Entydighetssatser till Helmholtz ekvation, randvärdesproblem med oändlig begränsningsyta

Kristensson, Gerhard

Published in:
Festskrift till Nils Svartholm

1978

Document Version:
Förlagets slutgiltiga version

Internal Report TMF 78-2

ENTYDIGHETSSATSER TILL HELMHOLTZ EKVATION
RANDVÄRDESPROBLEM MED OÄNDLIG BEGRÄNSNINGSYTA

GERHARD KRISTENSSON

Institute of Theoretical Physics
Fack
S-402 20 GÖTEBORG
Sweden

ENTYDIGHETSSATSER TILL HELMHOLTZ EKVATION RANDVÄRDESPROBLEM MED OÄNDLIG BEGRÄNSNINGSYTA

Gerhard Kristensson

Abstract

I detta arbete kommer vi att visa några entydighetssatser för Helmholtz' ekvation. Området begränsas av en yta S_o som är oändlig. Främst kommer satser som visar entydigheten hos material med förluster att tas fram, men för vissa speciella ytor S_o kan även rent förlustfria medier behandlas. Randvillkoren kommer att vara av Churchills typ eller motsvarande för permeabla medier. Som ett led i beviskedjan visas också representationsteoremet med en oändlig begränsningsyta.

I Inledning och kort historik i ämnet

A. Sommerfeld[1)] var en av de första som löste det yttre problemet till Helmholtz' ekvation d v s

$$(\nabla^2+k^2)\psi=0 \qquad \text{(i)}$$

i ett område utanför en ändlig yta S_o. För att få ett fysikaliskt och matematiskt väldefinierat spridningsproblem infördes utstrålningsvillkor för $r\to\infty$. Dessa motiverades av krav på en utåtgående våg på stora avstånd från spridaren. Sådana villkor behövde ej beaktas i potentialteorin, och Sommerfeld klarlade här skillnaderna. Villkoret blir i Sommerfelds formulering:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - ik\psi\right)=0 \qquad \text{(ii)}$$

Dessutom krävdes - något som senare visade sig överflödigt - att

$\lim_{r\to\infty} r\psi$ är ändligt (ändlighetsvillkoret) (iii)

Dessa villkor på lösningen fungerar som randvillkor för $r\to\infty$, och med ett speciellt antagande på Greenfunktionen kunde så Sommerfeld visa att det yttre problemet var entydigt lösbart. Magnus[2)] generaliserade senare beviset genom att använda enbart villkoret (ii). Nästa steg gjordes av Rellich[3)] som visade att villkoret på fältet för stora avstånd från spridaren ytterligare kunde försvagas. Om $\Sigma(r)$ är en sfär med radien r så skall gälla:

$$\lim_{r\to\infty} \iint_{\Sigma(r)} \left|\frac{\partial\psi}{\partial r} - ik\psi\right|^2 dS=0 \qquad \text{(iv)}$$

Liknande överläggningar har gjorts på flera ställen i litteraturen t ex Wilcox[4)], Miranker[5)]. Den fortsatta utvecklingen har sedan inriktats på generaliseringar i olika riktningar. Speciellt har bevisen utvidgats till att gälla mer generella differentialoperatorer, men även andra mer allmänna typer av utstrålningsvillkor.

Om nu entydighetsbevis för ett yttre område - området utanför en ändlig yta - finns för en stor klass av differentialekvationer, så är de satser som uttalar sig om entydighet hos spridningsproblem med en oändlig randyta S_o mycket få. Ett pionjärarbete inom området svarar Rellich[3)] för. Han visar i sitt arbete att Helmholtz' ekvation med homogena randvillkor på den oändliga begränsningsytan S_o är entydigt lösbar om man antar ett utstrålningsvillkor av typ (iv) (ytan svarande mot $\Sigma(r)$ väljs av Rellich som ett plan z = konstant och $z\to\infty$). De ytor S_o som kan behandlas är av s k "parabolisk typ", d v s de skall ha en tillräckligt stor öppning mot oändligheten, detta för att ge möjlighet för energin att strömma ut. Mer exakt uttryckt, varje plan z=konstant skall skära av en ändlig del av S_o och normalvektorn på S_o (inåtriktad) får inte bilda en vinkel med z-axeln som är större än $\pi/2$. Det närliggande studiet av egenvärden till områden med oändlig begränsningsyta finns behandlat i Rellich[6] och Jones[7]. Dessa arbeten intar en central plats i den litteratur som finns inom området, och är flitigt refererade. Den funktional-analytiska sidan av entydighetsproblemet utvecklas, och här ges uppskattningar och begränsningar av det eventuella punktspektrum som finns till egenvärdesproblemet. Det sistnämnda arbetet innehåller dessutom flera entydighetssatser. Asymptotiskt koniska ytor, d v s ytor S_o som på mycket stora avstånd från origo är en kon (inte nödvändigtvis med cirkulärt tvärsnitt), visas för Dirichlets eller Neumanns randvillkor ha en entydig lösning. Även för dessa ytor finns uppenbarligen möjlighet för energin att försvinna ut från området, vilket av fysikaliska skäl bör gälla om problemet skall vara entydigt lösbart. Ett annat arbete från samma tid är Peters & Stoker[8] som visar en entydighetssats i två dimensioner för en spridare bestående av ändliga ytor samt en rät linje utanför en given cirkel. Miranker[5] ger i sin artikel ett entydighetsbevis för Dirichlets randvillkor om man i det oändliga området kan inskriva en cirkulär kon med öppningsvinkel $>\pi/2$. Denna sats inkluderar således inte ett område med plan begränsningsyta S_o, vilket är en klar brist.

Resultat som generaliserar dessa satser är fåtaliga. De arbeten som på senare tid publicerats är av mycket speciell natur och har begränsad tillämpning. Om vi ser tillbaka på vad som finns gjort med permeabla randvillkor, är även här resultaten fåtaliga. För fall med oändliga begränsningsytor finns veterligen inga explicita resultat publicerade, medan för fall med ändlig spridare har Werner[9] klarlagt entydighet i det akustiska fallet, men med relativt starka utstrålningsvillkor.

I detta arbete kommer några entydighetssatser för randvärdesproblem med oändlig begränsningsyta att presenteras. I första hand kommer medier med förluster att behandlas. Randvillkoren kommer att vara av Churchills typ eller motsvarande för permeabla medier. En kort innehållsbeskrivning blir: Avsnitt II innnehåller viktiga definitioner och diskuterar den fysikaliska bakgrunden till dessa. Representationsteoremet för oändlig begränsningsyta visas i avsnitt III. Entydighetssatser för komplexa resp rent reella vågtal för Churchills randvillkor behandlas i avsnitt IV resp V. Avslutningsvis kommer i avsnitt VI en entydighetssats för de permeabla randvillkoren att visas.

