



# LUND UNIVERSITY

## Processidentifiering - Projektarbeten våren 1995

Johansson, Rolf; Andersson, Lennart; Johansson, Karl Henrik

1995

*Document Version:*  
Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*

Johansson, R. (Red.), Andersson, L., & Johansson, K. H. (1995). *Processidentifiering - Projektarbeten våren 1995*. (Technical Reports TFRT-7532). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

*Total number of authors:*

3

### General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117  
221 00 Lund  
+46 46-222 00 00

ISSN 0280-5316  
ISRN LUTFD2/TFRT--7532--SE

# Processidentifiering Projektarbeten våren 1995

Rolf Johansson (Red.)  
Lennart Andersson  
Karl Henrik Johansson

Institutionen för Reglerteknik  
Lunds Tekniska Högskola  
Maj 1995

<b>Department of Automatic Control Lund Institute of Technology</b> P.O. Box 118 S-221 00 Lund Sweden	<i>Document name</i> INTERNAL REPORT	
	<i>Date of issue</i> May 1995	
	<i>Document Number</i> ISRN LUTFD2/TFRT--7532--SE	
<i>Author(s)</i> R. Johansson, L. Andersson, K. H. Johansson (Red.)	<i>Supervisor</i>	
	<i>Sponsoring organisation</i>	
<i>Title and subtitle</i> Processidentifiering — Projektarbeten våren 1995 System Identification—Term Papers Spring 1995		
<i>Abstract</i> This volume contains term papers of the students taking the graduate course <i>FRT 040 System Identification</i> during spring 1995.		
<i>Key words</i>		
<i>Classification system and/or index terms (if any)</i>		
<i>Supplementary bibliographical information</i>		
<i>ISSN and key title</i> 0280-5316		<i>ISBN</i>
<i>Language</i> Swedish, English	<i>Number of pages</i> 267	<i>Recipient's notes</i>
<i>Security classification</i>		

The report may be ordered from the Department of Automatic Control or borrowed through the University Library 2, Box 1010, S-221 03 Lund, Sweden, Fax +46 46 110019, Telex: 33248 lubbis lund.

## FÖRORD

Föreliggande arbete innehåller några rapporter från projektarbeten inom en kurs (vt 95) i processidentifiering vid Institutionen för Reglerteknik, LTH. Kursen *Processidentifiering* gavs första gången under höstterminen 1987 såsom reguljär fortsättningskurs och forskarutbildningskurs vid Reglerteknik, LTH. Kursdeltagarna förutsättes ha goda förkunskaper i reglerteori och stokastiska processer svarande mot institutionens kurs *FRT020 Digital Reglering*. Under kursens gång har kursdeltagarna förberetts för sina uppgifter genom tre laborationer: Frekvensanalys, Interaktiv identifiering, Syntesorienterad identifiering. Vidare har kursen innehållit övningar med Matlab-uppgifter i Processidentifiering.

Uppgifterna har alla omfattat identifiering med jämförelse mellan några olika metoder. Följande identifieringsproblem har studerats:

- Helikopterdynamik (Stefan Delin, Mats Isaksson, Peter Kärde)
- Helikopterdynamik (Zoltan Kadar, Mikael Samuelsson)
- Ekonometrisk Identifiering (Ulf Holmgren, Lars Kruise)
- Ball-and-Beam (Helena Flygare, Pia Jonsson)
- Identifiering och Reglering av Bommen med Kulan (Ricard Blanc, Göran Göransson, Fredrik Tufvesson, Andreas Hellström)
- Friktionsbestämning i Ett Servo (Per Karlsson, Mats Näslund)
- Fläkten och Plåten (Ola Slätteke, Hans Karlsson)
- Identifiering av Robotled (Robert Almers, Jonas Kjellström, Fredrik Liljenvall)
- "Ball-and-Hoop" (Patric Nilsson, Magnus Gäfvert)
- A Motor Drive (Filipe Alves, Kenneth Straschko)
- A Flexible Servo (Nuno Filipe Rodrigues da Costa)
- Tension-and-Speed Control (Henrik Öjelund, Fredrik Oemichen)
- Fläkt med vippbräda (Svante Andersson, Daniel Elvin, Fredrik Sörensson)

Det är vår förhoppning, att dessa projektarbeten kan tjäna som exempel på tillämpningar av identifieringsmetodik.

Rolf Johansson, Lennart Andersson, Karl Henrik Johansson (Red.)

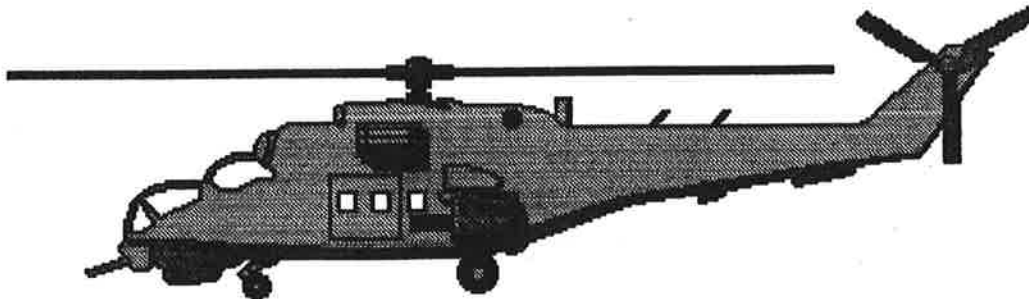


LTH  
Institutionen för Reglerteknik  
VT-95

# PROJEKT

# PROCESSIDENTIFIERING

## HELIKOPTERN



STEFAN DELIN F91  
MATS ISAKSSON F91  
PETER KÄRDE F90

95-04-06

## ABSTRACT

This is a student project on identification of a helicopter-like construction. The goal is to find a suitable discrete time model in order to determine a controller. The report contains numerous identification experiments with different validations.

# INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. INLEDNING

2. PROCESS

3. FÖRSÖKSUPPSTÄLLNING

4. IDENTIFIERING

4.1 INLEDNING

4.2 ÖVERFÖRINGSFUNKTION I VERTIKAL LED

4.3 ÖVERFÖRINGSFUNKTION I HORIZONTELL LED

4.4 KORSTERMER

4.5 SLUTSATSER

5. REGULATORDESIGN

6. AVSLUTNING

BILAGA 1: MEKANIK

BILAGA 2: UPPKOPPLING

BILAGA 3: BLOCKSCHEMA

BILAGA 4: IDENTIFIERINGSDIAGRAM

BILAGA 5: SIMNONKOD

BILAGA 6: REGULATORTEST

## 1. INLEDNING

Vårt projekt i processidentifiering handlade om att göra identifieringsexperiment på helikoptern i reglerinstitutionens laborationssal. När man gör identifieringsexperiment kan man ha olika mål. Exempelvis kan man vilja identifiera de kontinuerliga parametrarna i en mekanisk modell av processen. Detta kan vara svårt, särskilt om man gör experimenten i diskret tid. Ty även om man lyckas bestämma parametrarna i en samplad modell av processen är det inte alltid lätt, eller ens möjligt att entydigt överföra dessa parametrar till kontinuerlig tid. Vårt mål med projektet var att bestämma ett antal diskreta linjära modeller för helikopterns olika lägen. Dessa modeller skulle sedan användas för att bygga regulatorer som gav helikoptern ett bra uppförande, där "bra" inte närmare specificerades. Ett annat delmål var att studera hur pass olika modellerna blir då man gör identifieringen kring olika lägen för helikoptern, dvs få ett visst mått på hur pass olinjär processen är.

## 2. PROCESS

Processen är en helikopter med två rotor. En skiss visas i bilaga 2. I bilaga 1 härleds en enkel mekanisk modell för helikoptern, som ger oss en utgångspunkt för identifieringen. Ett från vår synpunkt viktigt konstaterande är att det kan vara lämpligt med en tredje ordningens modell för både  $G_{11}$  och  $G_{22}$ . Därmed inses givetvis att de samplade överföringsfunktionerna  $H_{11}$  och  $H_{22}$  också är av tredje ordningen. Någon mekanisk modell för korstermerna har ej framtagits.

Som synes i bilaga 1 är den enkla modell som där härleds klart olinjär. Till detta kommer även några andra uppenbara olineariteter:

- Det sitter en spärr som hindrar helikoptern från att rotera fritt i horisontalled. Även i vertikalled finns det självklart begränsningar i rörelsefrihet.
- Båda motorerna tillåter endast en inspänning i intervallet  $[-10 \text{ V}, 10 \text{ V}]$ .

## 3. FÖRSÖKSUPPSTÄLLNING

Som tidigare nämnts så kan man på grund av att processen är olinjär vänta sig att identifieringsexperimenten ger olika modeller beroende på helikopterns läge. För att närmare studera detta bestämde vi oss för att ta upp mätdata vid tre olika vertikala helikoptervinklar. Vi valde att studera helikoptern runt de tre vertikala vinklarna  $-30^\circ$ ,  $0^\circ$  och  $+30^\circ$ . Vid dessa tre vinklar upptogs mätserier för både vertikal och horisontell identifiering. För att kunna identifiera helikoptern runt dessa vinklar behövde vi givetvis kunna reglera processen. Så det första vi gjorde var att bygga två regulatorer i realtidssimmon. Vi valde en tredje ordningens RST-regulator för regleringen i vertikalled och en andra ordningens RST-regulator för regleringen i horisontalled. Parametrarna till dessa båda regulatorer togs från ett färdigt modula2-program som fanns tillgängligt i laborationssalen. Simmonkoden för dessa regulatorer finns i bilaga 5.

Nästa steg var att välja om vi skulle använda oss av indirekt eller direkt identifiering. Problemet med indirekt identifiering är att man identifierar det slutna systemets överförings-

funktion. Det krävs sedan en hel del beräkningar för att ur det identifierade slutna systemet beräkna det öppna systemets överföringsfunktion. Trots detta började vi med indirekt identifiering. Ganska snabbt valde vi dock att gå över till direkt identifiering, vilket blev betydligt enklare.

I bilaga 3 finns ett blockschema, som visar hur identifieringen gick till. Av bilden framgår att vi använder en dator enbart till att reglera helikoptern. Själva identifieringen görs med en separat mät dator. Denna mäter insignal och utsignal hos processen och lagrar i en datorfil för senare behandling. Viktigt att notera är att insignalen till processen består av summan av en PRBS-signal och regulatorns styrsignal.

## 4. IDENTIFIERING

### 4.1 INLEDNING

Valet av PRBS vid identifiering i slutna loop är svårare än i öppen loop. Det är t ex svårare att göra enkla experiment för att studera egenfrekvensen och tidskonstanter, vilka avgör PRBS-perioden. Ett annat problem är valet av PRBS-amplitud. Man måste där ta hänsyn till att styrsignalen från regulatorn adderas till PRBS:en, vilket kan leda till att signalen till motorn överskrider det tillåtna intervallet, särskilt då det krävs en viss offset för att hålla helikoptern i önskad position. För att kunna välja lämplig PRBS användes en iterativ procedur, där först gjordes en mätserie där koherensfunktionen fick utvisa om vi hade god koherens upp till den frekvens som var viktig, vilken i sin tur utlästes i det skattade bodediagrammet.

För att bestämma en modell av helikoptern, koncentrerade vi oss på rena vertikala och horisontella rörelser. Genom att använda Matlab på de inlästa mätserierna kunde vi få fram modeller som stämde väl överens med vår uppfattning av mekaniken hos systemet. Som beskrivet ovan, mätte vi utsignalen både från processen och regulatorn, för att kunna isolera processen mellan insignal och utsignal. Det första steget blev alltså att slå ihop regulatorsignal och PRBS. Eftersom vi studerade processen där en offset i styrsignalen krävdes, använde vi kommandot `dtrend`, innan vi tillämpade `armax` modellen på våra mätserier.

Vi provade ett stort antal olika modellordningar av typen `armax` och `arx`, där vi i förstone studerade FPE och standardavvikelsen på parametrarna för att reducera modellen. Efter ett tag drog vi slutsatsen att processen var av ordningen tre, vilket överensstämde med den mekaniska modellen. En tidsförskjutning av ordningen två passade bra både i horisontell och vertikal led. Det framgick även att ett nollställe var lagom. Vi provade även med modellreduktion, där vi estimerade en högre ordningens modell, vilken vi reducerade.

När vi skulle simulera processen med `idsim` fick vi problem pga att processen är instabil. Modellen som vi fick fram skilde sig endast litet från det verkliga systemet, men det var nog för att avvikelsen skulle leda till ett växande fel, vars storlek skulle närma sig storleksordningen flera tiopotenser på mycket kort tid. Däremot gick det bra att efterlikna labuppställningen med kommandot `yusimd`. Detta kommando gör att man kan simulera processen på samma sätt som vi med realtidssimmon kontrollerade den verkliga processen. Resultat: vi kunde jämföra mätvärdena från den verkliga upptagningen och simuleringen, vilket kan bevitnas i bilaga 4.

De upptagningar som finns i bilaga 4 är ordnade från plot 1 -10, där man kan se korrelationsfunktioner, överföringsfunktioner och valideringar till de data som samlats upp. Pol och nollställena till de estimerade modellerna återfinnes i tabellsamlingen. Dessutom kan residualanalysen till respektive upptagning hittas i plot xa. Det finns även 3D-plottar av FPE för olika modeller.

Nedan kommer överföringsfunktionerna  $H_{11}$  och  $H_{22}$  kallas  $H_\theta$  resp.  $H_\varphi$ .

## 4.2 ÖVERFÖRINGSFUNKTION I VERTIKAL LED

I plot 1-3 har vi estimerat  $H_\theta$  i olika vertikala vinklar med hjälp av armax3222. När  $\theta$  avviker från  $0^\circ$  ökar korstermernas inverkan, vilket kan ses som färgat brus. En trolig orsak till att koherensspektret blivit lågt i plot 1 är att brustermen fått ökad inverkan p g a liten excitation vid låga frekvenser. Det är förmodligen därför  $\text{spa}(H_{\theta, -30})$  och  $\text{dbode}(H_{\theta, -30})$  inte stämmer helt överens. I plot 2,3 har vi bättre koherens och överensstämmelse mellan  $\text{spa}(H_{\theta, -30})$  och  $\text{dbode}(H_{\theta, -30})$ . I alla tre plottarna har vi  $-180^\circ$  fasförskjutning vid låga frekvenser, vilket motsvarar dubbelintegratorer i överföringsfunktionerna. Om man i bilaga 1 tittar på hur de lineariserade överföringsfunktionerna ser ut så kan man tänka sig att detta med dubbelintegratorer stämmer. För  $H_{\theta, 0}$  är en rimlig viskös dämpning  $k_1$  liten och för  $H_{\theta, \pm 30}$  är  $a_1$  och  $a_2$  små ( $k_1$  och  $l_2$  små).

Valideringen genom utsignalerna visar god överensstämmelse, dock har vi en viss offset i plot 1 och 3, vilket kan bero på att vi minns fel på vilken referenssignal vi haft vid testkörningen. Validering genom residualanalys (plot 1-3a) visar att residualerna är nära normalfördelade, d v s vi har plockat ut maximal information ur våra mätdata. På grund av korstermerna  $H_{12}$  och  $H_{21}$  har vi ändå kvar en korskorrelation mellan insignaler och residualer. Detta beror på att när vi vill ändra  $\theta$  kommer motorn i  $\theta$ -led att ge vridande moment i  $\varphi$ -led. För att motverka detta måste motorn i  $\varphi$ -led verka, vilket i sin tur ger ett vridande moment i  $\theta$ -led. Korstermerna gör rimligtvis minst verkan när  $\theta=0^\circ$ . I plot 2a inser man att detta stämmer.

Kan vi hitta en bättre  $\text{armax}(a,b,c,k)$ -modell för  $H_{\theta, 0}$  som inte blir för stor? I fig 1a-d har vi gjort 3-D plottar av FPE som funktion av  $a, b$  med vissa variationer av  $k$  och  $c$ . Genom att studera figurerna ser man att en rimlig modell som inte blir för stor är armax4332. I fig 2a ser man att residualerna uppvisar något mindre beroende än i plot 2a men korskorrelationen blir inte bättre. Den nya högre modellen plockar inte upp mer av dynamiken i korstermerna.

I fig 3 har vi gjort en 3-D plot av FPE för en arx-modell, ur vilken vi ser att vi kan prova arx532. I fig 4 ser man att denna modell inte är så bra trots hög ordning. Vi har färgat brus och hög korskorrelation.

Vi prövar ytterligare en modellering. Arx840 krymper med modellreduktion från en balanserad realisering till en modell av tredje ordningen. Residualanalysen i fig 5 visar att vi får beroende residualer, d v s vi har mer information att hämta ur mätdata.

Poler och nollställena för de olika modellerna ovan finns i tabell 2 och 4.

**Slutsats:** En tillräckligt hög modell för regulatorkonstruktion i  $\theta$ -led som fångar systemets dynamik är armax3222.

## 4.3 ÖVERFÖRINGSFUNKTION I HORISONTELL LED.

I plot 1-3 har vi estimerat  $H_\varphi$  i olika vertikala vinklar med hjälp av armax3222. Problemen är uppenbara. Trots relativt god excitation även vid lägre frekvenser så blir koherensen låg. Orsaken är korstermernas stora inverkan. När vi vill ändra  $\varphi$  gör helikoptern även en vertikal dip, vilken blir kraftigare ju längre ifrån  $\theta=0^\circ$  helikoptern befinner sig. Huvudorsaken är centripetal kraften, men eftersom helikoptern även påverkas när  $\theta=0^\circ$  så får man anta att även horisontella motorns rotation (tröghetsmoment och propellernas viskösa dämpning mot luft) ger bidrag till korstermer. När motorn i vertikal led skall reglera bort detta vertikala fel fås ett vridande moment även i horisontell led p g a systemets dynamik (se ovan). Återigen kan detta ses som färgat brus. Ytterligare ett problem är att vi måste ha en hög offset på styrsignalen i horisontell led för att motverka vertikala propellernas luftmotstånd, som ger ett vridande moment i horisontell led. Detta medför att vi inte har så mycket kvar att ge på styrsignalen åt ena hållet innan den bottnar.

I plot 1 och 2 har vi inte så bra överensstämmelse mellan statiska förstärkningen i  $\text{spa}(H_{\phi, -30})$  och  $\text{dbode}(H_{\phi, 0})$ . I valideringen genom utsignalen har vi trots allt god överensstämmelse. I valideringen genom residualanalysen ser man att residualerna är något färgade och har korskorrelation mellan insignal och residual. Korskorrelationen beror förmodligen på korstermerna igen.

Eftersom vi vill göra en regulator i horisontell led när  $\theta=0^\circ$  bör vi ha en bra modell för  $H_{\phi, 0}$ . Vi provar med att öka PRBS signalen, resultat visas i plot 7 och 8. I plot 7 bottnar styrsignalen ett fåtal gånger. Koherensen i plot 7 och 8 blir nu något bättre, men fortfarande blir statiska förstärkningen mellan  $\text{spa}(H_{\theta, -30})$  och  $\text{dbode}(H_{\theta, -30})$  olika. Valideringen med hjälp av utsignalen gick inte alls, dels är modellen nog inte tillräckligt exakt, dels har vi bara använt en PI-regulator vid dessa två körningar och samma PI-regulator ingår i valideringen på det slutna systemet. Valideringen med residualer i plot 7a och 8a visar att modellen inte blir mycket bättre nu. Dock stämmer modellerna i 7 och 8 mycket bättre fysikaliskt om man ser till pol placering. Här har vi något som liknar dubbelintegrator och en positiv reell pol. I modellen för plot 5 har vi en negativ reell pol, det stämmer inte för en enkel modell av en dc-motor. Men modellen för helikoptern fungerar ändå när vi baserar vår regulator på den.

Vi provar att reducera en  $\text{arx}(10,6,1)$ -modell till tredje ordningen. I fig 6 ser man att residualerna är färgade men korskorrelationen har minskat lite jämfört med plot 5a. Om man tittar på valideringen av utsignalen så är den inte bättre än valideringen på  $\text{armax}(3,2,2,2)$ . Det vi har vunnit med den reducerade modellen är att polerna blivit fysikaliskt riktiga.

Slutsats: En tillräckligt hög modell för regulatorkonstruktion i  $\phi$ -led som fångar systemets dynamik är  $\text{armax}3222$ .

#### 4.4 KORSTERMER

I plot 9 har vi stört helikoptern i vertikal led och studerat utsignalen i horisontell led ( $H_{21}$ ). Vi har försökt med en  $\text{armax}(3,2,4,2)$ -modell. Koherensen är mycket låg, och de skattade överföringsfunktionerna stämmer inte väl överens. Men denna korsterm är inte så viktig att bestämma, eftersom dess inverkan på systemet är liten.

I plot 10 har vi stört helikoptern i horisontell led och studerat utsignalen i vertikal led ( $H_{12}$ ). Här använde vi en  $\text{armax}(3,2,2,2)$ -modell. Nu ser man att vi har mycket bättre excitation vid låga frekvenser och följaktligen bättre koherens. Överföringsfunktionerna stämmer ganska väl överens och vid en mer avancerad regulatordesign, skulle man mycket väl kunna använda denna modell.

## 5. REGULATORDESIGN

De enda regulatorer vi byggde baserades på mätning kring den vertikala vinkeln  $0^\circ$ . För att bygga våra regulatorer utnyttjade vi de estimerade A- och B-polynomen och gjorde RST-regulatorer genom polynomdesign. Vi valde dämpningsfaktorn till 0.7 och provade sedan med olika  $\omega$  i närheten av det öppna systemets hastighet. Observerarpolynomet valdes med dubbelt så snabba poler.

Vid simulering såg man att det uppstod ett stationärt fel, vilket avhjälpes genom att lägga till en integrator, d v s en extra pol i 1. Detta gav oss en tredje ordningens regulator i både horisontell och vertikal led.

I bilaga 6 finns ett antal olika upptagningar från realtidssimmon, där vi har använt våra konstruerade regulatorer för att reglera den verkliga processen.

De första två sidorna i bilaga 6 visar resultaten då vi använde den givna regulatorn i horisontalled med referensen 0 och lade på en fyrkantsvåg i horisontalled. Som synes är resultaten väldigt känsliga för valet av  $\omega$  i regulatordesignen, d v s snabbheten hos det önskade slutna systemet. Det är inget större problem att följa referensen i horisontalled, d v s korstermen är liten.

De följande tre sidorna visar resultaten då den vertikala regleringen sköts av den bästa vertikala regulatorn ( $\omega=2.5$ ). Referensen i vertikalled är noll och referensen i horisontalled är en fyrkantsvåg. Den vertikala mätsignalen illustrerar att det är svårt att reglera i horisontalled om man inte utnyttjar korstermen i sin regulator.

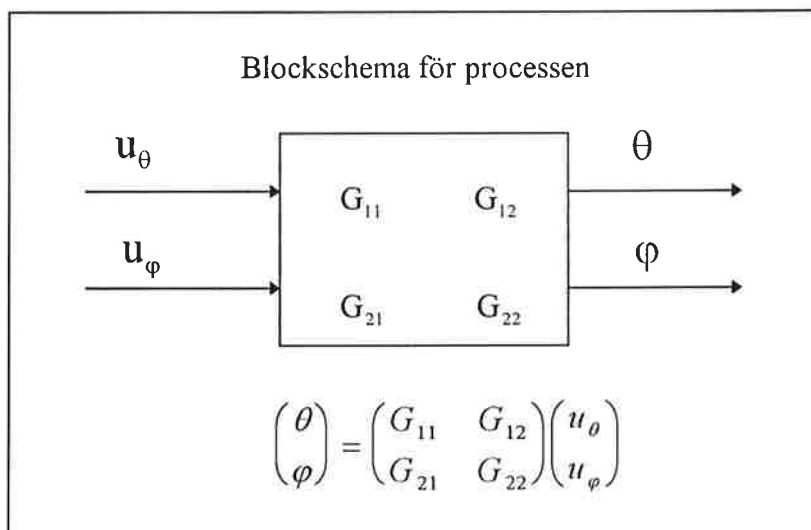
På sista sidan är referenssignalen i vertikalled -30 grader. Vi har dock fortfarande regulatorer designade för en vertikal vinkel på noll grader. Det relativt goda resultatet visar att modellen är någorlunda giltig för ett större område.

## 6. AVSLUTNING

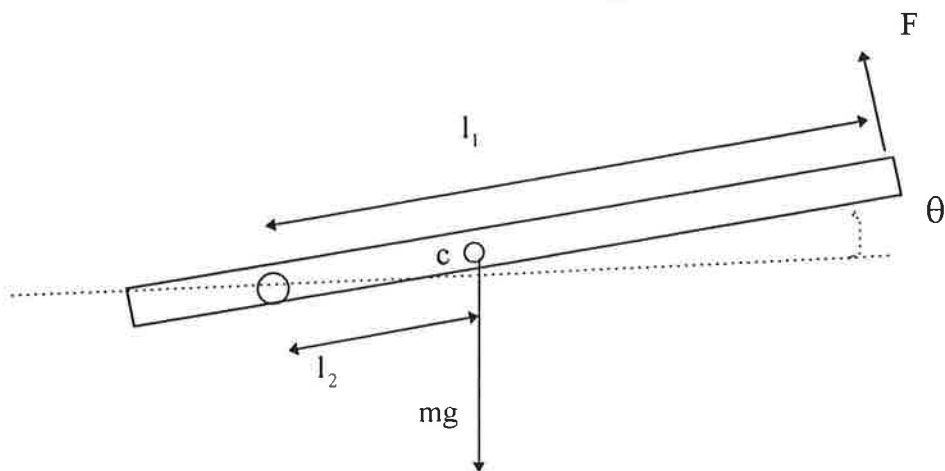
Vi tyckte att det var ett mycket intressant projekt, särskilt som man fick arbeta med en verklig process och inte bara med simuleringar. Nivån vi befinner oss på nu när vi slutar är lagom för att gå in och använda korstermerna och brusmodellen i regulatordesignen. Trots att vi inte har använt dessa är vi dock nöjda med resultatet.



BILAGA 1: MEKANIK



Mekanisk modell för  $G_{11}$



$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = Fl_1 - mgl_2 \cos\theta - k_1\dot{\theta} \\ F = k_2 \cdot \frac{1}{1+pT} u_\theta \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{J + k_1T}{JT} \ddot{\theta} + \frac{mgl_2 \sin\theta - k_1\dot{\theta}}{JT} - \frac{mgl_2 \cos\theta}{JT} + \frac{l_1 k_2}{JT} u_\theta$$

Inför nya beteckningar:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = \ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{J + k_1 T}{JT} x_3 + \frac{mgl_2 \sin x_1 - k_1}{JT} x_2 - \frac{mgl_2 \cos x_1}{JT} + \frac{l_1 k_2}{JT} u \\ \theta = x_1 \end{cases}$$

Lineariserad modell kring  $x = x^0, u = u^0$ , inför  $\Delta x = x - x^0, \Delta u = u - u^0$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 = \Delta x_3 \\ \Delta \dot{x}_3 = \frac{mgl_2 \sin x_1^0 + mgl_2 \cos x_1^0 \cdot x_2^0}{JT} \Delta x_1 + \frac{mgl_2 \sin x_1^0 - k_1}{JT} \Delta x_2 - \frac{J + k_1 T}{JT} \Delta x_3 + \frac{l_1 k_2}{JT} \Delta u \\ \Delta \theta = \Delta x_1 \end{cases}$$

Inför:

$$a_1 = \frac{mgl_2 \sin x_1^0 + mgl_2 \cos x_1^0 \cdot x_2^0}{JT}$$

$$a_2 = \frac{mgl_2 \sin x_1^0 - k_1}{JT}$$

$$a_3 = -\frac{J + k_1 T}{JT}$$

$$b = \frac{l_1 k_2}{JT}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

⇒

$$\Delta \theta = \frac{b}{s^3 - a_3 s^2 - a_2 s - a_1} \Delta u$$

Exempel: linearisering kring  $\theta = 0$

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0, u^0 = u_{0^0}, \Delta \theta = \theta, \Delta u = u - u_{0^0}$$

⇒

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -\frac{k_1}{JT} \\ a_3 = -\frac{J + k_1 T}{JT} \\ b = \frac{l_1 k_2}{JT} \end{cases}$$

⇒

$$\Delta \theta = \frac{\frac{l_1 k_2}{JT}}{s \left( s^2 + \frac{J + k_1 T}{JT} s + \frac{k_1}{JT} \right)} \Delta u$$

Exempel: Linearisering kring  $\theta = 30^\circ$ ,  $\Delta\theta = \theta - 30^\circ$

$$x_1^0 = 30^\circ, x_2^0 = x_3^0 = 0, u^0 = u_{30^\circ}, \Delta u = u - u_{30^\circ}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\theta = \frac{\frac{l_1 k_2}{JT}}{s^3 + \frac{J + k_1 T}{JT} s^2 - \left( \frac{0.5 m g l_2 - k_1}{JT} \right) s - \frac{0.5 m g l_2}{JT}} \Delta u$$

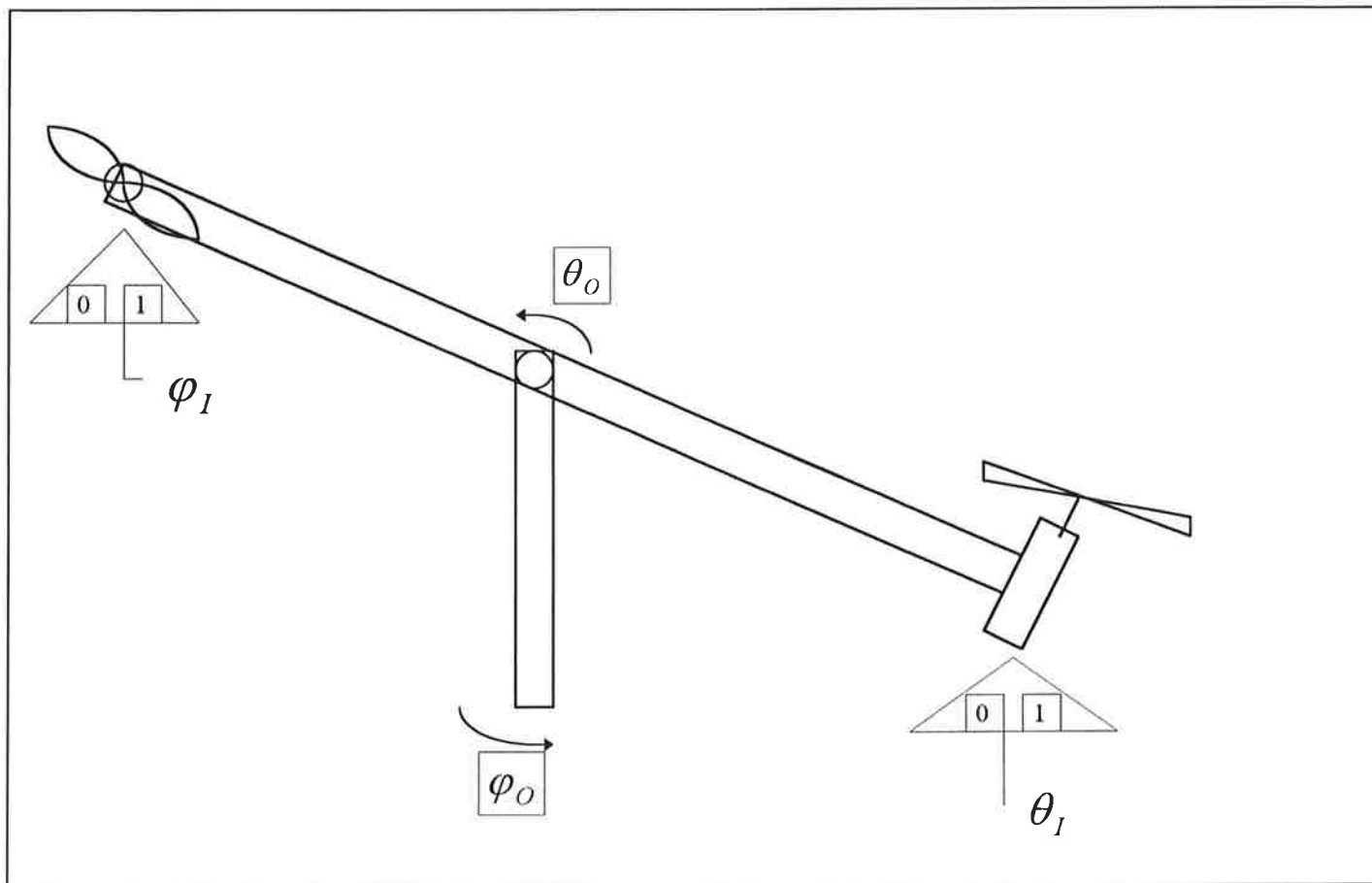
Exempel: Linearisering kring  $\theta = -30^\circ$ ,  $\Delta\theta = \theta + 30^\circ$

$$x_1^0 = -30^\circ, x_2^0 = x_3^0 = 0, u^0 = u_{-30^\circ}, \Delta u = u - u_{-30^\circ}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\theta = \frac{\frac{l_1 k_2}{JT}}{s^3 + \frac{J + k_1 T}{JT} s^2 + \left( \frac{0.5 m g l_2 + k_1}{JT} \right) s + \frac{0.5 m g l_2}{JT}} \Delta u$$

## BILAGA 2: UPPKOPPLING



### STYRDATOR

AI	0	1	2	3
	4	5	6	7
AO	0	1	AGND	

AI0 -  $\varphi_0$   
 AI1 -  $\theta_0$   
 AO0 -  $\varphi_{I0}$   
 AO1 -  $\theta_{I0}$

### MÄTDATOR

AI	0	1	2	3
	4	5	6	7
AO	0	1	AGND	

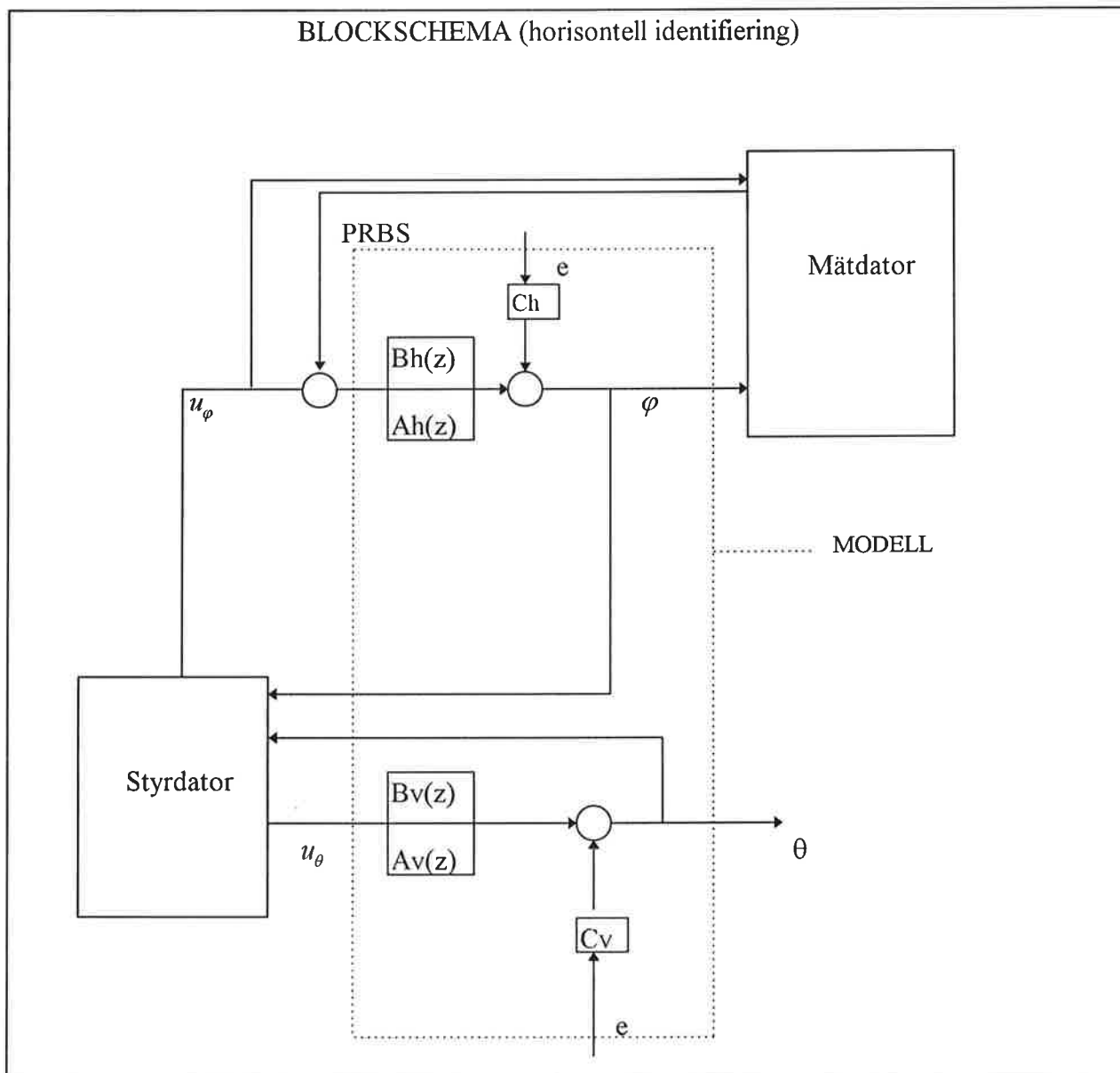
Vertikal identifiering

AO0 -  $\theta_{I1}$   
 AI0 -  $\theta_{I0}$   
 AI1 -  $\theta_0$

Horisontell identifiering

AO0 -  $\varphi_{I1}$   
 AI0 -  $\varphi_{I0}$   
 AI1 -  $\varphi_0$

BILAGA 3: BLOCKSCHEMA



## BILAGA 4: IDENTIFIERINGSDIAGRAM

ÖVERFÖRINGS- FUNKTION	uref $\theta$ -led / °	uref $\varphi$ -led / °	PRBS+u verkar i ...	UTSIGN. y mäts i ...	PRBS ampl. / V	PRBS period / sampels	MODELL	PLOT NR:	FIINAMN
H11,-30 = H $\theta$ ,-30	-30	0	$\theta$ -led	$\theta$ -led	0,3	5	armax3222	1	uvert5.mat
H11,0 = H $\theta$ ,0	0	0	$\theta$ -led	$\theta$ -led	0,3	5	armax3222	2	vert5.mat
H11,+30 = H $\theta$ ,+30	30	0	$\theta$ -led	$\theta$ -led	0,15	5	armax3222	3	overt5b.mat
H22,-30 = H $\varphi$ ,-30	-30	0	$\varphi$ -led	$\varphi$ -led	1	20	armax3222	4	uhor10.mat
H22,0 = H $\varphi$ ,0	0	0	$\varphi$ -led	$\varphi$ -led	1,5	10	armax3222	5	hor10.mat
H22,+30 = H $\varphi$ ,+30	30	0	$\varphi$ -led	$\varphi$ -led	2,5	10	armax3222	6	ohor10.mat
H22,0 = H $\varphi$ ,0	0	0	$\varphi$ -led	$\varphi$ -led	2,5	20	armax3222	7	hor20.mat
H22,0 = H $\varphi$ ,0	0	0	$\varphi$ -led	$\varphi$ -led	2	20	armax3222	8	hor201.mat
H21 (korsterm)	0	0	$\theta$ -led	$\varphi$ -led	0,3	5	armax3242	9	korsvth.mat
H12 (korsterm)	0	0	$\varphi$ -led	$\theta$ -led	2,5	10	armax3222	10	kors2.mat

tabell 1. Sammanställning av plot 1-10.

