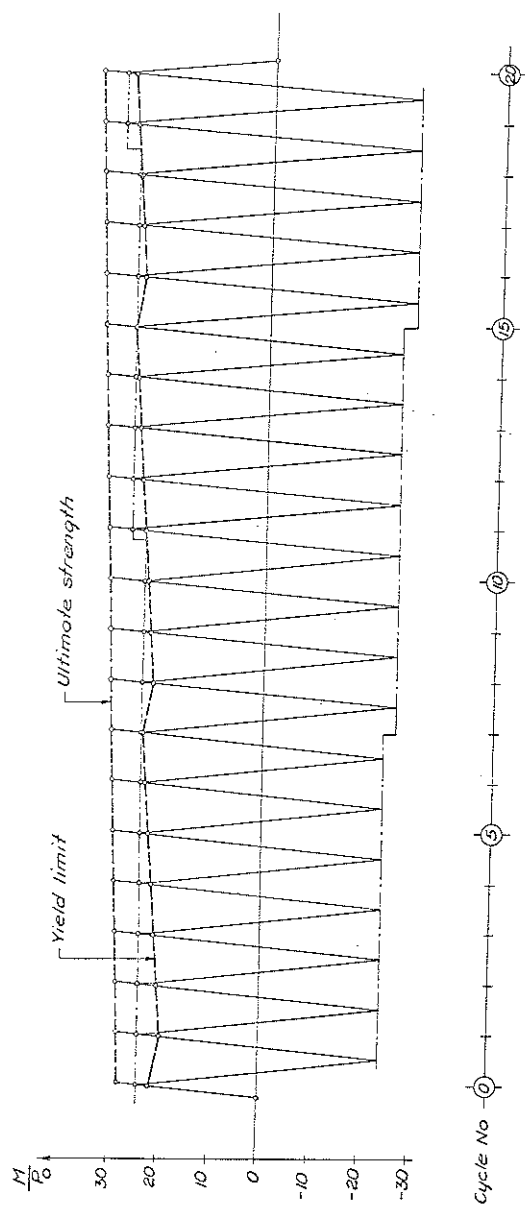


Fig. 32

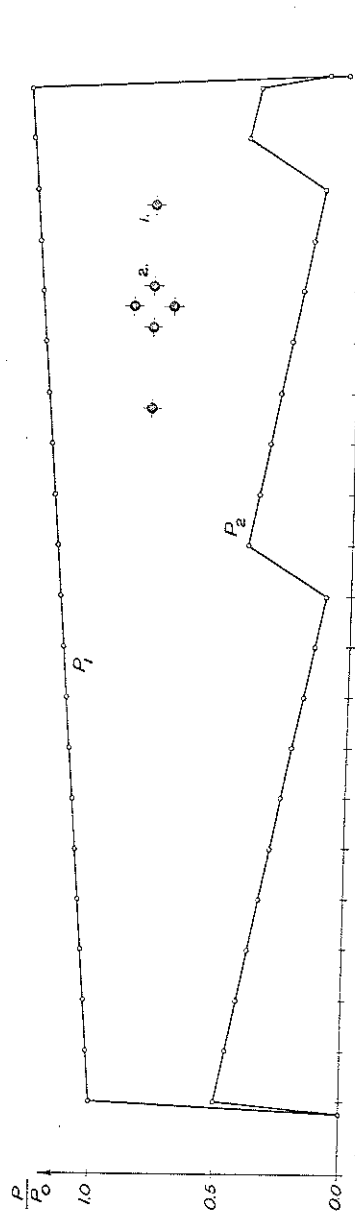


Fig. 33 (ex 20)