II Problemets formulering

I detta avsnitt kommer vi att formulera entydighetsproblemet samt definiera begrepp och ekvationer som skall användas längre fram.

Låt S_o vara en oändlig yta som delar det tredimensionella rummet R^3 i två områden V_o och V_1 (se figur). Origo O är här godtyckligt placerat och definierar lägevektorn $\vec{r}$. Ytorna $\Sigma_o(R)$ och $\Sigma_1(R)$ är den del av en sfär med radie R som tillhör V_o resp V_1. $\Sigma_o(R)$ skär i V_o ut ett område $V_o(R)$, vars begränsningsyta är $\Sigma_o(R)$ och en del av S_o som kallas $S_o(R)$. På liknande sätt definieras $V_1(R)$. Ytan S_o antas vara tillräckligt reguljär, så att de Greenska satserna kan tillämpas på varje $V_o(R)$. Tillräckliga krav på S_o för att detta skall vara uppfyllt finns i t ex[10-12] ([12] innehåller en modern och mer abstrakt behandling med generella resultat). Normalvektorn $\hat{n}$ definieras så att den pekar uppåt, d v s in i V_o. Vissa resultat kan generaliseras så att V_o och/eller V_1 tillåts innehålla begränsade inhomogeniteter - V_o' respektive V_1' med randytor S_o' respektive S_1' (normalen definieras som utåtriktad). (Om flera inhomogeniteter förekommer i V_o eller V_1 låter vi V_o' respektive V_1' stå som beteckning för summan av dessa trots att de materiella egenskaperna kan skilja sig). Inhomogeniteternas vågtal betecknas k_o' respektive k_1', medan vi för V_o och V_1 inför vågtalen k_o respektive k_1. Dessa vågtal antas vara konstanter.

De fältproblem som här skall behandlas är av skalär natur, och fälten skall i varje del av rymden uppfylla den reducerade vågekvationen (Helmholtz' ekvation). Fälten antas tillräckligt reguljära i varje område (två gånger kontinuerligt deriverbara) och uppfyller (fälten i respektive område betecknas med samma index som området, och vi har antagit tidsfaktorn $e^{-i\omega t}$)

A. $(\nabla^2+k_i^2)\psi_i(\vec{r})= -\rho_i(\vec{r}) \qquad \forall\, \vec{r}\in V_i$

B. $\operatorname{Im} k_i^2 \geqslant 0 \quad \operatorname{Re} k_i^2 > 0$ d v s $\arg k_i^2 \in [0,\pi/2)$

C. $\lim\limits_{R\to\infty} \iint\limits_{\Sigma_j(R)} \left|\frac{\partial\psi_j}{\partial R} - ik_j\psi_j\right|^2 dS=0 \qquad j=0,1$

Villkoret B uttrycker att mediet kan ha förluster, medan rent reellt vågtal innebär att mediet är förlustfritt. Redan här kan noteras att i bevisen nedan förekommer ofta villkor på k_i och ej på dess kvadrat. Vi väljer i alla dessa fall $\arg k_i \in [0,\pi/4)$. Utstrålningsvillkoret C, som är ett svagare villkor än det Sommerfeld[1] använde (se (ii) och (iii) i avsnitt I), infördes och studerades ursprungligen av Rellich[3], Wilcox[4], Peters & Stoker[8], Jones[7] m fl. Detta villkor är uppfyllt av utåtgående sfäriska vågor e^{ikr}/r, medan de inåtgående e^{-ikr}/r inte kan satisfiera C om $\Sigma_i(R)$ i gränsen $R\to\infty$ har en rymdvinkel skild från noll. Ett annat sätt att förvissa sig om att C uttrycker utåtgående vågor är att utveckla kvadraten i C som då får en term $\operatorname{Im} \iint\limits_{\Sigma_i(R)} \psi_i \frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial R}\, dS$ vilken uttrycker energiflödet <u>in</u>

genom Σ_i ($\bar{\psi}_i$ är det komplexkonjugerade fältet). Denna term kan i gränsen $R \to \infty$ visas vara mindre än eller lika med noll vilket tolkas som att energin strömmar ut ur $\Sigma_i(R)$. En mer detaljerad beskrivning kommer i ett senare avsnitt.

Vi övergår nu till att diskutera de randvillkor som blir aktuella här. Speciellt två typer av randvillkor kommer att tas upp - Churchills randvillkor (som har Dirichlets eller Neumanns randvillkor som specialfall) och randvillkor för medier som är permeabla.

D. a) $f\frac{\partial\psi}{\partial n} - g\psi = h$ (Churchills randvillkor)

där f och g ej båda samtidigt är noll på ytan

b) $A_+\frac{\partial\psi_+}{\partial n} = A_-\frac{\partial\psi_-}{\partial n}$

$B_+\psi_+ = B_-\psi_-$ (Permeabla randvillkor)

ψ_+ respektive ψ_- får beteckna gränsvärdena från ovan - respektive undersidan av ytan, (som definieras av ytans normalriktning) och $A_\pm$ och $B_\pm$ är konstanter skilda från noll.

Dessutom tillkommer ytterligare krav på funktionerna f och g och konstanterna A och B för att randvillkoren skall vara acceptabla. Vi kommer här endast att behandla randvärdesproblem med följande bivillkor:

D. a) $\mathrm{Im}(f/g) \geqslant 0$ eller $\mathrm{Im}(g/f) \leqslant 0$ beroende på om f eller $g \neq 0$

D. b) $\arg(C\bar{k}^2)=\alpha$ oberoende av material och där $C = \bar{A}B$.

(Streck innebär komplexkonjugering)

Vi sneglar nu på de fysikaliska fenomen som dessa randvillkor uttrycker och försöker ge en fysikalisk förklaring till dessa inskränkningar. Betrakta fallet D.a) med motsvarande homogena randvillkor h=0. Som tidigare nämnts beskriver $\mathrm{Im}\iint_S \psi \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial n}\, dS$ energiflödet in genom ytan S (mot normalens riktning). Den typen av inskräkning som ges av $\mathrm{Im}\, f/g \geqslant 0$ innebär att $\mathrm{Im}\iint_S \psi \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial n}\, dS \geqslant 0$ d v s energi flödar mot normalens riktning. Randvillkoret för det homogena problemet får således ej innebära att energi pumpas in i volymen V_o från källor utanför V_o. (Liknande bivillkor diskuteras i det s k yttre problemet (ändlig yta S_o) av Werner[13]).