	H11,-30	H11,0	H11,+30	H22,-30	H22,0	H22,+30	H22,0	H22,0	H21	H12
	plot nr 1	plot nr 2	plot nr 3	plot nr 4	plot nr 5	plot nr 6	plot nr 7	plot nr 8	plot nr 9	plot nr 10
nollställe	0.2348	0.4106	-0.0708	0.0235	-4.7564	-0.4324	0.2739	-0.3343	1.0198	1.0134
poler	1.0084	1.0715	1.0707	0.5439	-0.2707	0.9915	1.0205	1.0263	0.4408	0.9708
poler	0.9020 + 0.0616i	0.9088 + 0.0672i	0.8679 + 0.0268i	0.9758 + 0.0355i	0.9723 + 0.0177i	0.8426 + 0.0876i	0.9356	0.9110	0.9939 + 0.0192i	0.7809 + 0.3722i
poler							0.6459	0.5978		

tabell 2. Pol-nollställe placering i forward shift för plottar 1-10

		index				rötter		
		1	2	3	4			
regulator	R	1	-1,90	1,19	-0,30	1,00	0,45+0,31i	0,45-0,31i
i	S	11,4	-32,1	30,2	-9,45	0,95	0,93+0,055i	0,93-0,055i
$\theta$ -led	T	0,302	-0,675	0,504	-0,126	0,74	0,75+0,058i	0,75-0,058i
regulator	R	1	-1,50	0,50		1,00	0,50	
i	S	-6,00	11,5	-5,49		0,96+0,013i	0,96-0,013i	
$\varphi$ -led	T	1	-1,48	0,488		0,98	0,50	

tabell 3. Ursprungliga regulator parametrar

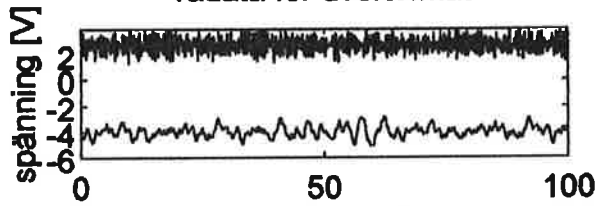
H $\theta$ ,0 (fil=vert5.mat)		H $\theta$ ,0 (fil=vert5.mat)		H $\theta$ ,0 (fil=vert5.mat)		H $\varphi$ ,0 (fil=hor10.mat)	
arx(5,3,2)		armax(4,3,3,2)		balanserad arx(8,4,0)		balanserad arx(10,6,1)	
poler	nollställen	poler	nollställen	poler	nollställen	poler	nollställen
0,53	0	1.06	0,48	0,995	1,94	0,986	2,82
1,01+0,063i	-0,77+0,84i	-0.48	-1,06	0,92+0,059i	0,51	0,923	-0,18+1,19i
1,01+0,063	-0,77-0,84i	0,91+0,062i		0,92-0,059i	-14,6	0,575	-0,18-1,19i
-0,43+0,36i		0,91-0,062i					
-0,43-0,36i							

tabell 4. Pol-nollställe placering för överföringsfunktioner erhållna på annat sätt än de i plot 10.

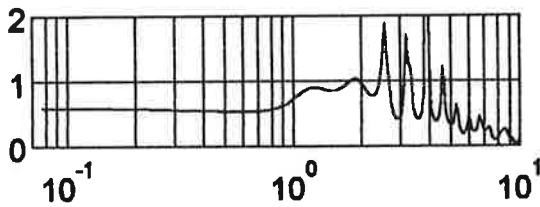


PLOT1: vertikal regl. kring vertikal vinkel=-30 grader

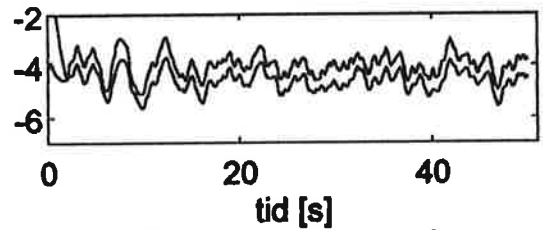
rådata för uvert5.mat



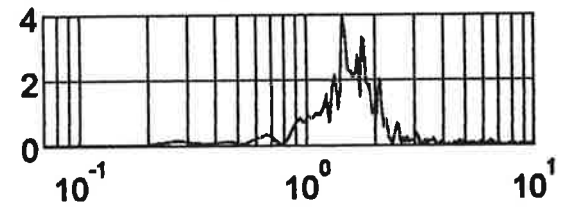
u=övre y=undre  
coherensspektra för y och u+prbs



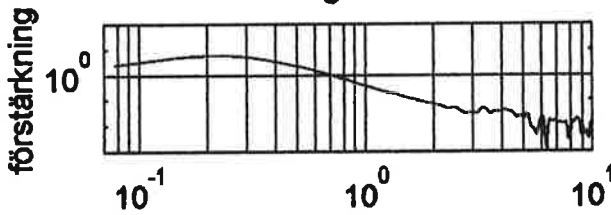
validering mha utsignal y



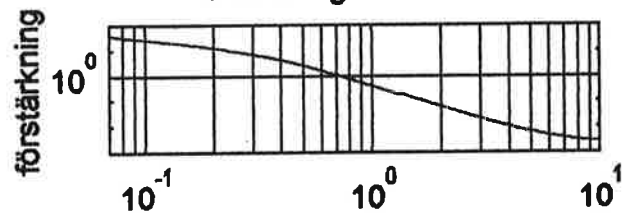
effektspektra för u+prbs



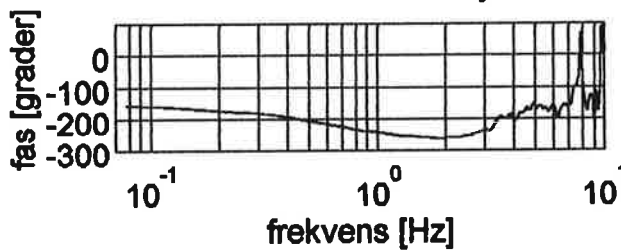
överföringsfunktion...



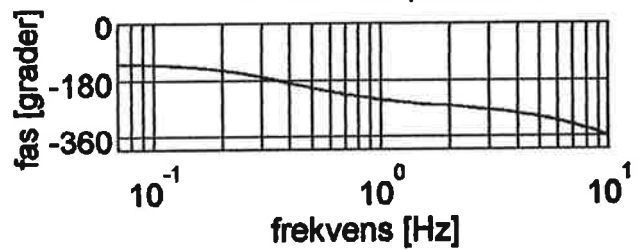
överföringsfunktion...



... via frekvensanalys

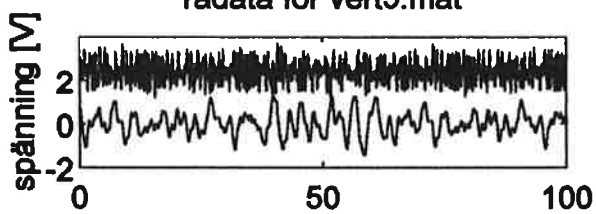


...via estimerade paramterar

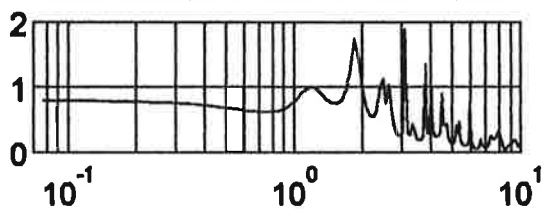


PLOT2: vertikal regl. kring vertikal vinkel=0 grader

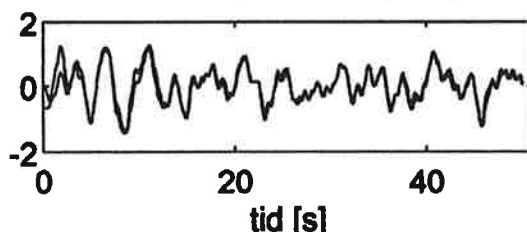
rådata för vert5.mat



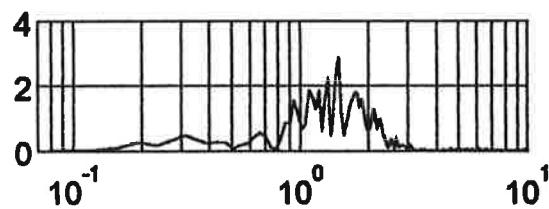
u=övre y=undre  
coherensspektra för y och u+prbs



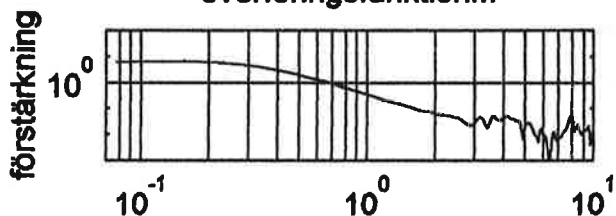
validering mha utsignal y



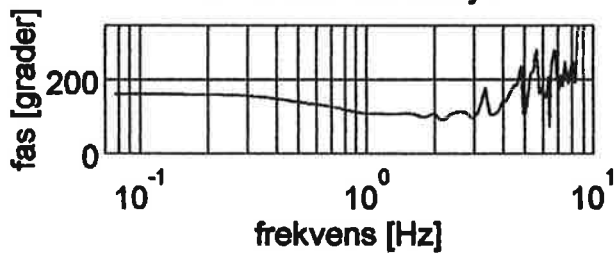
effektspektra för u+prbs



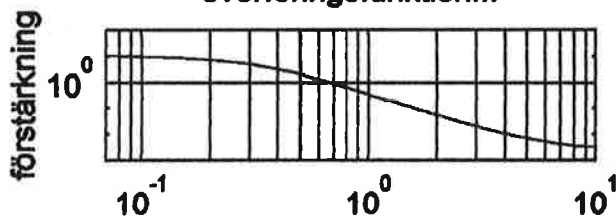
överföringsfunktion...



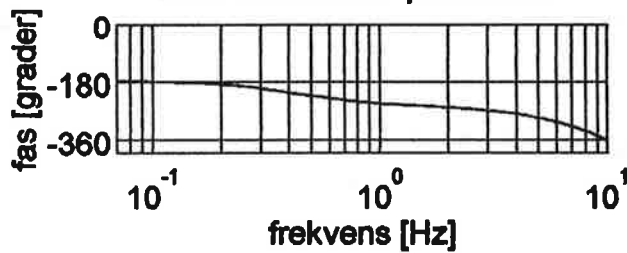
... via frekvensanalys



överföringsfunktion...

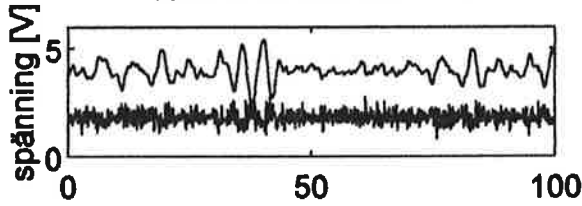


...via estimerade paramterar

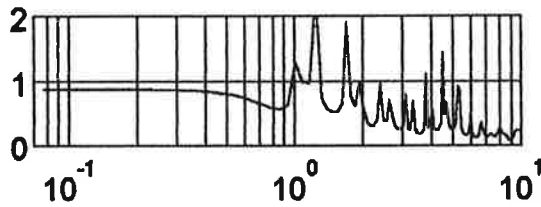


PLOT3: vertikal regl. kring vertikal vinkel=+30 grader

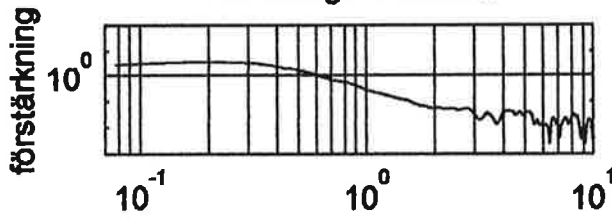
rådata för overt5b.mat



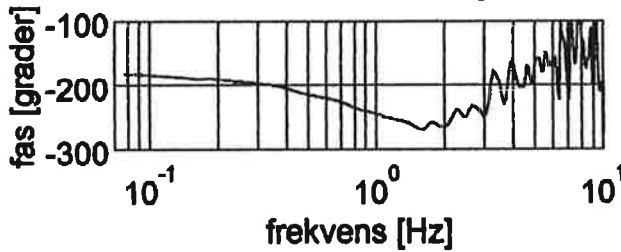
y=övre u=undre  
coherensspektra för y och u+prbs



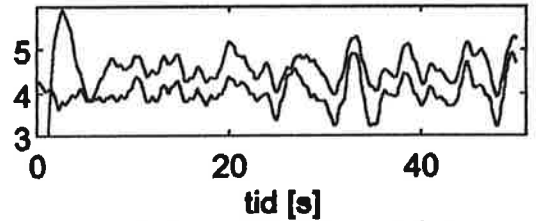
överföringsfunktion...



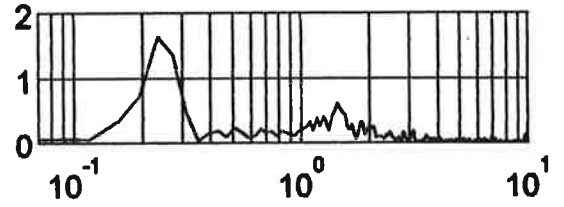
... via frekvensanalys



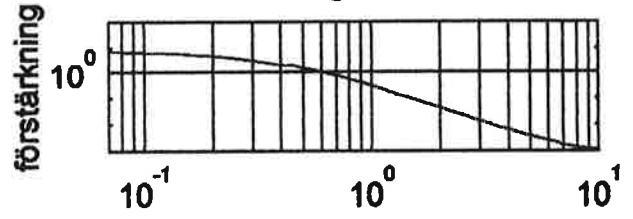
validering mha utsignal y



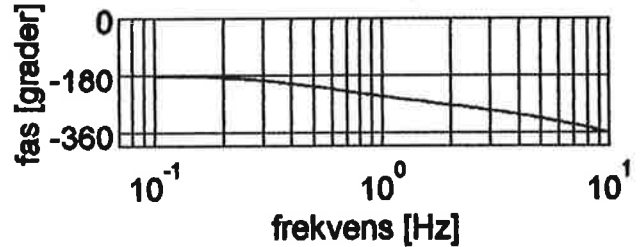
effektspektra för u+prbs



överföringsfunktion...

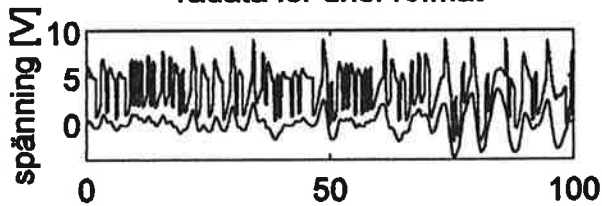


...via estimerade paramterar

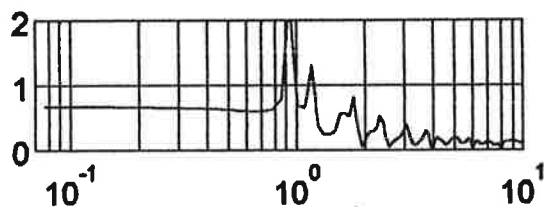


PLOT4: horisontell regl. kring vertikal vinkel=-30 grader

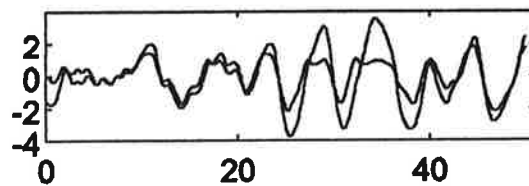
rådata för uhor10.mat



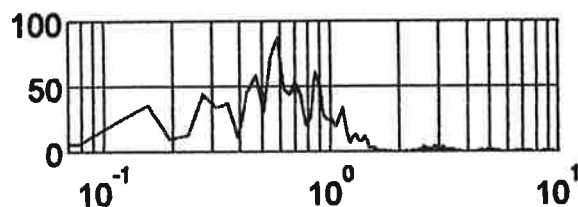
u=övre y=undre  
coherensspektra för y och u+prbs



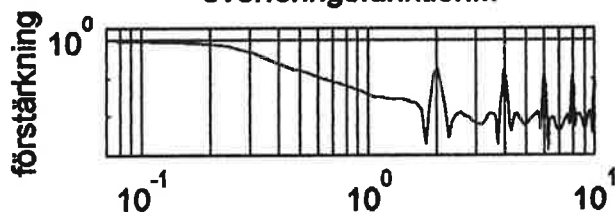
validering mha utsignal y



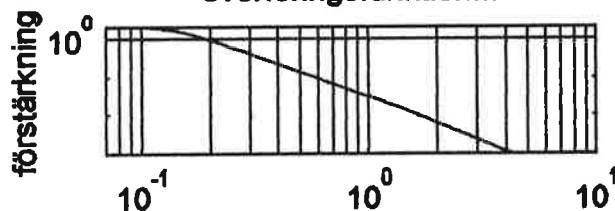
tid [s]  
effektspektra för u+prbs



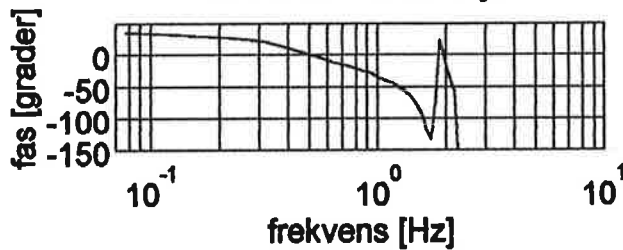
överföringsfunktion...



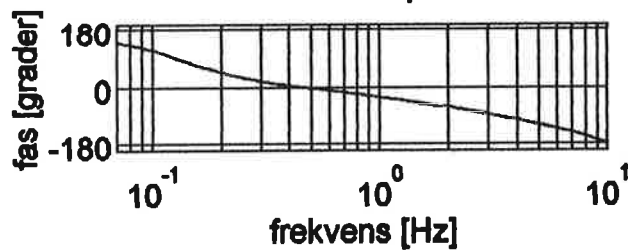
överföringsfunktion...



... via frekvensanalys

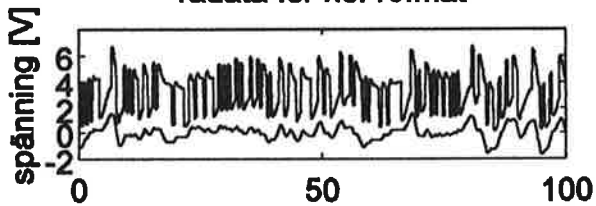


...via estimerade paramterar

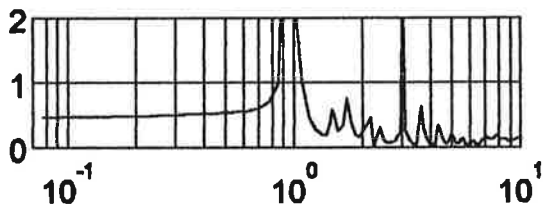


PLOT5: horisontell regl. kring vertikal vinkel=0 grader

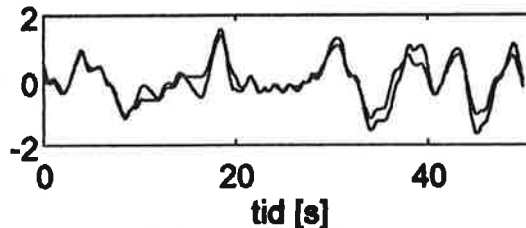
rådata för hor10.mat



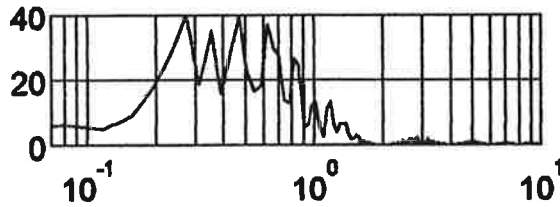
u=övre y=undre  
coherensspektra för y och u+prbs



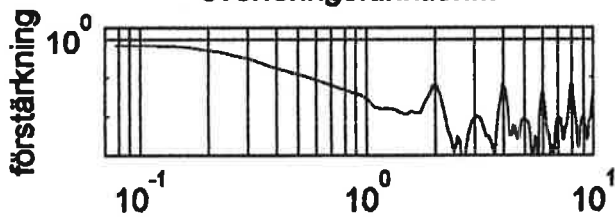
validering mha utsignal y



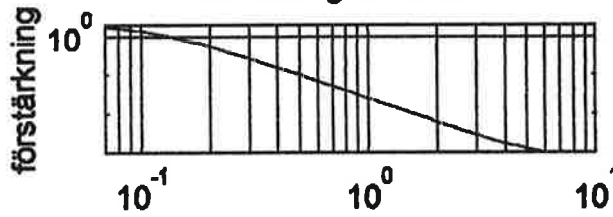
effektspektra för u+prbs



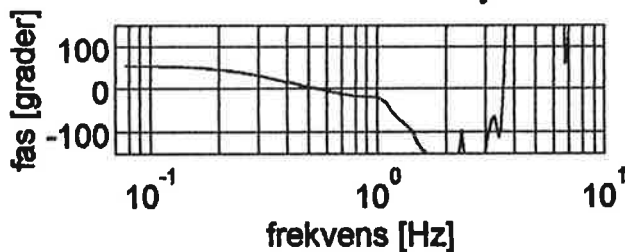
överföringsfunktion...



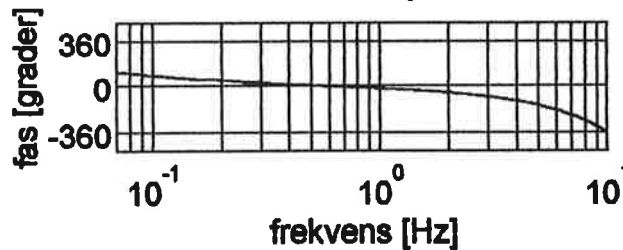
överföringsfunktion...



... via frekvensanalys

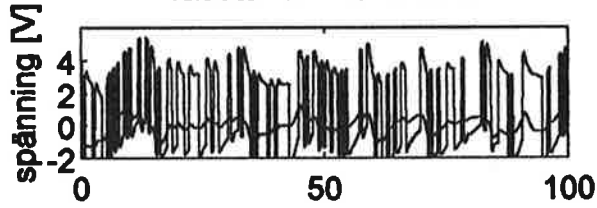


...via estimerade paramterar

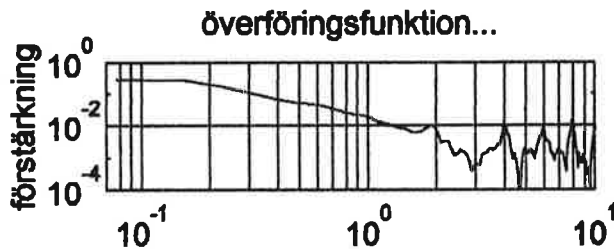
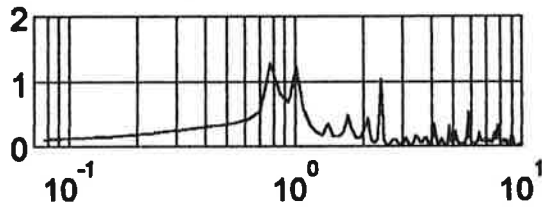


PLOT6: horisontell regl. kring vertikal vinkel=+30 grader

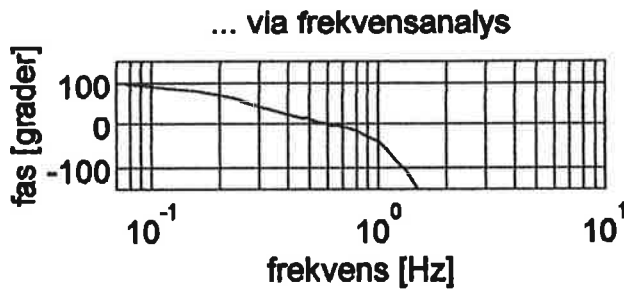
rådata för ohor10.mat



u=övre y=undre  
coherensspektra för y och u+prbs

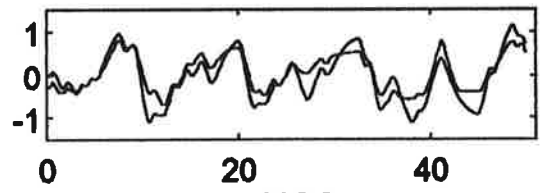


överföringsfunktion...

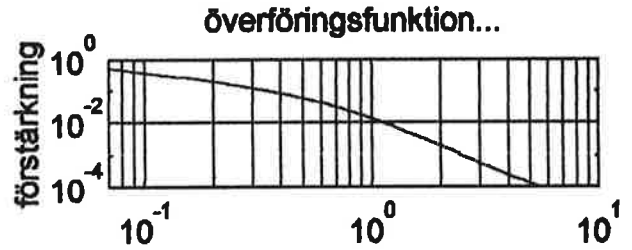
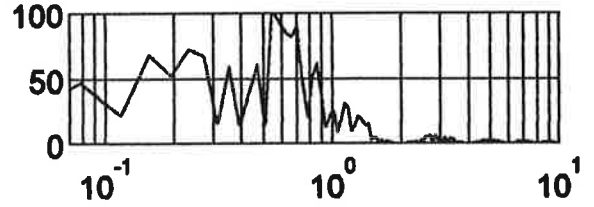


... via frekvensanalys

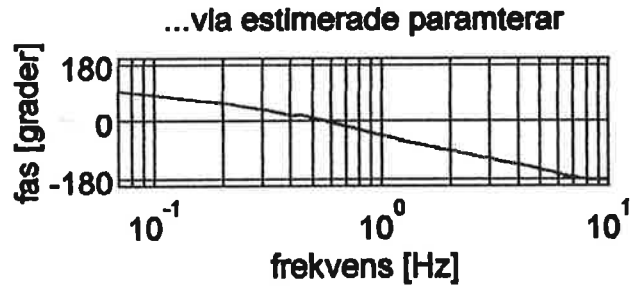
validering mha utsignal y



tid [s]  
effektspektra för u+prbs

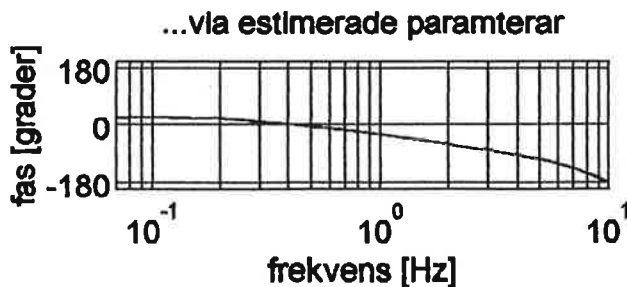
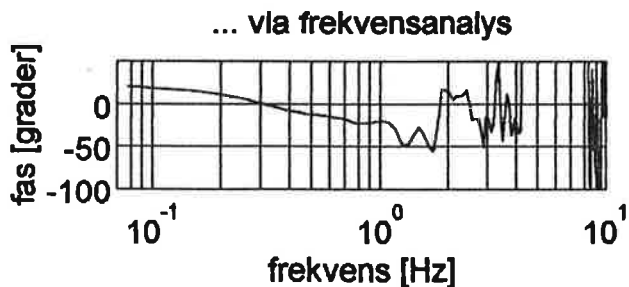
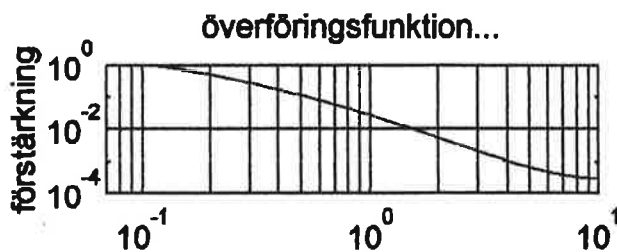
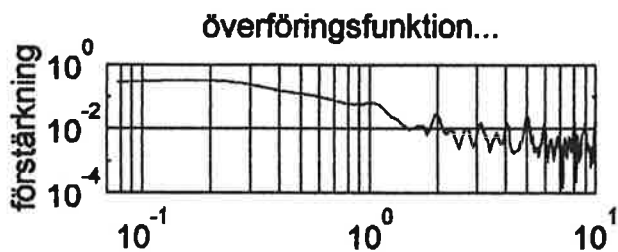
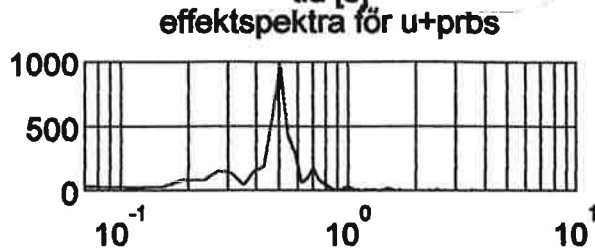
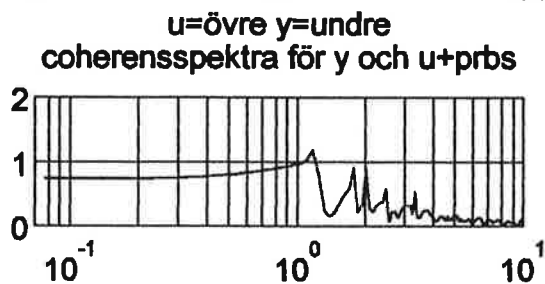
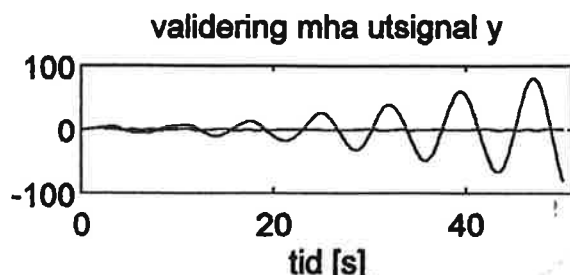
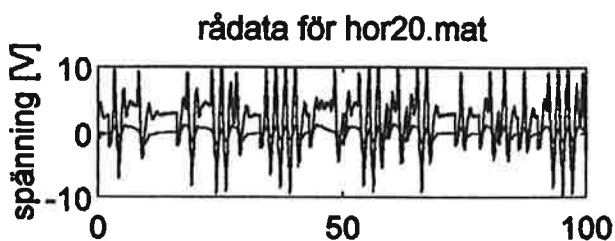


överföringsfunktion...



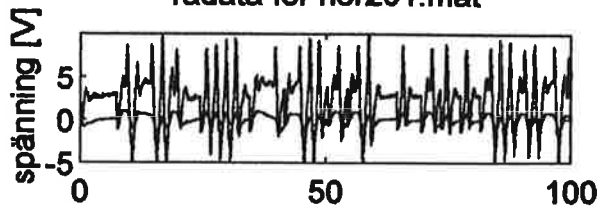
...via estimerade paramterar

PLOT7: horisontell regl. kring vertikal vinkel=0 grader

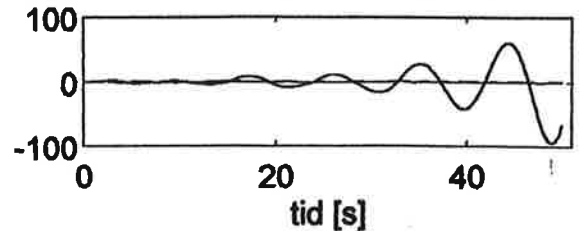


PLOT8: horisontell regl. kring vertikal vinkel=0 grader

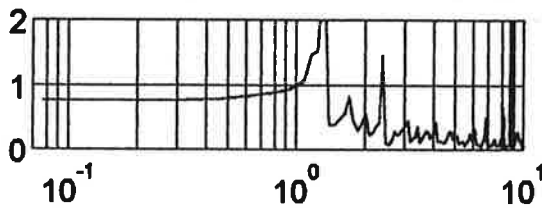
rådata för hor201.mat



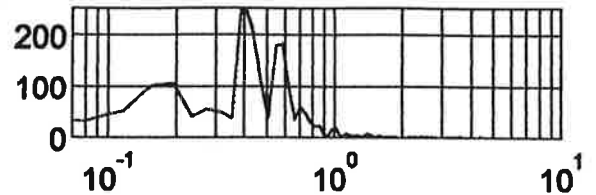
validering mha utsignal y



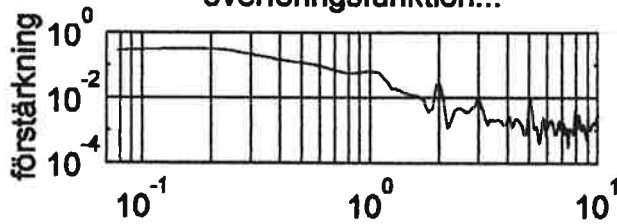
u=övre y=undre  
coherensspektra för y och u+prbs



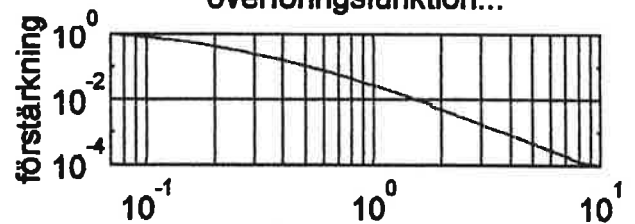
effektspektra för u+prbs



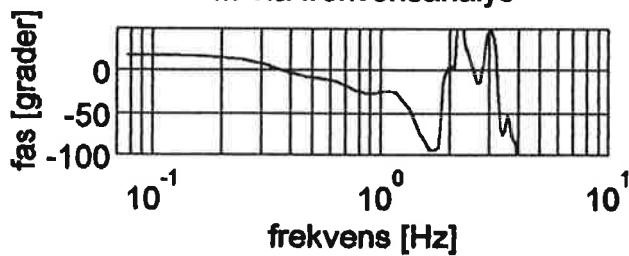
överföringsfunktion...



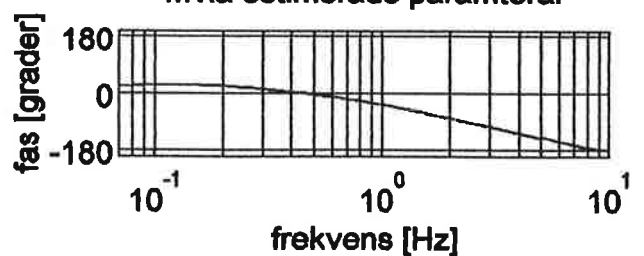
överföringsfunktion...



... via frekvensanalys



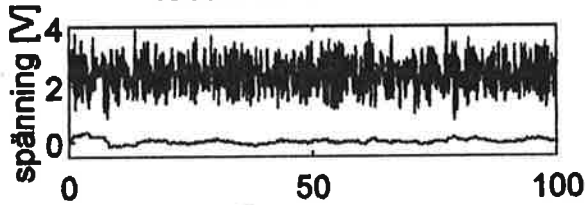
...via estimerade paramterar





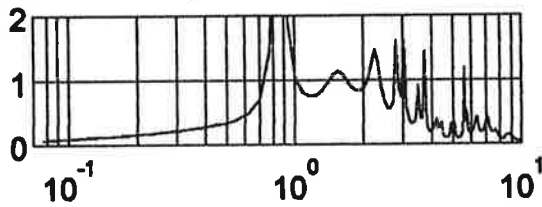
PLOT9: korsterm vert. stöm. hor. rörel. vertikal vinkel=0 grader

rådata för korsvth.mat

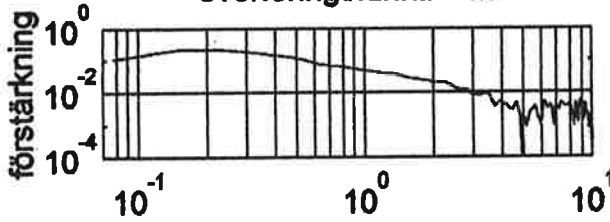


u=övre y=undre

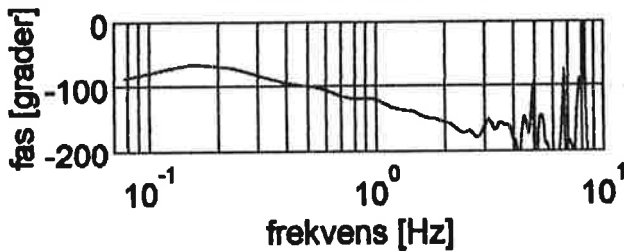
coherensspektra för y och u+prbs



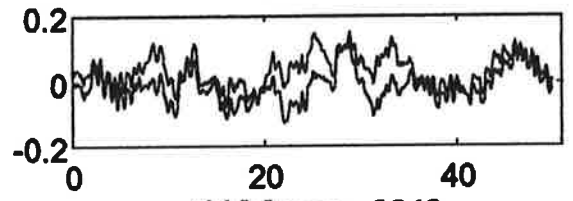
överföringsfunktion...