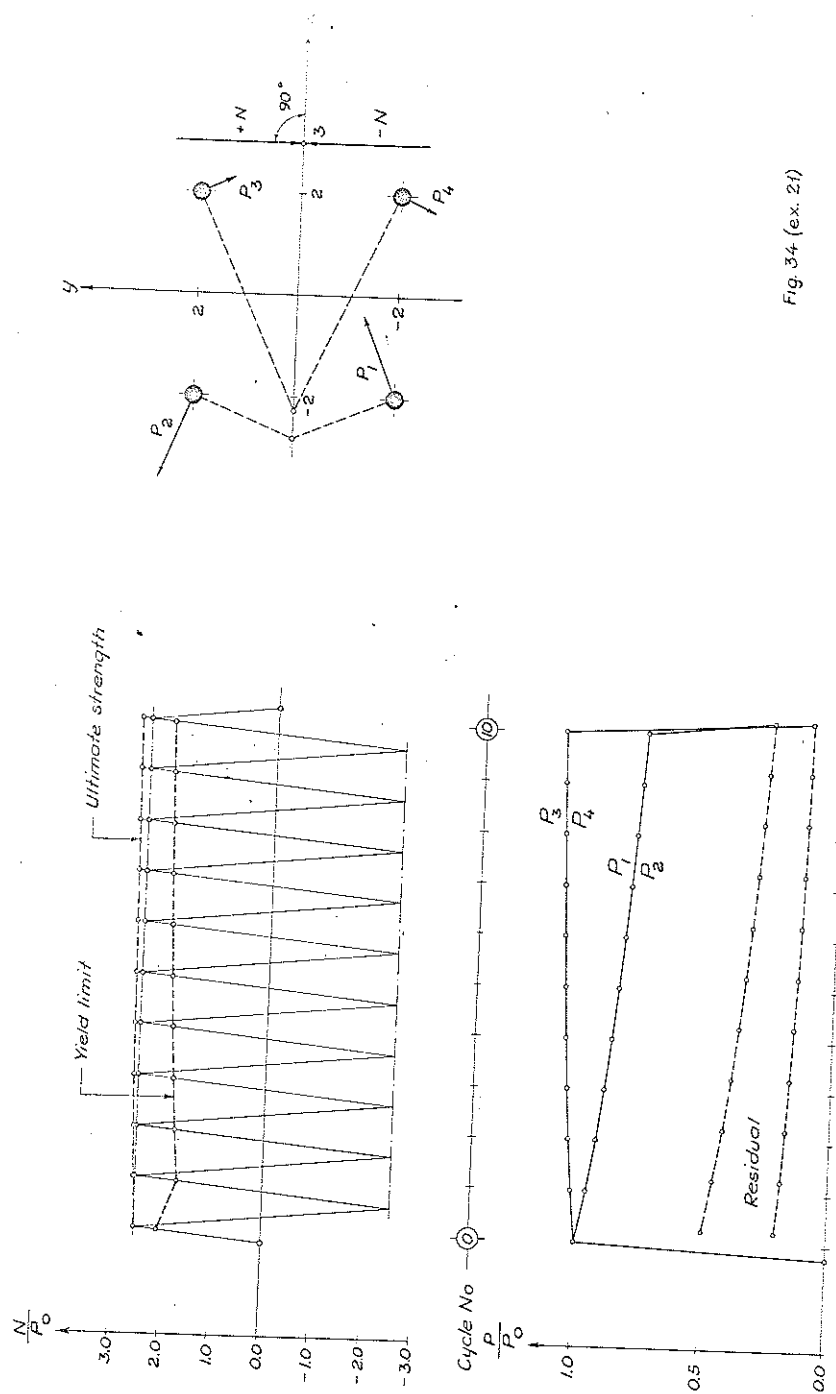