Villkoret på D.b) förefaller lite märkligt, men kan, som visas nedan, förklaras i det akustiska fallet. Detta villkor visar sig nödvändigt för att visa entydigheten i vissa typer av spridningsproblem för permeabla medier. Det är uppenbart att fältet och dess derivata inte kan vara helt oberoende av varandra, utan några restriktioner måste komma in. (Fältet måste ju uppfylla Helmholtz' ekvation). De konstanter som står till buds är väsentligen olika multiplar av k så ett studium av bivillkoret till D.b) enligt ovan är inte helt onaturligt. Vi ser vidare genast att de permeabla randvillkoren är obestämda på en konstant när, vilket tar sig uttryck i en obestämd fas α. Det kan vara instruktivt att gå till akustiken och där se ursprunget till detta bivillkor. Låt därför ψ vara hastighetspotentialen, och låt mediet ha förluster i form av en dämpterm ϕ. Trycket kan då tecknas

$$p=(i\omega\rho-\phi)\psi$$

Randvillkoret D.b) blir:

$(i\omega\rho-\phi)\psi$ och $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ båda kontinuerliga över randytan.

Vi får $C = \bar{A}B = i\omega\rho-\phi$ i detta speciella fall.

Om vi dessutom antar att $\frac{\partial p}{\partial t} = - \kappa \nabla \cdot \vec{v} = - \kappa \nabla^2 \psi$
(κ är materialets kompressibilitet) får vi vågtalet

$$k^2 = \frac{\omega}{\kappa}(\rho\omega + i\phi)$$

och

$$\arg C\bar{k}^2 = \arg i\frac{\omega}{\kappa}((\omega\rho)^2 + \phi^2) = \pi/2$$

Vi är nu mogna att undersöka problemets entydighet mer ingående. D v s finns det mer än en lösning till randvärdesproblemet med en oändlig begränsningsyta S_o som uppfyller villkoren A-C samt något av de i D angivna randvillkoren?

I kommande avsnitt skall denna fråga undersökas, först då fall med randvillkor av typen D.a) men sedan även permeabla villkor. De flesta av de resultat som erhålls gäller endast om mediet har förluster men vissa resultat kan fås i det fullständigt förlustfria fallet.

III Representationsteoremet för obegränsad randyta

Representationsteoremet med oändlig begränsningsyta S_o finns bevisat i litteraturen se t ex [5]. Då vi senare i texten har anledning att använda representationsteoremet skall vi för fullständighetens skull visa teoremet här. Beviset blir något annorlunda än i t ex [5] och är mer anpassat till kommande avsnitt. För enkelhetens skull tillåter vi endast en fullständigt homogen rymd ovan S_o, men generaliseringen till icke homogen rymd kan genomföras analogt. Det är också möjligt att inkludera en källterm i Helmholtz' ekvation men vi avstår även från denna utvidgning, och behandlar endast källfri rymd.

Representationsteoremet: Låt S_o vara en i sektion II beskriven yta, samt antag, att fältet ψ_o uppfyller A-C i sektion II ($\rho_0 \equiv 0$) . Om randvillkoren är sådana att $\mathrm{Im}\ \psi_0 \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial n} \geqslant 0$ på ytan S_o, så konvergerar

$$\iint_{S_0} \overset{\pm}{G}(k_0:\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial \psi_0}{\partial n} - \psi_0 \frac{\partial}{\partial n}\overset{\pm}{G}(k_0:\vec{r},\vec{r}\,')dS'$$

där

$$\overset{\pm}{G}(k_0:\vec{r},\vec{r}\,')= \exp(\pm ik_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|)/4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

och vidare gäller

$$\left.\begin{matrix}\psi_0\\ 0\end{matrix}\right\}=\iint_{S_0}\psi_0\frac{\partial}{\partial n}\overset{\pm}{G}(k_0:\vec{r},\vec{r}\,')- \overset{\pm}{G}(k_0:\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial \psi_0}{\partial n}dS' \qquad \begin{cases}\vec{r}\in V_0\\ \vec{r}\notin V_0\end{cases} \tag{1}$$

Bevis: Använd Greens andra formel på fälten ψ_o och $\overset{\pm}{G}(k_o;\vec{r},\vec{r}\,')$ på en volym $V_o(R)$ (tag $R>r$)

$$\iint_{\Sigma_0(R)}\left[\psi_0\frac{\partial}{\partial R}\overset{\pm}{G} -\overset{\pm}{G}\frac{\partial}{\partial R}\psi_0\right] dS'= \iint_{S_0(R)}\left[\psi_0\nabla'\overset{\pm}{G} -\overset{\pm}{G}\nabla'\psi_0\right]\cdot\hat{n}\ dS'+ \iiint_{V_0(R)}\left[\psi_0\nabla'^2\overset{\pm}{G} -\overset{\pm}{G}\nabla'^2\psi_0\right]dV'$$

Utnyttja $\quad \nabla^2\overset{\pm}{G} + k_0^2\overset{\pm}{G}= -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\quad$ och villkoret A. Vi får

$$\iint_{\Sigma_0(R)}(\psi_0\frac{\partial}{\partial R}\overset{\pm}{G} -\overset{\pm}{G}\frac{\partial}{\partial R}\psi_0)dS' =\iint_{S_0(R)}(\psi_0\nabla'\overset{\pm}{G} -\overset{\pm}{G}\nabla'\psi_0)\cdot\hat{n}\ dS' - \psi_0\ \Delta \tag{2}$$

där $\quad \Delta=\begin{cases}1 & \vec{r}\in V_0\\ 0 & \vec{r}\notin V_0\end{cases}$

Vad som återstår att visa är att

$$\iint_{\Sigma_0(R)}(\psi_0\frac{\partial}{\partial R}\overset{\pm}{G} -\overset{\pm}{G}\frac{\partial}{\partial R}\psi_0)dS' \to 0 \text{ då } R \to \infty \quad \forall\ \vec{r}$$