... via frekvensanalys

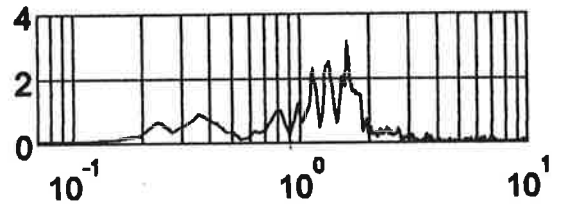


validering mha utsignal y

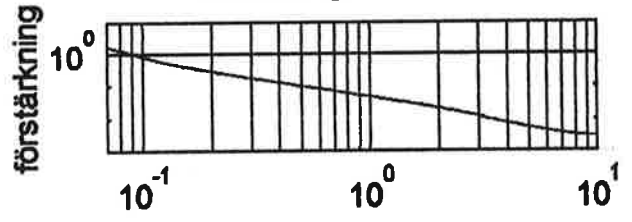


tid [s] armax3242

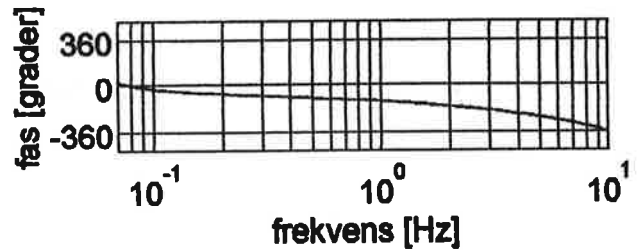
effektspektra för u+prbs



överföringsfunktion...

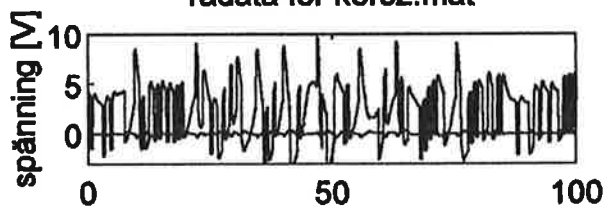


...via estimerade paramterar

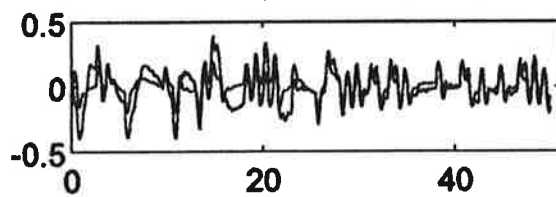


PLOT10: korsterm hor. stöm. vert. rörel. vertikal vinkel=0 grader

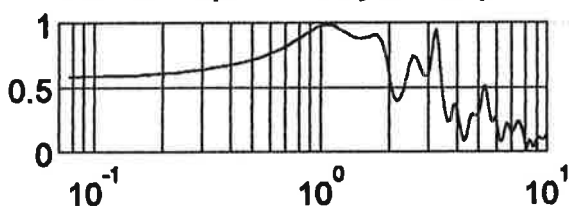
rådata för kors2.mat



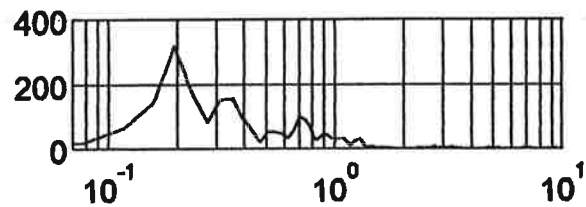
validering mha utsignal y



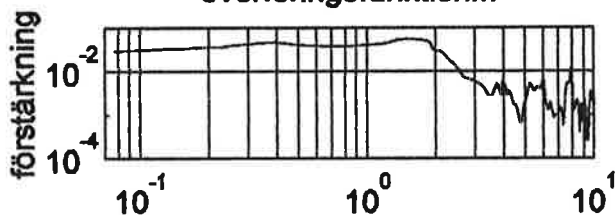
u=övre y=undre  
coherensspektra för y och u+prbs



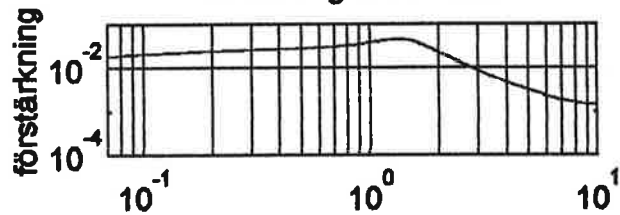
tid [s] armax3222  
effektspektra för u+prbs



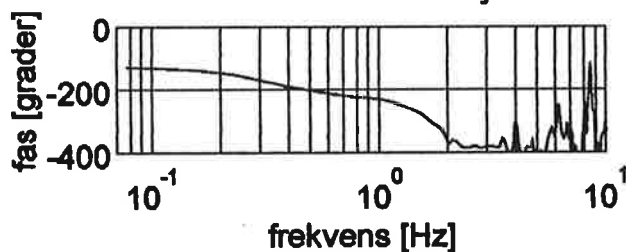
överföringsfunktion...



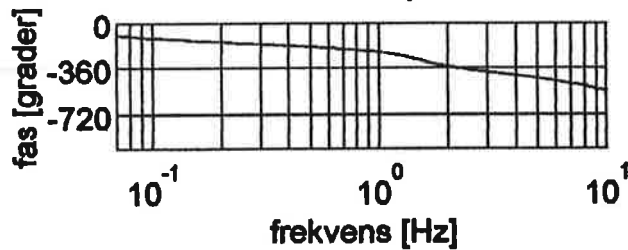
överföringsfunktion...

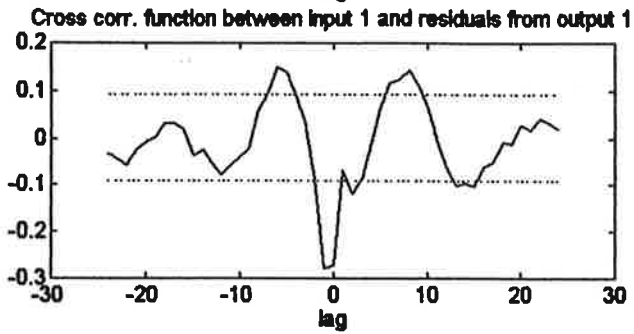
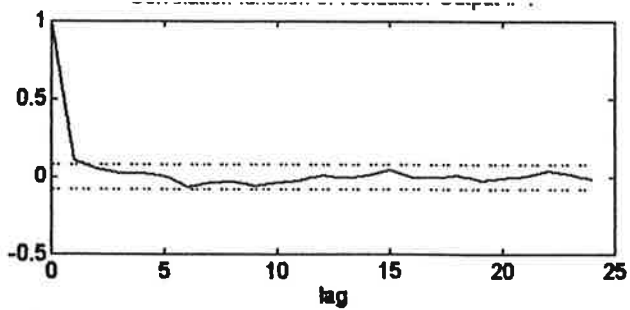


... via frekvensanalys

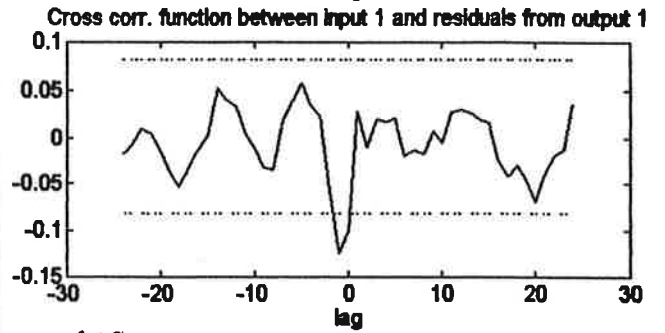
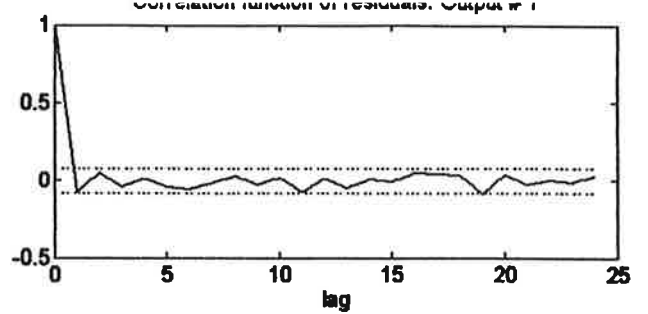


...via estimerade paramterar

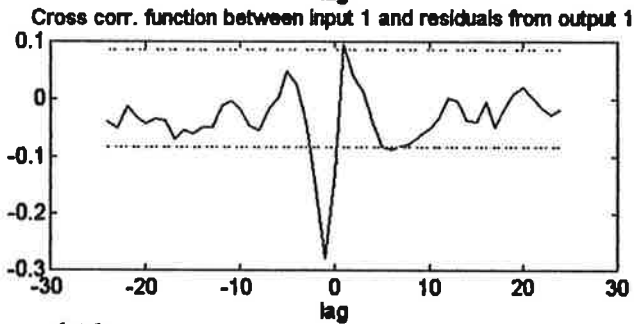
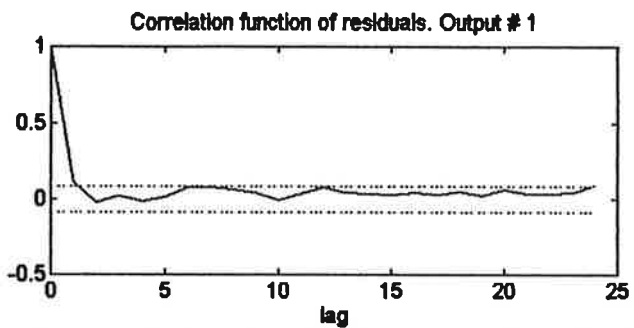




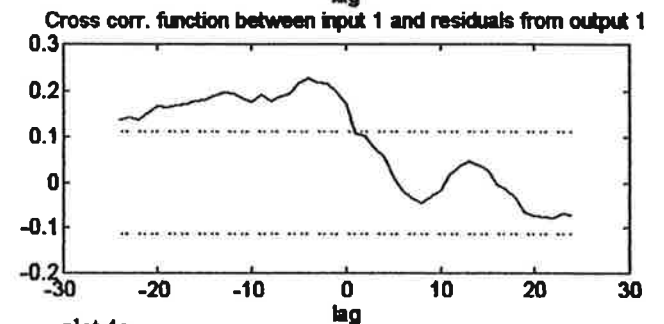
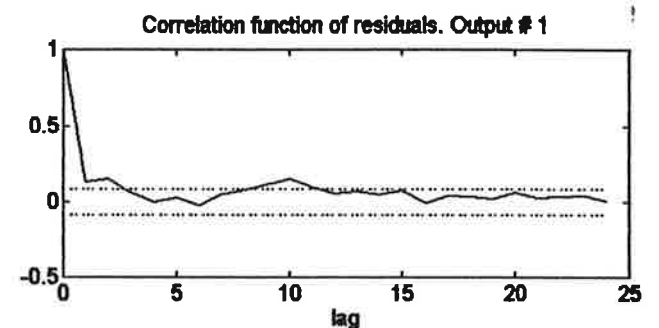
plot 1a



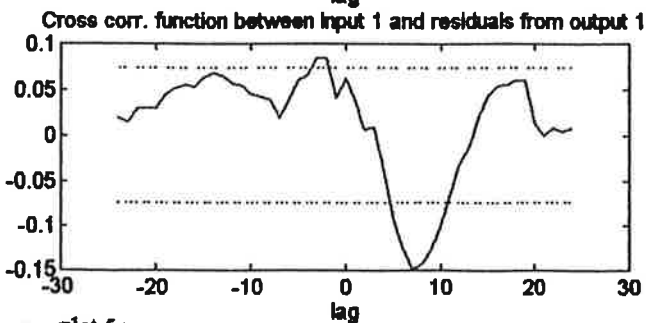
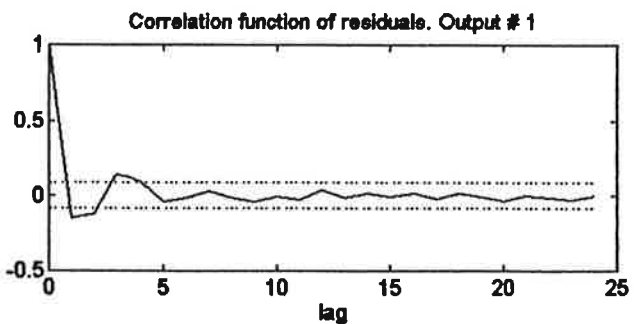
plot 2a



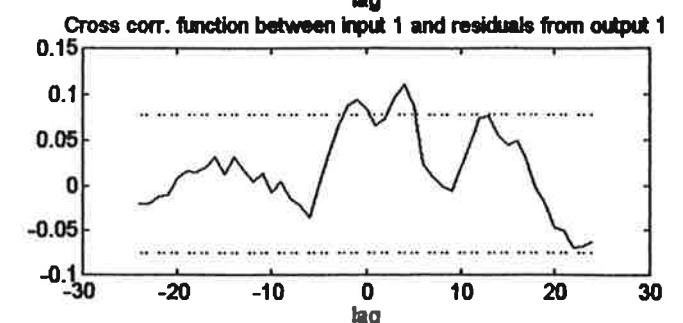
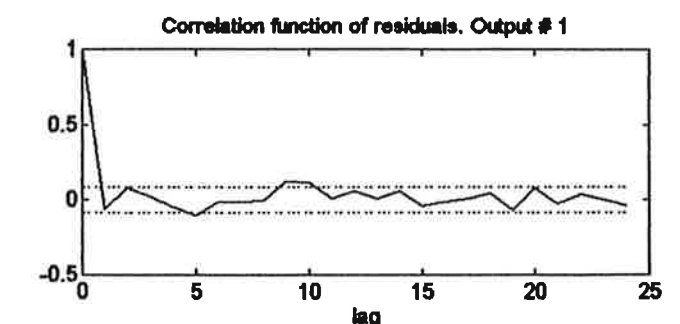
plot 3a



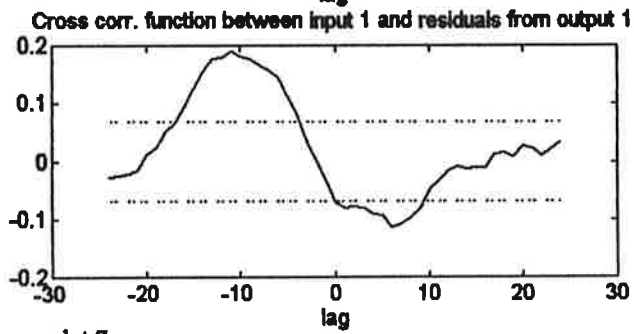
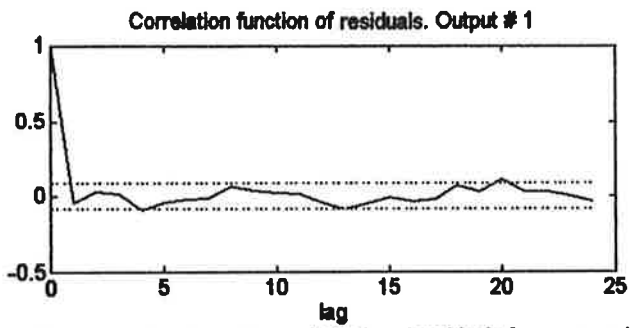
plot 4a



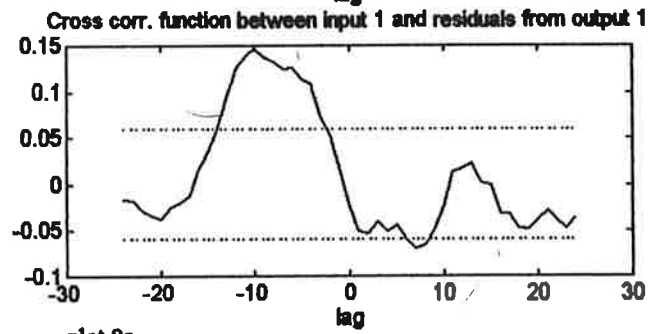
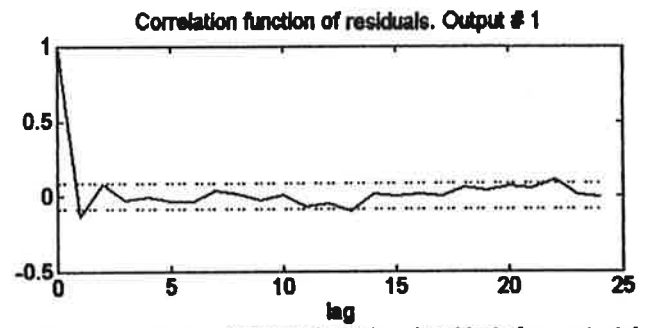
plot 5a



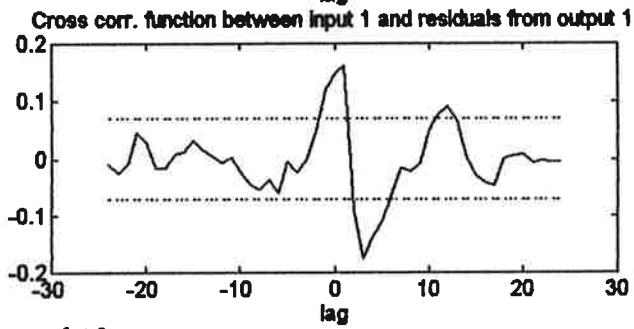
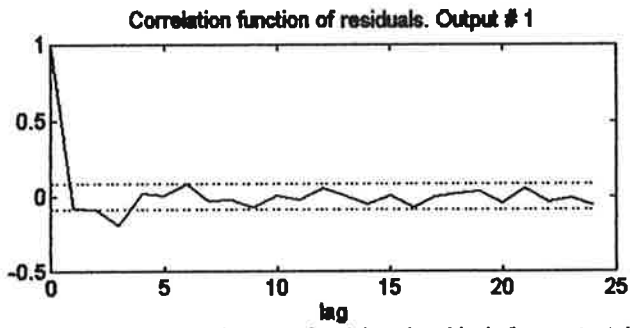
plot 6a



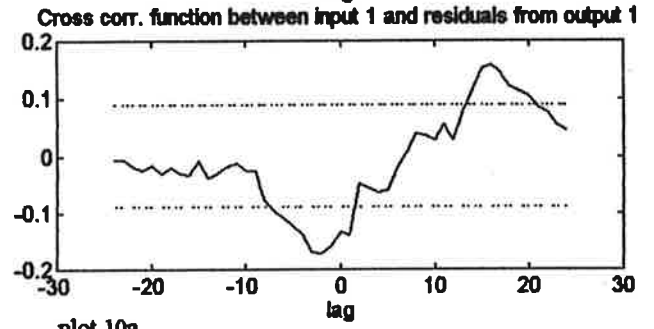
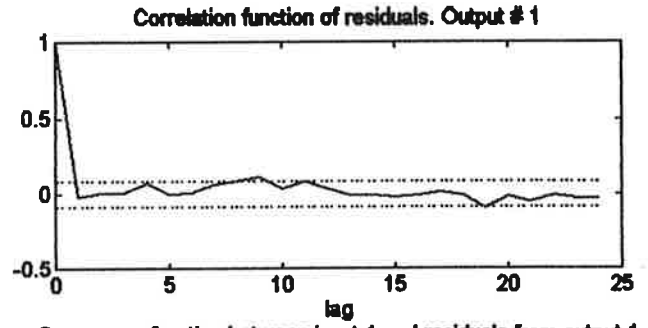
plot 7a



plot 8a



plot 9a



plot 10a

fig 1a: fpe från armax(a,b,2,0) - modell för H theta,0

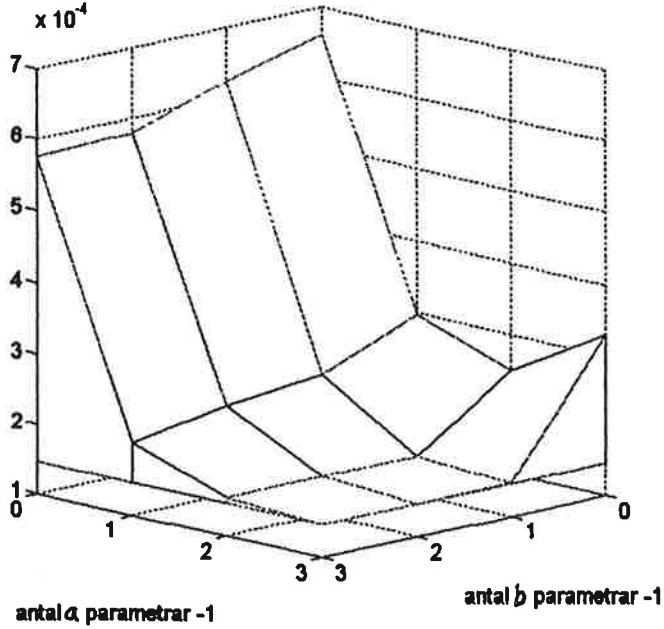


fig 1b: fpe från armax(a,b,2,1) - modell för H theta,0

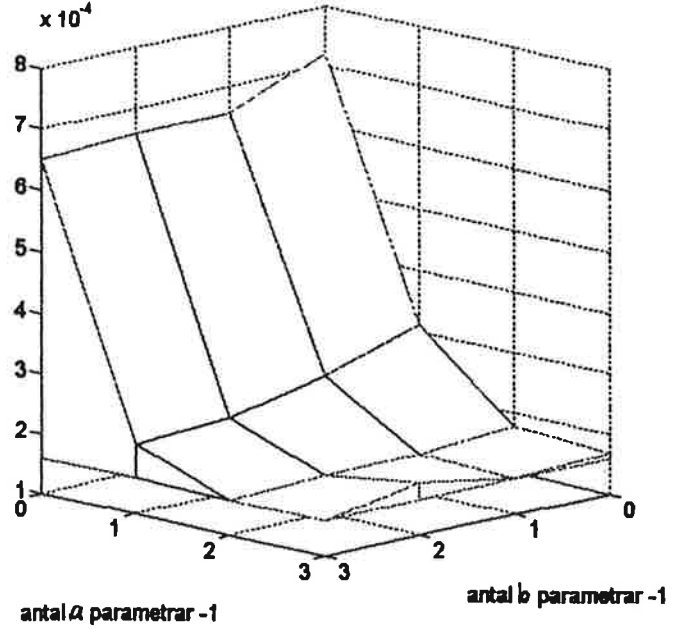


fig 1c: fpe från armax(a,b,2,2) - modell för H theta,0

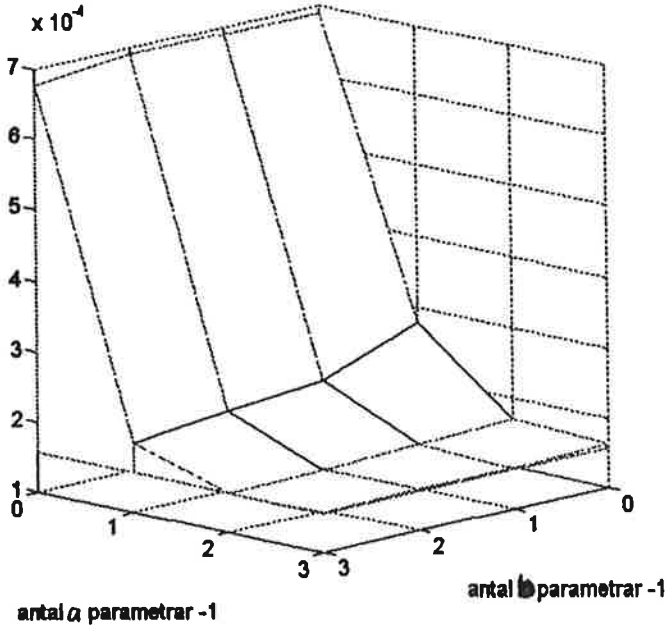
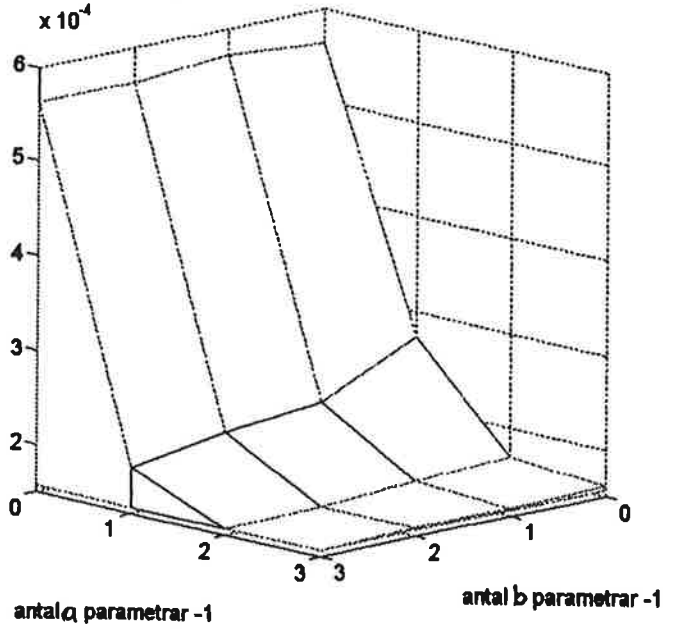
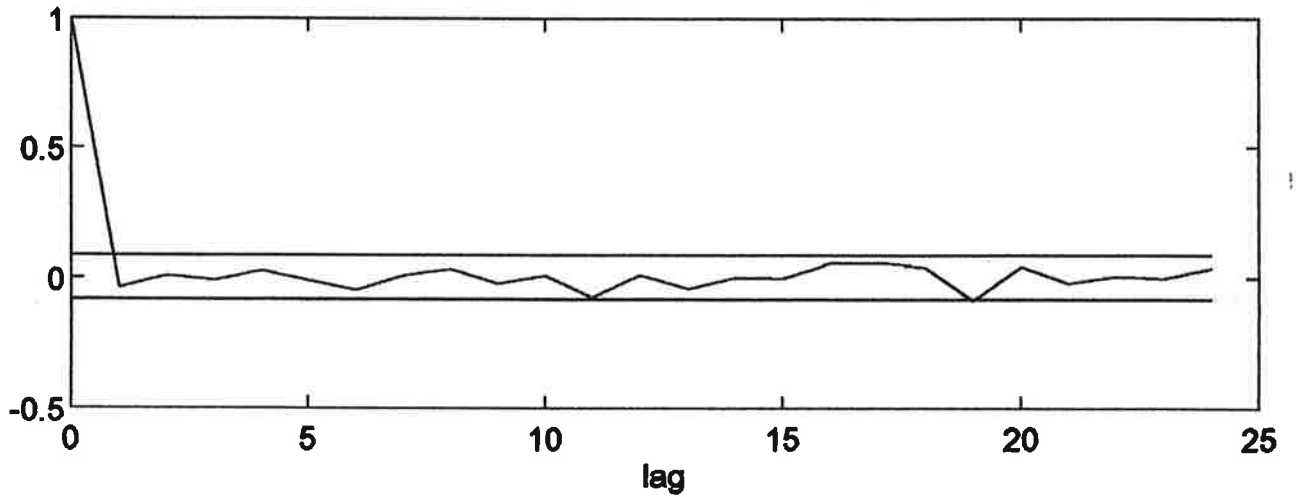


fig 1d: fpe från armax(a,b,3,2) - modell för H theta,0



Correlation function of residuals. Output # 1



Cross corr. function between input 1 and residuals from output 1

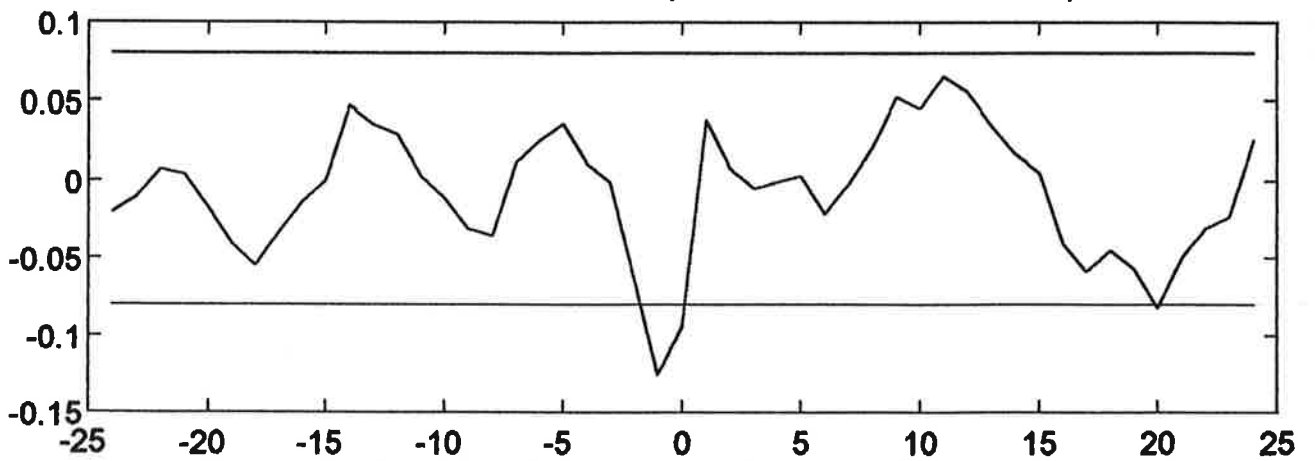
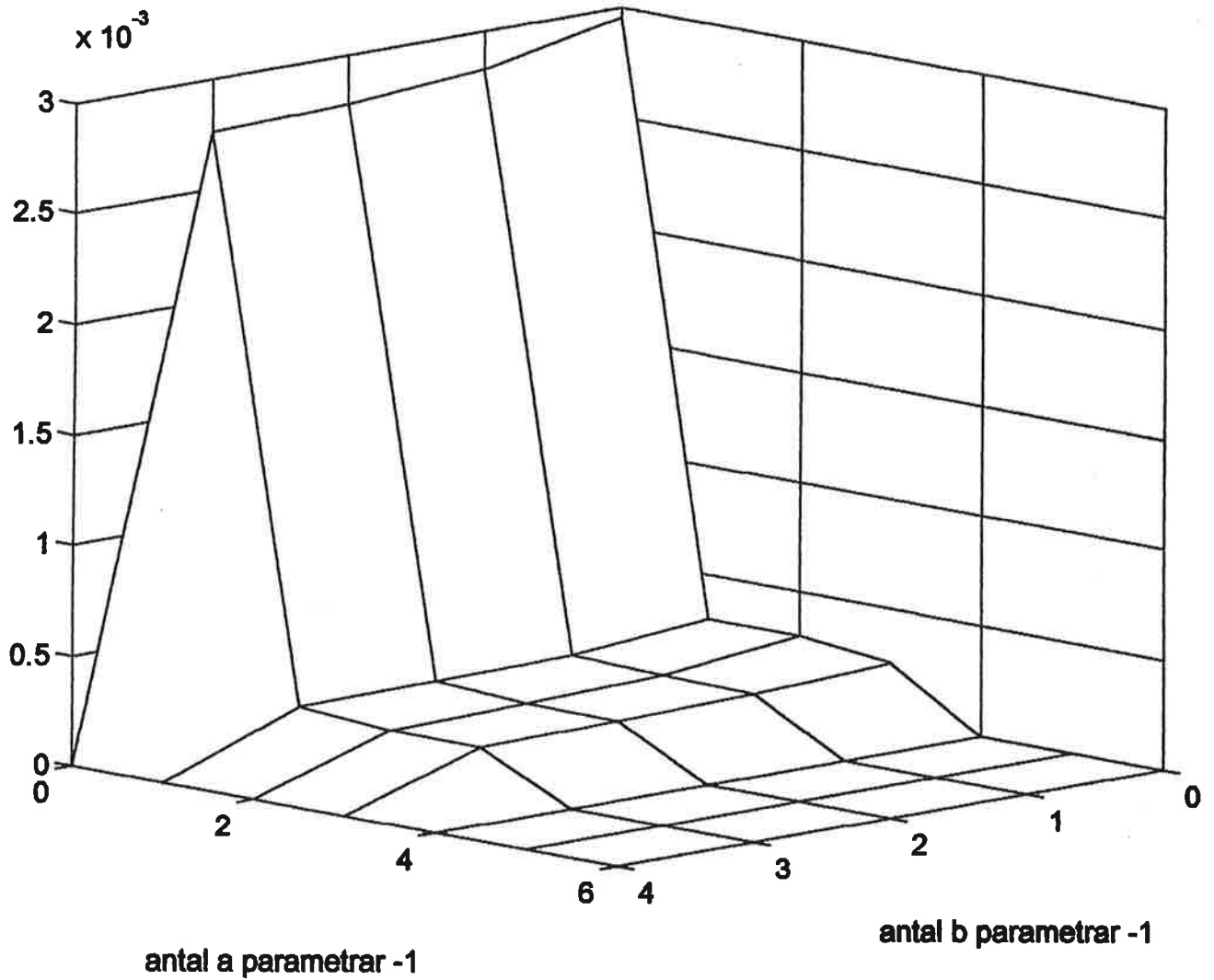
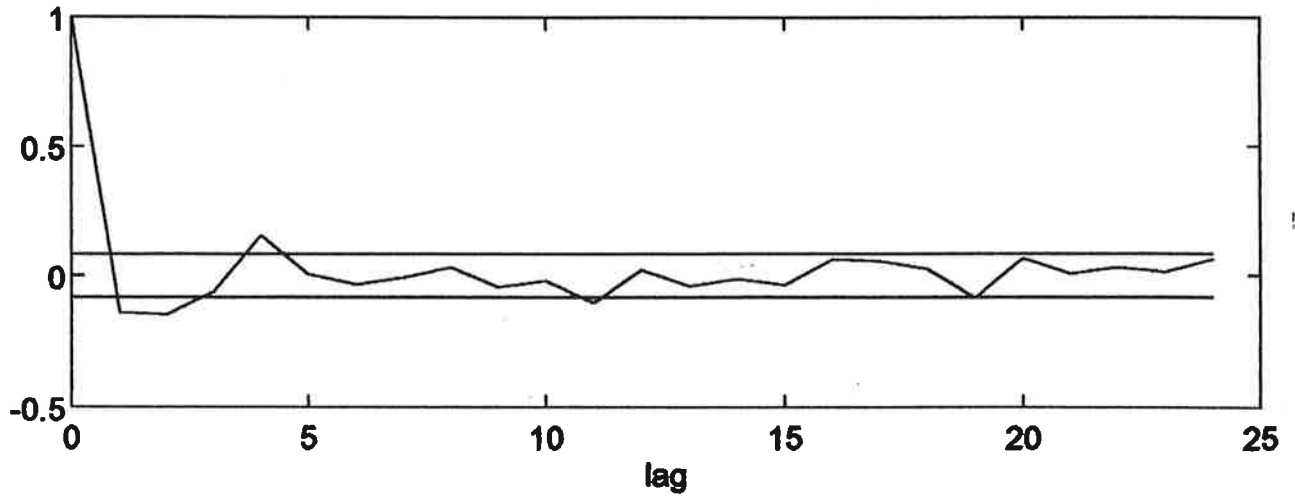


fig2 a,b resid på th=arimax(4,3,3,2) på H theta,0

fig 3. FPE på  $\arx(a,b,2)$  - modell för H theta,0



Correlation function of residuals. Output # 1



Cross corr. function between input 1 and residuals from output 1

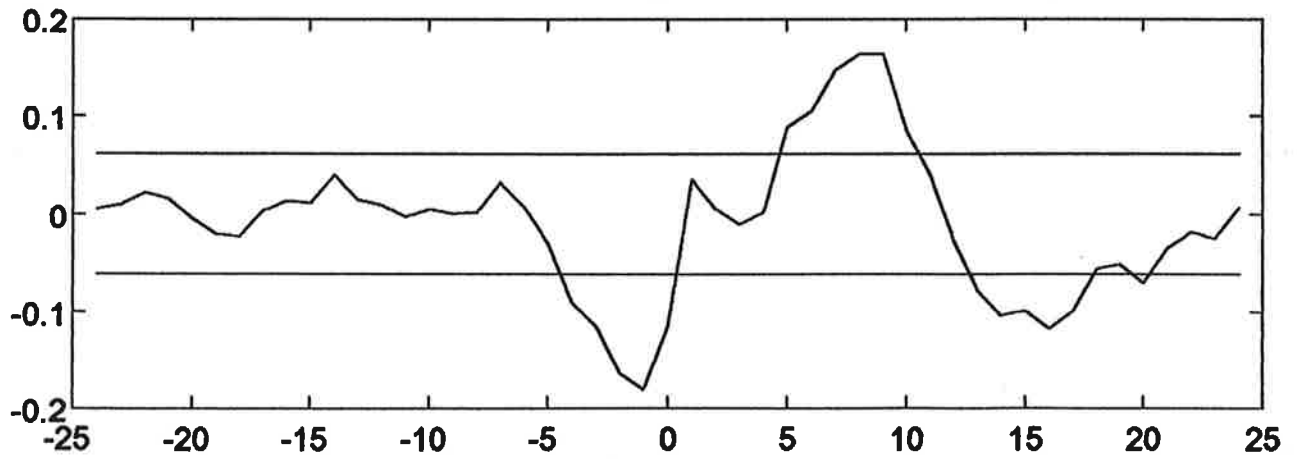
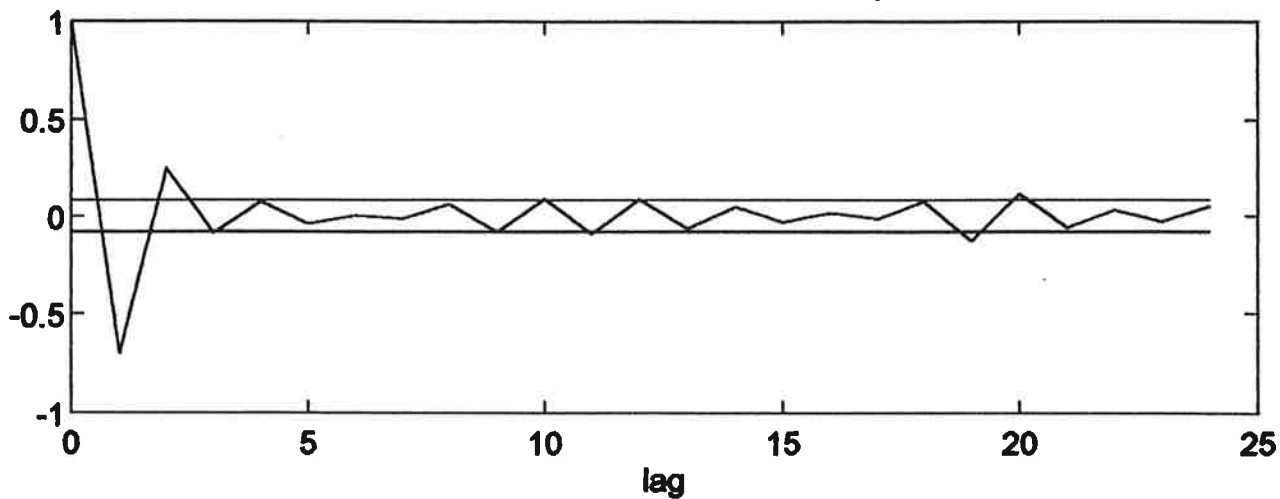


fig4 a,b resid på  $\theta = \arctan(5,3,2)$  på  $H$   $\theta = 0$



Correlation function of residuals. Output # 1



Cross corr. function between input 1 and residuals from output 1

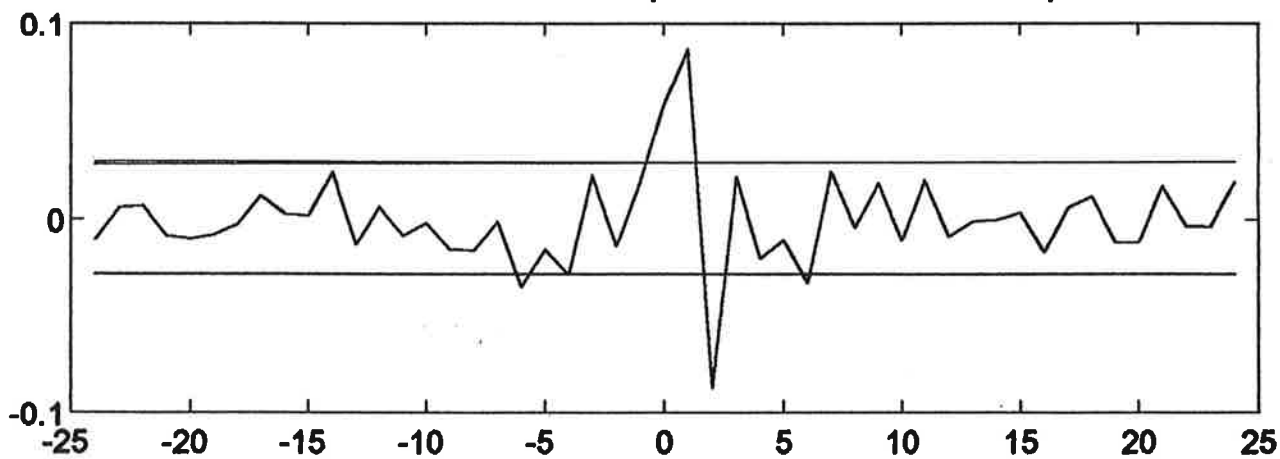
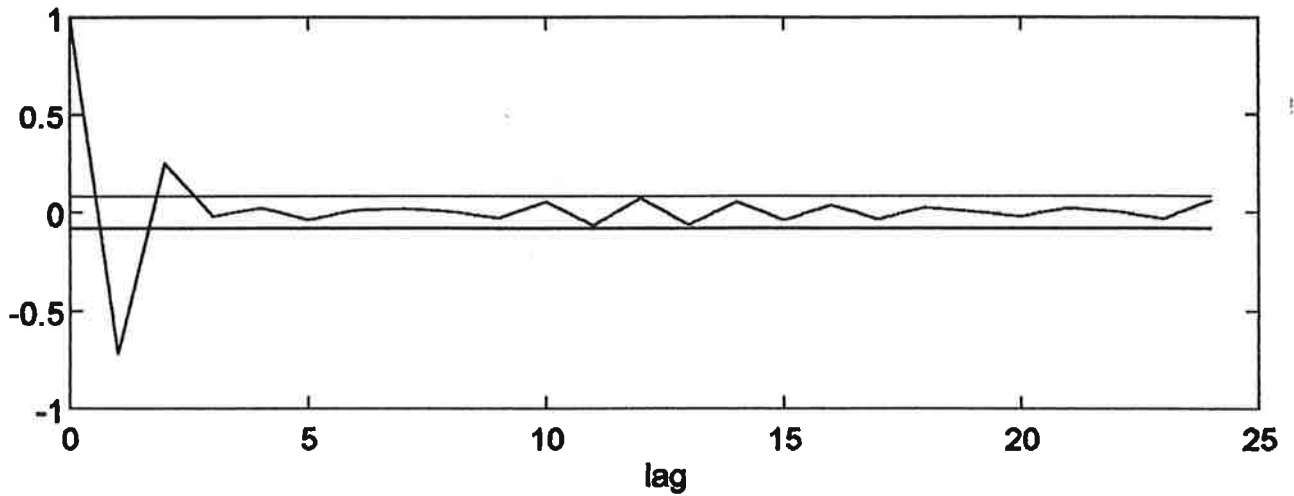


fig5 a,b resid på balanserad realisering på  $\theta = \arx(8,4,0)$  för  $H$   $\theta, 0$