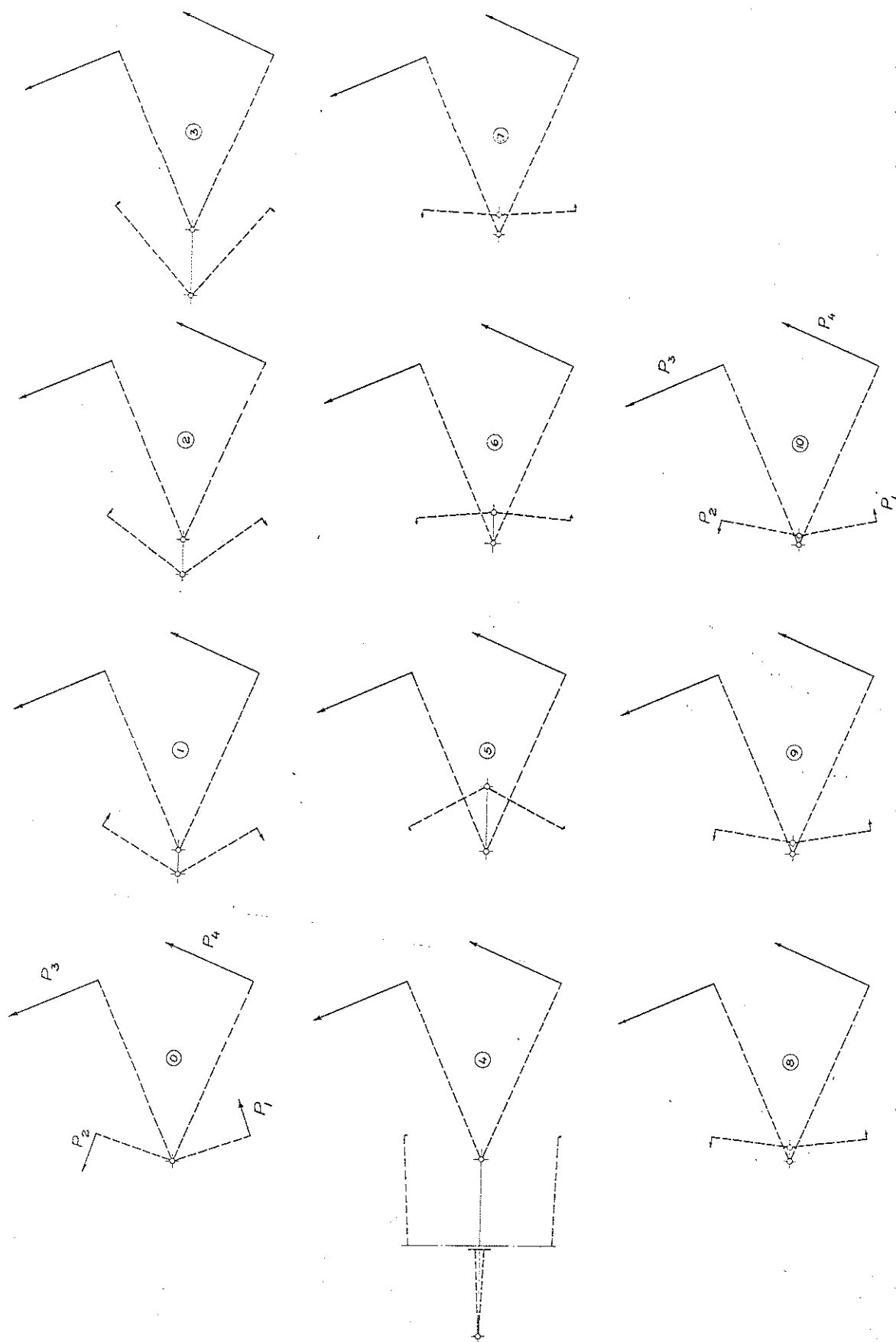