Hölders olikhet kan i detta fall användas. Man får

$$\left|\iint_{\Sigma_0(R)}(\psi_0\nabla'\overset{\pm}{G} -\overset{\pm}{G}\nabla'\psi_0)\cdot\hat{n}\ dS'\right| \leqslant \iint_{\Sigma_0(R)}(|\psi_0|^2+|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}|^2)^{1/2}(|\overset{\pm}{G}|^2+|\frac{\partial\overset{\pm}{G}}{\partial R}|^2)^{1/2}dS' \leqslant$$

$$(\iint_{\Sigma_0(R)}|\psi_0|^2+|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}|^2dS')^{1/2}\cdot(\iint_{\Sigma_0(R)}|\overset{\pm}{G}|^2+|\frac{\partial\overset{\pm}{G}}{\partial R}|^2dS')^{1/2}$$

ty $|ab-cd|^2\leq(|a|^2+|c|^2)(|b|^2+|d|^2)$

Vi utvecklar nu utstrålningsvillkoret C

$$\iint_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R} - ik_0\psi_0\right|^2 dS = \iint_{\Sigma_0(R)} \Big[\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R} + \mathrm{Im}(k_0)\psi_0\right|^2 +$$

$$(\mathrm{Re}\ k_0)^2|\psi_0|^2 + 2\mathrm{Re}(k_0)\mathrm{Im}(\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R})\Big] dS \to 0 \qquad \text{då} \quad R\to\infty \tag{3}$$

Fältet ψ_o och dess komplexkonjugat $\overline{\psi}_o$ används i Greens första formel på volymen $V_0(R)$ tillsammans med villkor A. Vi får

$$\mathrm{Im}\iint_{\Sigma_0(R)} \psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R}\, dS = \mathrm{Im}\iint_{S_0(R)} \psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial n} dS + \mathrm{Im}(k_0^2)\iiint_{V_0(R)} |\psi_0|^2\, dV \geqslant 0$$

enligt villkor B och förutsättningen att $\mathrm{Im}\ \psi_o \dfrac{\partial\overline{\psi}_o}{\partial n} \geqslant 0$ på ytan S_o.

Då varje term i (3) är positiv ger utstrålningsvillkoret (3)

$$\iint_{\Sigma_0(R)} |\psi_0|^2 dS = o(1) \qquad R\to\infty$$

$$\iint_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2 + (\mathrm{Im}\ k_0)^2|\psi_0|^2 + 2\mathrm{Im}(k_0)\mathrm{Re}(\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R})\ dS = \iint_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R} + \mathrm{Im}(k_0)\psi_0\right|^2 dS$$

$$= o(1) \qquad R\to\infty$$

(Symbolen o definieras: $f(x) = o(g(x))$ då $x\to x_o \Leftrightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \to 0$ då $x\to x_o$, analogt definieras O om $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ är begränsad i en omgivning av x_o.)

Hölders olikhet och ekvationen ovan ger

$$\iint_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2 dS \leqslant o(1) + 2\mathrm{Im}(k_0)\left|\iint_{\Sigma_0(R)} \mathrm{Re}\,\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R} dS\right| \leqslant$$

$$\leqslant o(1) + 2\mathrm{Im}(k_0)\Big[\iint_{\Sigma_0(R)} |\psi_0|^2 dS \iint_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2 dS\Big]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant o(1) + o(1)\sqrt{\iint_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2 dS}$$

Härav drar vi lätt slutsatsen att $\iint\limits_{\Sigma_0(R)} |\frac{\partial\psi_0}{\partial R}|^2 dS = o(1) \quad R \to \infty$
och följande gäller

$$\iint\limits_{\Sigma_0(R)} |\psi_0|^2 + |\frac{\partial\psi_0}{\partial R}|^2 dS = o(1) \qquad R \to \infty$$

Nu är

$$\iint\limits_{\Sigma_0(R)} |\overset{\pm}{G}|^2 + |\frac{\partial G^{\pm}}{\partial R}|^2 dS \text{ ändligt då } R \to \infty \quad \forall \vec{r} \quad \text{så}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0(R)} (\psi_0 \frac{\partial G^{\pm}}{\partial R} - G^{\pm}\frac{\partial\psi_0}{\partial R}) dS \to 0 \text{ då } R \to \infty$$

och vi finner att ytintegralen

$$\iint\limits_{S_0(R)} (\psi_0 \frac{\partial G^{\pm}}{\partial n} - G^{\pm}\frac{\partial\psi_0}{\partial n}) dS$$

är konvergent med gränsvärdet $\Delta\psi_o$ och satsen är bevisad.

Miranker[5)] har en något annorlunda bevisteknik. Han antager att ytintegralerna existerar för både ut- och ingående Greenfunktionen, d v s både för $G^{\pm} = \exp(\pm i\, k_o|\vec{r}-\vec{r}'|)/4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|$ och kan med detta antagande visa (1). Man kan åter göra den observationen att vårt antagande Im $\psi_o \frac{\partial\bar{\psi}_o}{\partial n} \geq 0$ uttrycker att energin flödar mot normalens riktning i varje punkt av S_o. Ett ganska starkt antagande men i våra tillämpningar här fullt tillräckligt.

IV Entydighetssatser för Churchills randvillkor med komplexa värden på k

Vi skall nu visa några entydighetssatser för Helmholtz' ekvation med oändlig begränsningsyta. I detta avsnitt skall vi behandla Churchills randvillkor och visa dess entydighet om mediet har förluster.

Betrakta en volym V_o med inhomogenitet V_o', vars begränsningsytor är S_o och S_o'. De randvillkor som krävs är av typen D.a) (med villkor på f och g). Övriga beteckningar fås från avsnitt II eller figur.

Sats 1. Låt ψ_o vara ett fält som uppfyller A-C samt D.a) från avsnitt II. Om vidare $\mathrm{Im}\, k_0^2 > 0$, så är detta fält entydigt bestämt.

Bevis: Bevismetoden blir den klassiska. Antag, att det existerar två fält ψ_o' och ψ_o'' som båda uppfyller villkoren i sats 1. Bilda skillnaden $\psi_o = \psi_o' - \psi_o''$ som även uppfyller villkoren i satsen, men med homogena randvillkor ($h \equiv 0$) och utan källterm ($\rho_o \equiv 0$).