Correlation function of residuals. Output # 1



Cross corr. function between input 1 and residuals from output 1

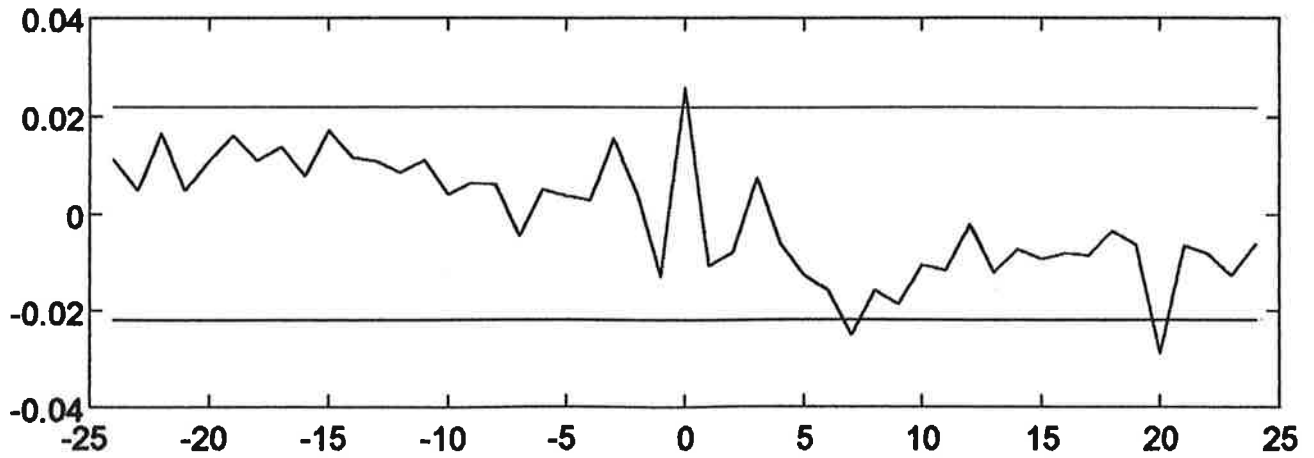
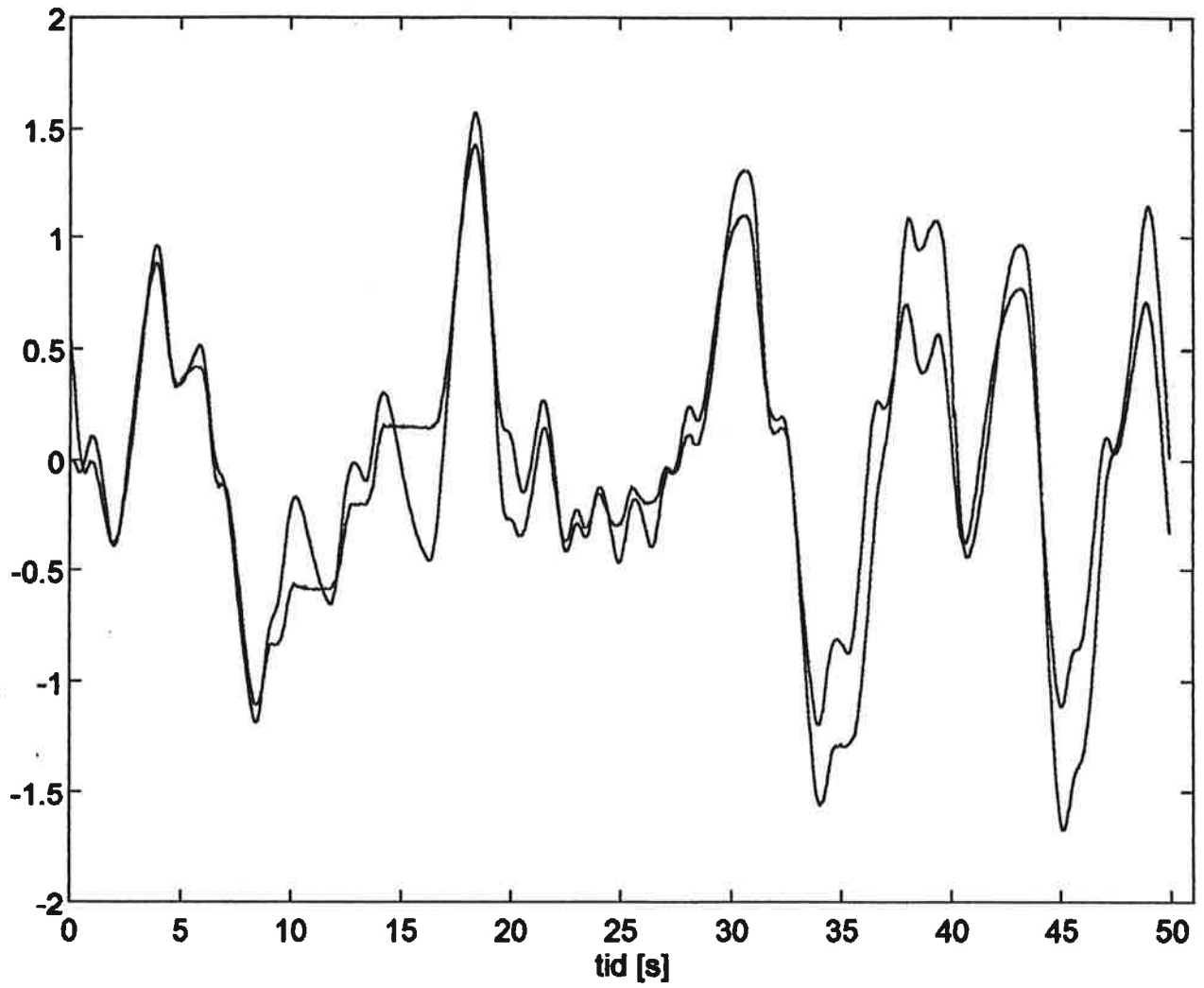


fig 6 a,b resid på th=balanserad realisering av  $arx(10,6,1)$ ,  $deg(num)=3$ ,  $deg(den)=3$

H fi,0

fig 7 validering på  $H_{fi,0}$  funnen genom balanserad realisering på  $arx(10,6,1)$



## BILAGA 5: SIMNONKOD

```
MACRO HELI
SYST RSTVER RSTHOR CONHELI
"store uver[CONHELI]
store uhor[CONHELI] y[RSTVER] yref[RSTVER]
split 2 1

axes v -1.1 1.1 h 0 50
TEXT 'Horisontell reglering, yref=fyrkantsvag (w=2)'
plot y[RSTHOR] yref[RSTHOR]

simu 0 50
axes v -1.1 1.1 h 0 50
TEXT 'Vertikal matsignal'

"show uhor[CONHELI]
show y[RSTVER]

END

CONNECTING SYSTEM CONHELI
TIME t

yref[RSTHOR]=if t<10 then 0 else 0.1*sqw(0.1*t)
y[RSTHOR]=Adin(chan0,t)
uver=Daout(ctrchan0,outfact*u[RSTHOR]+offset)
safever=Sdaout(ctrchan0,0)

yref[RSTVER]=if t<10 then -1+t*0.1 else 0
y[RSTVER]=Adin(chan1,t)
uhor=Daout(ctrchan1,outfact*u[RSTVER]+offset)
safehor=Sdaout(ctrchan1,0)

chan0:0
ctrChan0:0
chan1:1
ctrChan1:1
outfact:1
offset:0
END
```

## RSTVER.T

DISCRETE SYSTEM RSTVER

" Tredje ordningens RST-Regulator för kontroll av  
" helikoptern i vertikalled.

INPUT yref y "set point and measured value  
OUTPUT u "controller output

STATE u1 u2 u3 yr1 yr2 yr3 y1 y2 y3  
NEW nu1 nu2 nu3 nyr1 nyr2 nyr3 ny1 ny2 ny3  
TIME t  
TSAMP ts

nu1=u  
nu2=u1  
nu3=u2

nyr1=yref  
nyr2=yr1  
nyr3=yr2

ny1=y  
ny2=y1  
ny3=y2

$v = -r1*u1 - r2*u2 - r3*u3 + t0*yref + t1*yr1$   
 $u = v + t2*yr2 + t3*yr3 - s0*y - s1*y1 - s2*y2 - s3*y3$

ts=t+h

"Den givna regulatorn, som användes vid identifieringen

"r1:-1.90003  
"r2:1.19917  
"r3:-0.299141  
"s0:11.4229  
"s1:-32.1311  
"s2:30.1606  
"s3:-9.44708  
"t0:0.302446  
"t1:-0.675414  
"t2:0.503787  
"t3:-0.125505

"Polplacering av Am med w=2 och z=0.7 och Ao 2\*w

"r1:-2.4129  
"r2:1.946  
"r3:-0.5331  
"s0:1.8396  
"s1:-5.1447  
"s2:4.8014  
"s3:-1.4958  
"t0:0.0857  
"t1:-0.2175  
"t2:0.1852  
"t3:-0.0529

"Polplacering av Am med w=2.5 och z=0.7 och Ao 2\*w

r1:-2.2464

RSTVER.T

r2:1.6778  
r3:-0.4314  
s0:3.6455  
s1:-10.1286  
s2:9.3943  
s3:-2.9093  
t0:0.1625  
t1:-0.3946  
t2:0.3229  
t3:-0.0889

"Polplacering av Am med w=3 och z=0.7 och Ao 2\*w

"r1:-2.0832  
"r2:1.4233  
"r3:-0.3401  
"s0:6.257  
"s1:-17.2502  
"s2:15.8835  
"s3:-4.8852  
"t0:0.2725  
"t1:-0.6328  
"t2:0.4975  
"t3:-0.1321

"Polplacering av Am med w=4 och z=0.7 och Ao 2\*w

"r1:-1.767  
"r2:0.9468  
"r3:-0.1798  
"s0:14.0453  
"s1:-38.0584  
"s2:34.4901  
"s3:-10.4528  
"t0:0.6085  
"t1:-1.2887  
"t2:0.936  
"t3:-0.2317

h:0.05

END

RSTHOR.T

DISCRETE SYSTEM RSTHOR

INPUT y yref

OUTPUT u

STATE u1 u2 u3 yr1 yr2 yr3 y1 y2 y3

NEW nu1 nu2 nu3 nyr1 nyr2 nyr3 ny1 ny2 ny3

TIME t

TSAMP ts

nu1=u

nu2=u1

nu3=u2

nyr1=yref

nyr2=yr1

nyr3=yr2

ny1=y

ny2=y1

ny3=y2

v=-r1\*u1-r2\*u2-r3\*u3+t0\*yref+t1\*yr1+t2\*yr2+t3\*yr3

v1=v-s0\*y-s1\*y1-s2\*y2-s3\*y3

u=if v1<-1 THEN -1 else if v1>1 THEN 1 else v1

ts=t+h

"Den givna regulatorn, som användes vid identifieringen

"r1:-1.5

"r2:0.5

"s0:-6

"s1:11.475

"s2:-5.4875

"t0:1

"t1:-1.475

"t2:0.4875

"Polplacering av Am med w=2 och z=0.7 och Ao 2\*w

r1:-2.578

r2:2.2346

r3:-0.6566

s0:-18.6355

s1:48.3235

s2:-41.4497

s3:11.7495

t0:-1.9303

t1:4.8984

t2:-4.1713

t3:1.1911

"Polplacering av Am med w=3 och z=0.7 och Ao 2\*w

"r1:-2.2484

"r2:1.6718

"r3:-0.4235

"s0:-81.5538

"s1:213.0199

"s2:-184.8547

"s3:53.2729

"t0:-6.1364

"t1:14.2504

"t2:-11.2040

"t3:2.9742

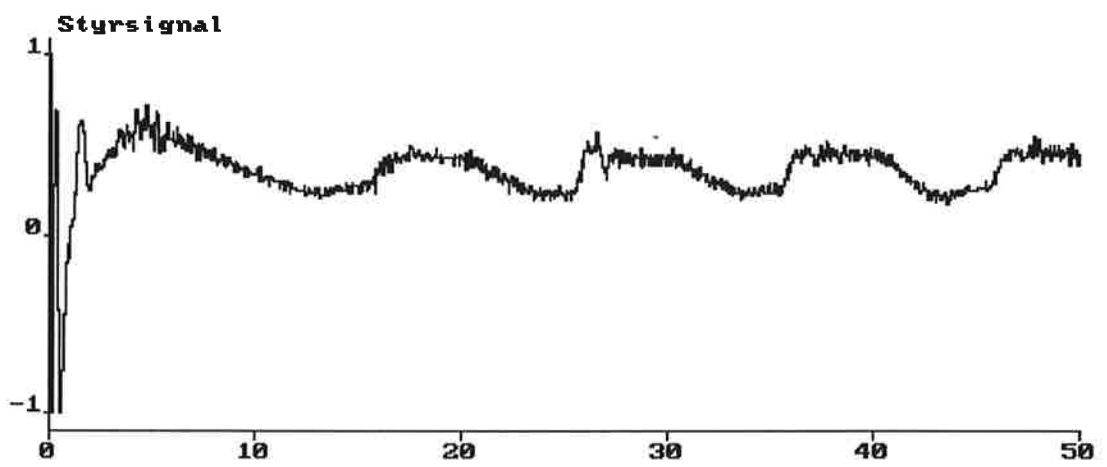
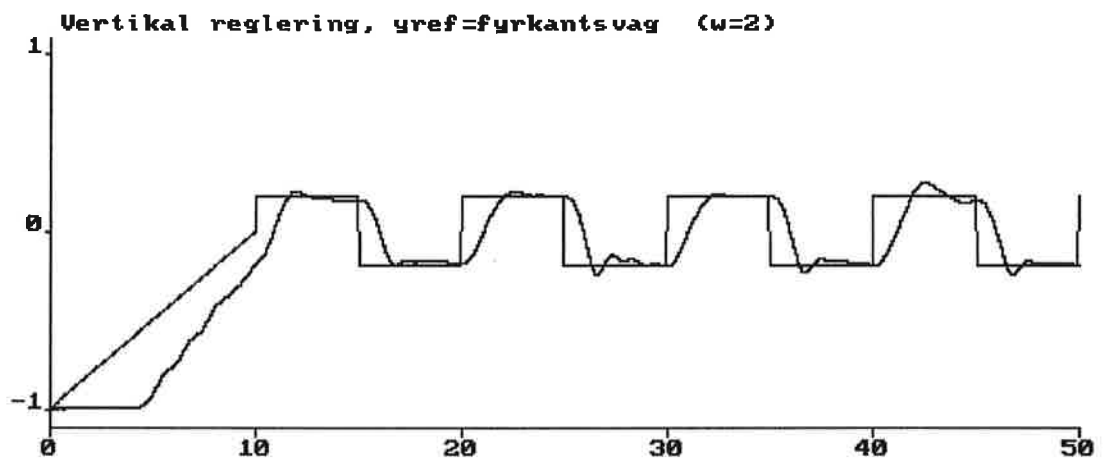


"Polplacering av Am med w=4 och z=0.7 och Ao 2\*w

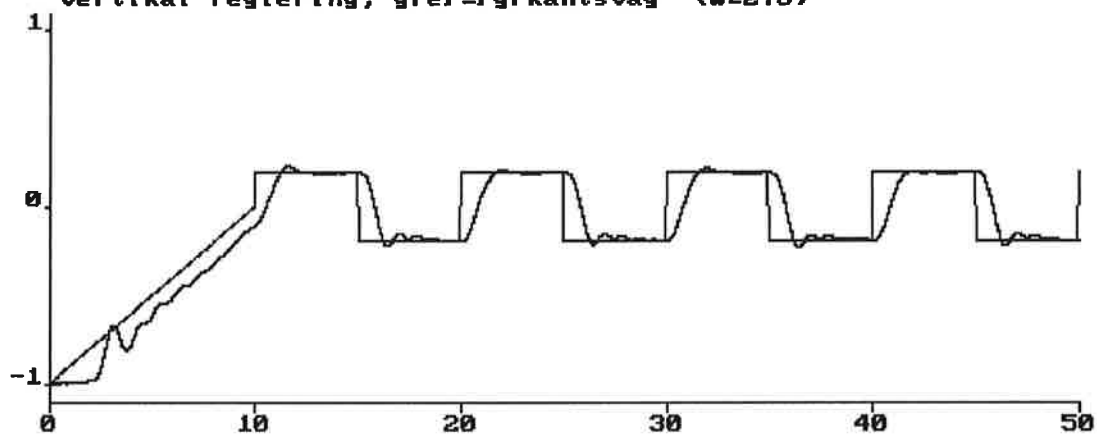
"r1:-2.0447  
"r2:1.3921  
"r3:-0.3473  
"s0:-70.5107  
"s1:175.3039  
"s2:-143.837  
"s3:38.8096  
"t0:-5.8896  
"t1:12.4725  
"t2:-9.0593  
"t3:2.2423

h:0.05  
END

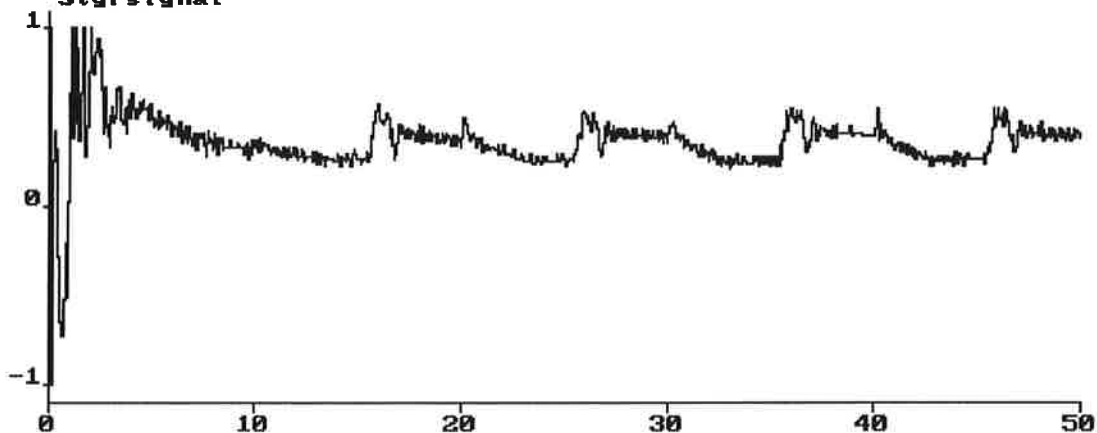
## BILAGA 6: REGULATORTEST



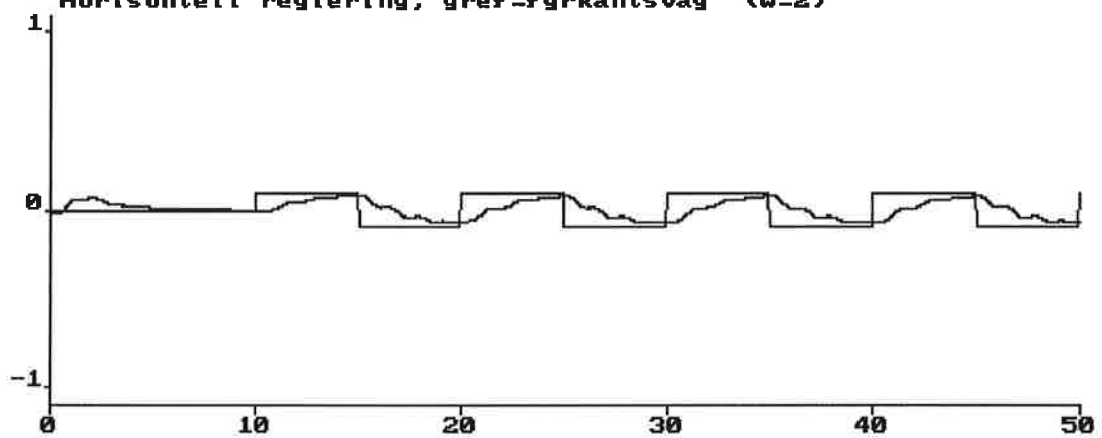
Vertikal reglering, yref=fyrkantsvag ( $w=2.5$ )



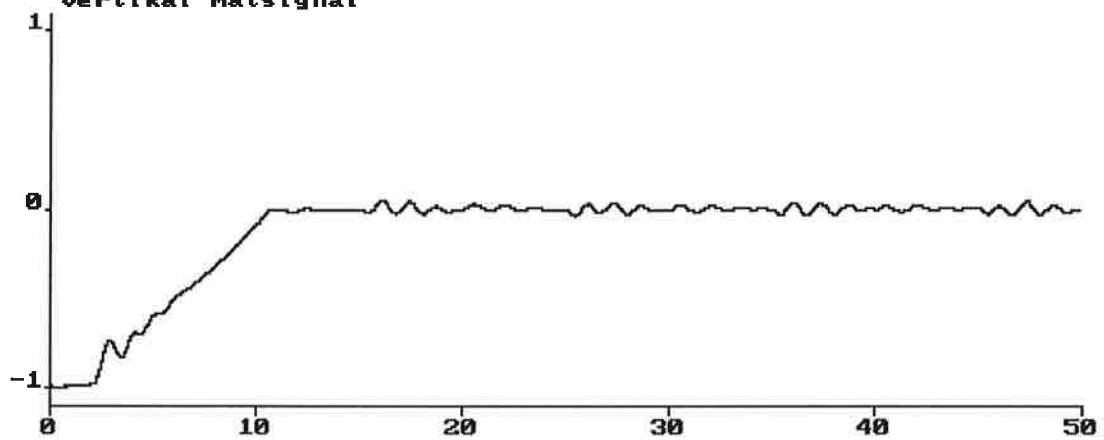
Styrsignal

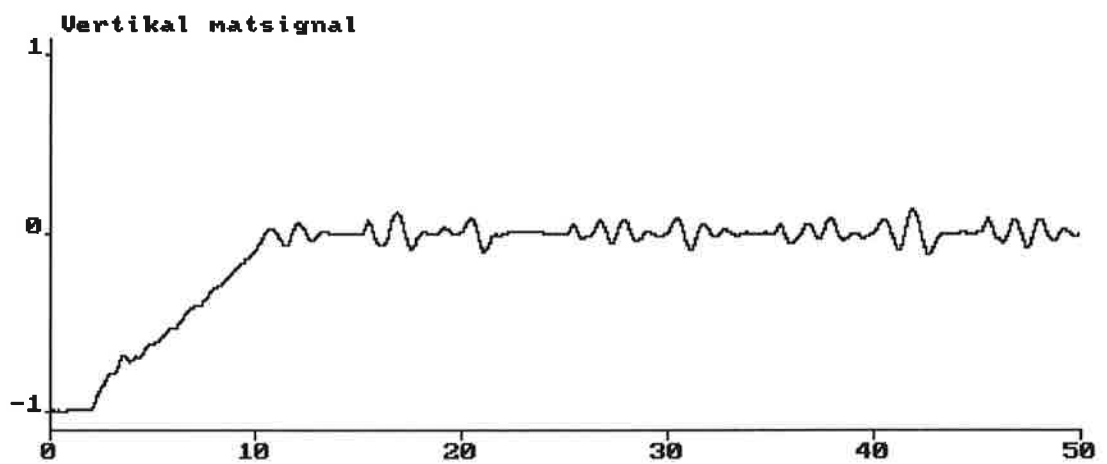
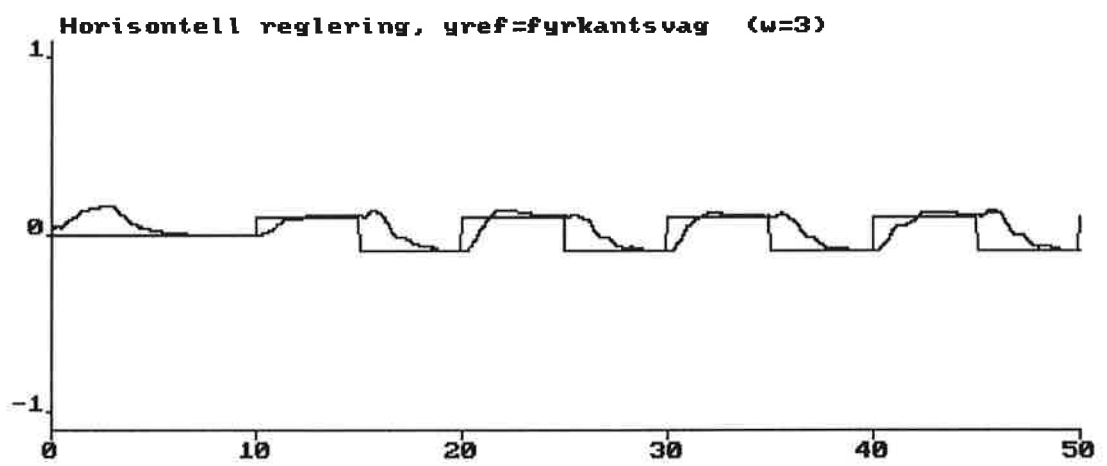


Horisontell reglering, yref=fyrkantsvag (w=2)

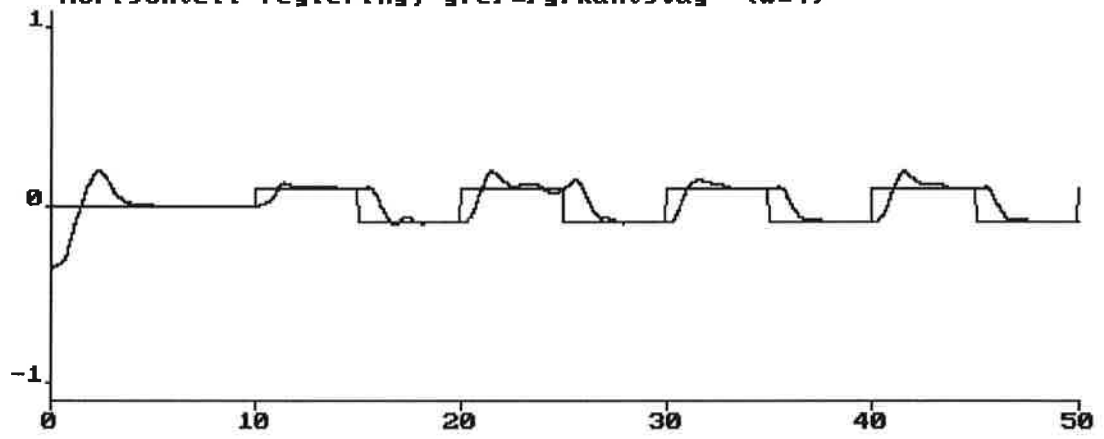


Vertikal matsignal

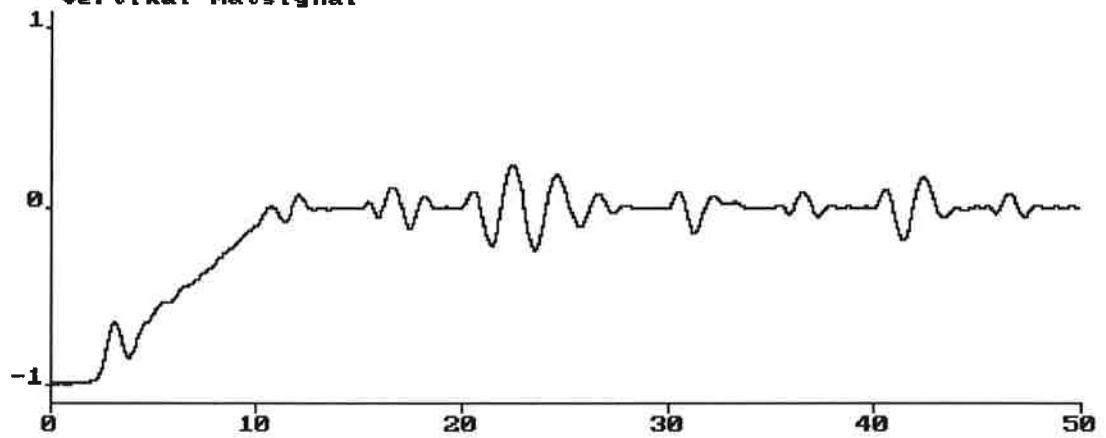




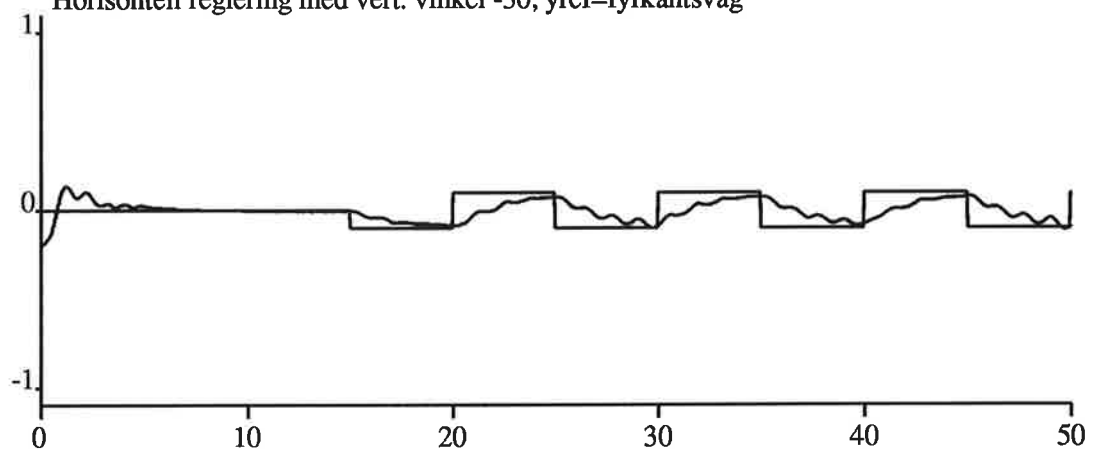
Horisontell reglering, yref=fyrkantsvag (w=4)



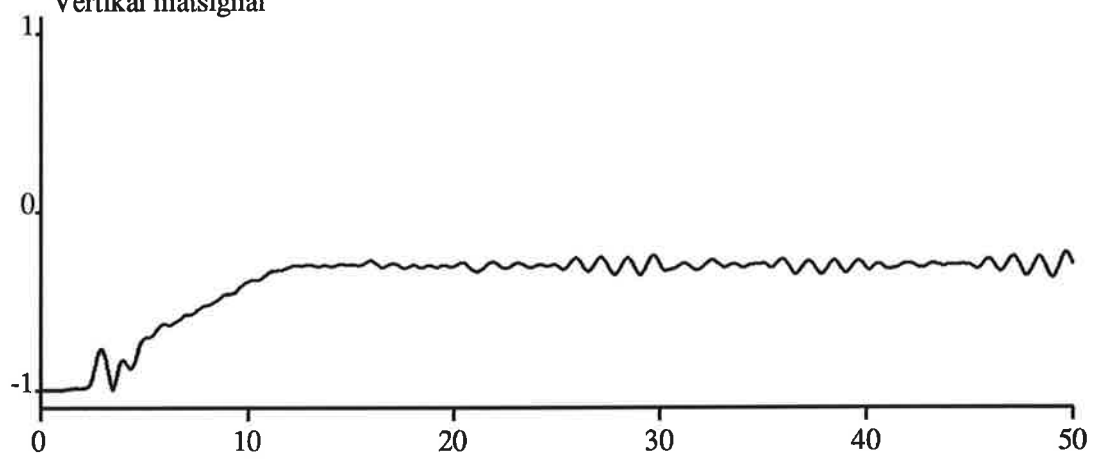
Vertikal matsignal



Horisontell reglering med vert. vinkel -30, yref=fyrkantsvag



Vertikal matsignal





# Helikopter

## Projekt i ProcessIdentifiering

Zoltan Kadar e91zk  
och  
Mikael Samuelsson e91ms

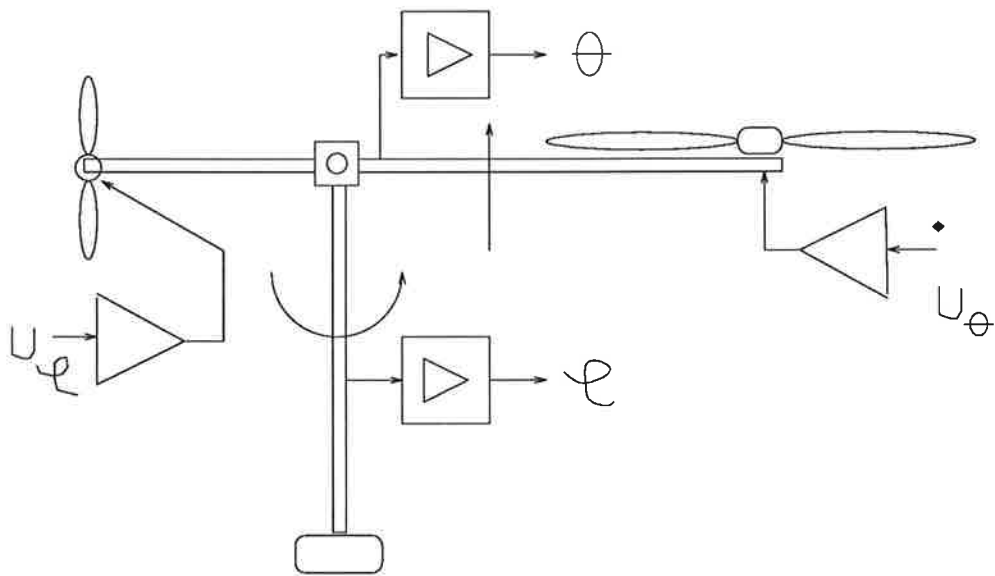
Handledare : Karl-Henrik Johansson

Lund, våren 1995

# 1 Introduktion

Projektet utfördes under våren 1995 som en del i kursen *ProcessIdentifiering*. Målet med projektet var att identifiera och reglera en modellhelikopter. Identifieringen utfördes mestadels i Matlab medan regleringen gjordes via Simnon. Som teoretisk grund användes kunskaper från reglerteknik, elmaskinsystem, teknisk mekanik och stationära processer som här tillsammans utgör en helhet.