Fig. 34 (ex. 2f)

Fig. 35 (ex. 21)



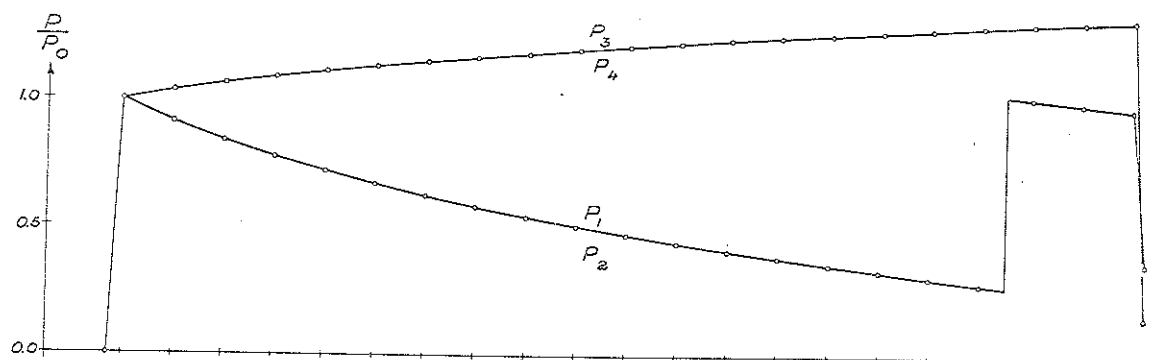
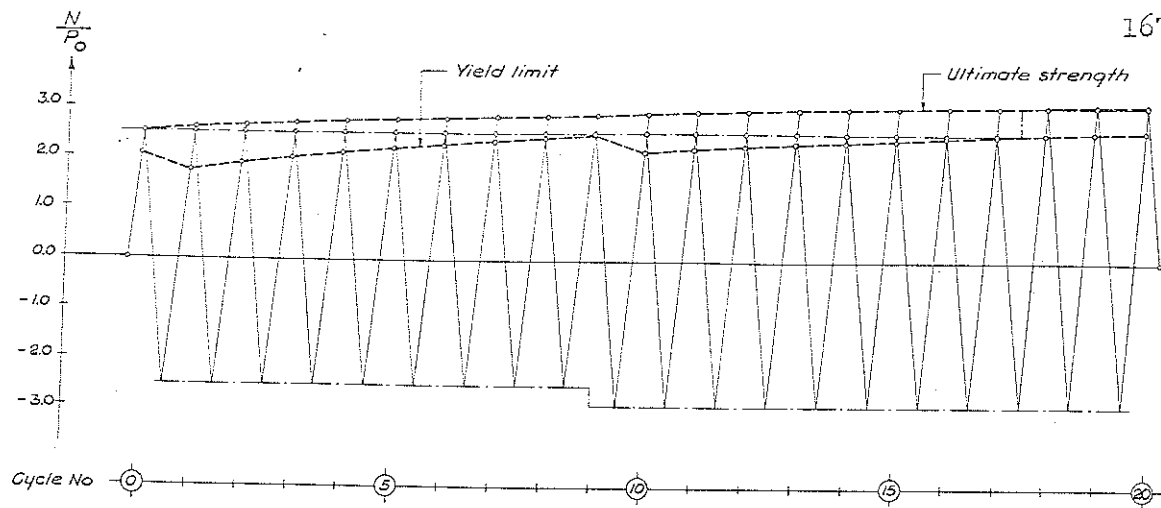