Även C är uppfyllt men ej trivialt, då utstrålningsvillkoret ej är linjärt. Minkowskis olikhet ger

$$\iint\limits_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}-ik_0\psi_0\right|^2 dS \leq$$

$$\leq \left\{\left[\iint\limits_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0'}{\partial R}-ik_0\psi_0'\right|^2 dS\right]^{1/2} + \left[\iint\limits_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0''}{\partial R}-ik_0\psi_0''\right|^2 dS\right]^{1/2}\right\}^2 = o(1) \quad \text{då} \quad R \to \infty$$

Vi skall nu visa, att ψ_o måste vara identiskt noll om $\mathrm{Im}\, k_0^2 > 0$. Utstrålningsvillkoret C skriver vi ut explicit som

$$\iint\limits_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}-ik_0\psi_0\right|^2 dS =$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0(R)} \left[\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}+\mathrm{Im}(k_0)\psi_0\right|^2 + (\mathrm{Re}k_0)^2|\psi_0|^2\right]dS + 2\mathrm{Re}(k_0)\mathrm{Im}\iint\limits_{\Sigma_0(R)}\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R}dS = o(1) \qquad (4)$$

Greens första formel med fältet ψ_o och dess komplexkonjugering $\overline{\psi}_o$ på området $V_0(R)$ ger. (R väljs så att $V_0(R) \supset V_0'$)

$$\mathrm{Im}\iint\limits_{\Sigma_0(R)}\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R}dS =$$

$$\mathrm{Im}\iint\limits_{S_0(R)}\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial n}dS + \mathrm{Im}\iint\limits_{S_0'}\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial n}dS + \mathrm{Im}k_0^2\iiint\limits_{V_0(R)}|\psi_0|^2 dV \qquad (5)$$

Om nu randvillkoren införs på ytan $S_o(R)$ så gäller (antag, att $g \neq 0$ överallt på ytan $S_o(R)$. Om $g = 0$ någonstans medför detta vissa enkla modifieringar.)

$$\operatorname{Im}\iint_{S_0(R)}\psi_0\frac{\partial\bar{\psi}_0}{\partial n}dS = \operatorname{Im}\iint_{S_0(R)} f/g\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\right|^2 dS \geqslant 0$$

ty Im f/g $\geqslant$ 0 överallt. På samma sätt visas att $\operatorname{Im}\iint_{S_0'}\psi_0\frac{\partial\bar{\psi}_0}{\partial n}dS \geqslant 0$
Enligt (5) är således

$$\operatorname{Im}\iint_{\Sigma_0(R)}\psi_0\frac{\partial\bar{\psi}_0}{\partial R}dS \geqslant 0$$

vilket insatt i ekvation (4) innebär att varje term är positiv och således var för sig har gränsvärdet noll då $R \to \infty$. Speciellt gäller att vänstra ledet i (5) har gränsvärdet noll (vi har som villkor B explicit antagit Re $k_o > 0$). Men med samma argument igen (varje term positiv) har alltså följande uttryck gränsvärdet noll.

$$\operatorname{Im}k_0^2\iiint_{V_0(R)}|\psi_0|^2 dV = o(1) \quad \text{då } R \to \infty \text{ eller}$$

$$\iiint_{V_0(R)}|\psi_0|^2 dV = o(1) \Leftrightarrow \psi_0 \equiv 0 \text{ i } V_0 \quad \text{ty } \operatorname{Im}k_0^2 > 0$$

Entydigheten är därmed visad.

V Entydighetssatser för reella k med Dirichlets randvillkor

De entydighetssatser som finns för randvärdesproblem med oändliga ytor och reella vågtal är mer specialiserade. Som redan nämnts har Jones[7] och Rellich[3] och Miranker[5] lämnat väsentliga bidrag.

I detta avsnitt skall vi betrakta ett randvärdesproblem mycket påminnande om det Rellich[3] presenterar. Vi kommer att använda utstrålningsvillkoret C, vilket är en modifierad form av det Rellich använder. Satsen blir på så vis mer allmän än den av Rellich, då t ex även en asymptotiskt plan yta kan inkluderas.

Låt V_o vara ett oändligt område med randyta S_o. Vi antar dessutom att rymden ovan S_o är helt homogen, d v s ingen volym V_o', samt att Dirichlets randvillkor gäller på ytan $S_o (f \equiv 0)$.

Antag, att villkoren A-D.a) från sektion II gäller, d v s i vårt speciella fall

A. $(\nabla^2 + k_o^2)\ \psi_o\ (\vec{r}) = -\ \rho_o(\vec{r})$

B. $k_o > 0 \quad k_o$ reellt

C. $\lim\limits_{R\to\infty} \iint\limits_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R} - ik_0\psi_0\right|^2 dS = o(1) \qquad$ då $R \to \infty$

D. $\psi_o(\vec{r}\,') = h(\vec{r}\,') \quad \vec{r}\,' \in S_o$

E. Det existerar någon riktning $\hat{a}$ (fix vektor) så att $\hat{n} \cdot \hat{a} > 0$ för alla punkter på ytan S_o.

Det sista villkoret E är ett extra villkor som vi måste antaga för ytan S_o. Hur det explicit används framgår av beviset till följande sats.

<u>Sats 2</u>. Ett fält uppfyllande A-E enligt ovan är entydigt bestämt.

<u>Bevis</u>: Som i sats 1 studeras skillnaden mellan två lösningar ψ_o', ψ_o''. Skillnaden $\psi_o = \psi_o' - \psi_o''$ uppfyller också A-E men randvillkoren är homogena $(h \equiv 0)$. Utstrålningsvillkoret C gäller för ψ_o, vilket visas på samma sätt som i sats 1. Studera följande uttryck, där $\hat{a}$ är en fix vektor

$$2\nabla\cdot\left[\mathrm{Re}(\nabla\psi_0\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0)\right] + k_0^2\hat{a}\cdot\nabla|\psi_0|^2 - \hat{a}\cdot\nabla|\nabla\psi_0|^2 =$$

$$=2\mathrm{Re}\left[\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0\nabla^2\psi_0 + \nabla(\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0)\cdot\nabla\psi_0\right] + k_0^2\hat{a}\cdot 2\mathrm{Re}(\psi_0\nabla\overline{\psi}_0) - \hat{a}\cdot 2\mathrm{Re}(\nabla\psi_0\cdot\nabla)\nabla\overline{\psi}_0 =$$

$$=2\mathrm{Re}\left[(\nabla^2\psi_0 + k_0^2\psi_0)\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0\right] + 2\mathrm{Re}\left[(\nabla\psi_0\cdot\nabla)(\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0) - (\nabla\psi_0\cdot\nabla)(\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0)\right] = 0$$

enligt förutsättning A.