Modellhelikoptern består av två rotoror som är kopplade på en arm. Armen kan röras både i sid/höjddled. Höjdrotorn har större diameter än stjärtrotorn.



Figur 1: Helikoptermodell

Identifieringen medförde en hel del svårigheter ty systemet är multivariabelt. En av de är rotorernas påverkan på varandra. Påverkan i sidled kan försummas medan den är betydande i höjddled. Både höjd-, och vinkelkanalen visade sig vara känsliga för störningar. Ytterligare en svårighet är att identifieringen måste göras i slutna loop ty systemet måste stabiliseras med externa regulatorer. I vårt fall reglerades sidledskanalen av en PID-regulator medan höjddledskanalen av en RST-regulator.

Vi valde att göra vår identifiering kring en arbetspunkt där  $\theta = 0$  och  $\varphi = 0$  och armen befinner sig i horisontalläge. Det visade sig vara en känslig punkt vid identifiering i höjddled där helikoptern lätt kan hamna i obalans.

## 2 Specifikation av uppgift

Vår uppgift bestod i att identifiera modellhelikoptern och reglera dess beteende. Vi jobbade enligt följande ordning:

- Fysikalisk modellering.
- Frekvensanalys.
- Parametrisk identifiering.
- Reglering och simulering kring identifierad modell.
- Rapportskrivning - löpande under projektets gång.

## 3 Frekvensanalys

Vi har tittat på vårt system genom att använda frekvensanalysmetoden. Vi har plottat Bodediagrammet och Nyquistkurvan för de tre, för oss intressanta, överföringsfunktionerna:

- överföringsfunktionen från  $u_\theta$  till huvudrotorn fram till höjdvinkeln
- överföringsfunktionen från  $u_\varphi$  till stjärtrotorn till höjdvinkeln
- överföringsfunktionen från  $u_\varphi$  till stjärtrotorn till sidvinkeln

Överföringsfunktionen från huvudrotorn till sidvinkeln verkade ha liten amplitud jämfört med de andra och vi betraktade därför detta som noll. Frekvensområdet vi tittade på var mellan 0.1 och 2 Hz.

Av de ovannämnda tre fallen gav enbart frekvensanalysen på sidvinkeln ett någorlunda användbart resultat. Ur Bodediagrammet såg vi att systemet möjligtvis har fem poler, något som verkade vara fullt möjligt med tanke på att den totala överföringsfunktionen innehöll regulatorn också.

I de andra två fallen märkte vi att regulatorn har motverkat frekvensanalysatorns inverkan på systemet, speciellt vid frekvenser mellan 0.1 och 1 Hz. Därför ansåg vi metoden vara oanvändbar i vårt fall.

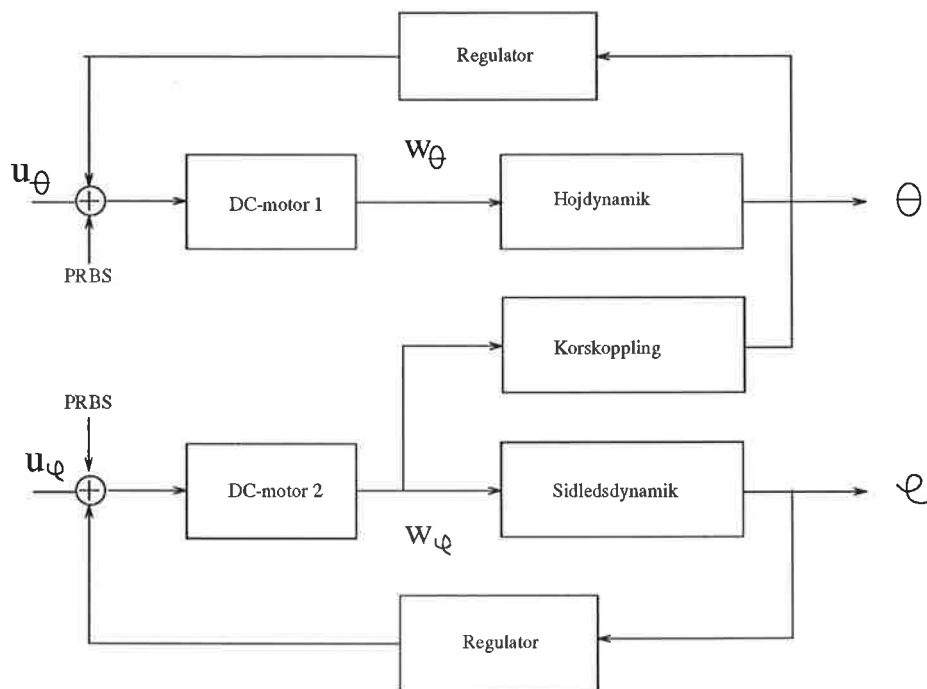
## 4 Fysikalisk modellering

### Inledande modellering

Helikoptern består av två kanaler, var och en bestående av en DC-motor där en inspänning matas in. Den övre kanalen har en utsignal som är vinkeln i höjddled medan den undre har en utsignal som är vinkeln i sidled. Via inspänningen regleras hastigheten på rotorerna som i sin tur via olika dynamiska funktioner ger den önskade vinkeln i både sid-, och höjddled.

Vårt att nämnas är en korskoppling som uppstår pga att stjärtmotorn påverkar höjdvinkeln  $\theta$ . På samma sätt upptäcker vi att ingen korskoppling uppstår mellan huvudrotor och sidvinkeln  $\varphi$ .

Via den fysikaliska modelleringen avser vi att identifiera en approximativ modell av helikoptern. Denna kommer främst att underlätta val av ordning på



Figur 2: Ur figuren kan följande överföringsfunktioner härledas:  $G_{m1}$  och  $G_{m2}$  för respektive motorer,  $G_{11}$  och  $G_{22}$  för höjd- och sidledsdynamik samt  $G_{12}$  för korskoppling.

systemets polynom samt val av väsentliga parametrar vid senare identifiering via Matlab.

Figur2 visar en sammanfattning av hur processen är uppbyggd. Följande viktiga samband kan härledas:

$$\theta = u_\theta G_{m1} G_{11} + u_\phi G_{m2} G_{12} \quad (1)$$

$$\varphi = u_\phi G_{m2} G_{22} \quad (2)$$

Dessa ekvationer bildar följande systemmatris:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{m1}G_{11} & G_{m2}G_{12} \\ 0 & G_{m2}G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix}$$

## Modellering av rotorernas överföringsfunktioner

DC-motorenas överföringsfunktioner härleds i appendix. Här nöjer vi oss med att redovisa momentekvationerna för båda rotorerna:

$$J_1 \dot{w}_\theta = k_1 u_\theta - B_1 w_\theta \quad (3)$$

$$J_2 \dot{w}_\varphi = k_2 u_\phi - B_2 w_\varphi \quad (4)$$

Via Laplace - transform får överföringsfunktionerna  $G_{m1}$  och  $G_{m2}$  och får då följande utseende:

$$G_{m1}(s) = \frac{w_\theta(s)}{u_\theta(s)} = \frac{k_{m1}}{1 + sT_{m1}} \quad (5)$$

$$G_{m2}(s) = \frac{w_\varphi(s)}{u_\varphi(s)} = \frac{k_{m2}}{1 + sT_{m2}} \quad (6)$$

Ovanstående motorvariabler kan identifieras enligt följande:  $k_{m1} = k_1/B_1$ ,  $k_{m2} = k_2/B_2$ ,  $T_{m1} = J_1/B_1$  och  $k_{m2} = J_2/B_2$ .

## Modellering av kanalernas dynamik

Modelleringen av höjddynamiken respektive sidledsdynamiken bjuder på en del svårigheter. För att kunna identifiera dessa överföringsfunktioner utgår vi från ekvationer för masströghetsmoment med avseende på en vridningsaxel.

$$J\ddot{\phi} = Mw \quad (7)$$

Detaljer kring hur vi härleder de för oss intressanta ekvationerna finns redovisade i appendix. I det här avsnittet väljer vi att presentera slutresultaten. I vårt fall kommer de linjäriserade ekvationerna för masströghetsmoment att se ut enligt följande:

$$J_\theta \Delta \ddot{\theta} = k_\theta \Delta w_\theta - k_2 \Delta u_\theta + B_2 \Delta w_\theta - B_\theta \Delta \dot{\theta} - mgl_{tp} \quad (8)$$

$$J_\varphi \Delta \ddot{\varphi} = k_\varphi \cos \theta \Delta w_\varphi - k_1 \cos \theta \Delta u_\varphi - B_\varphi \Delta \dot{\varphi} \quad (9)$$

Nu kan vi med hjälp av Laplace-transform få fram överföringsfunktionerna  $G_{11}$  (dynamik för höjdrotor),  $G_{12}$  (dynamik för korskoppling) och  $G_{22}$  (dynamik för stjärtrotor) enligt nedan:

$$G_{11}(s) = \frac{\Delta \theta(s)}{\Delta w_\theta(s)} = \frac{\frac{k_\theta}{J_\theta}}{s^2 + \frac{B_\theta}{J_\theta} s} \quad (10)$$

$$G_{12}(s) = \frac{\Delta \theta(s)}{\Delta w_\varphi(s)} = \frac{\frac{B_2}{J_\theta}}{s^2 + \frac{B_\theta}{J_\theta} s} \quad (11)$$

$$G_{22}(s) = \frac{\Delta \varphi(s)}{\Delta w_\varphi(s)} = \frac{\frac{k_\varphi}{J_\varphi} \cos \theta}{s^2 + \frac{B_\varphi}{J_\varphi} s} \quad (12)$$

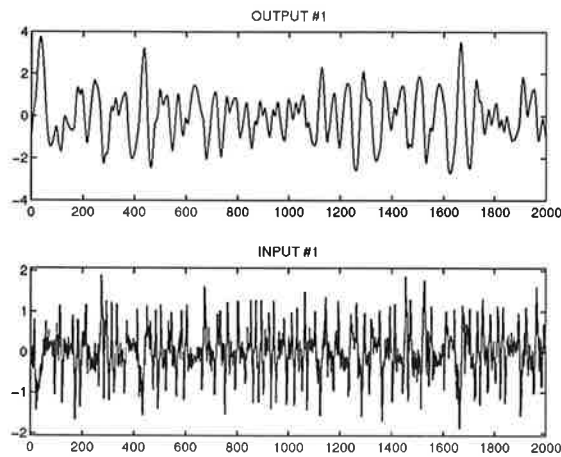
## Slutsatser

Ovanstående fysikaliska modellering ger oss en bild av ordningen på systemet, samt en känsla för dynamiken vid en arbetspunkt där armen befinner sig i horisontalläge. Vi kan sammanfatta med att dra följande slutsatser:

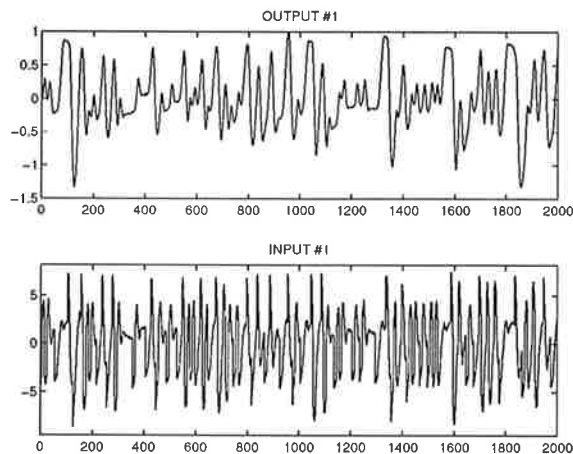
- Höjdkanalens överföringsfunktion  $G_{m1}G_{11}$  kommer att ha tre poler varav en reell (motorns tidskonstant  $T_{m1}$ ) och två komplexa beroende på dynamiken.

- Korskopplingen kommer att ha ungefär samma överföringsfunktion som höjdkanalen med betydligt lägre förstärkning - alltså relativt liten påverkan på  $\theta$ .
- Sidledskanalens överföringsfunktion  $G_{m2}G_{22}$  kommer också att ha tre poler.
- Både höjd-, och sidledskanalen visade sig vara beroende av variationer på  $\theta$  kring arbetspunkten.

## 5 Parametrisk uppskattning av modellen



Figur 3: In- utsignal för höjdkanal



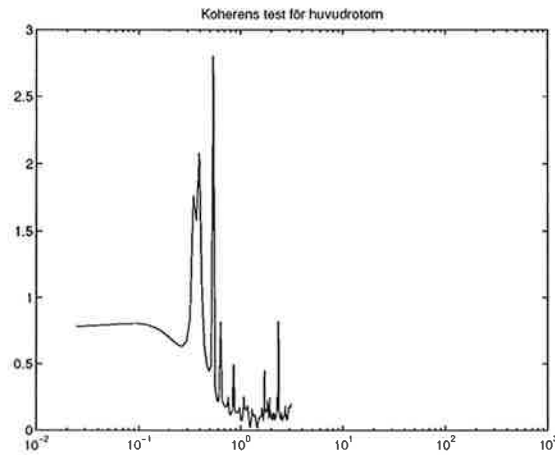
Figur 4: In- utsignal för sidkanal

Vi gjorde en parametrisk uppskattning av modellen kring arbetspunkten motsvarande  $\varphi = 0$  och  $\theta = 0$ . Vi använde oss av befintliga regulatorer för att kunna stabilisera modellen kring den ovannämnda arbetspunkten enligt figur 2.

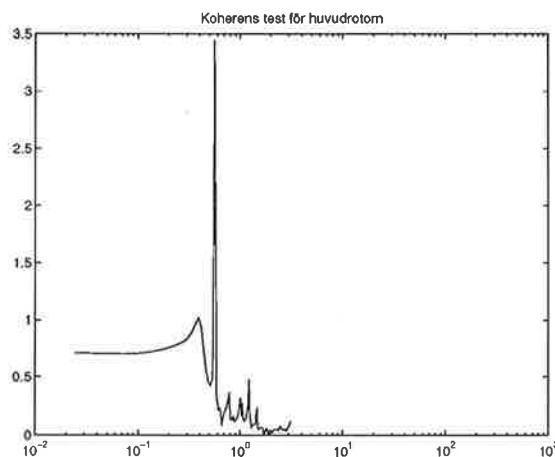
Vi utförde samma mätningar för både höjd-, siddynamiken samt korskopplingen men den sistnämnda kommer vi att behandla endast i appendix. Detta på grund av den är rätt så obetydlig jämfört med de andras inverkan på systemet.

För att excitera systemet använde vi en PRBS signal. Genom att addera denna med utsignalen från regulatorn kunde vi göra en identifiering motsvarande

open-loop identifieringen. Vi tog tre olika mätserier för att kunna uppskatta överföringsfunktionerna för höjd-, sidkanalen, samt för korskopplingen. I figur 3 och figur 4 ser vi in- och utsignalen för processerna.



Figur 5: Koherenstest för höjdded



Figur 6: Koherenstest för sidled

Samplingsperioden valde vi till  $h = 50$  ms så att  $\omega h \approx 0.2$ . Genom att titta på koherens funktionerna ( fig 5 och fig 6 ) kunde vi se att mätserierna var endast användbara för frekvenser lägre än 3 rad/s .

Efter en serie beräkningar i Matlab kom vi fram till att siddynamiken kan modelleras rätt bra med en ARMAX modell

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - n_k) + C(q)e(t) \quad (13)$$



där

$$A(q) = q^3 - 2.3764q^2 + 1.9347q - 0.4811 \quad (14)$$

$$B(q) = 0.0009q - 0.002 \quad (15)$$

$$C(q) = q - 0.6049 \quad (16)$$

medan höjddynamiken var mycket känsligare och vi fann en någorlunda godtagbar validering endast för en Box-Jenkins modell.

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \quad (17)$$

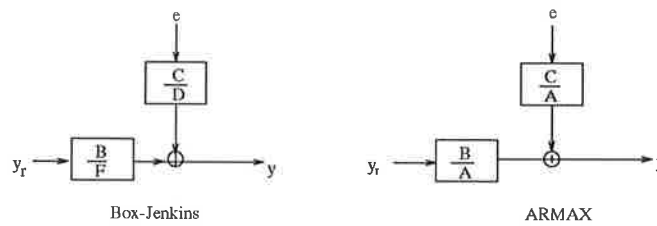
där

$$F(q) = q^3 - 2.7713q^2 + 2.5495q - 0.7780 \quad (18)$$

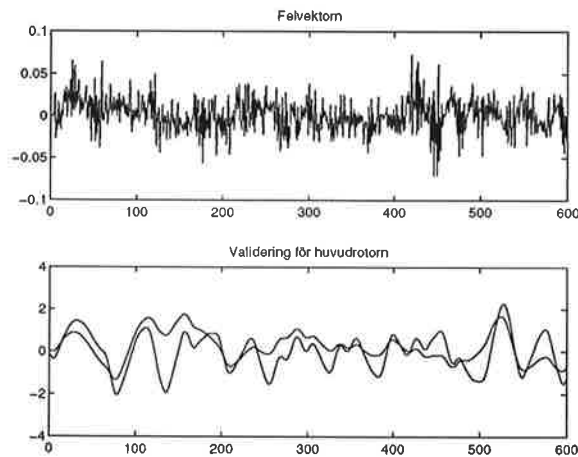
$$B(q) = -0.0087q - 0.0166 \quad (19)$$

$$C(q) = q - 0.3642 \quad (20)$$

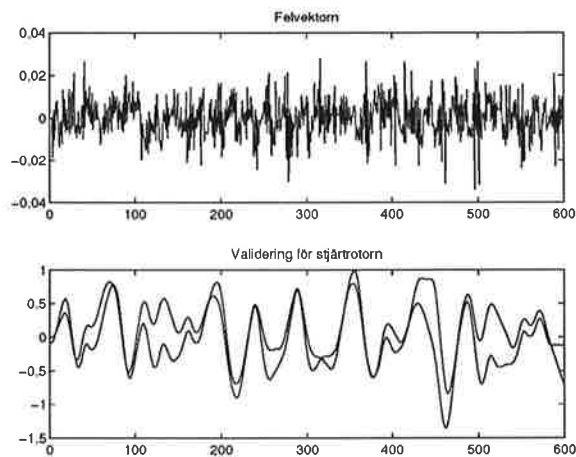
$$D(q) = q^2 - 1.9989q + 1.009 \quad (21)$$



Figur 7:

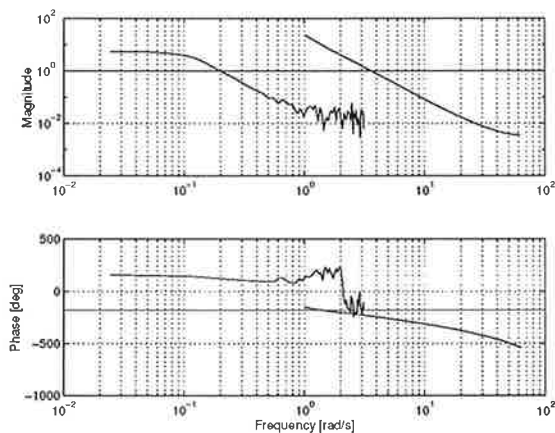


Figur 8: Validering för höjddynamiken

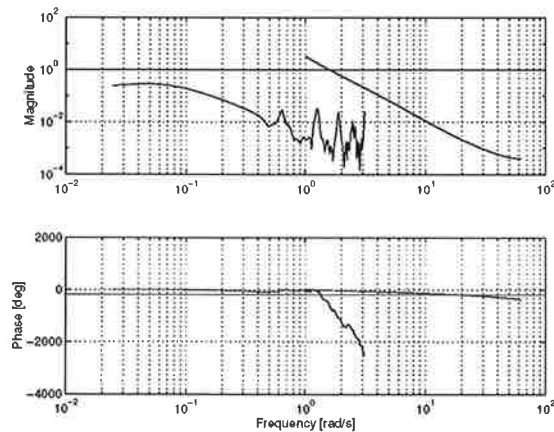


Figur 9: Validering för siddynamiken

För att testa om den verkliga modellen stämmer bra överens med den uppskattade modellen tittade vi på felvektorn. Med hjälp av Matlabrutinen validering jämförde vi den teoretiskt framräknade utsignalen med den utmätta utsignalen ( fig 8 och fig 9 ). För både höjd- och siddynamiken gäller att modellen följer ganska bra det verkliga systemet men är ibland lite för långsam.



Figur 10: Jämförelse mellan det uppmätta och modellerade Bodediagrammet för höjddled



Figur 11: Jämförelse mellan det uppmätta och modellerade Bodediagrammet för sidled

Även en jämförelse mellan de verkliga och de modellerade Bodediagrammen gav ett bra resultat. Genom att omvandla överföringsfunktionerna från diskret tid till kontinuerlig tid kunde vi se att den parametriska modelleringen stämmer bra överens med resultaten vi fick genom fysikalisk modellering.

## 6 Reglering via Simnon

För att se hur pass bra modeller vi fick genom Matlab - identifieringen bestämde vi att designa regulatorer för både sid- och höjdvinkel. Trots ambitionen att testa mer avancerade regulatorer blev vi tvungna att begränsa vårt arbete och nöja oss med RST-design baserad på polplacering. Det visade sig att RST styrningen gav ett bra resultat i båda led och att korskopplingens inverkan på höjdvinkeln kan försummas vid lämpligt val av regulatorer.

Valet av bandbredd för det slutna systemet gjordes med hänsyn till olinjäriteter och störningar. Vi insåg att med lämpligt val av bandbredden kunde vi få bra reglering. Vi bestämde att bandbredden borde befinna sig nära 3 rad/s. För bästa reglering valde vi följande värden:

- för sidvinkel  $\omega_m = 2.3$
- för höjdvinkel  $\omega_m = 2.6$

Bandbredden används för att bestämma  $A_m$  och  $A_o$  i kontinuerlig tid för att sedan överföras till diskret tid och användas för att räkna ut RST regulatorn.

För att eliminera stationära fel använde vi även en integrator i varje led. För att få fram  $R(q)$ ,  $S(q)$ ,  $T(q)$ -polynomen använde vi diophantinska ekvationen som lyder enligt följande:

$$(q - 1)A(q)R(q) + B(q)S(q) = A_m(q)A_o(q) \quad (22)$$

Styrlagen får då följande utseende:

$$u(k) = \frac{T(q)}{R(q)} y_r - \frac{S(q)}{R(q)} y \quad (23)$$

Efter designen implementerade vi regulatorerna i SIMNON för realtidsstyrning. Det visade sig att en bra regulator i höjddled kan motverka korskopplingens dynamik.

Regleringen i båda led gjordes med hjälp av en fyrkantsvåg med en amplitud på 0.2 enheter. För reglering i sidled använde vi en RST med dubbel integrator för att stabilisera och ta bort stationära felet. Vi valde även att presentera korskopplingens inverkan på höjdvinkeln genom att plotta den sistnämnda tillsammans med referens signalen för styrning i sidled. Figuren finns redovisade i appendix.

## 7 Kommentarer

Här vill vi tacka Institutionen för Reglerteknik för en lärorik och intressant kurs. Vi upplevde Process Identifiering som en sammanfattande repetition av alla kurser vi följt på Reglerteknik. Vi vill passa på att tacka Karl-Henrik Johansson för hjälp och värdefulla tips under projektets gång.

## 8 Appendix

### 8.1 Modellering via tröghetsmoment

De grundläggande ekvationerna för vårt system kan härleddas ur figuren nedan där vi utgick från ekvationen för masströghetsmoment kring en vridningsaxel.

$$J\ddot{\phi} = Mw \quad (24)$$

Figuren gav oss följande ekvationer:

$$J_\theta \ddot{\theta} = M_1 - M_{m2} - B_\theta \dot{\theta} - mgl_{tp} \cos \theta \quad (25)$$

$$J_\varphi \ddot{\varphi} = M_2 \cos \theta - M_{m1} - B_\varphi \dot{\varphi} \quad (26)$$

Båda ovanstående ekvationer bygger kring ett arbetsmoment där  $\theta=0$  och  $\varphi=0$ . Momentet i höjd/sidled är beroende av kraften multiplicerat med hävarmen vilket också kan tolkas som varvtalet multiplicerat med en konstant. Följande ekvationer uppstår:

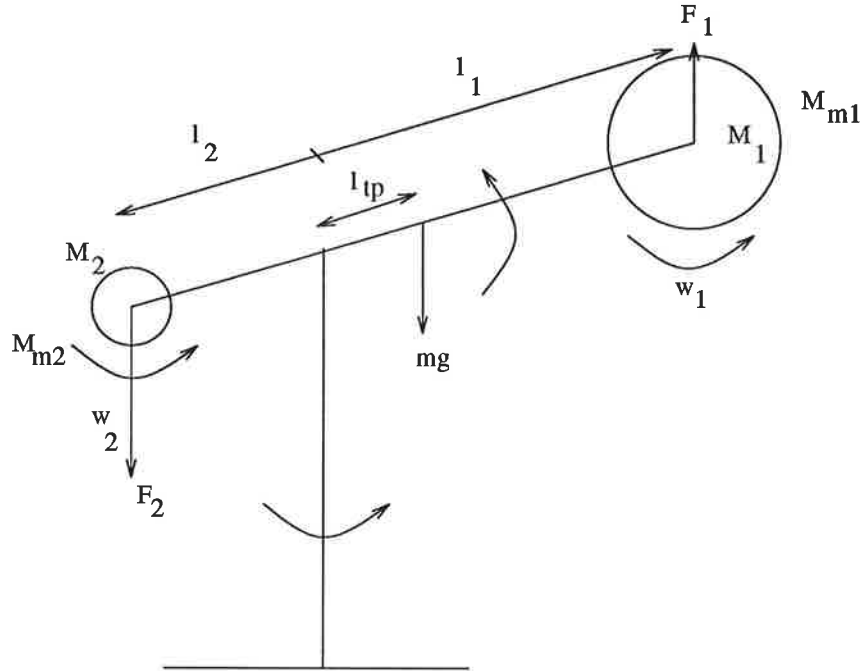
$$M_1 = F_1 l_1 = k_\theta w_\theta \quad (27)$$

$$M_2 = F_2 l_2 = k_\varphi w_\varphi \quad (28)$$

Drivmomentet orsakad av båda motorerna kommer att påverka masströghetsmomentet. Därför kommer  $M_{2\theta}$  och  $M_{1\varphi}$  att subtraheras från  $Mw$  i ekvation 24.

$$M_{m2} = J_1 \dot{\theta} = k_1 u_\theta - B_1 w_\theta \quad (29)$$

$$M_{m1} = J_2 \dot{\varphi} = k_2 u_\varphi - B_2 w_\varphi \quad (30)$$



Figur 12: En förenklad skiss över helikoptern.

Detta ger oss följande ekvationer:

$$J_\theta \ddot{\theta} = k_\theta w_\theta - (k_2 u_\theta - B_2 w_\theta) - B_\theta \dot{\theta} - mgl_{tp} \cos \theta \quad (31)$$

$$J_\varphi \ddot{\varphi} = k_\varphi \cos \theta w_\varphi - (k_1 u_\theta - B_1 w_\theta) \cos \theta - B_\varphi \dot{\varphi} \quad (32)$$

De ovanstående ekvationerna gäller för  $\theta \approx 0$ .  $B_1 w_\theta$  i ekvation 32 antas vara noll i.o.m korseffekten ifrån huvudrotorn till sidvinkeln är försumbar. En annan approximation är  $\cos \theta \approx 1$  för små vinklar kring arbetspunkten.

Slutligen kom vi fram till följande:

$$J_\theta \ddot{\theta} = k_\theta w_\theta - k_2 u_\theta - B_\theta \dot{\theta} - mgl_{tp} \quad (33)$$

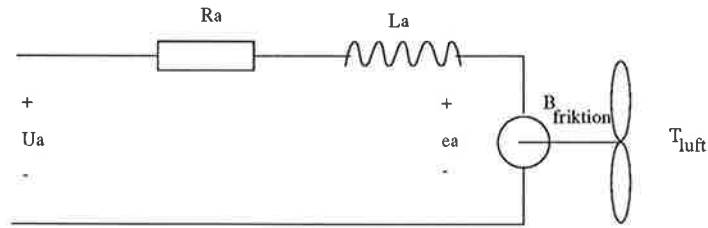
$$J_\varphi \ddot{\varphi} = k_\varphi \cos \theta w_\varphi - k_1 \cos \theta u_\varphi - B_\varphi \dot{\varphi} \quad (34)$$

## 8.2 Motorns ekvationer

Vi utgår från schemat på en vanlig DC-motor som visas i figur 13. I detta fall handlar det om en motor med konstant flöde. Ekvationerna för motorn blir:

$$L_a \dot{i}_a = u_a - k_a \omega - R_a i_a \quad (35)$$

$$e_a = k_a \omega \quad (36)$$



Figur 13: Schema för DC-motor.

$$J\dot{\omega} = T_d - T_l = k_a i_a - T_l \quad (37)$$

$T_d$  är drivmomentet medan  $T_l$  är lastmomentet. Vidare kan ovanstående ekvation utvecklas enligt nedan:

$$J\dot{\omega} = k_a i_a - (B_{\text{friktion}}\omega + T_{\text{luft}}) \quad (38)$$

Om vi antar att  $L_a = 0$  då

$$i_a = \frac{u_a - k_a \omega}{R_a} \quad (39)$$

vilket i sin tur ger oss:

$$J\dot{\omega} = \frac{k_a^2}{R_a} \omega - \frac{k_a}{R_a} u_a \quad (40)$$

alltså momentekvationen för en DC-motor blir  $J\dot{\omega} = K u_a - B\omega$ .

### 8.3 Identifiering av korstermen

Modelleringen för korskoppling gjorde vi enligt samma princip som för höjd-, respektive siddynamik. Vi fick en ARMAX modell enligt nedan som gav bra resultat vid validering och vid jämförelse med den fysikaliska modellen.

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - n_k) + C(q)e(t) \quad (41)$$

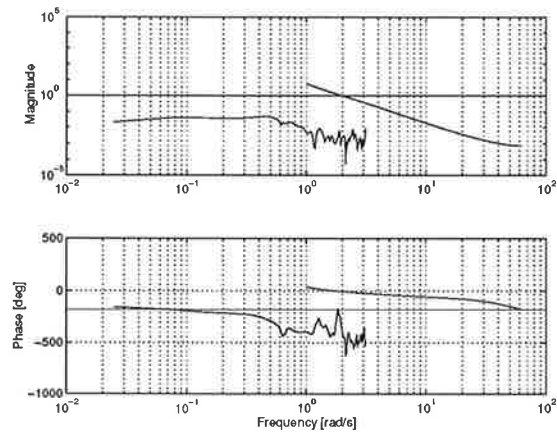
där

$$A(q) = q^3 - 2.4424q^2 + 2.1938q - 0.7128 \quad (42)$$

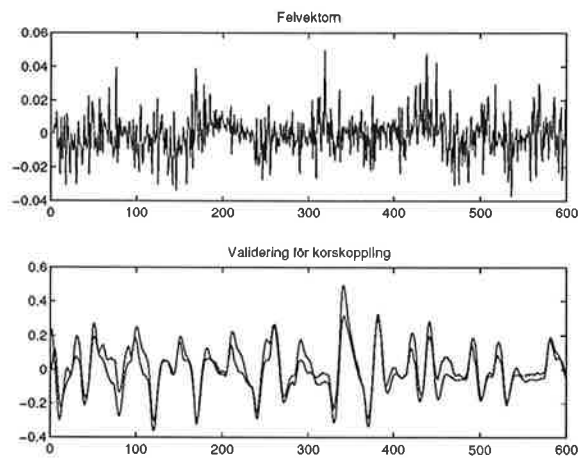
$$B(q) = 0.0035q - 0.0016 \quad (43)$$

$$C(q) = q^2 - 1.0771q + 0.6091 \quad (44)$$

Korskopplingens inverkan på systemet var rätt så liten. Därför var det möjligt att reglera systemet utan att ta hänsyn till korseffekten. Istället försökte vi hitta en bra regulator för höjdvinkeln som kan motverka även korstermens inverkan på systemet.



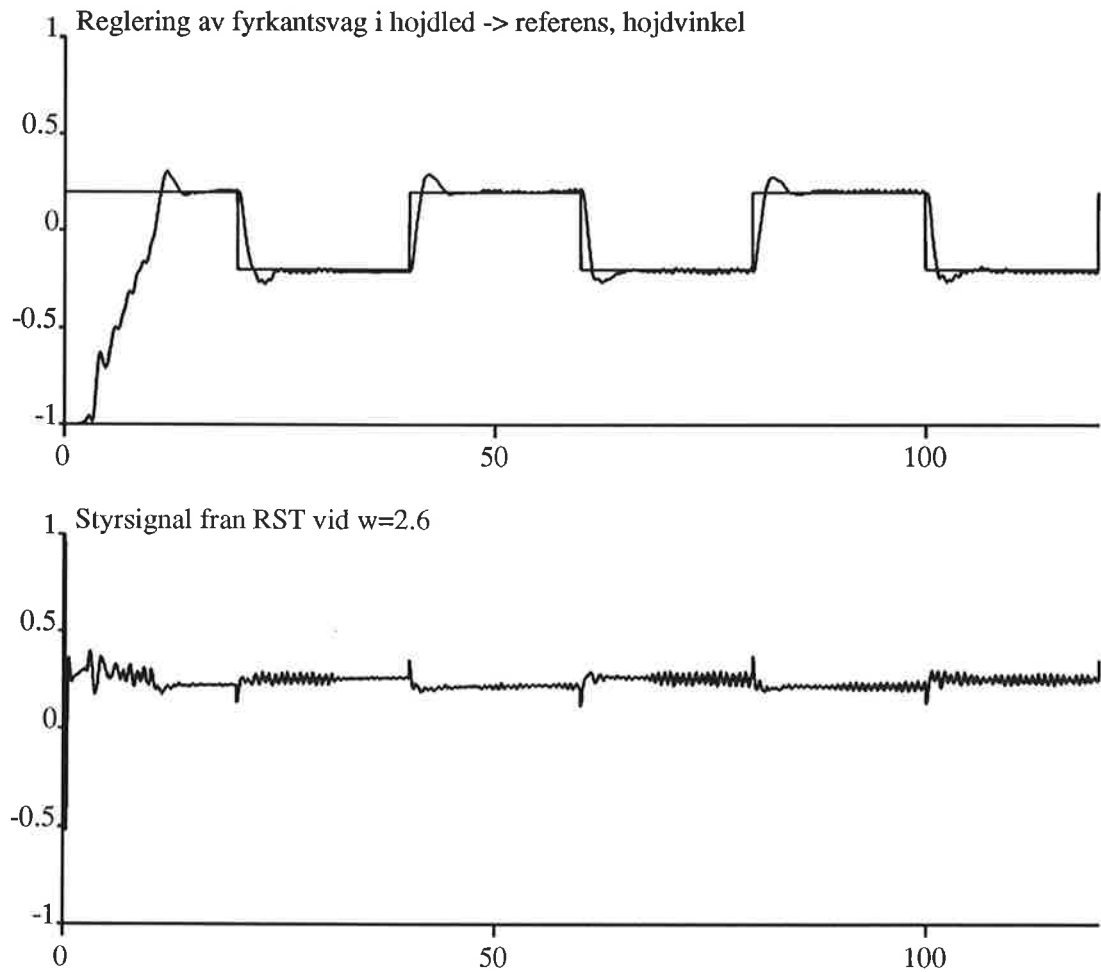
Figur 14: Jämförelse mellan det uppmätta och modellerade Bodediagrammet



Figur 15: Felvektor och validering för korskopplingen

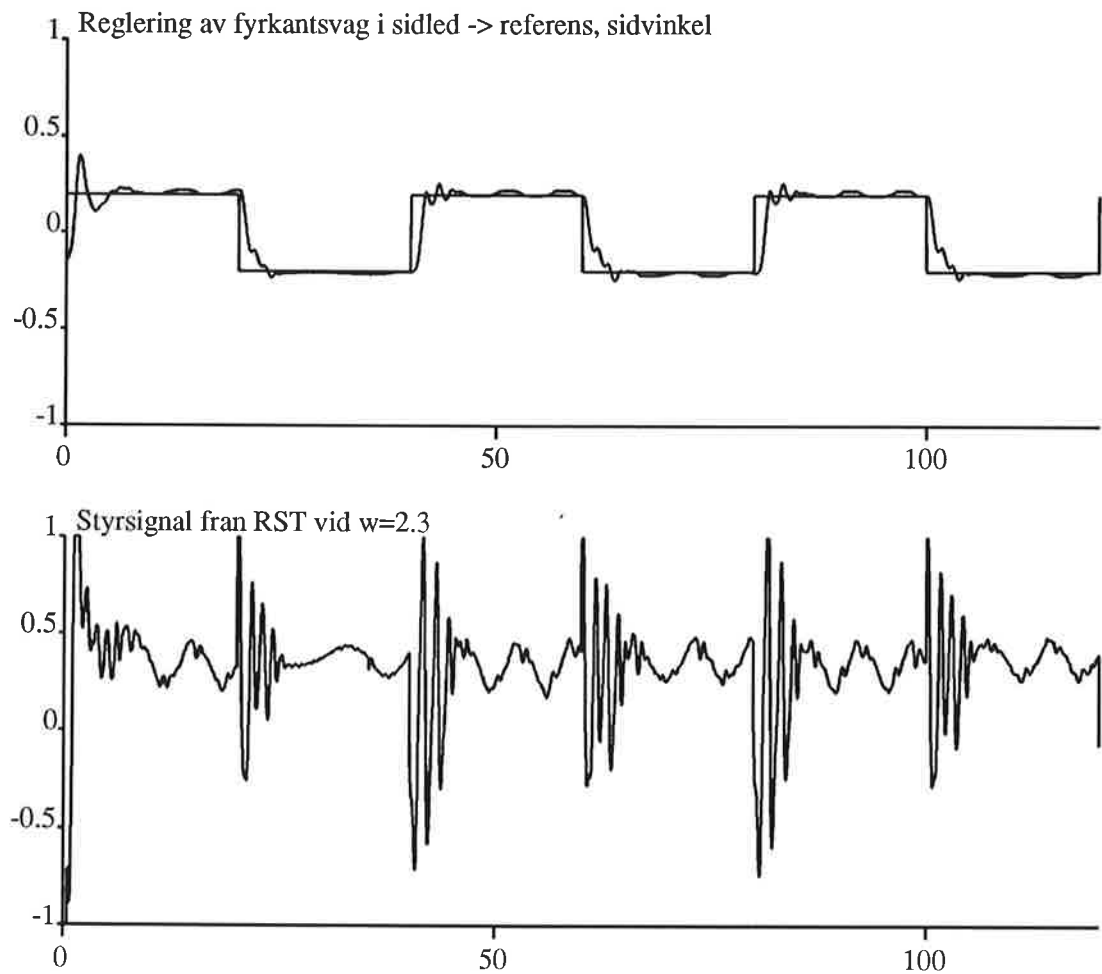
## 8.4 Resultat vid reglering

Nedan kommer resultaten från regleringen i realtid att presenteras. Först presenteras höjdregeringen med RST regulator med integrator.