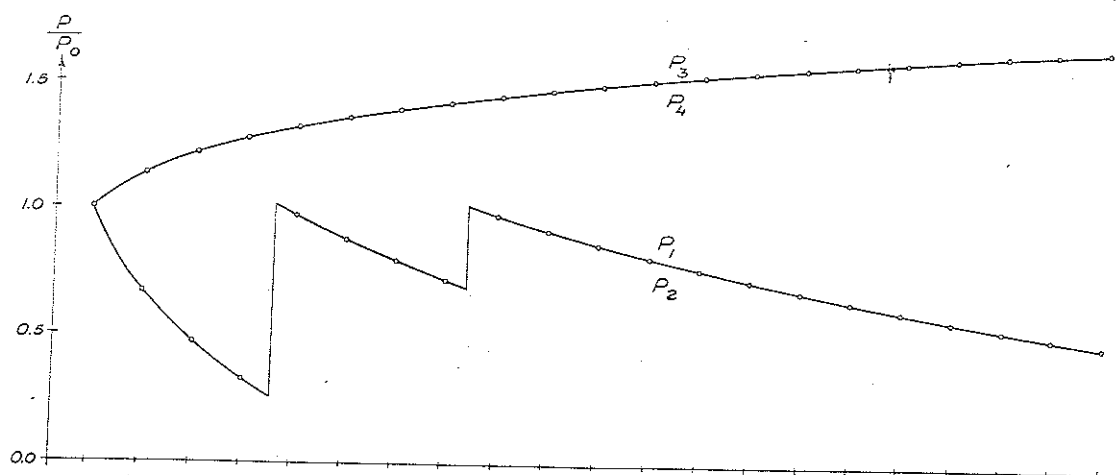
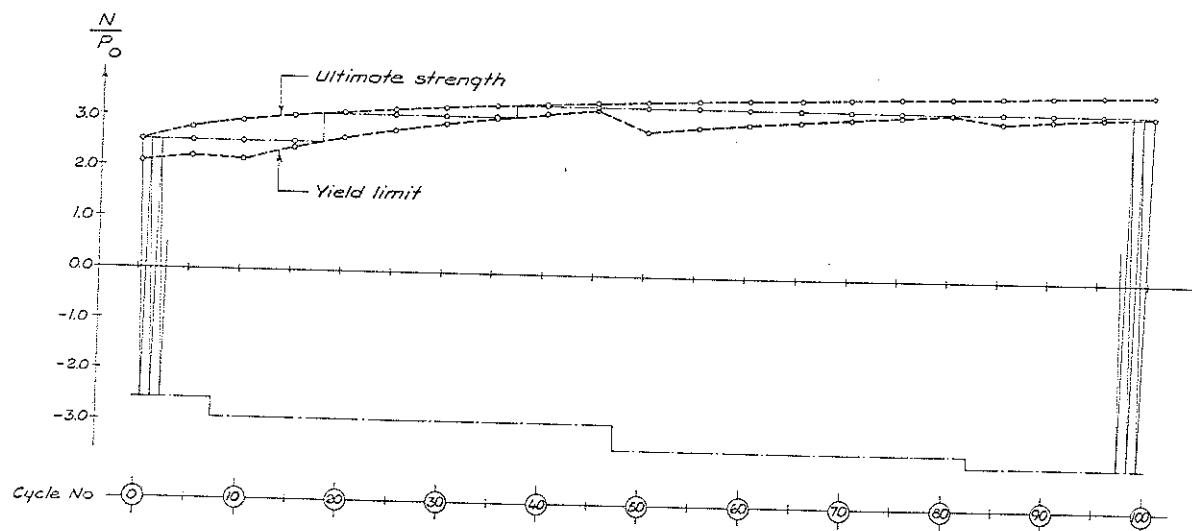