Vi observerar genast att vänstra sidan är uttryckt som en divergens ($\hat{a}$ är en fix vektor). Använd nu Gauss' sats på ett område $V_o(R)$. Vi får

$$\iint_{\Sigma_0(R)}\left[2\mathrm{Re}(\nabla\psi_0\ \hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0) + k_0^2\hat{a}|\psi_0|^2 - \hat{a}|\nabla\psi_0|^2\right]\cdot\hat{n}\ dS -$$

$$-\iint_{S_0(R)}\left[2\mathrm{Re}(\nabla\psi_0\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0) + k_0^2\hat{a}\cdot|\psi_0|^2 - \hat{a}|\nabla\psi_0|^2\right]\cdot\hat{n}\ dS = 0$$

d v s

$$\iint_{\Sigma_0(R)}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0 + \frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R}\ \hat{a}\cdot\nabla\psi_0 + (k_0^2|\psi_0|^2 - |\nabla\psi_0|^2)\ \hat{a}\cdot\hat{R}\ \right]dS =$$

$$\iint_{S_0(R)}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0 + \frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial n}\hat{a}\cdot\nabla\psi_0 - \hat{a}\cdot\hat{n}|\nabla\psi_0|^2\right]dS \tag{6}$$

Här har vi använt randvillkoret $\psi_0=0$ på ytan S_o. Utstrålningsvillkoret C kan vi skriva om på samma sätt som i sats 1 och vi får

$$\iint_{\Sigma_0(R)}\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}-ik_0\psi_0\right|^2 dS = \iint_{\Sigma_0(R)}\left(\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2 + k_0^2|\psi_0|^2\right)dS = o(1) \quad \text{då } R\to\infty$$

ty

$$\mathrm{Im}\iint_{\Sigma_0(R)}\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R}dS \equiv 0$$

om k_o är reellt, och randvillkoren homogena. (Greens första formel!)

För reella k_0 gäller således

$$\left\{\begin{aligned} &\iint_{\Sigma_0(R)}\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2 dS = o(1) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{då } R\to\infty \\ &\iint_{\Sigma_0(R)}|\psi_0|^2 dS = o(1) \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Vi går nu tillbaka till ekvation (6) och studerar speciellt fältderivatorna. Låt $\vec{r}'$ vara en godtycklig punkt på ytan S_o och $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{n})$ ett lokalt ortogonalt koordinatsystem i $\vec{r}'$. En godtycklig riktningsderivata blir då p g a de homogena randvillkoren

$$\hat{b}\cdot\nabla\psi_0 = \frac{\hat{b}\cdot\hat{x}_1}{h_1}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1} + \frac{\hat{b}\cdot\hat{x}_2}{h_2}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2} + \hat{b}\cdot\hat{n}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial n} = \hat{b}\cdot\hat{n}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial n}$$

Hela ekvation (6) kan därför skrivas om

$$\iint\limits_{S_0(R)}\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\right|^2\hat{a}\cdot\hat{n}\;dS = \iint\limits_{\Sigma_0(R)}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\hat{a}\cdot\nabla\overline{\psi}_0 + \frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R}\hat{a}\cdot\nabla\psi_0 + (k_0^2|\psi_0|^2 - |\nabla\psi_0|^2)\hat{a}\cdot\hat{R}\right]dS \quad (6')$$

Observera att det vänstra ledet är > 0 enligt villkor E, såvida inte $\frac{\partial\psi_o}{\partial n} \equiv 0$.

Visa nu att hela högra ledet har gränsvärdet noll då $R \to \infty$. För att visa detta studerar vi "ett sfäriskt skal" d v s området mellan två ytor $\Sigma_o(R)$ och $\Sigma_o(R+c)$ där c är ett fixt tal. Området mellan ytorna kallar vi $\tilde{V}_o(R)$. Greens första formel ger

$$\Big(\iint\limits_{\Sigma_0(R+c)} - \iint\limits_{\Sigma_0(R)}\Big)\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R}dS = \iiint\limits_{\tilde{V}_0(R)}(|\nabla\psi_0|^2 - k_0^2|\psi_0|^2)dV$$

Ytintegralen från S_o försvinner p g a det homogena randvillkoret.

$$\iiint\limits_{\tilde{V}_0(R)}|\nabla\psi_0|^2dV = k_0^2\iiint\limits_{\tilde{V}_0(R)}|\psi_0|^2dV + \Big(\iint\limits_{\Sigma_0(R+c)} - \iint\limits_{\Sigma_0(R)}\Big)\psi_0\frac{\partial\overline{\psi}_0}{\partial R}dS$$

$$\iiint\limits_{\tilde{V}_0(R)}|\nabla\psi_0|^2dV \leq k_0^2\int_R^{R+c}dr\iint\limits_{\Sigma_0(r)}|\psi_0|^2dS + \Big(\iint\limits_{\Sigma_0(R+c)} + \iint\limits_{\Sigma_0(R)}\Big)|\psi_0|\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|dS \leq$$

$$\leq k_0^2c\iint\limits_{\Sigma_0(\xi)}|\psi_0|^2dS + \Big[\iint\limits_{\Sigma_0(R+c)}|\psi_0|^2dS\iint\limits_{\Sigma_0(R+c)}\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2dS\Big]^{1/2} + \Big[\iint\limits_{\Sigma_0(R)}|\psi_0|^2dS\iint\limits_{\Sigma_0(R)}\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2dS\Big]^{1/2}$$

I den sista olikheten används Hölders olikhet och $\xi \in [R, R + c]$. Om man beaktar att ekvation (7) gäller får vi

$$\iiint_{\tilde{V}_0(R)} |\nabla\psi_0|^2 dV = o(1) \qquad \text{då } R \to \infty$$

Om r integrationen explicit utförs får vi med $\xi \in [R, R + c]$

$$c \iint_{\Sigma_0(\xi)} |\nabla\psi_0|^2 dS = \int_R^{R+c} dr \iint_{\Sigma_0(r)} |\nabla\psi_0|^2 dS = o(1) \qquad \text{då } R\to\infty$$

D v s

$$\iint_{\Sigma_0(R)} |\nabla\psi_0|^2 dS = o(1) \qquad \text{då } R\to\infty \tag{7'}$$

(eg. man kan finna en följd $R_n \to \infty$ sådan att v.l. har gränsvärdet noll)

Vi går nu tillbaka till ekvation (6') och uppskattar högra ledet med Hölders olikhet.

$$0 \leqslant \iint_{S_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\right|^2 \hat{a}\cdot\hat{n}\, dS \leqslant 2\left[\iint_{\Sigma_0(R)} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial R}\right|^2 dS \iint_{\Sigma_0(R)} |\hat{a}\cdot\nabla\psi_0|^2 dS\right]^{1/2}$$

$$+ k_0^2 \iint_{\Sigma_0(R)} |\psi_0|^2 dS + \iint_{\Sigma_0(R)} |\nabla\psi_0|^2 dS = o(1) \qquad \text{då } R\to\infty$$

enligt ekvationerna (7) och (7') samt $|\hat{R} \cdot \hat{a}| \leqslant 1$.