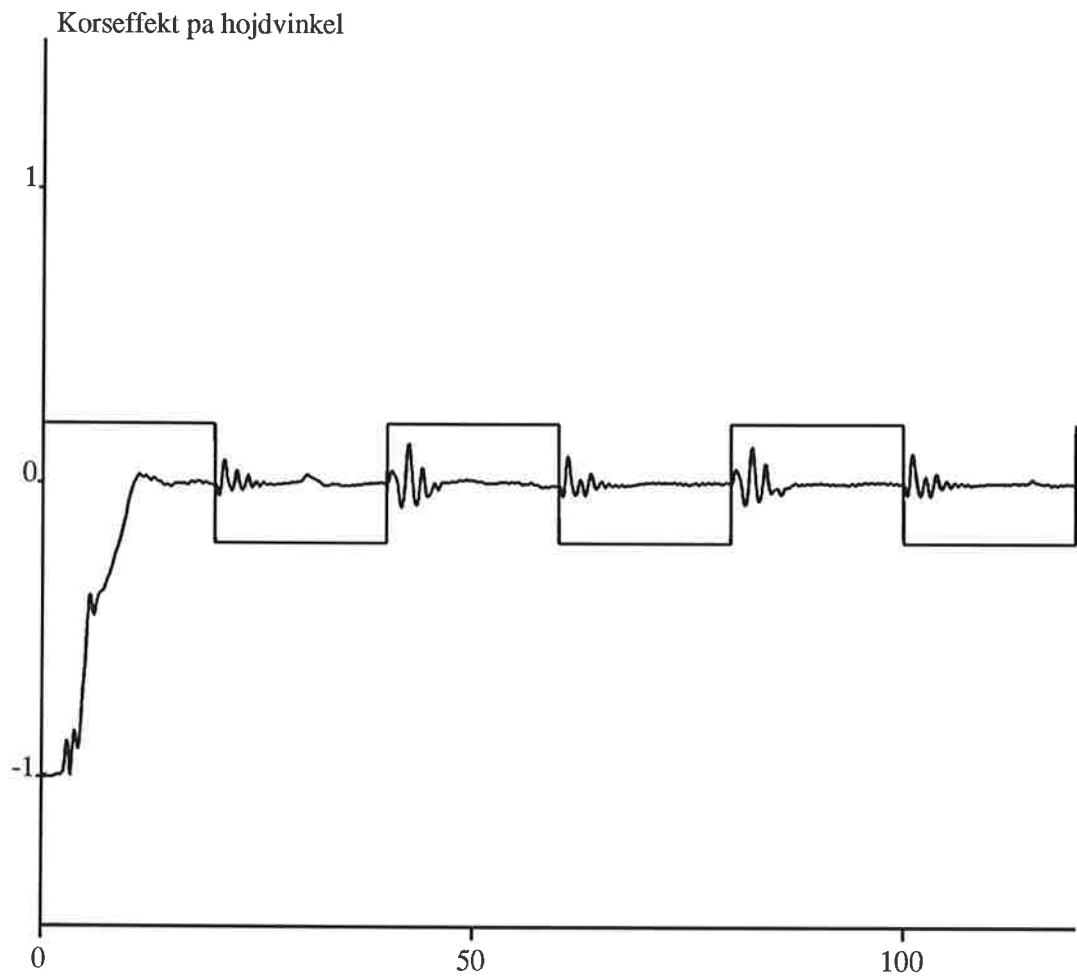




Det visade sig att regleringen i sidled var känslig för höga referensvärden, därför använde vi en RST regulator med dubbel integrator.



Här kan korskopplingen beskådas när vi reglerar sidvinkeln. Korskopplingen är variationen från noll i höjdvinkeln



## 9 Referenser

**Johansson, Rolf (1992):** *System Modeling and Identification*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

**Åström, K. J. and B. Wittenmark (1990):** *Computer Controlled Systems*. Prentice-Hall, Inc.

**Department of Automatic Control, Lund (1994):** *Computer Controlled Systems - Laboratory Experiments*

**Department of Automatic Control, Lund (1994):** *Laboratory Exercises in System Identification*

Lunds Tekniska Högskola, mars 1995.

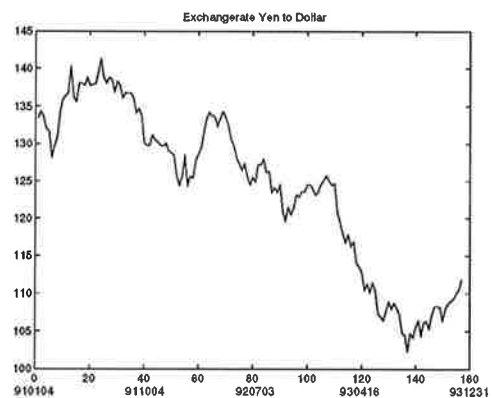
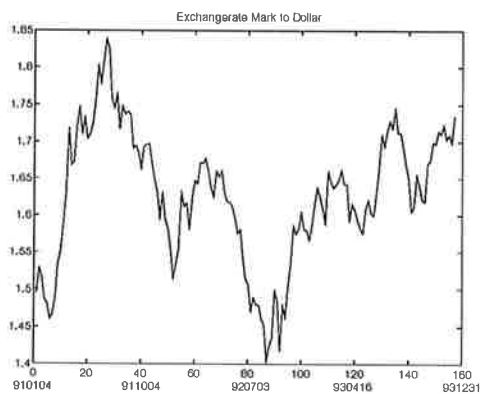
Projekt i Processidentifiering

# EKONOMETRIK

av *Ulf Holmgren D91* och *Lars Kruuse D90*

Handledare: Karl Henrik Johansson

Inlämnat: 95-03-30





## **Innehåll**

<b>1. Inledning</b> .....	4
<b>2. Förutsättningar</b> .....	4
<b>3. Experiment och Validering</b> .....	5
3.1. Insignaler .....	5
3.2. ARX, ARMAX .....	6
3.3. AR, ARMA .....	6
<b>4. Slutsatser</b> .....	8
<b>5. Bibliografi</b> .....	9

## 1. Inledning

Ekonomisk teori är oftast rak på sak och saknar tvetydigheter. En modell av verkligheten byggs, man identifierar beroende och oberoende variabler och därefter tittar man på när dessa ändras. I många fall tittar man bara på insignaler som förväntas påverka systemet och struntar i sådana som antagligen inte inverkar. Det kan till exempel vara att en fabrik får produktionsstopp på grund av en snöstorm. För att klara av dessa ickedeterministiska insignalerna måste man använda stokastiska processer.

Växelkurser är intressanta ur denna synvinkel. De deterministiska insignalerna kan vara att stat och regering gör krafttag för att sanera ekonomin. Detta gör att valutan stärks mot andra valutor. De ickedeterministiska insignalerna är dock betydligt fler och kan vara en jordbävning i Kobe i Japan, George Zoros gör något dramatiskt uttalande eller att en penningmäklare i Singapore nästa försätter en bank i konkurs.

Många människor världen över sitter med pannan i djupa veck för att försöka komma på sätt att förutsäga t.e.x valuta- och aktiekurser. Det är ganska uppenbart att stora flertalet av dessa inte lyckas och orsaken till detta är att det är väldigt svårt, för att inte säga omöjligt att ta med all insignaler i en beräkning. Insignalerna behöver och är oftast inte lika dramatiska som de som beskrivits ovan.

## 2. Förutsättningar

Vi hade 2 serier med data innehållande växlingskurser från D-Mark till Dollar och Yen till Dollar. Se fig 1 och 2. Varje serie innehöll 160 mätvärden insamlade med en veckas intervall. Utifrån dessa serier skulle vi försöka att hitta någon form av samband om detta nu skulle råka existera.

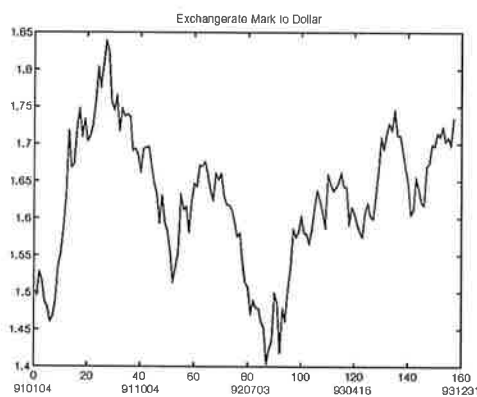


FIG 1

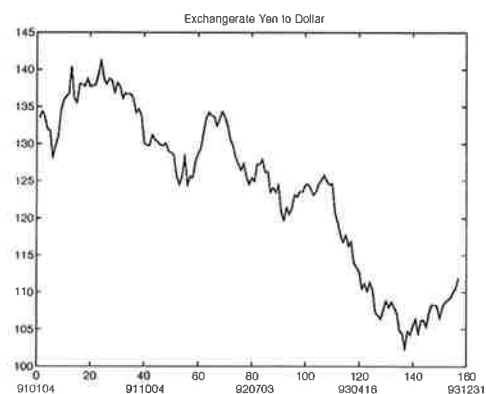


FIG 2

### 3. Experiment och Validering

#### 3.1. Insignaler

Energiinnehållet i de 2 serierna var enligt följande 2 bilder. Här kan man dra slutsatsen att båda består av ett fåtal starka frekvenser samt många svaga frekvenser. Hade spektrat varit utspritt över flera frekvenser hade det varit svårare att modellera serien. Extremfallet är vitt brus och där finns ingen information att få ur serien, vilket omöjliggör modellering. I figurerna kan man se att växlingkursen mark-dollar borde vara lättare att modellera på grund av färre dominerande frekvenser.

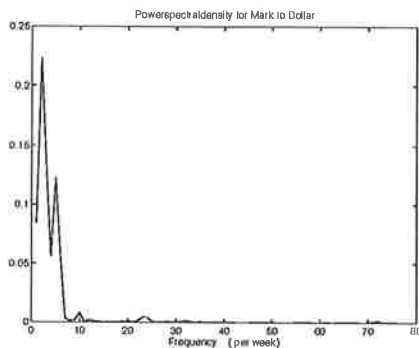


FIG 3

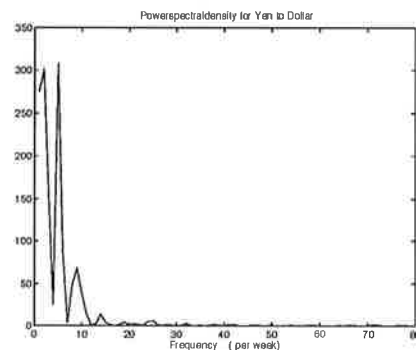


FIG 4

och autokovarianfunktionerna såg ut som följer..

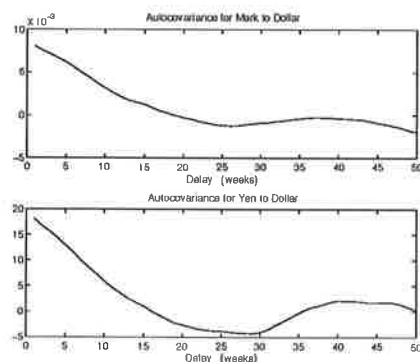


FIG5

Av figuren kan man se att det finns ett beroende i båda serierna som avtar med tiden, för att så småningom helt försvinna.

Serierna delades upp i 2 halvor där den ena kom att användas till modellering och den andra till validering. Vi använde även Matlab-kommandot DTREND för att ta bort trender i serierna. I mark-till-dollarserien tog vi bara bort medelvärdet medan, vi i yen-till-dollarserien även tog bort den nedåtgående trenden som man kan se i figur 2.



### 3.2. ARX, ARMAX

Vi försökte till en början att hitta samband med den ena växlingskursen som insignal och den andra som utsignal, men detta visade sig ganska meningslöst eftersom korrelationen mellan de två serierna var dålig som synes av Fig 6.

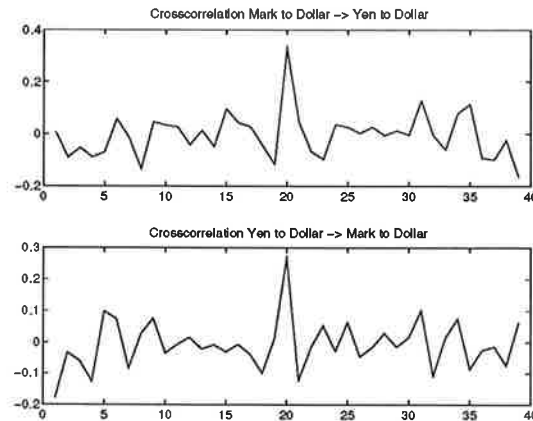


FIG 6

### 3.3. AR, ARMA

Vi försökte då istället att göra en AR/ARMA modell och se om vi kunde prediktera framtida värden i serierna. Detta var en betydligt mer framgångsrik metod. Vi provade lite olika modellordningar men fann med hjälp av residualanalys och FPE att en första ordningens AR modell räckte utmärkt i båda fallen. I tabell 1 kan det utläsas hur FPE varierade med ändrat antal skattade parametrar i A och C polynomen och i figur 7 kan det ses hur residualerna ser ut för A- och C-polynomet vi fastnade för. Se nästa sida.

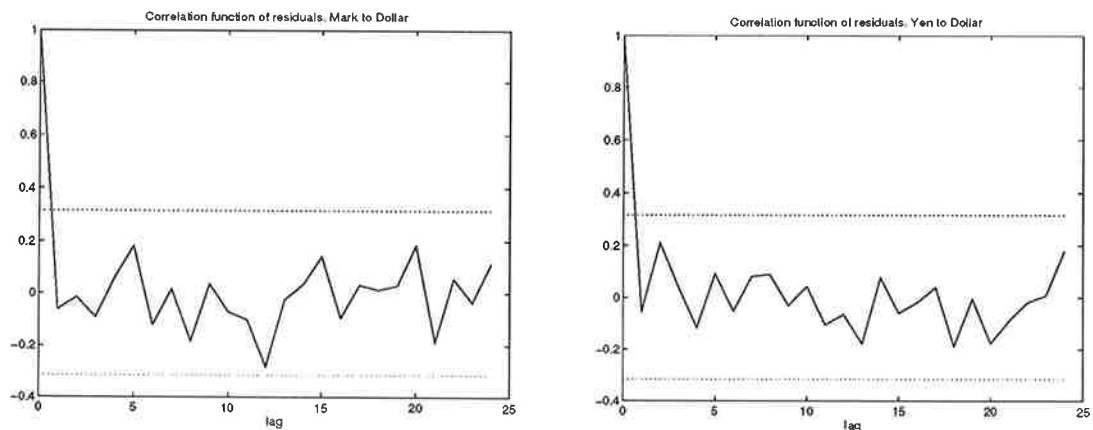


FIG 7

A	C	FPE Y->D	FPE M->D (*10**-3)
1	0	2.36	0.87
1	1	2.41	0.88
1	2	2.47	0.89
1	3	2.55	0.92
2	0	2.42	0.88
2	1	2.47	0.92
2	2	2.53	0.94
2	3	2.60	0.90
3	0	2.50	0.89
3	1	2.54	0.88
3	2	2.75	0.91
3	3	2.66	0.92

Tabell 1

Modellen ser ut så här  $Ay=Ce$  och har följande parametrar i de 2 fallen:

D-mark -> Dollar :  $A= 1-0.9583q^{**}-1$   $C=1$

Yen -> Dollar:  $A= 1-0.9802q^{**}-1$   $C=1$

Att dessa två modeller räcker till kan vi se om vi kör en simulering på hela dataserierna och jämför med den förväntade utsignalen.



FIG 8

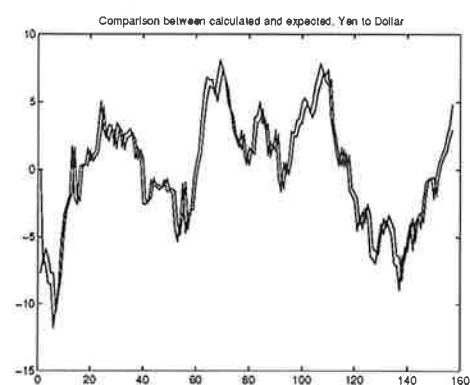
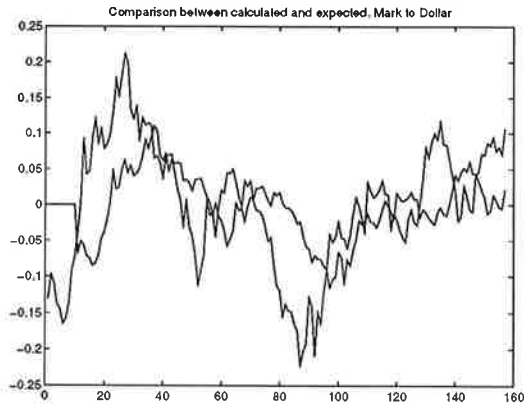
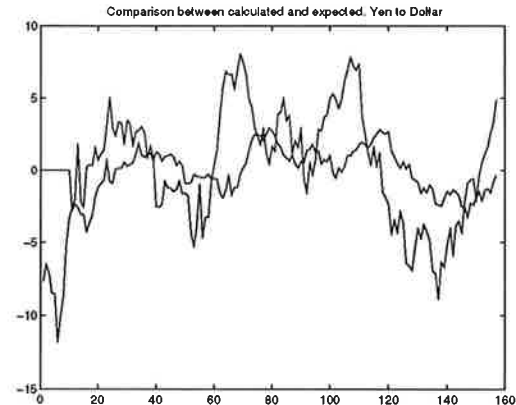


FIG 9

Bilderna ovan visar resultatet om vi predikterar ett steg framåt. Skulle vi nu försöka att prediktera flera steg framåt i tiden bli resultatet givetvis sämre som synes i fig 10 och fig 11. Här har vi försökt prediktera 10 steg framåt i tiden och resultatet bli betydligt sämre. Den som visar sämst beteende är yen-till-dollar modellen. Att den modellen var svårare beror på att växlingskursen uppvisar större svängighet än mark-till-dollar kursen. Detta konstaterade vi i samband med analysen av insignalerna.



*FIG 10*



*FIG 11*

## **4. Slutsatser**

Det är oerhört svårt att hitta någon modell som beskriver hur olika valutor beror av varandra, om det nu finns någon modell överhuvudtaget. Skulle vi nu ha råkat hitta en modell så tror vi inte att vi hade redovisat den utan vi hade nog åkt till Bahamas direkt.

Korrelationen mellan de två serierna vi hade att arbeta med var i stort sett obefintlig och det kan bero på att Japan, Tyskland och USA är geografiskt väldigt åtskilda, men det kan ju även bero på att interna händelser i ett av länderna bara återspeglas i det landets valuta och inte i de andra. De valutorna vi har tittat på är väldigt starka valutor. Hade vi haft växlingskurser där den svenska valutan varit inblandad så hade resultatet kanske blivit ett annat. Hur detta skall modelleras har inte vi kommit på och ingen annan heller. Det är ju väldigt svårt att få in i en matematisk modell hur t.ex. D-marken skulle påverkas av jordbävningen i Kobe. Det finns spaltkilometrar skrivna om ekonometrik och oändligt med kurser, men vi tror inte att det finns en generell formel för hur olika valutor är kopplade till varandra för då hade inte valuta handeln varit lika lukrativ längre. Tänk om alla hade kunnat räkna ut morgondagens valuta kurser i förväg. Bara detta borde gjort att hela systemet skulle braka samman.

## **5. Bibliografi**

Följande böcker har vi använt under projektet:

R. Johansson System Modeling and Identification

A. Koutsoyiannis Theory of Econometrics (681 sidor)

W. H. Greene Econometric Analysis (791 sidor)

Den första boken är det inte så mycket att orda om. De andra två är riktiga tegelstenar och behandlar ekonometrik på ett mycket grundläggande sätt. Den första boken har ungefär 140 sidor som behandlar matristeori, statistik och sannolikhetssteori. På grund av att ingen av oss är någon expert på ekonomi så har dessa böcker mera varit som uppslagsböcker för vad man bör tänka på när man behandlar ekonometrik. Teorin för tisserieanalys gick vi igenom under kursen och där spelar det ingen roll vilken tidsserie man ska analysera. (siffror som siffror)

# Beam and Ball

Projekt i Processidentifiering

Projektdeltagare: Helena Flygare E-91  
Pia Jonsson F-91

Handledare: Lennart Andersson

# 1 Introduktion

Processen består av en motor som är kopplad till mittpunkten på en bom. På denna ligger en metallkula som rullar längs bommen då bommen vinklas. Uppgiften går ut på att identifiera processen från styrspänning till motorn som vrider bommen till kulans position på bommen.

## 1.1 Problemställning

Processen kan delas in i två delprocesser. Den ena består av överföringsfunktionen G1 från motorns inspänning till bommens vinkel. Den andra är överföringsfunktionen G2 från bommens vinkel till kulans position, fig1.1. G1 är stabil, dock ej asymptotiskt stabil, och kan identifieras i öppen loop. G2 är instabil, eftersom en liten vinkeländring av bommen innebär att kulan rullar av bommen, och måste därför identifieras i slutna loop.

Problemet vi ställs inför är således att excitera G2 med tillräcklig energi så att en identifiering kan göras utan att kulan rullar av.

## 1.2 Modellering av processen

För en likströmsmotor med konstant flöde gäller :

$$L \frac{di}{dt} = u - kw - Ri$$

R är motorlindningens resistans, L dess induktans och k är en motorkonstant.

Mekniken för systemet med en stel axel kan beskrivas:

$$\frac{d(J\dot{\theta})}{dt} = ki$$

Tröghetsmomentet för staven kan beräknas in i motoraxelns tröghetsmoment. Tröghetsmomentet kan anses konstant ty kulans massa antages vara mycket mindre än stavens. Den elektrodynamiska delen av motorn kan anses vara momentan, (dvs induktansen kan approximeras till noll ) i förhållande till dynamiken som bestäms av mekaniken i motorn. Detta ger då överföringsfunktionen från motorspänningen u till bommens vinkel ( $\theta$ ):

$$G = \frac{k}{s (RJs + k^2)}$$

När vi ska beräkna överföringsfunktionen mellan bommens vinkel ( $\theta$ ) och kulans position på bommen ( $x$ ) utgår vi från kulans absoluta acceleration,  $a$ .

Vi vet att  $ma = F$ , där  $m$  = kulans massa och  $F$  = totala kraftpåverkan på kulan.

Med hjälp av kulans tröghetsmoment som är  $2mr^2/5$ , där  $r$ =kulans radie erhåller vi att

$$\ddot{x} + \frac{5}{7} \dot{\theta}^2 x - \frac{5}{7} g \sin \theta = 0$$

Under antagande att vi har små vinklar  $\theta$  att jobba med sätts  $\sin(\theta) \sim \theta$ . För att försumma tidsderivatan av  $\theta$  antages  $\theta$  vara konstant under en sampelperiod, eftersom ändringen i  $\theta$  är mycket långsammare än ändringen i  $x$ . Vi erhåller då följande Laplacetransform:

$$s^2 X = \frac{5}{7} g \theta$$

## 2 Identifiering av överföringsfunktion, motorns styrspänning - bomvinkel

### 2.1 Inledning

Vi började med en frekvensanalys av bommens beteende mha en frekvensvarsanalysator. Sedan exciterade vi bommen med en PRBS-signal.

### 2.2 Frekvensanalys

Vi bestämde oss för att undersöka intervallet [0.5 50] Hz, eftersom vi studerat bommens beteende tidigare på Processid.lab1 och då använt oss av detta intervall. 1:a mätningen gjordes med 10 steg/dekad, mättid=5 sek och amplituden,  $u_0=0.6$  V. Transienterna för systemet avtar med 1s. Tiden mellan excitering med en viss frekvens och till det att integration börjar bestämdes därför till  $3 \cdot 1$  s. Frekvensvarsanalysatorn exciterade bommen med frekvensvepet vi bestämt och vi analyserade bommens svar.

Första mätningen gav en vink om att vi hade en resonanstopp vid ungefär 15 Hz. För att undersöka denna närmare gjorde vi en andra mätning där vi hade 10 steg/dekad i intervallet [0.5 5] Hz och 25 steg/dekad i intervallet [5 50] Hz.

När vi analyserade bodediagrammet, fig2.1, av frekvensanalysen såg vi ingen resonanstopp vid 15 Hz. Detta var lite underligt för vi kunde tydligt se resonansen på bommens rörelse. Men vi kunde utläsa att vi hade ett andra ordningens system.

### 2.3 Identifiering med PRBS

För den andra metoden av identifiering använde vi oss av programmet 'logger'. I programmet 'logger' skapar vi en 'optimal' insignal för att kunna identifiera vår process. En PRBS-signal har en stor energi inom ett brett frekvensintervall. På så vis exciterar vi vårt system tillräckligt för att kunna identifiera flera parametrar. Vi valde PRBS-parametrarna

Amplitude: 0.8 V

Mean: -0.01 V

Tsamp: 6 ms

Period: 5

n: 1200

Vi valde tsamp med hänsyn till den optiska iakttagelsen av resonansfrekvensen 15 Hz. Vi insåg senare att detta kanske inte var idealiskt. Hade vi utgått från motorns tidskonstant  $w=1$  hade vi valt samplingstiden längre istället. En av orsakerna att 6 ms inte var helt bra valt är att Simnon har svårt att jobba med så snabba samplingstider. Vi fick problem med detta när vi skulle implementera vår regulator som vi fick fram från skattningen av överföringsfunktionen.

Medelvärdet mean valdes så att bommen skakade runt  $\theta \sim 0$ .

Insignalen PRBS och utsignalen  $\theta$  sparades i en vektor och utvärderades i Matlab.

#### 2.3.1 Direkt iakttagelse av data

Vi plottade våra data PRBS- $\theta$ . Med hjälp av dtrend tog vi bort bias och trender ur data, där var inga outliers att ta bort.



### 2.3.2 Uppdelning av data

Bland de första data i serien om 1200 data kan det finnas transienter. Vi delade därför upp data i en identifieringsserie och en valideringsserie med 600 datasamples i varje. Alla valideringar av modellen har gjorts med valideringsserien.

### 2.3.3 Kontroll av excitationen

Vi behöver en insignal med god excitation i det frekvensområde där modellen ska vara bra. En koll av om signalen exciterar systemet tillräckligt gjordes mha koherensspektrum för loggers processdata, fig 2.2. Där ser vi att vi har bra koherens mellan 3-18 rad/s, vilket vi är nöjda med.

### 2.3.4 Spektrum och korrelationsanalys

Kovariansfunktionen för filterat  $\theta$  och prewhitened insignal,  $u$ , korrelationen mellan  $u$  och  $\theta$  samt impulsvaret för  $u$ - $\theta$  plottades, fig 2.3. Vi ser att kovariansen för prewhitened  $u$  är bra med en stor topp i nollan. Korrelationen  $u$ - $\theta$  är låg.

### 2.3.5 Spektralanalys baserad på kovariansfunktionen

Vi använde oss av Matlab-funktionen 'spa' för att estimerar överföringsfunktionen  $u$ - $\theta$ . 'Spa' estimerar

$$\tilde{H}(e^{i\omega}) = \frac{\tilde{S}_{yu}(i\omega)}{\tilde{S}_{uu}(i\omega)}$$

där spektralskattningarna fås från diskret Fourier transformationer av kovariansfunktionerna enligt 2.3.4.

I bodediagrammet, fig 2.5, ser vi att vi har ett andra ordningens system, utan direkta brytfrekvenser om vi inte bara ser till amplituden utan också fasen.

### 2.3.6 Parameterskattning

ARMAX modell-strukturen ser ut som

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-n_k) + C(q^{-1})e(t)$$

Genom att välja ordningen av A-polynomet, B-polynomet och C-polynomet kan vi skatta parametrarna i A, B och C genom prediktionsfelsmetod.

Valet av modellordning baserade vi i första hand på studier av förlustfunktionen och 'the Akaike Final Prediction Error' (FPE). Ju lägre dessa värden var ju bättre skattning. Endast en obetydlig ändring av dessa kunde uppmärksammas vid vårt val av modellordning jämfört med högre ordningens. Dock undersökte vi också variansen hos parametrarna i A, B och C. När variansen hos parametern  $b_{nb}$  var lika stor som parametern själv ansåg vi att vi kunde gå ner en modellordning i b, från  $n_b$  till  $n_b-1$ . På samma sätt med A- och C-ploynomen.

### 2.3.7 Modellreduktion

Ett alternativ till sättet i 2.3.6 att välja ordningen av systemet  $H1(q-1)$  vore att transformera överföringsfunktionen  $H1(q-1)$  till en balanserad 'state space realisation'. Gramian matrisen som svarar mot den balanserade 'state space realization' indikerar vilka tillstånd som skulle vara viktiga.

Tyvärr fick vi problem då vi har ett icke asymptotiskt stabilt, men stabilt, system. Detta resulterar i att vi inte får positivt semidefinita styrbarhets och observerbarhets Gramianer. Detta innebär i sin tur att vi inte kan erhålla någon balanserad 'state space realization' och därmed att en modellreduktion med denna metod ej kan göras.

### 2.3.8 Modell presentation och validering

Modellen vi har tagit fram ska verifieras med hjälp av olika kriterier. Vi började med ett polnollställediagram, fig 2.4. I detta ser vi att vi har ett ickeminfas system, vilket är bra. Där finns heller inga poler och nollställen som ligger tätt intill varandra, vilket indikerar att vi inte kan reducera modellen mer.

I bodediagrammet för systemet, fig 2.5, ser vi att vi har ett bra överensstämmande med processdata erhållna från 'logger'.

Vår modell kan skrivas

$$y(t) = H_u(q)u(t) + H_e(q)e(t)$$

Residualerna får vi som

$$E(t) = H_e^{-1}(q)(y(t) - H_u(q)u(t))$$

Om residualerna erhålls baserat på den identifierade modellen och data använda för identifiering, så ska idealiskt residualerna vara vitt brus och oberoende av insignalerna. Om inte, så är modellordningen, modellstrukturen eller något annat fel.

Autocorrelationen för residualekvansen är sådär, men korskorrelationen mellan identifieringsdata och residualerna är inom accepterbara gränser, se fig 2.6.

Simulering och korsvalidering är metoder för att testa om modellen kan reproducera den observerade utsignalen när den drivs med den aktuella insignalen. Vi ser i fig 2.7, vilken visar korsvalideringen, att vi har bra överensstämmelse mellan vår modell och processen.

### 2.3.9 Resultat av identifiering av G1 mha PRBS

$$A1 = q^2 - 1.6588q + 0.6588$$

$$B1 = -0.0011q + 0.0106$$

$$C1 = q^2 - 1.4874q + 0.4971$$

### **3 Identifiering av överföringsfunktionen bomvinkel-kulans position**

#### **3.1 Inledning**

Identifieringen av överföringsfunktionen från bommens vinkel ( $\theta$ ) till kulans position ( $x$ ),  $G_2$ , är inte lika självklar som identifieringen av överföringsfunktionen från motorns styrspänning ( $u$ ) till bommens vinkelläge ( $\theta$ ).  $G_2$  är en instabil process och vi måste därför identifiera den i slutna loop. Samtidigt måste vi se till att ha en tillräcklig excitation av  $\theta$  för att kunna identifiera alla parametrar i  $G_2$ . Ytterligare ett problem var att mätgivaren för kulans position,  $x$ , hade motriktad polaritet mot vinkelgivaren för bommens vinkel. Detta löste vi genom att invertera våra erhållna  $x$ -värden vid identifieringen.

#### **3.2 Identifiering av $G_2$ mha Simnon och 'logger'**

Vi väljer att återkoppla  $\theta$  med hjälp av en P-regulator och  $x$  mha en PID-regulator samt att lägga på en PRBS-signal som en störning på motorns styrspänning, fig1.2. Vi implementerade regulatorerna i Simnon.

PRBS-signalens parametrar:

Amplitud: 1 V

Mean: 0 V

Tsamp: 15 ms

period: 10

n: 1200

Vi använde två datorer, en skickade mha 'logger' PRBS-signalen till den andra, där vi plockade in den i Simnon för att sedan summera den med motorns styrspänning.  $\theta$ - och  $x$ -signalerna från process  $G_2$  plockades in via 'logger'. Sampeltiden valdes till 15 ms, ty ett längre sampelintervall ledde till att kulan rullade utan att erhålla önskad excitation. Eftersom vi eftersträvade att reglera vinkeln i en inre loop och positionen i en yttre, samplade vi den inre snabbare. Vi skulle ha velat identifiera  $G_2$  med ett längre sampelintervall, 5-10 ggr långsammare än  $G_1$ . men detta var inte möjligt av ovan angivna skäl.

##### **3.2.1 Identifiering av $G_2$ utgående från 'logger'-data**

Identifiering av  $G_2$  gick till som identifieringen av  $G_1$ , se avsnitt 2. Erhållna resultat:

Koherensspectra, fig3.2, visar att vi har bra koherens mellan  $\omega=0-10$  rad/s.

Bodediagrammet, fig3.3, visar att vi har ett 2:a ordningens system och att vår modell stämmer.

Pol-nollställediagrammet, fig3.4, visar att vi inte kan reducera modellordningen mer samt att vi har ett icke-stabilt system.

Residualplottarna, fig3.5, visar att korrelationen för residualerna är låg, och att korskorrelationen mellan valideringsdata och residualerna också är låg, vilket är bra.

Korsvalidering av vår framtagna modell  $G_2$  och valideringsdata, fig3.6, är bra.

#### **3.3 Resultat av identifieringen av $G_2$**

$$A_2 = q^2 - 1.999q + 1$$

$$B_2 = -q + 0.010$$

$$C_2 = q^2 - 1.049q + 0.048$$

## 4 Regulatorberäkningar

### 4.1 Inledning

Vi gör det antagandet att den återkopplade G1 är mycket snabbare än G2, så att  $\theta = \theta_{ref} \cdot \theta_{ref}$  är insignalen till P-regulatorn innan G1-processen. Mha det antagandet kan vi i Matlab beräkna en RST-regulator för G2.

### 4.2 RST-beräkningar

RST-beräkningar gjordes i Matlab för olika  $w_m$ , som svarar mot det slutna systemets bandbredd. Vi fann att  $w_m < 2$  gav ett instabilt system. Vi beräknade ett antal RST-regulatorer med  $w_m \geq 2$ .

### 4.3 Resultat av RST-beräkningarna för G2

$w_m=2$	$R=1.000-0.9059q^{-1}$ $S=1.4037q^{-1}-1.3805q^{-2}$ $T=0.3829q^{-1}-0.3606q^{-2}$
$w_m=3$	$R=1.000-0.8640q^{-1}$ $S=3.0808q^{-1}-3.50058q^{-2}$ $T=0.8556q^{-1}-0.7820q^{-2}$
$w_m=5$	$R=1.000-0.7890q^{-1}$ $S=8.1818q^{-1}-7.8519q^{-2}$ $T=2.3541q^{-1}-2.0261q^{-2}$

## **5 Reglering mha RST av processen 'Beam and Ball'**

### **5.1 Inledning**

Mha av våra i Matlab beräknade RST-regulatorer försökte vi styra kulans position. I inre loopen använde vi en P-regulator. All reglering implementerades i Simnon.

### **5.2 Test av olika RST-regulatorer**

Vi började att testa RST-regulatorn med  $w_m=2$ . Genom att justera inre loopens K-värde kunde vi hitta en hyfsad reglering för  $K=2$ . Vidare försök med  $w_m>2$  gav inga bra resultat, då kulan började 'hoppa' eftersom dessa regulatorer var för snabba.

### **5.3 Svårigheter i regleringen av kulans position**

Vi fick ett kvarstående fel vid regleringen av kulans position, då vi inte använde en RST-regulator med integralverkan. Vi tog därför fram en RST-regulator med integralverkan för  $w_m=2$ :

$$\begin{aligned}w_m=2 \quad R_{int}&=1.000-1.8875q^{-1}+0.8875q^{-2} \\S_{int}&=3.2595q^{-1}-6.4240q^{-2}+3.1569q^{-3} \\T_{int}&=0.3545q^{-1}-0.7364q^{-2}+0.3532q^{-3}\end{aligned}$$

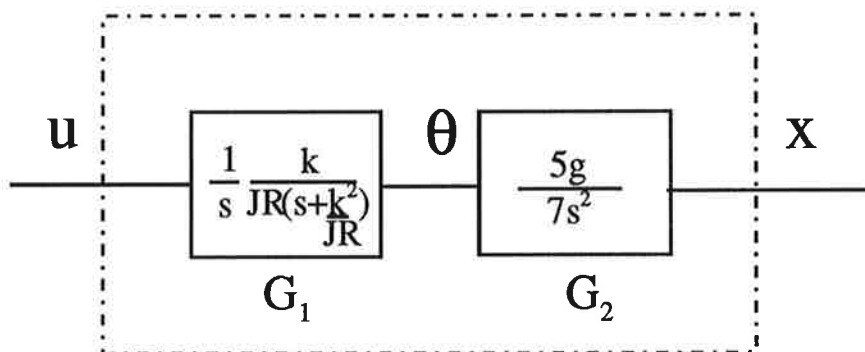
Denna fungerade dock inte alls av samma skäl som angavs i 2.3 resp 4.2. Vi gick därför tillbaka till en regulator utan integralverkan.