Fig. 36 (ex.22)



Weight		
a	b	c
1.00	1.80	0.31
1.00	1.40	0.40
1.00	1.00	0.56
1.00	0.60	0.93
1.00	0.20	2.80
1.00	0.20	2.80
1.00	0.60	0.93
1.00	1.00	0.56
1.00	1.40	0.40
1.00	1.80	0.31

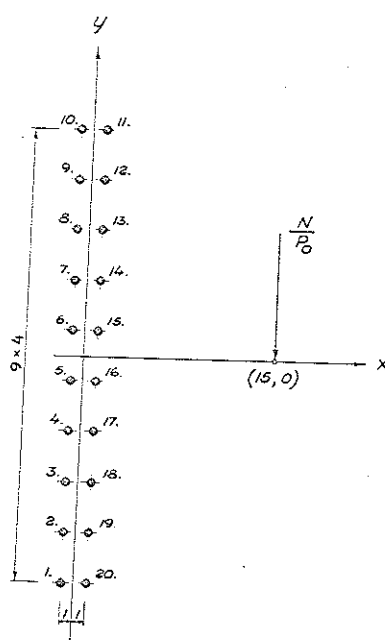


Fig. 38 (ex. 23)

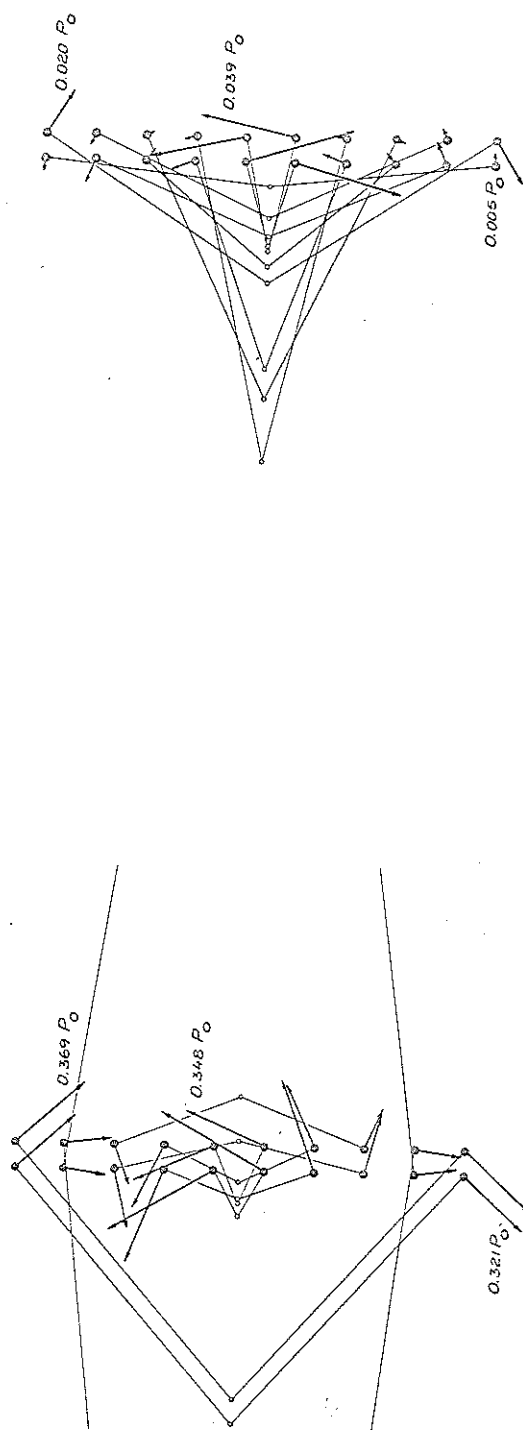
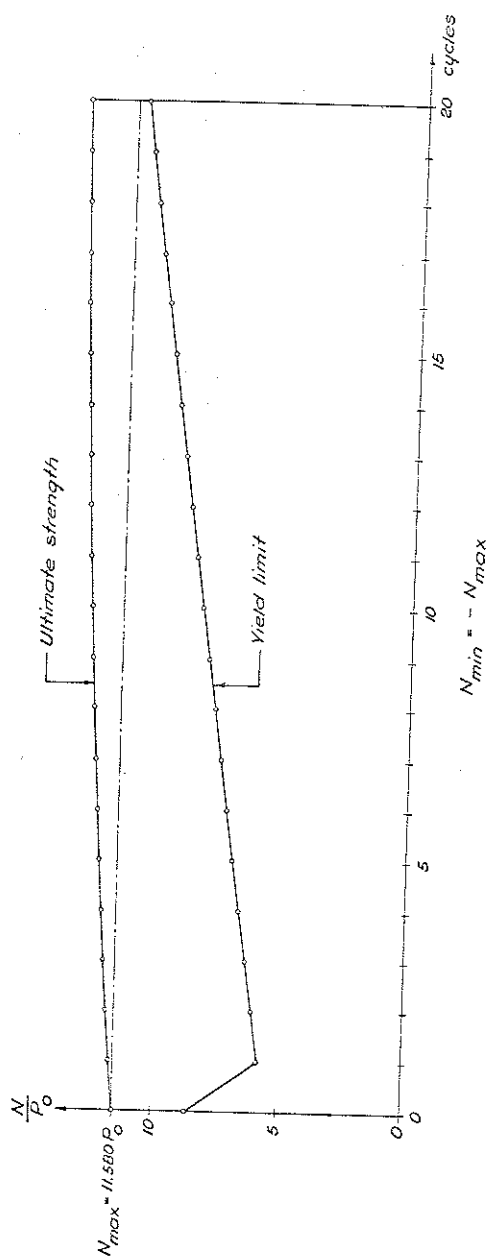