Till slut har vi så visat att följande integral är konvergent och har gränsvärdet noll

$$\iint_{S_0} \left|\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\right|^2 \hat{n}\cdot\hat{a}\, dS = 0$$

Men $\hat{n} \cdot \hat{a} > 0$ vilket medför att $\frac{\partial\psi_o}{\partial n} \equiv 0$ på ytan S_o. Men om både ψ_o och $\frac{\partial\psi_o}{\partial n}$ är noll på ytan S_o så är $\psi_o \equiv 0$ i hela V_o enligt representationsteoremet.

Vi har så visat att $\psi_o' \equiv \psi_o''$ och entydigheten är säkerställd.

VI Permeabla medier

När det gäller randvärdesproblem för permeabla media fordrar vi två utstrålningsvillkor - ett i vardera halvrymden. I detta avsnitt visas endast entydighet i det fall då halvrymderna har förluster. Dessutom kommer vi att kräva extra antaganden på det asymptotiska uppförandet hos fälten ψ_o, ψ_1 för att beviset skall gå igenom. Följande sats visas:

Sats 3: Låt ψ_i vara fält som uppfyller villkoren A-C i avsnitt II samt dessutom $\text{Im } k_o^2 > 0$ och $\text{Im } k_1^2 > 0$. Vidare antas att

$$\iint_{\Sigma_i(R)} |\psi_i|^2 dS = o(1) \qquad \text{då } R\to\infty \qquad i = 0,1$$

Randvillkoren är av typ D.b) d v s

$$\begin{cases} A_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial n} = A_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial n} \\ B_0 \psi_0 = B_1 \psi_1 \end{cases} \qquad \text{på ytan } S_0$$

$$\begin{cases} A_i \dfrac{\partial \psi_i}{\partial n} = A_i' \dfrac{\partial \psi_i'}{\partial n} \\ B_i \psi_i = B_i' \psi_i' \end{cases} \qquad \text{på ytorna } S_i' \quad i = 0,1$$

$$\begin{cases} \arg C_i \bar{k}_i'^2 = \alpha \\ \arg C_i' \bar{k}_i'^2 = \alpha \end{cases} \qquad i = 0,1$$

där $C = \bar{A}B$ och α är en för de olika materialen gemensam konstant. Då är lösningen entydigt bestämd.

Bevis: Studera på sedvanligt sätt skillnaden mellan två fält som båda uppfyller antagandena. Satsen är bevisad om motsvarande homogena problem (d v s $\rho_i \equiv 0$) endast har nollösning. Greens första formel används som i de föregående satserna på $V_o(R)$, $V_1(R)$, V_o' samt V_1'. Vi får

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_{\Sigma_i(R)} \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial R}\, dS = \pm \iint_{S_0(R)} \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial n}\, dS + \iint_{S_i'} \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial n}\, dS + \iiint_{V_i(R)} (|\nabla\psi_i|^2 - \bar{k}_i^2|\psi_i|^2)dV \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 0,1 \qquad (8) \\ \displaystyle\iint_{S_i'} \psi_i' \frac{\partial \bar{\psi}_i'}{\partial n}\, dS = \iiint_{V_i'} (|\nabla\psi_i'|^2 - \bar{k}_i'^2|\psi_i'|^2)dV \end{cases}$$

(± tecknet härrör från ytnormalens riktning) Multiplicera den översta ekvationen med C_i och addera i = 0 och i = 1 samt utnyttja den nedre ekvationen och randvillkoren

$$C_0\iint_{\Sigma_0(R)} \psi_0 \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial R} dS + C_1\iint_{\Sigma_1(R)} \psi_1 \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial R} dS =$$

$$\sum_{i=0}^{1} C_i \iiint_{V_i(R)} (|\nabla\psi_i|^2 - \bar{k}_i^2|\psi_i|^2)dV + \sum_{i=0}^{1} C_i' \iiint_{V_i'} (|\nabla\psi_i'|^2 - \bar{k}_i'^2|\psi_i'|^2)dV$$

Multiplicera med $e^{-i\alpha}$ och tag imaginärdelen av båda leden

$$\sum_{i=0}^{1} \mathrm{Im} C_i e^{-i\alpha} \iint_{\Sigma_i(R)} \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial R}\, dS = \sum_{i=0}^{1} (\mathrm{Im} C_i e^{-i\alpha} \iiint_{V_i(R)} |\nabla\psi_i|^2 dV + \mathrm{Im} C_i' e^{-i\alpha} \iiint_{V_i'} |\nabla\psi_i'|^2 dV) \geqslant 0 \qquad (9)$$

ty

$$\mathrm{Im} C e^{-i\alpha} = \mathrm{Im} C\bar{k}^2/\bar{k}^2 e^{-i\alpha} = C\bar{k}^2 e^{-i\alpha} \mathrm{Im}\, 1/\bar{k}^2 > 0$$

Utstrålningsvillkoret ger följande

$$\iint_{\Sigma_i(R)} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial R} - ik_i\psi_i\right|^2 dS = \iint_{\Sigma_i(R)} \left(\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial R}\right|^2 + |k_i|^2|\psi_i|^2 + 2\mathrm{Im}(k_i\psi_i\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial R})\right)dS = o(1) \qquad \text{då } R\to\infty$$

Följande beteckningar underlättar

$$\alpha_i(R) = \iint_{\Sigma_i(R)} |k_i|^2|\psi_i|^2 dS = o(1)$$

$$\beta_i(R) = \iint_{\Sigma_i(R)} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial R}\right|^2 dS \in [0,\infty)$$

$$\gamma_i(R) = \iint_{\Sigma_i(R)} \psi_i \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial R} dS$$

Hölders olikhet

$$4(\mathrm{Im}k_i)^2|\gamma_i(R)|^2 \leq 4\frac{(\mathrm{Im}k_i)^2}{|k_i|^2}\alpha_i(R)\beta_i(R) \leq 4\alpha_i(R)\beta_i(R)$$

dessutom gäller

$$|2\mathrm{Im}(k_i\gamma_i(R))|^2 = |o(1) - \alpha_i(R) - \beta_i(R)|^2 =$$

$$|\alpha_i(R) + \beta_i(R)|^2 + o(1) + o(1)\beta_i(R)$$

$$(\alpha_i(R) + \beta_i(R))^2 + o(1)(1 + \beta_i(R)) \leq 4\alpha_i(R)\beta_i(R)$$

$$(\alpha_i(R) - \beta_i(R))^2 \leq o(1)(1 + \beta_i(R))$$

Härav drar man lätt slutsatsen att

$$\left.\begin{matrix}\alpha_i(R)\\ \beta_i(R)\end{matrix}\right\} = o(1) \qquad \text{då} \quad R\to\infty$$