Men vi lyckades inte reglera kulans position när regleringen startades med kulan liggande ut mot bommens ändar, resultatet blev att kulan 'hoppade' rejält och flög av bommen. I övrigt fungerade regleringen bra.

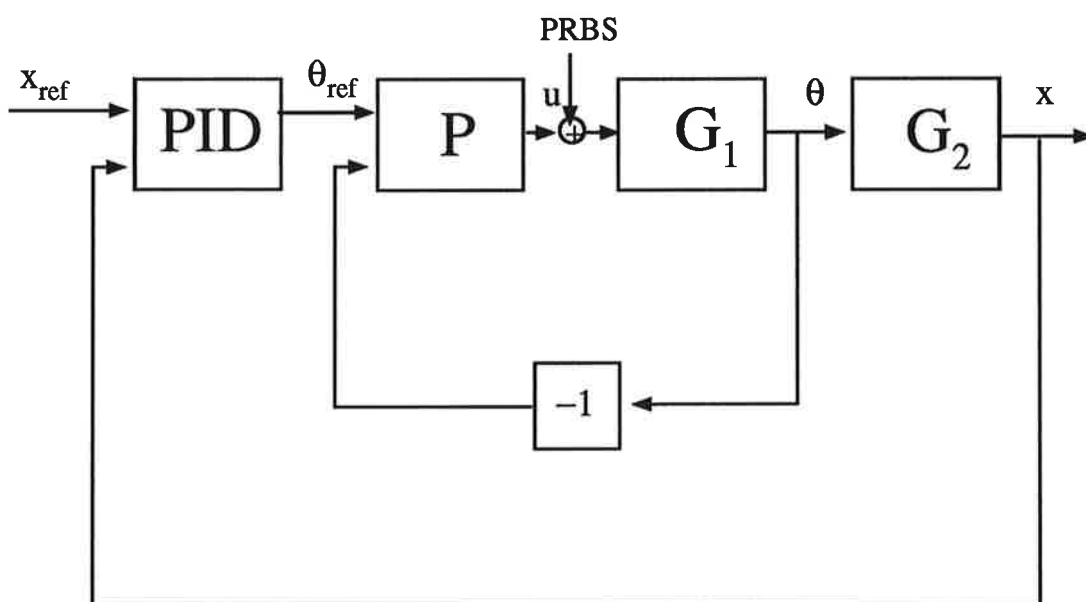
## **6 Slutsatser av 'Beam and Ball'-projektet**

Det som skapade problem för oss var att vi hamnade lite snett från början när vi bestämde oss för att sampla G1 med 6 ms. Denna samplingstid var alldeles för kort för att implementeras i Simnon. Vi fick utskriften av typen 'overload' och 'Computational error' när vi skulle reglera hela systemet. Beräknade k-värden för P-regulatorn mha matlab gick därför inte att realisera i Simnonkoden. Något annat som störde oss vid användningen av Matlab på PC-datorerna var att det tycktes som om Matlab inte hade tillräckligt med minne till förfogande vid en del beräkningar. Vi var tvungna att ge kommandot 'pack' titt som tätt, för att överhuvudtaget lyckas med beräkningarna.

Det stora problemet med att identifiera Ball-beam processen är att systemet är instabilt, och att vi därför var tvungna att börja i bakvänd ordning, dvs att först hitta lämplig regulator med trial and error och stabilisera processen, och därefter identifiera den. Påföljande problem var om vi på detta sätt lyckades att excitera G2 tillfredsställande. Vi tror att vi hamnade rätt till slut.

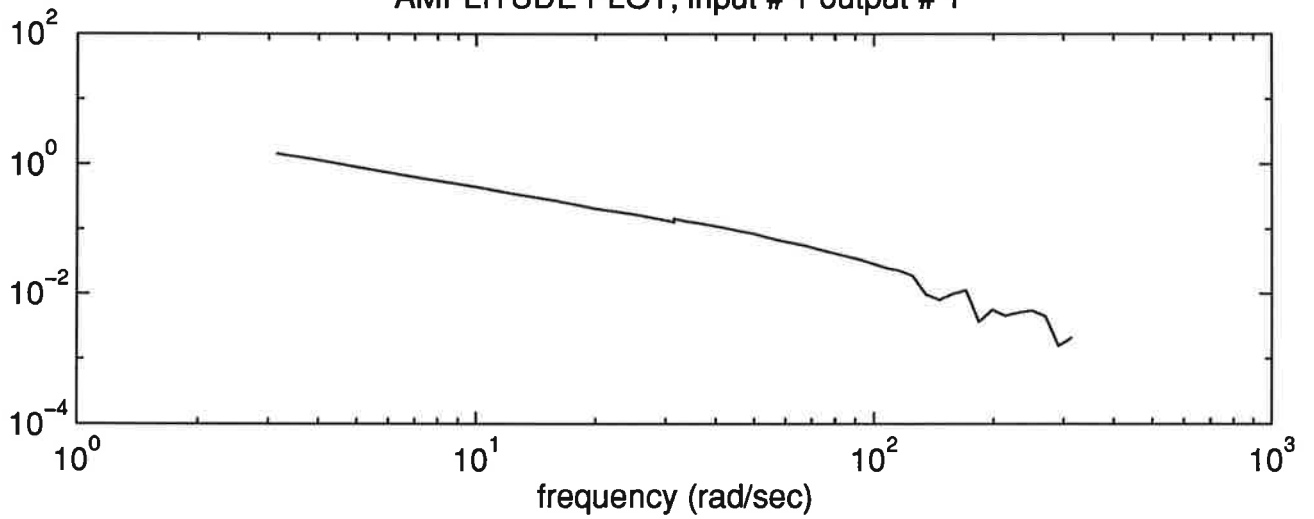


Figur 1.1 Blockschema av modell



Figur 1.2. Blockschema för identifiering av  $G_2$

AMPLITUDE PLOT, input # 1 output # 1



PHASE PLOT, input # 1 output # 1

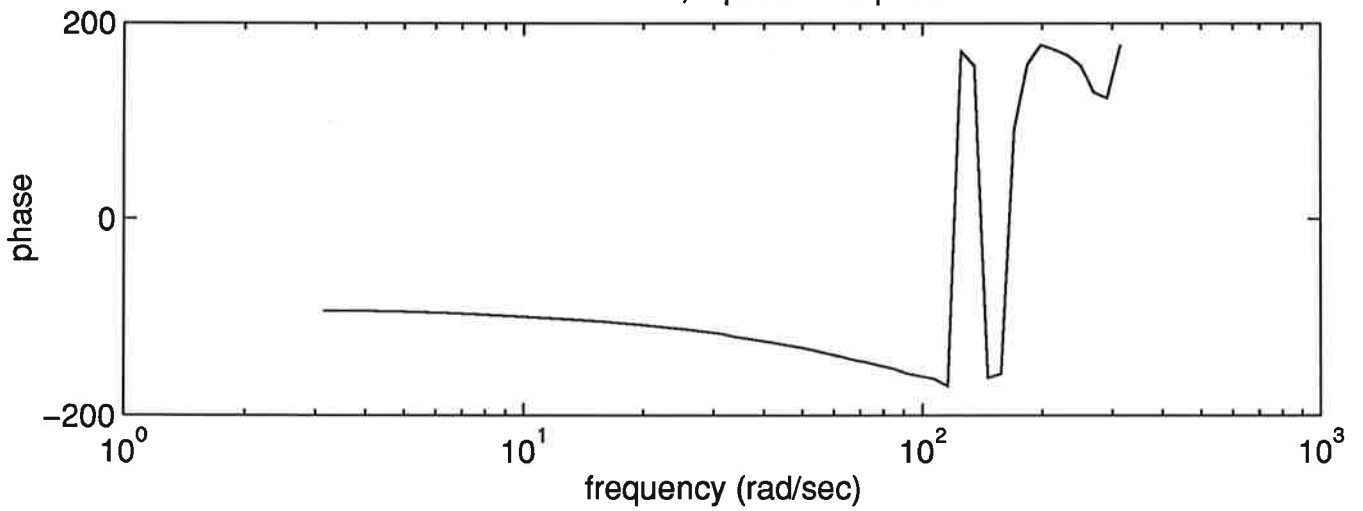


fig 2.2 Coherence function of processed data from logger for u and theta

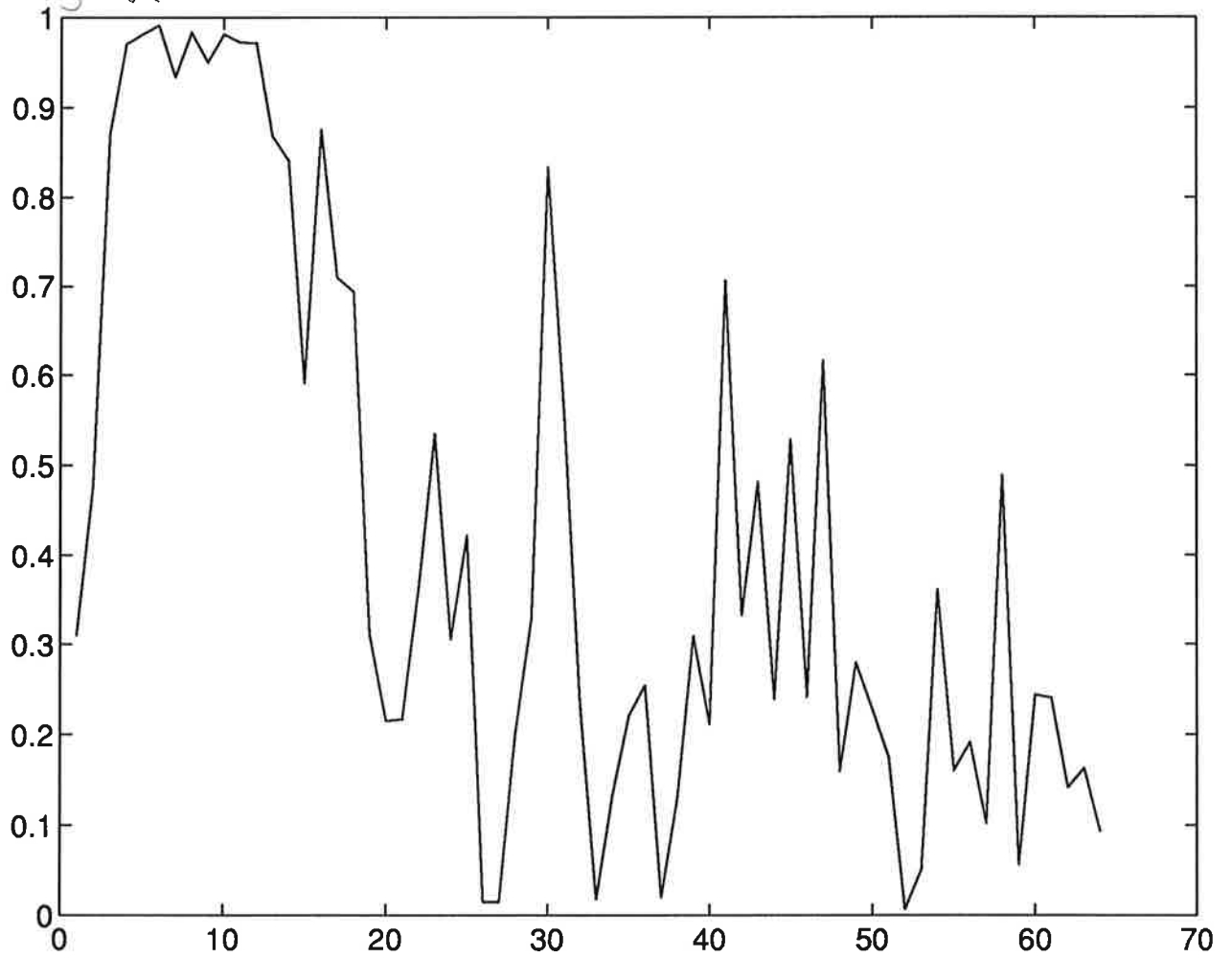
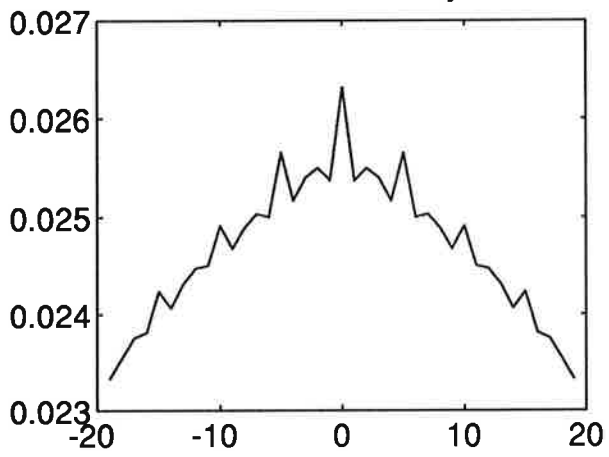


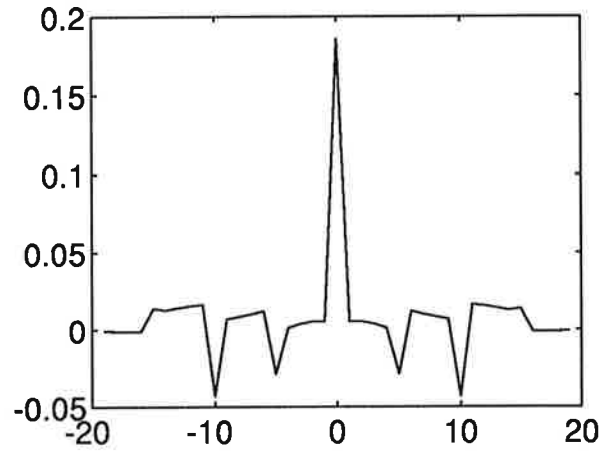


fig 2.3

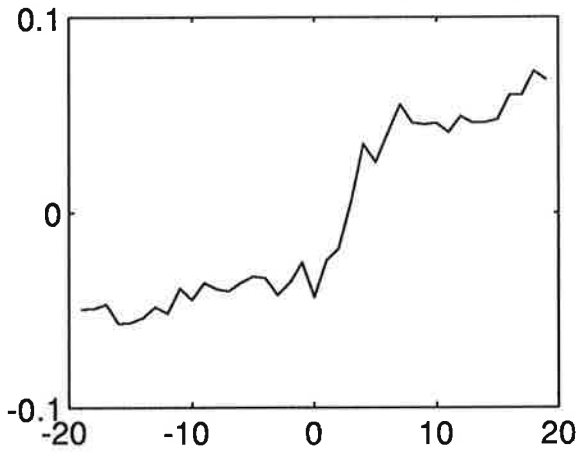
Covf for filtered y



Covf for prewhitened u



Correlation from u to y (prewh)



Impulse response estimate

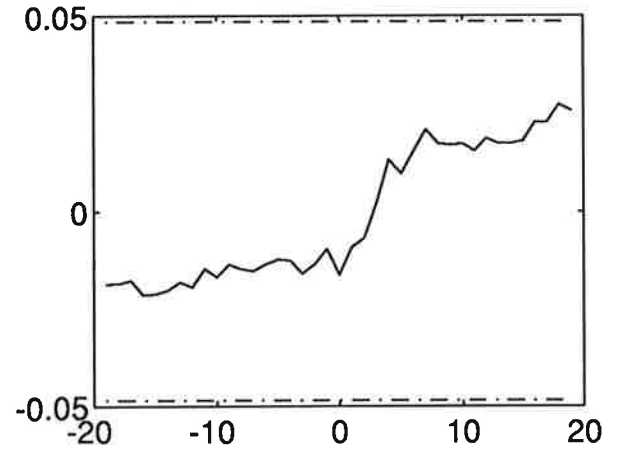


Fig 2.4

Pole-zero plot for estimate of motor-beam process

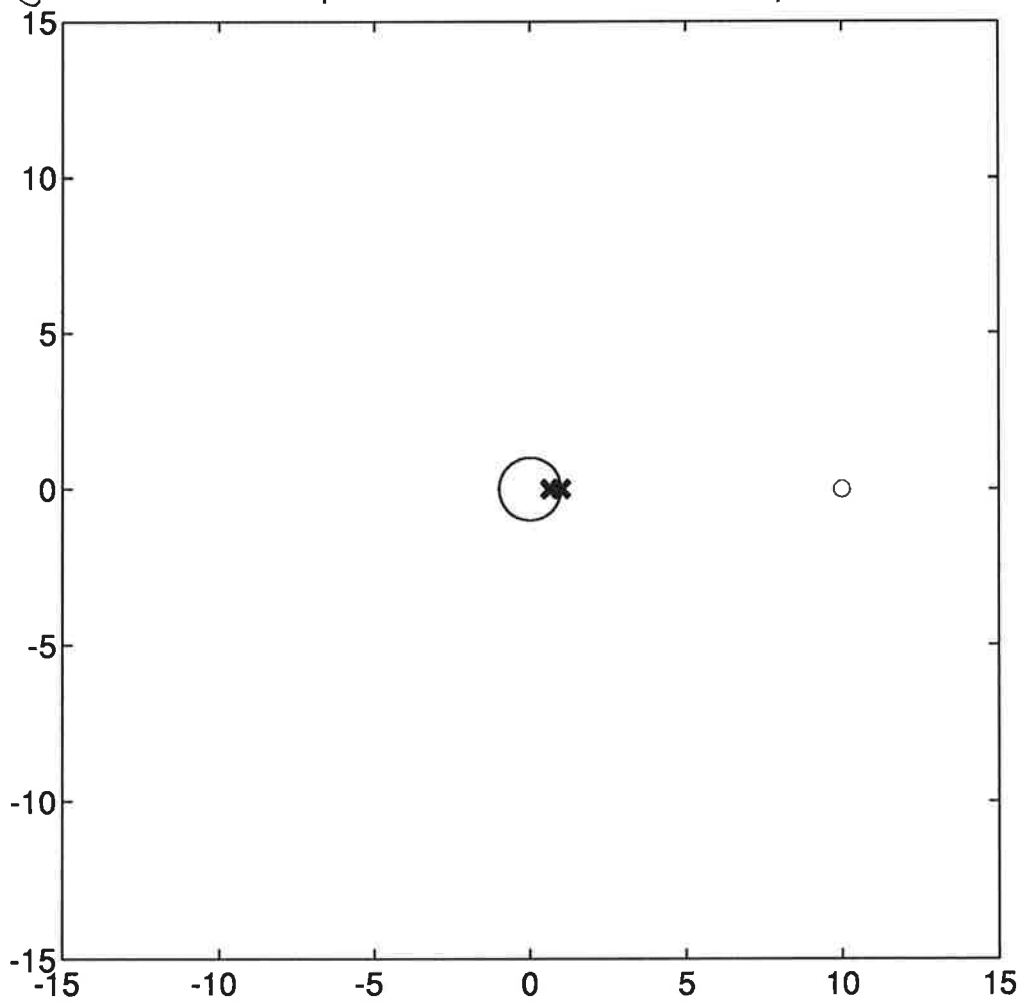


fig 2.5

Transferfunc. of data processed from logger and estimate  $G^{\wedge}1$

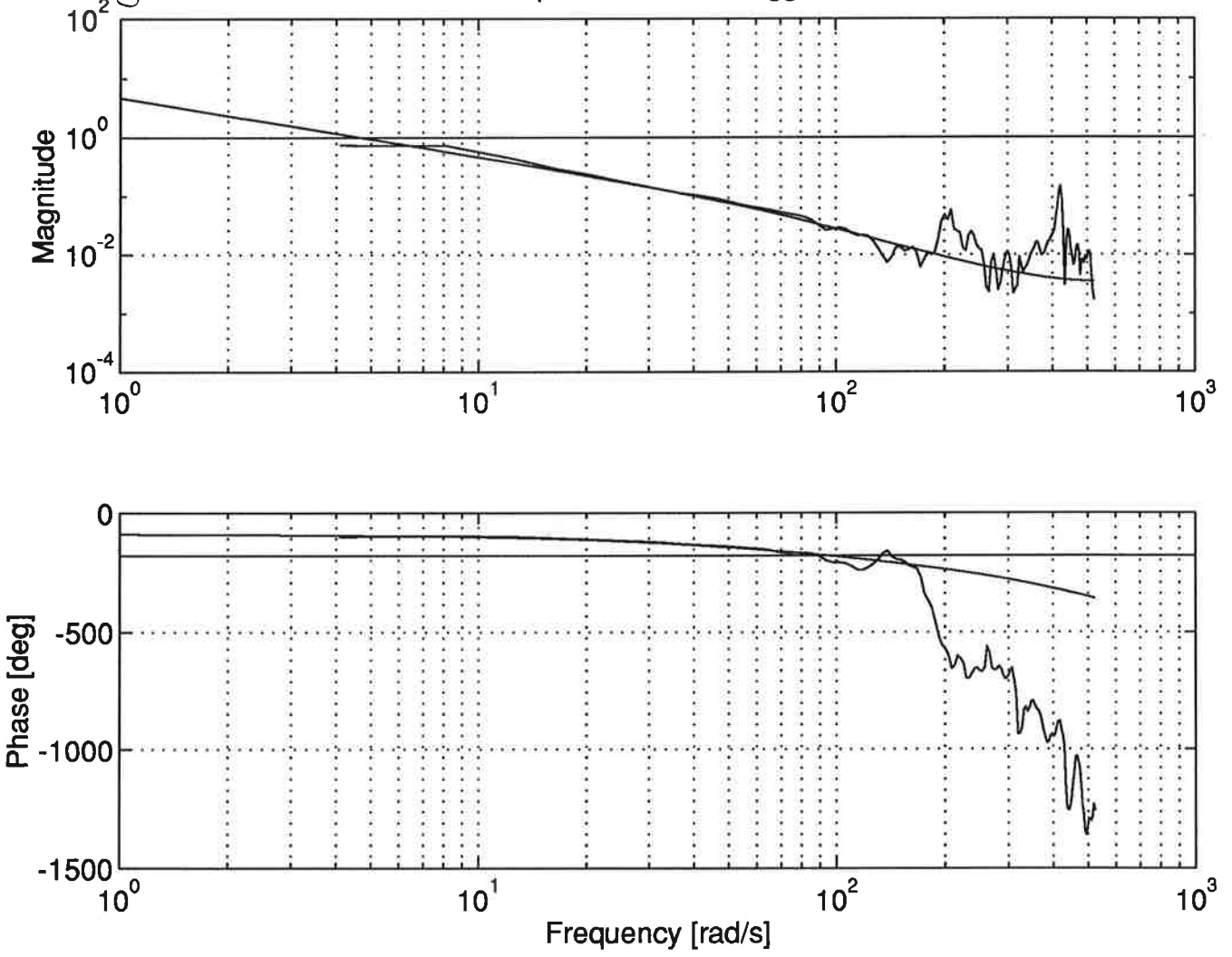
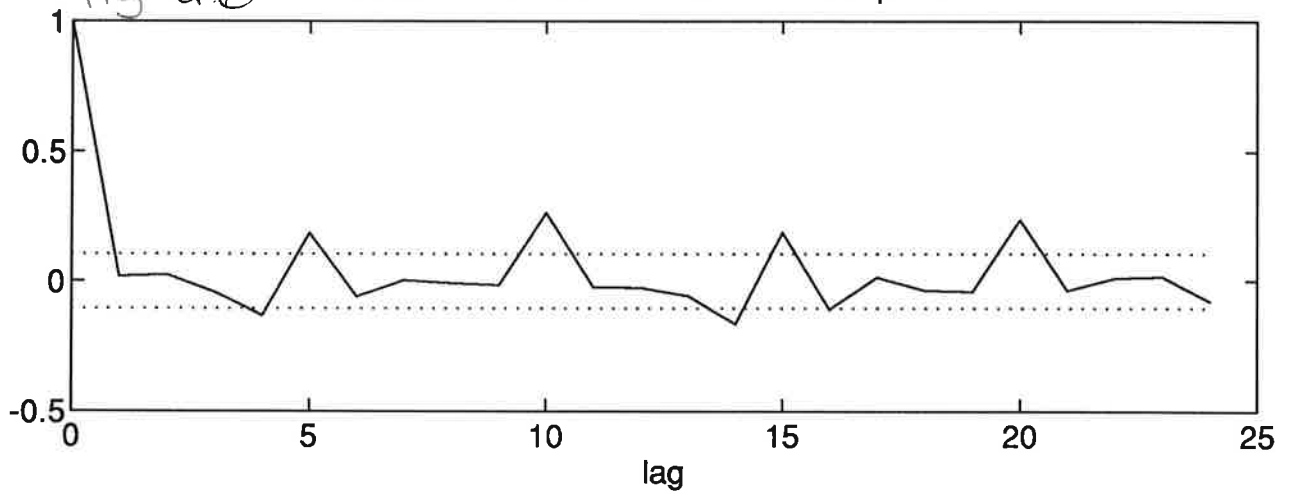


Fig 2.6

Correlation function of residuals. Output # 1



Cross corr. function between input 1 and residuals from output 1

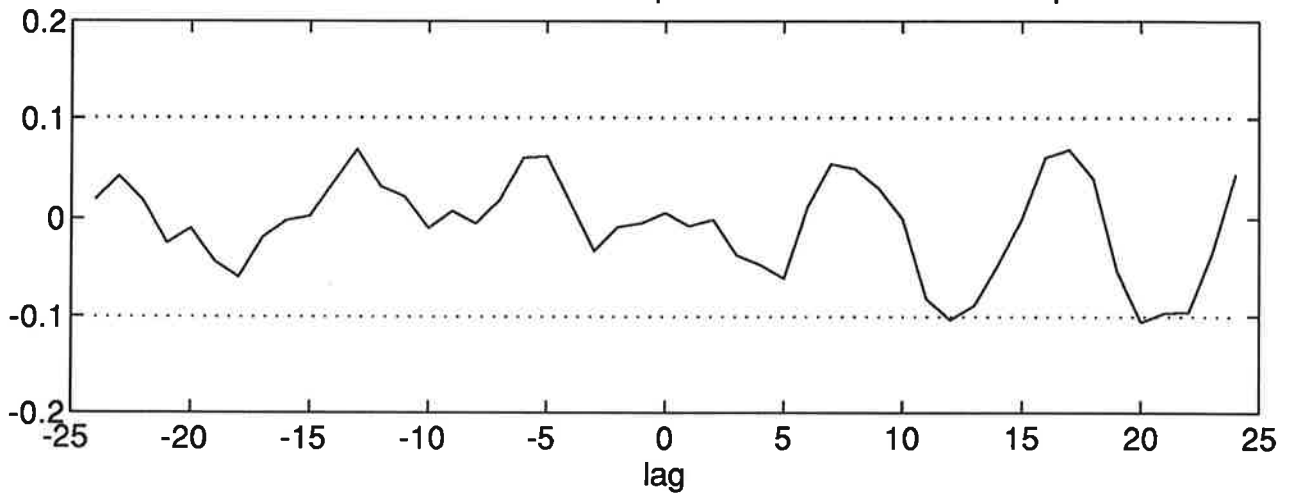


fig 2.7

Crossvalidation for motor-beam process

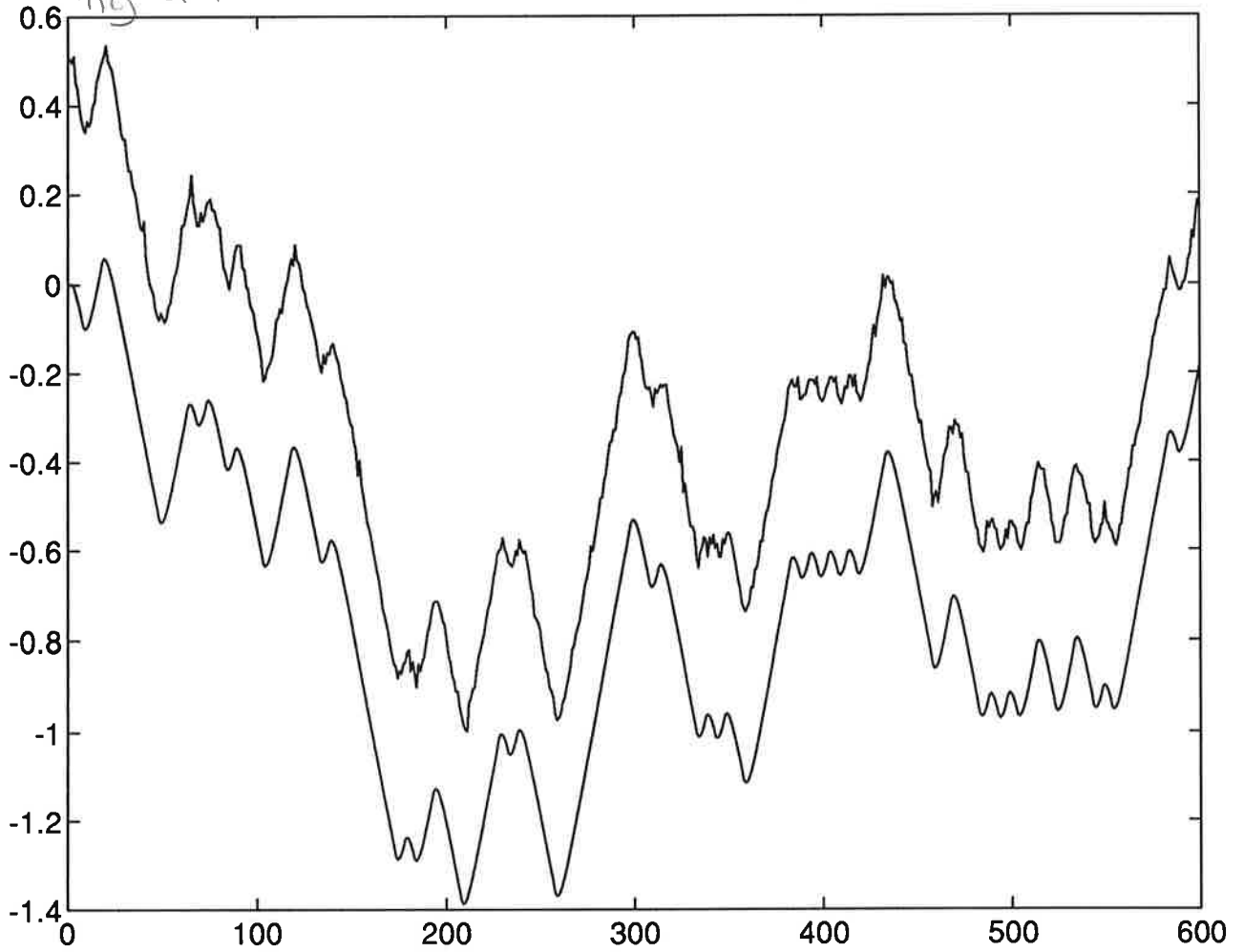


Fig 3.2

Coherensspectrum for theta-position

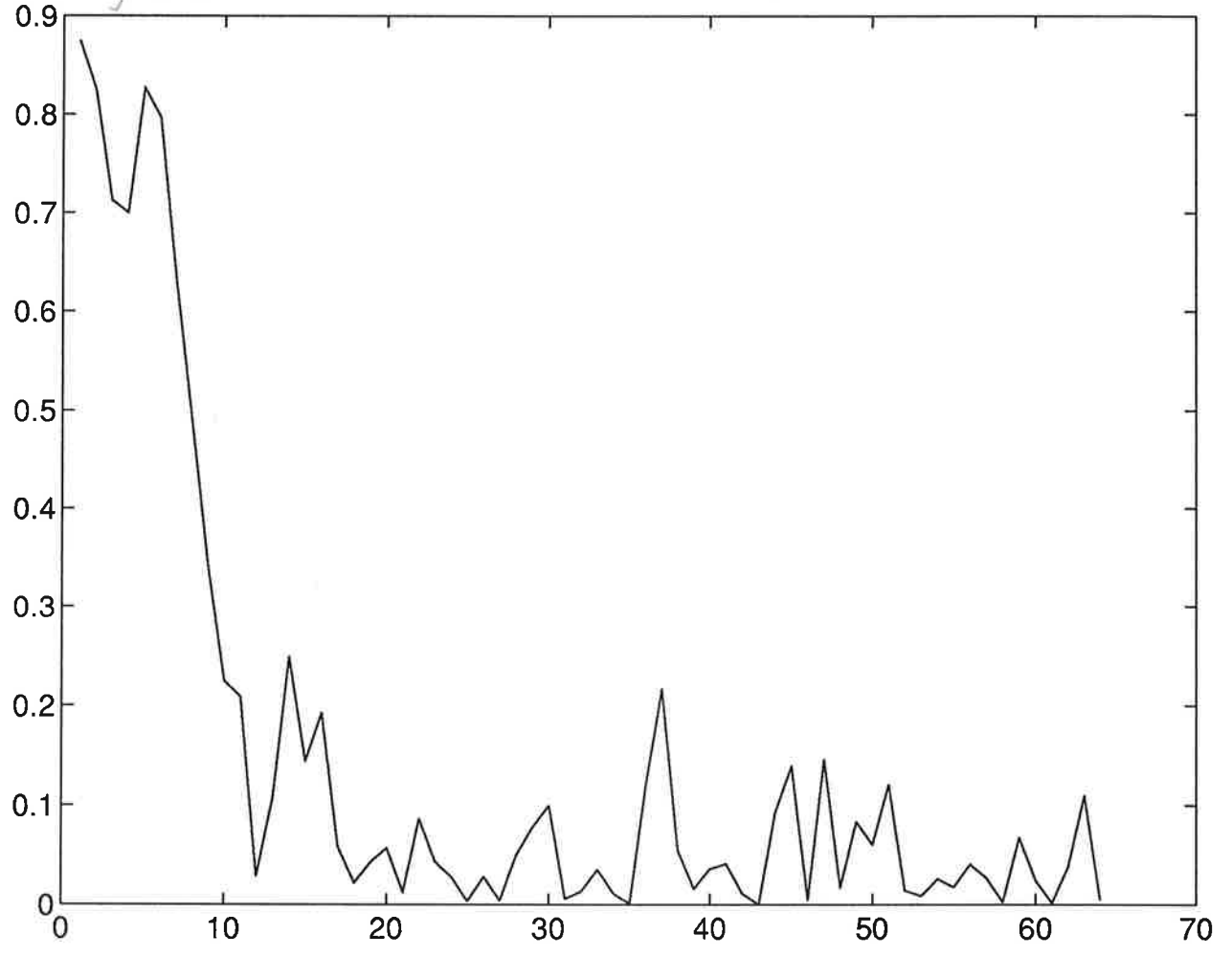


Fig 3.3

Transferfunc. for real process G2 and model G^2

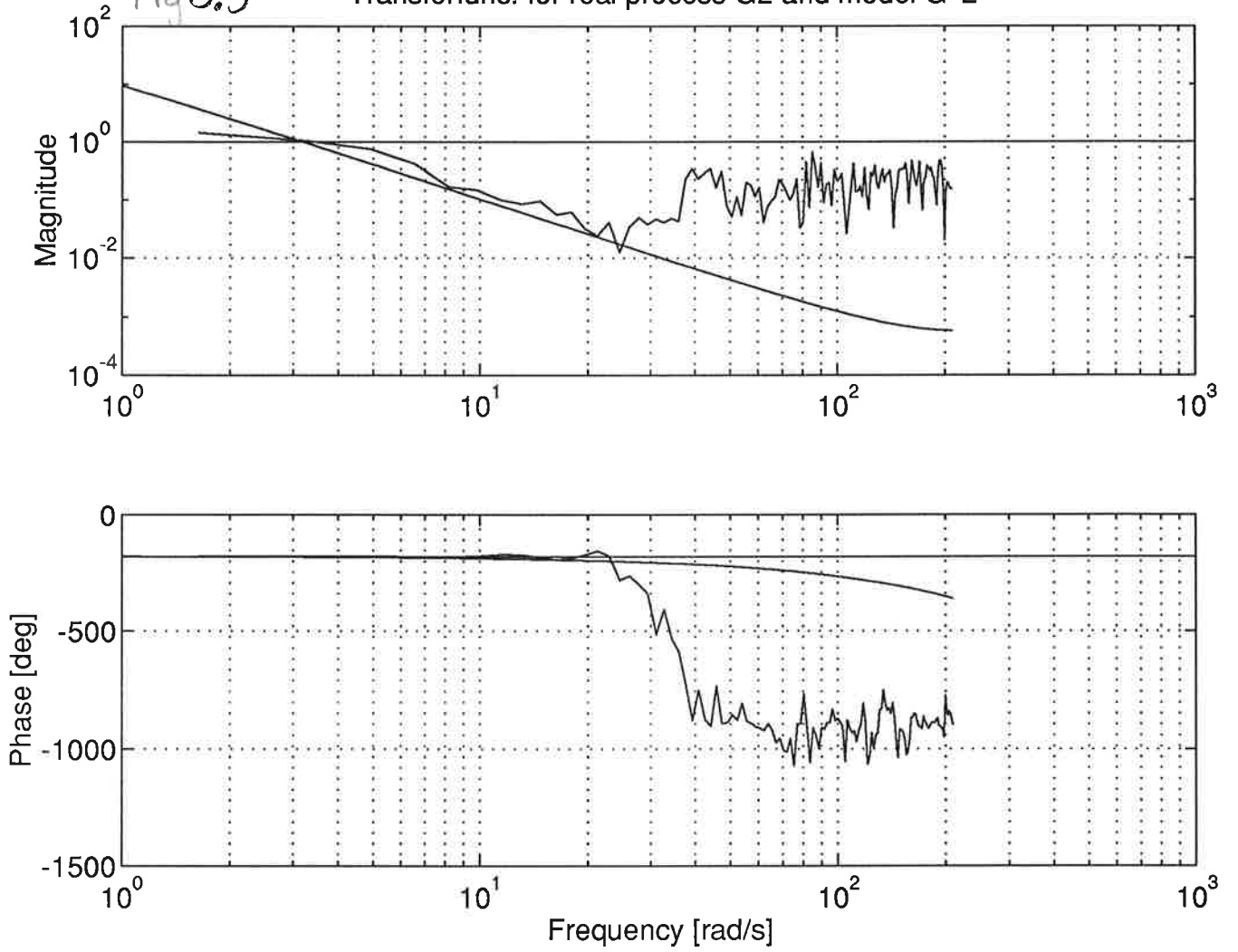


Fig 3.4

Pole-zero plot for ball process

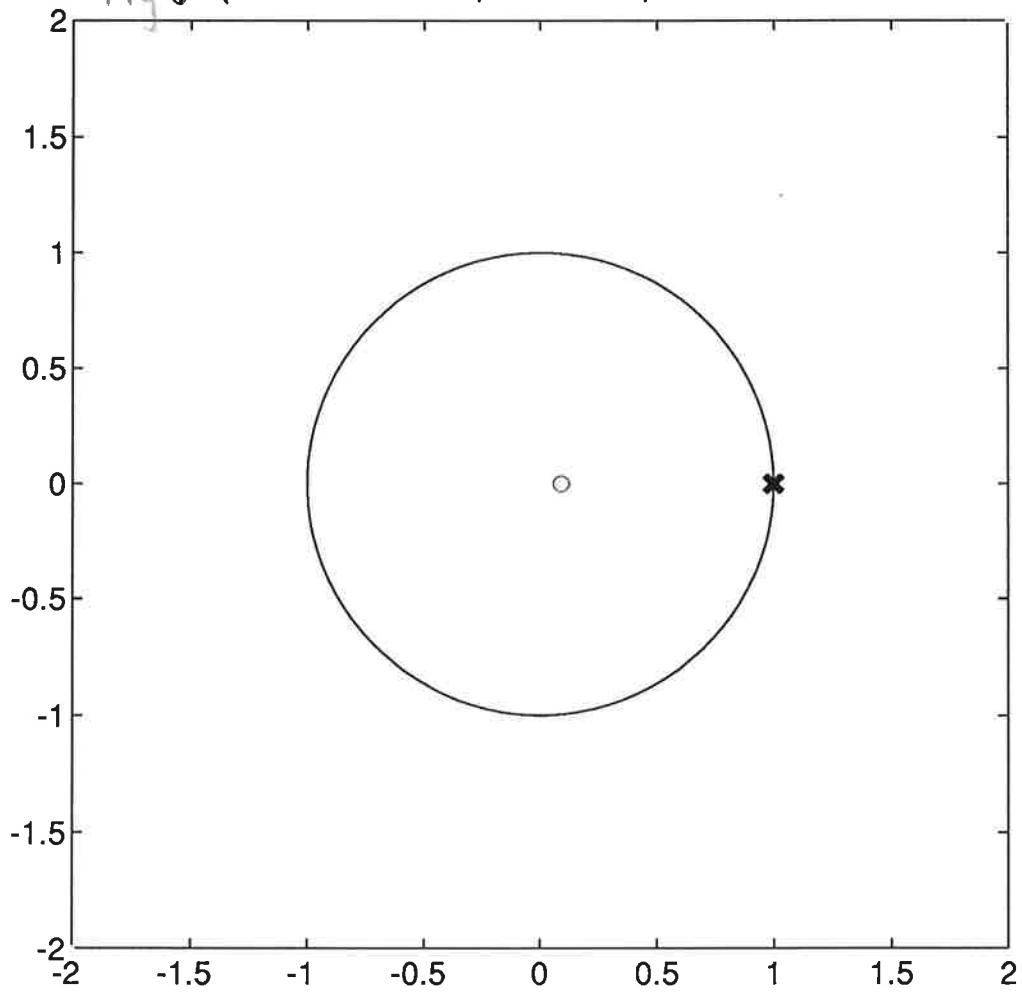
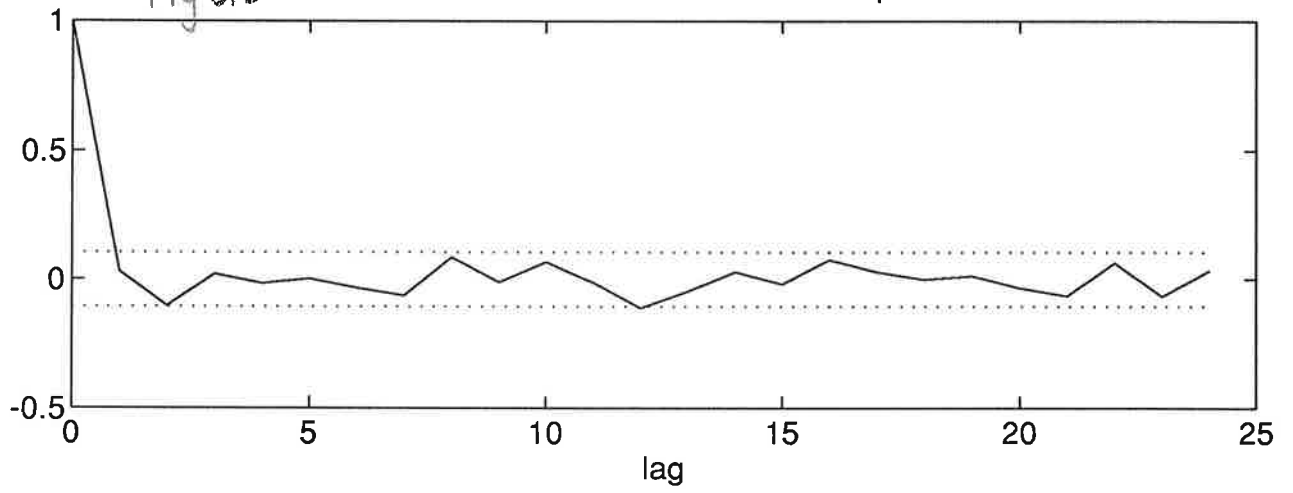