Fig. 39 (ex. 23)

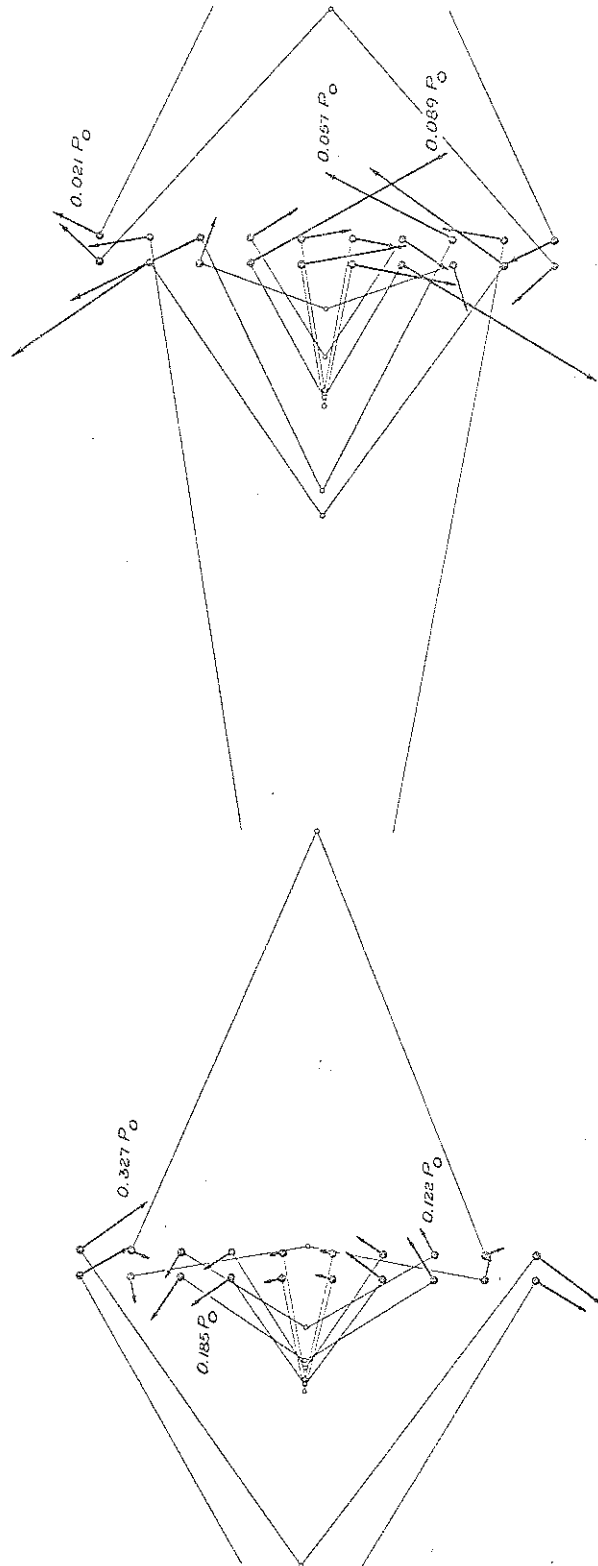
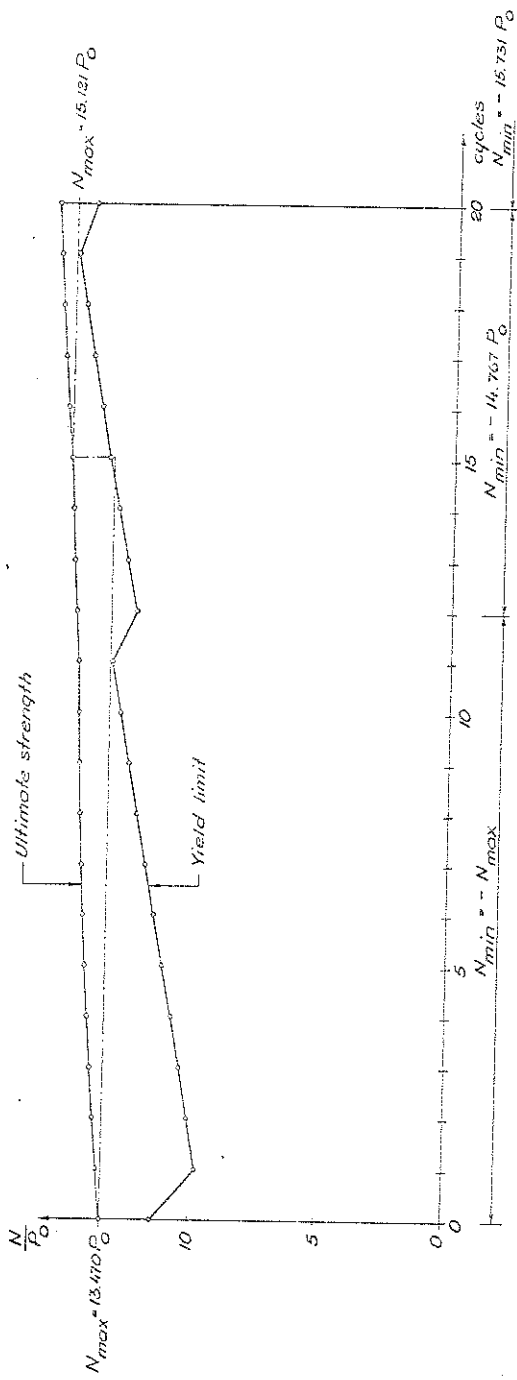