Hölders olikhet ger

$$\sum_{i=0}^{1}\mathrm{Im}C_i e^{-i\alpha}\iint_{\Sigma_i(R)}\psi_i\frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial n}\,dS = o(1) \qquad \text{då } R\to\infty$$

och ekvation (9)

$$\iiint_{V_i(R)}|\nabla\psi_i|^2 dV = o(1) \qquad \text{då} \quad R\to\infty \qquad i=0,1$$

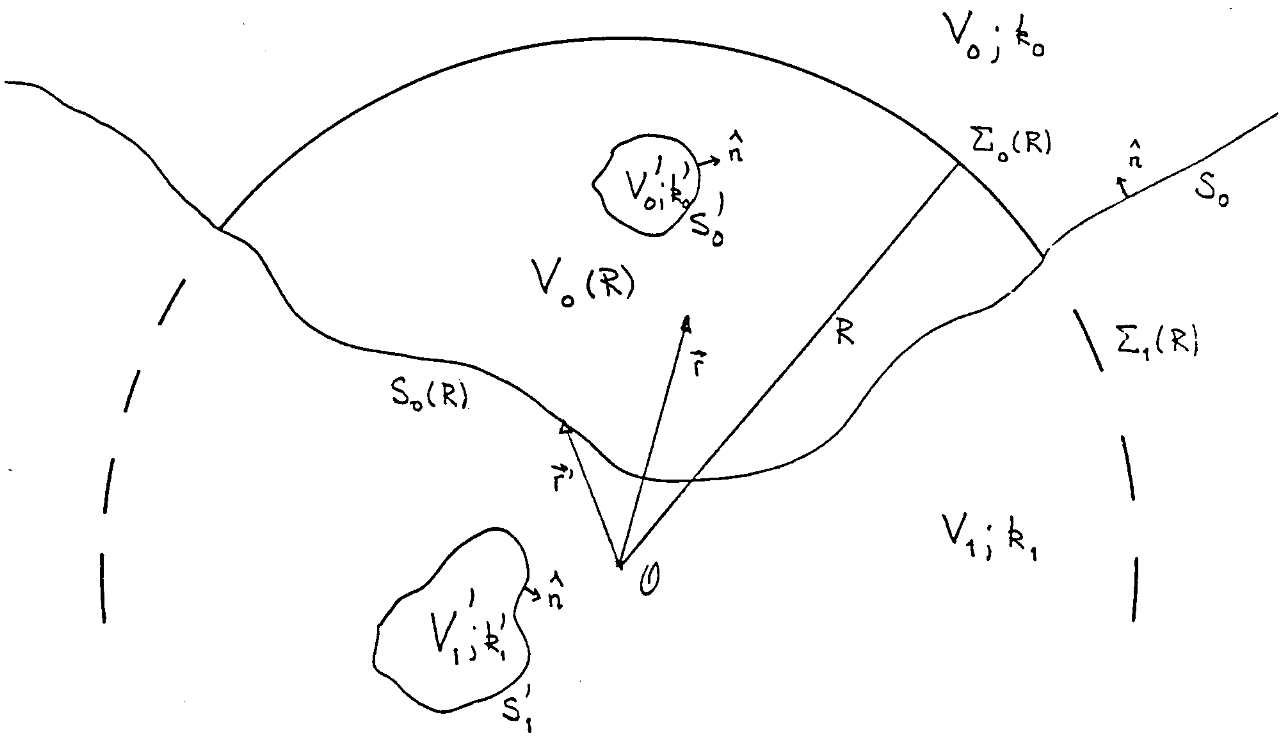
ty $\mathrm{Im}\, C_i e^{-i\alpha} > 0$. D v s ψ_i är konstanta i V_i, och p g a utstrålningsvillkoret är $\psi_1 = \psi_o \equiv 0$. Av randvillkoren på S_o' och S_1' följer nu att både ψ_i' och dess normalderivata är noll innanför S_o' och S_1'. Enligt representationsteoremet för ändliga ytor är då även $\psi_i' \equiv 0$ och satsen är bevisad.

Vi observerar att det extra antagandet $\iint_{\Sigma_i(R)} |\psi_i|^2 dS = o(1)$ är starkare än Sommerfelds ändlighetsvillkor (se (iii) i avsnitt I) men är förenligt med villkoret Im $k_i^2 > 0$, genom att man då har starka skäl att antaga att fältet avtar snabbare än 1/r.

Referenser

1. Sommerfeld A, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, Jahresbericht d Deutschen Mathem Vereinigung 21, 309, 1912.
2. Magnus W, Uber Eindeutigkeitsfragen bei einer Randwertaufgabe, Jahresbericht d Deutschen Mathem Vereinigung 52, 177, 1942.
3. Rellich F, Über das Asymptotische Verhalten der Lösung von $\Delta u+\lambda u=0$ in unendlichen Gebieten, Jahresbericht d Deutschen Mathem Vereinigung 53, 57, 1943.
4. Wilcox C H, A Generalization of Theorems of Rellich and Atkinson, Proc Am Math Soc 7, 271, 1956.
5. Miranker W L, Uniqueness and Representation Theorems for Solutions of $\Delta u+k^2u=0$ in Infinite Domains, J Math Mech 6, 847, 1957.
6. Rellich F, Das Eigenwertproblem von $\Delta u+\lambda u=0$ in Halbröhren, Studies and Essays presented to R Courant, 329, New York 1948.
7. Jones D S, The Eigenvalues of $\nabla^2 u+\lambda u=0$ when the Boundary Conditions are given on Semi-Infinite Domains, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 49, 668, 1953.
8. Peters A S & Stoker J J, A Uniqueness Theorem and a New Solution for Sommerfeld's and Other Diffraction Problems, Communications on Pure and Applied Mathematics 7, 565, 1954.
9. Werner P, Zur matematischen Theorie akustischer Wellenfelder, Arch Rat Mech Anal 6, 231, 1960.
10. Kellog O D, Foundations of Potential Theory.
11. Müller C, Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves, Springer-Verlag N Y 1969.
12. Agmon S, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems N Y 1965.
13. Werner P, Randwertprobleme der Mathematischen Akustik, Arch Rat Mech Anal 10, 29, 1962.

Figur



$V_0; k_0$
$\Sigma_0(R)$
$\hat{n}$
S_0
$V_{0}'; k_0'$
S_0'
$V_0(R)$
R
$\Sigma_1(R)$
$\vec{r}$
$S_0(R)$
$\vec{r}'$
$V_1; k_1$
O
$V_1'; k_1'$
S_1'