Fig. 4.0 (ex. 23)



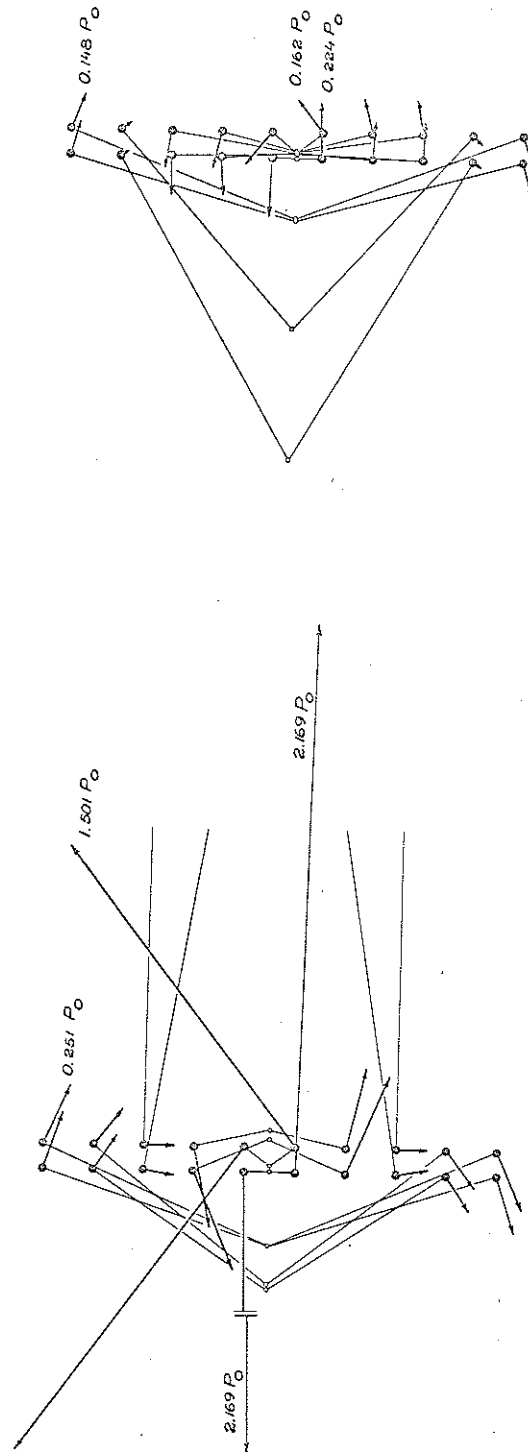
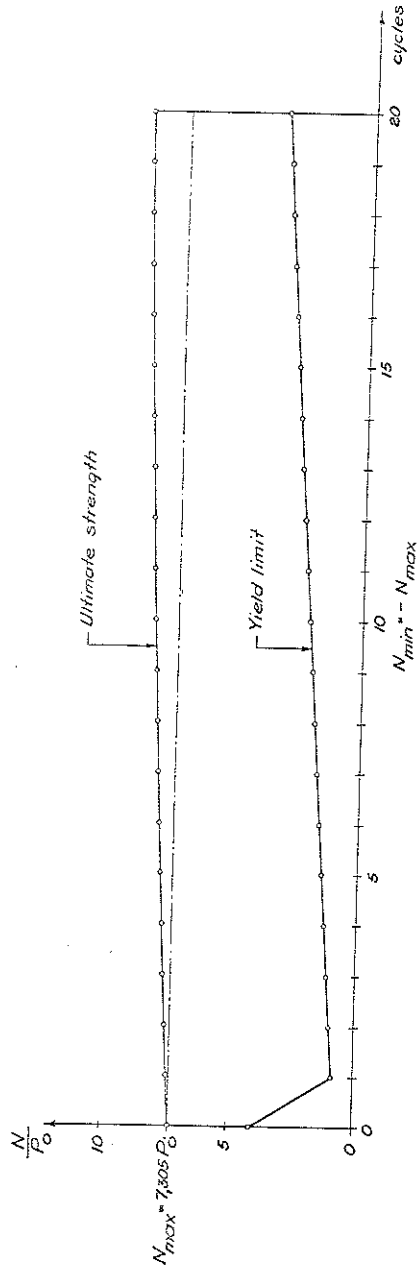


Fig. 41 (ex 23)

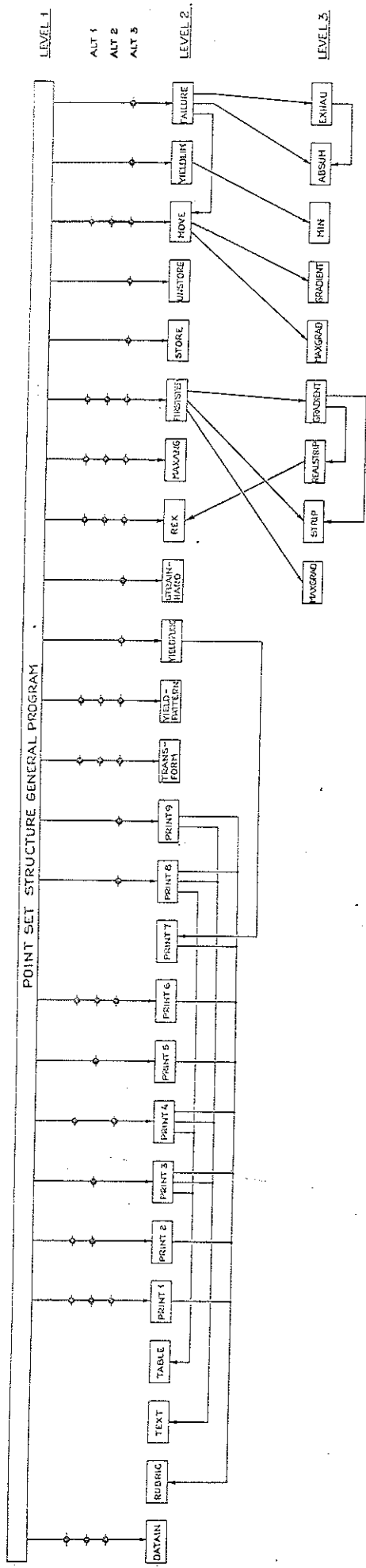


Fig. 4.2