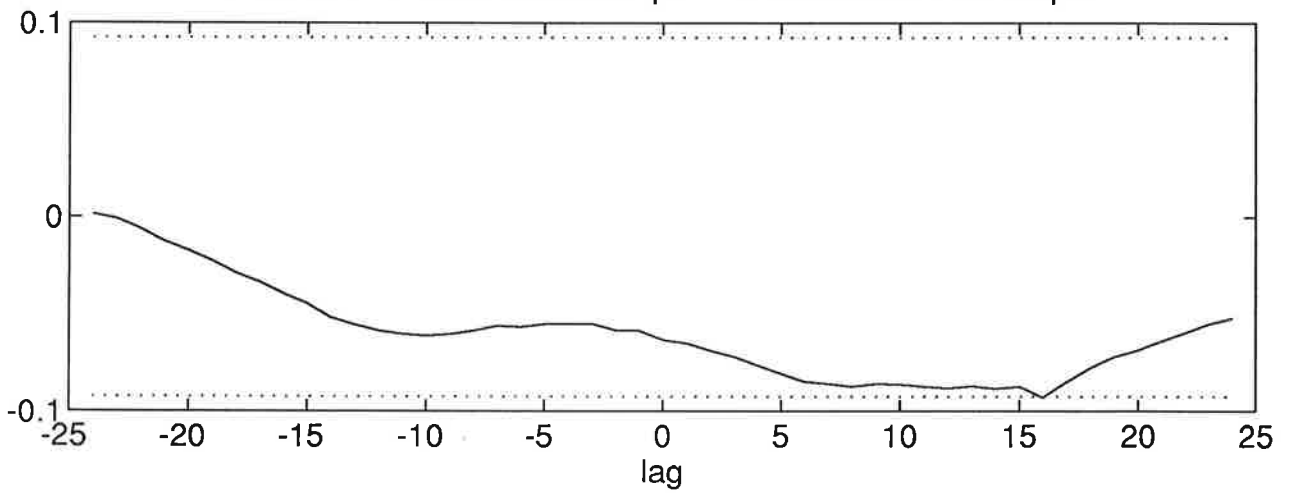


Fig 3.5

Correlation function of residuals. Output # 1



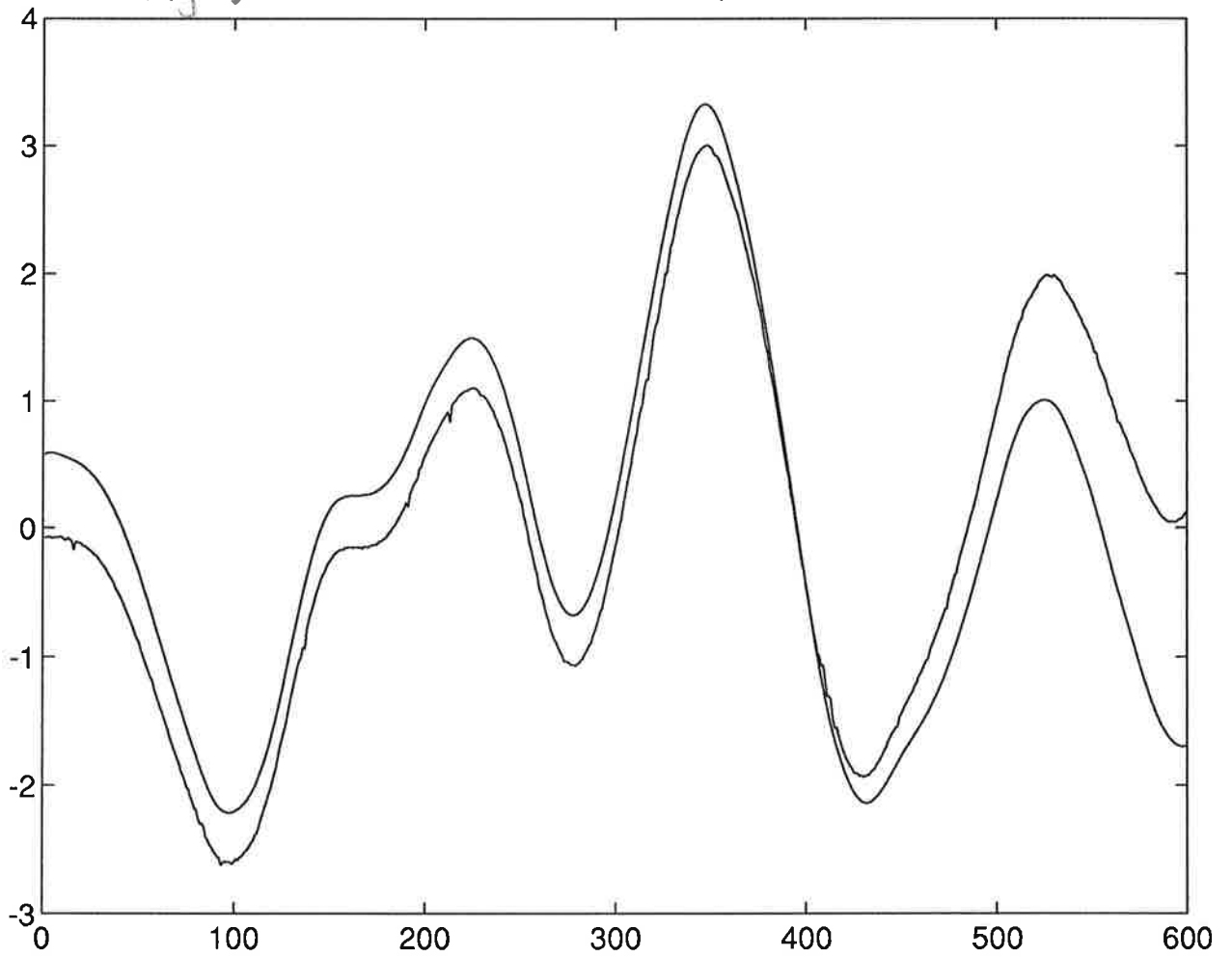
Cross corr. function between input 1 and residuals from output 1



zi

Fig 3.6

Crossvalidation for ballprocess



PROJEKT I PROCESSIDENTIFIERING  
MODELLERING  
IDENTIFIERING  
REGLERING  
AV BOMMEN OCH KULAN

Göran Göransson E-91  
Ricard Blanç E-90  
Fredrik Tufvesson TdE  
Andreas Hellström E-90

Handledare: Karl-Henrik Johansson  
Institutionen för Reglerteknik  
Lunds Tekniska Högskola

5 april 1995

## Innehåll

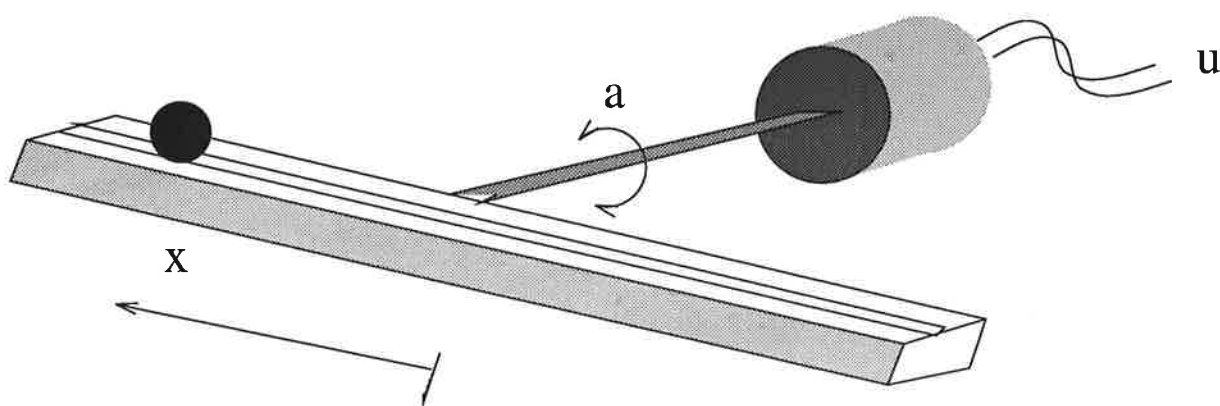
<b>1</b>	<b>INLEDNING</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>BESKRIVNING AV KULAN OCH BOMMEN</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>IDENTIFIERINGSFASEN</b>	<b>4</b>
3.1	FÖRVÄNTAT UPPTRÄDANDE MED HÄNSYN TILL FYSIKALISKA PRINCIPER . . . . .	4
3.2	INLEDANDE ENKLA EXPERIMENT . . . . .	5
3.2.1	FREKVENSSVARSANALYS . . . . .	5
3.3	START AV IDENTIFIERINGEN . . . . .	8
<b>4</b>	<b>MODELLERING</b>	<b>16</b>
4.1	UNDERSÖKNING AV SAMBANDET VINKEL TILL POSITION	16
<b>5</b>	<b>REGLERING AV BOMMEN OCH KULAN</b>	<b>17</b>
5.1	INRE LOOPEN . . . . .	17
5.2	PID-REGULATOR . . . . .	18
5.3	RST-REGULATOR . . . . .	20
5.4	MODIFIERING AV REGULATOR . . . . .	23
<b>6</b>	<b>SLUTSATSER</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>LITTERATURFÖRTECKNING</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>PROGRAMLISTNINGAR</b>	<b>25</b>

# 1 INLEDNING

Vår uppgift är att göra identifiering,modellering och reglering av bommen- och-kulan-processen. Insignalen till bommen är en styrsignal  $u$  som påverkar vinkelläget hos bommen. Från vinkel till position finns det ytterligare en överföringsfunktion som på grund av att den är instabil måste identifieras på ett intelligent sätt. Efter att vi har fått en bra modell över hur processen uppför sig är det lättare att göra en lämplig reglering. Vi valde först att göra en reglering med två reglerslingor, en snabb inre P-regulator och en yttre PID-regulator. Därefter provade vi också en RST-regulator som styr yttre processen för att se om vi kunde se eventuella skillnader mellan de två regleringsmetoderna.

## 2 BESKRIVNING AV KULAN OCH BOMMEN

Bommen består av en ca 1.5 meter lång aluminiumprofilstång med en ränna på ovansidan där det är meningen att kulan skall rulla. I rännan sitter en resistiv givare som, om man använder metallkuler, känner av var kulan befinner sig genom att mäta resistansen. Vidare är bommen inspänd i ett fäste som i sin tur sitter fast på en elmotor. Elmotorn kan man sedan styra genom den pålagda styrsignalen vilket innebär att tex en fyrkantsvåg kommer att få bommen att vridas fram och tillbaka mellan två lägen. Motorn sitter inuti en stor låda som även innehåller lite andra saker som gör att man kan styra bommen manuellt från baksidan genom en vridpotentiometer. Dessutom finns det på baksidan uttag där styrsignal kan anslutas samt vinkelläget respektive positionen hos kulan kan mätas som en spänning i intervallet  $[-10,10]$  V. Detta gör att processen kan styras från en dator med en regulator implementerad vilken skickar ut styrsignaler samtidigt som den känner av positionen hos kulan och vinkeln hos bommen. Figur 1 nedan visar hur vår process ser ut.



Figur 1: Bommen-och-kulan-processen

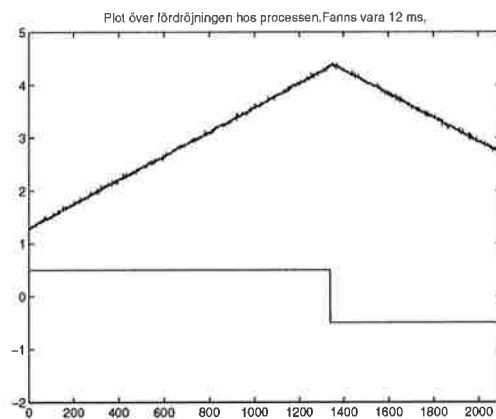
### 3 IDENTIFIERINGSFASEN

#### 3.1 FÖRVÄNTAT UPPTÄDANDE MED HÄNSYN TILL FYSIKALISKA PRINCIPER

För att få en uppfattning om hur den uppskattade modellen bör se ut är det ofta lämpligt att börja med enkla teoretiska resonemang. I vårt fall kan man dela upp processen i två steg. Det första steget är sambandet mellan spänning till motorn och bommens vinkel och det andra steget är sambandet mellan vinkel och kulans position. Första steget kan beskrivas av en enkel integrator. Ökas inspänningen in till motorn ökar dess vartal i motsvarande grad, dvs  $(\dot{\phi}) = u$ . Beskrivningen av andra steget erhålls genom att sätta upp sambandet för kulans rotation,  $J\ddot{\theta} = mgr \sin\phi$ , där  $r$  är kulans radie och  $\theta$  är dess rotationsvinkel. Genom sambandet  $x = r\theta$  inses att andra steget kan beskrivas av en dubbelintegrator. Totalt sett bör vi alltså förvänta oss att få minst ett tredje ordningens system.

## 3.2 INLEDANDE ENKLA EXPERIMENT

För att få en första känsla om hur processen uppträder, så började vi med att försöka reglera positionen hos en stålkula som vi la i rännan ,genom att använda den manuella styrningen hos motorn på baksidan av lådan. Detta visade sig vara mycket svårt. Vi observerade också att man kunde få kulan att hoppa upp från rännan om man blev för mycket efter i regleringen. Detta blir alltså en svårighet för regulatorn om det skulle gå så långt, ty då störs positionsinformationen under en kort stund vilket försvårar regleringen. Pga av att bommen var så pass lång som den var misstänkte vi också att den hade någon form av resonans i sin karakteristik. Därefter undersökte vi ett stegsvar på bommen för att se om processen uppvisade någon form av fördröjning. Figur 2 nedan visar att det fanns en fördröjning, vilken vi bestämde till 12 ms. Detta var en viktig information för den fortsatta identifieringen.

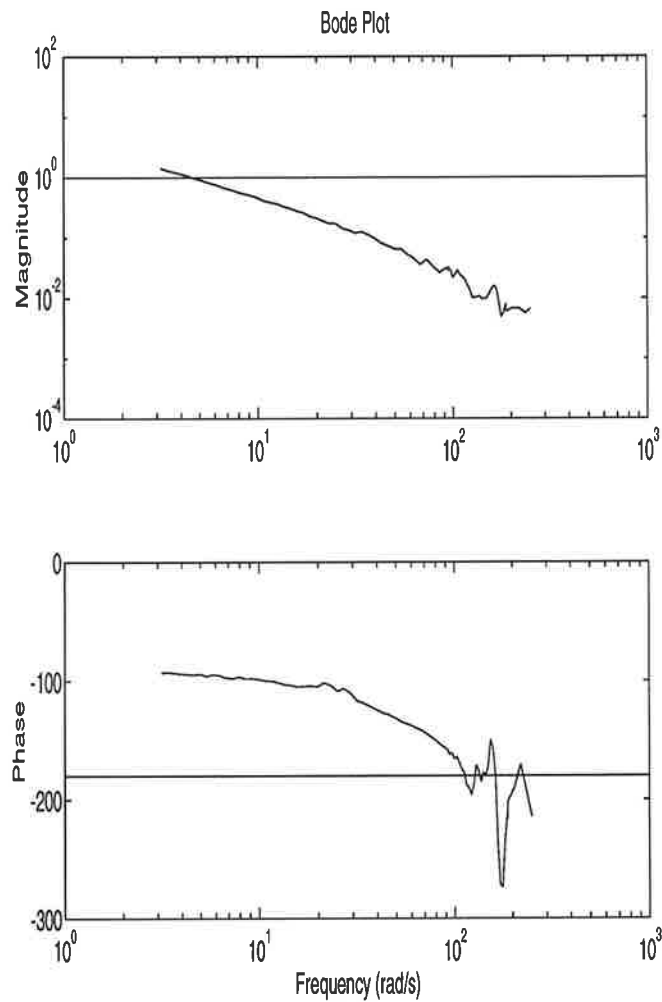


Figur 2: Fördröjning mellan styrsignal och utsignal

### 3.2.1 FREKVENSSVARSANALYS

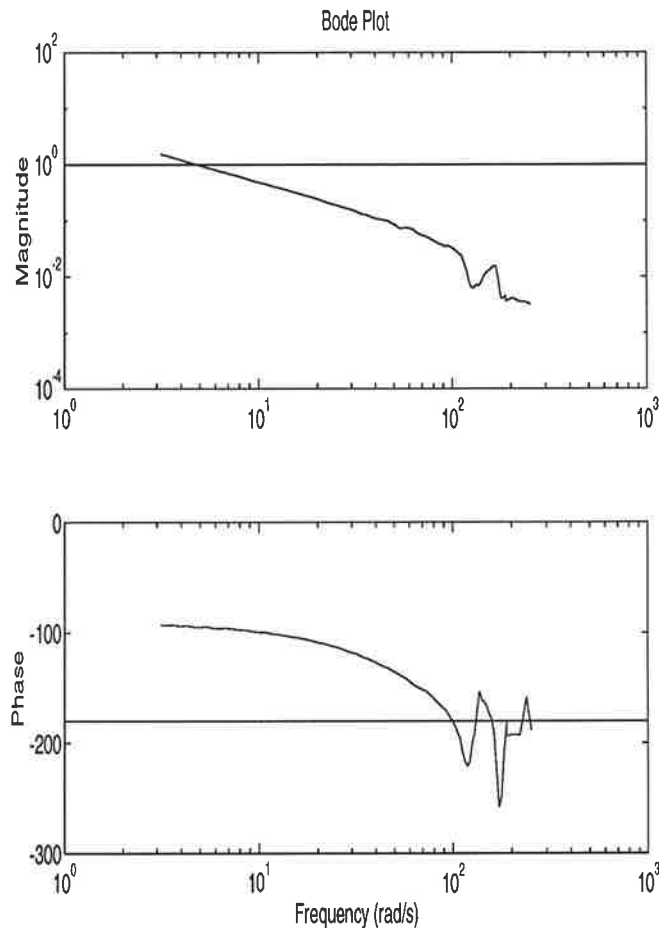
Vi gjorde några olika identifieringar med hjälp av frekvenssvarsanalysator för att se om processen var olinjär för olika amplitud på styrsignalen. Det visade sig att processen var relativt linjär för styrspänningar i intervallet  $[0.5 \text{ } 1.0]$  V. Utanför detta intervall blev vår process olinjär och därmed olämplig att identifiera. Vid mätningen av 0.5 V alternativet tyckte vi oss få en relativt kraftig resonans vid 20 Hz och vid 26 Hz. På grund av detta gjorde vi en ytterst finfördelad mätning runt dessa intressanta frekvenser och en mer normalt fördelad mätning för övriga frekvenser upp t.o.m 40 Hz. Resultatet av denna frekvenssvarsanalys ses i figur 3 på nästa sida.





Figur 3: Frekvensvarsanalys med 0.5 V

Den andra mätningen utfördes vid 1.0 V. Vid denna mätning tyckte vi oss höra en kraftig resonans vid 18.8 Hz, 20.0 Hz och 26.0 Hz. På liknande sätt som för 0.5 V alternativet så gjorde vi därefter en mer finfördelad mätning vid dessa intressanta frekvenser. Resultatet av denna mätning syns i figur 4 nedan.



Figur 4: Frekvensvarsanalys med 1.0 V

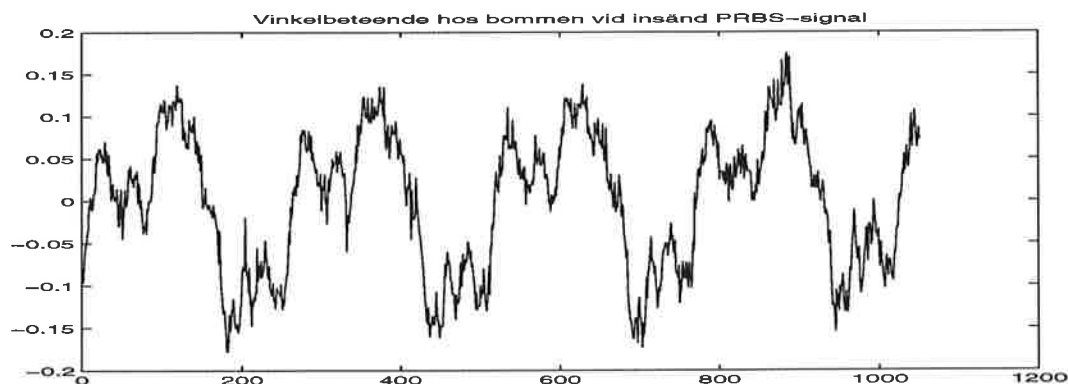
Kommentar: Från de båda försöken ovan ser man att processen typiskt har integratorokarakteristik för låga frekvenser. Sedan har vi ett komplext polpar vid ungefär 20 Hz som är dåligt dämpat och därefter uppför sig systemet som en trippelintegrator. Vid högre frekvenser är de båda försöken emellertid inte så relevanta pga mätbrus och dylikt. Då bommen exciteras med 40 Hz och däröver rör den sig bara lite grand. Pga att frekvensvarsanalysen utförs vid många olika frekvenser under en ganska lång tid, ger den ett resultat som troligtvis är en bra modell av verkligheten. Om man i stället lägger på en signal som har ett utsträckt frekvensspektrum är det troligt att resonanser och dylikt blir mera utslätade än vad de är i verkligheten. På grund av detta använder vi ovanstående resultat som referens för fortsatta mätningar.

### 3.3 START AV IDENTIFIERINGEN

För att få in mätdata använde vi programmet LOGGER som skickade ut en PRBS-signal från datorn in på processen, som i sin tur gav ut mätdata på bommens vinkel tillbaka till datorn. Datorn sparade de båda sekvenserna på en fil som vi använde för vår identifiering. De olika inställningar som man kan göra i LOGGER är bl.a periodtid, samplingstid, antal data som skall samlas in och PRBS-signalens amplitud. Iden med LOGGER är att man ska lägga så mycket energi som möjligt vid intressanta frekvenser där det tex sker resonanser. Figur 5 och 6 nedan visar hur en typisk dataupptagning kan se ut.



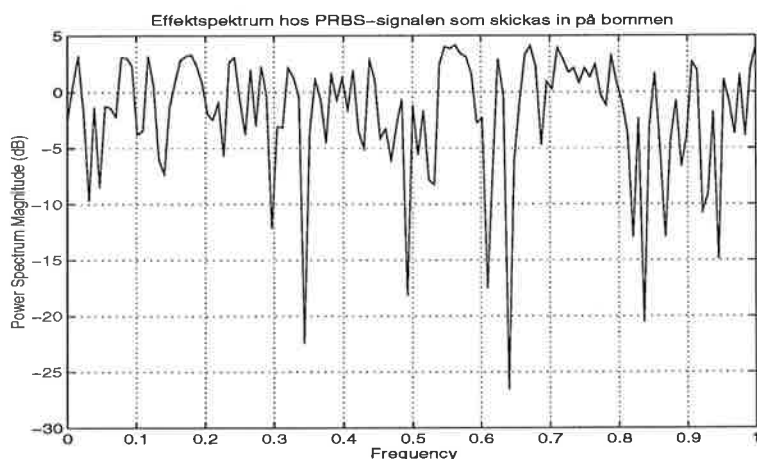
Figur 5: PRBS-signalens typiska utseende



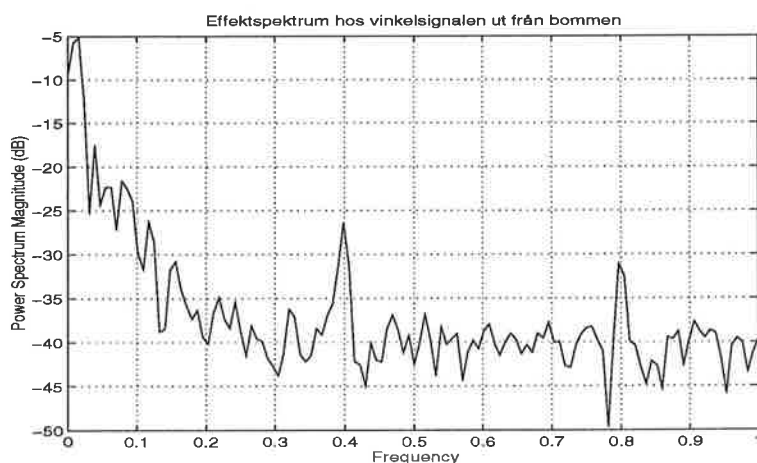
Figur 6: Vinkelsignalen ut från bommen

Vi tog upp ett antal olika mätningar med olika parametervärden som vi ansåg vara av intresse. Gemensamt för alla mätningar var att vi satte samplingstiden till 4 ms. Detta intervall är tillräckligt kort för att få en bra uppfattning om intressanta frekvenser samtidigt som det är så pass långt att mätningens varaktighet inte blir för kort. Därefter försökte vi att anpassa en enkel modell till våra mätdata. Vi insåg efter ett tag att det med en arx-modell av

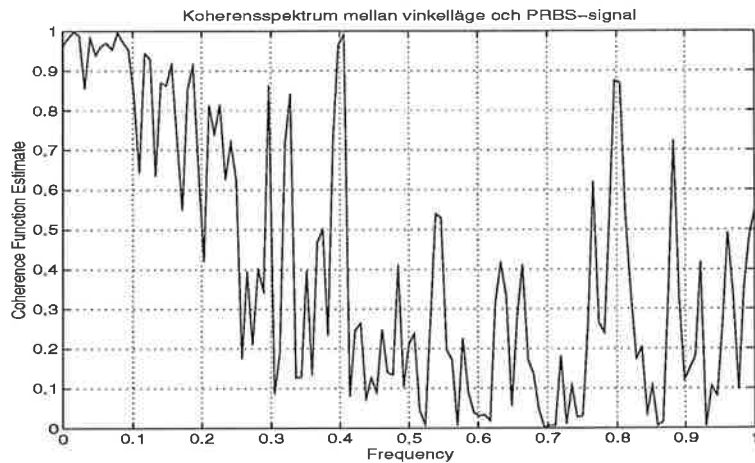
låg ordning blev komplexkonjugerade poler som låg vid en frekvens av 50 Hz. Detta var inte väntat eftersom frekvensvarsanalysen snarare antydde 20 Hz. Vi misstänkte därför att det var nätstörningar som hade letat sig in och stört vår mätning ty vi utförde våra mätningar utan skärmade kablar eller dylikt. För att ytterligare undersöka det här beteendet gjorde vi ett effektspektrum av insignalen och utsignalen. Dessutom gjorde vi en koherensskattning mellan in- och ut-signal. Figurerna 7,8 och 9 nedan visar resultatet. Här ser man att det finns ett tydligt 50 Hz genomslag .



Figur 7: Effektspektrum av PRBS-signalen

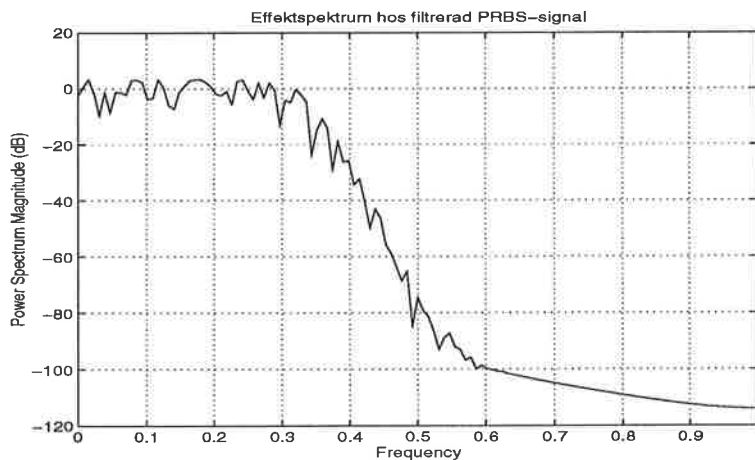


Figur 8: Effektspektrum av vinkelsignalen

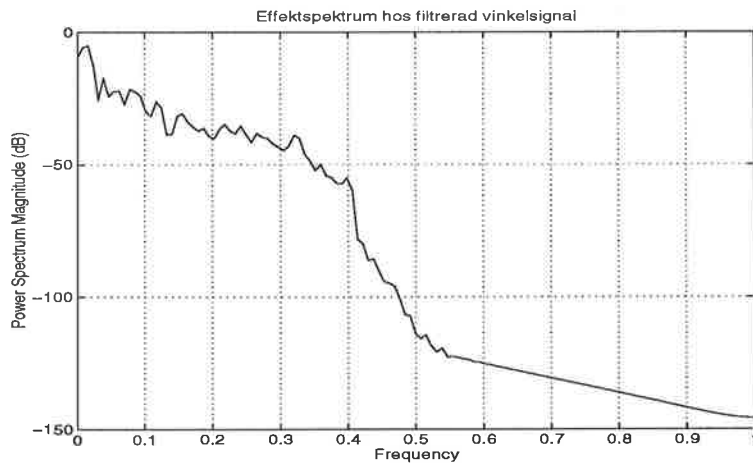


Figur 9: Koherensspektrum

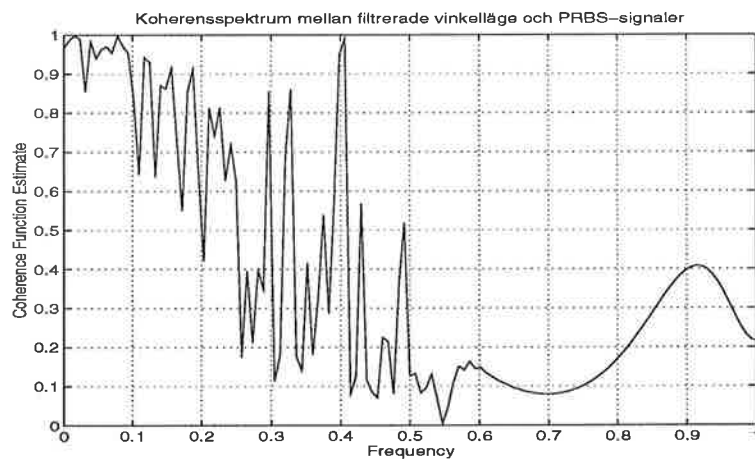
Nu fanns det två alternativ, antingen att använda en mer avancerad modell eller att filtrera våra mätdata. Det första alternativet visade sig vara en återvändsgränd eftersom den gav en resonans vid ca 6 Hz och det var ju inte så troligt att det var korrekt. Nu återstod alltså att filtrera våra data. Figurerna 10,11 och 12 nedan visar hur effektspektrum och koherens såg ut efter filtreringen.



Figur 10: Effektspektrum av filtrerad PRBS-signal



Figur 11: Effektspektrum av filtrerad vinkelsignal



Figur 12: Koherensspektrum av filtrerade signaler

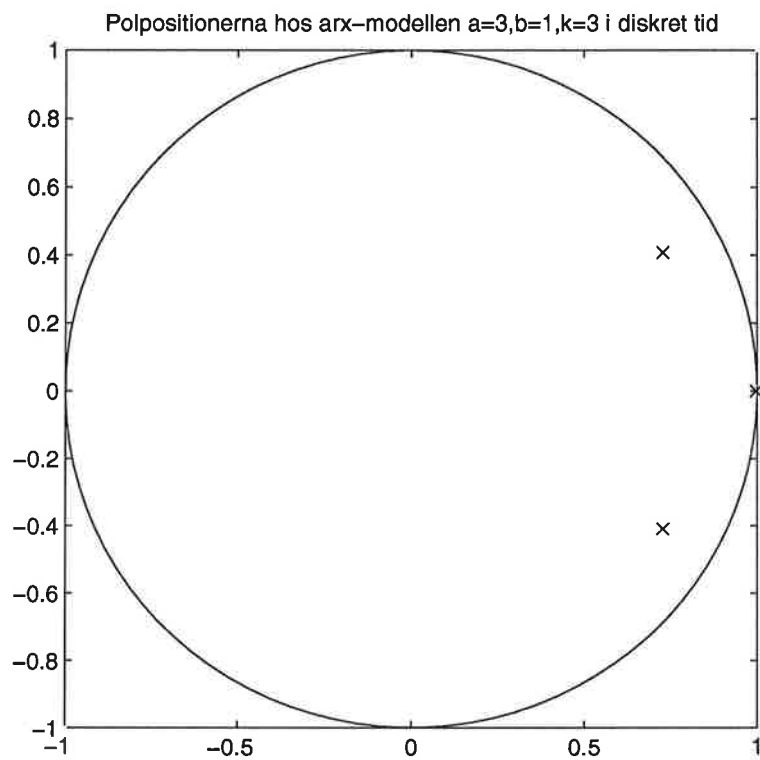
Efter att vi filtrerat våra mätvärden försökte vi anpassa dem till en enkel modell av så låg ordning som möjligt. Vi kom fram till en arx-modell med tre a-parametrar och en b-parameter och med en tidsfördröjning på 3 samplingsperioder ty vi samplade med 4 ms. Parametrarna blev

$$B = 0 \ 0 \ 0 \ 0.0016$$

$$A = 1 \ -2.4457 \ 2.1350 \ -0.6886$$

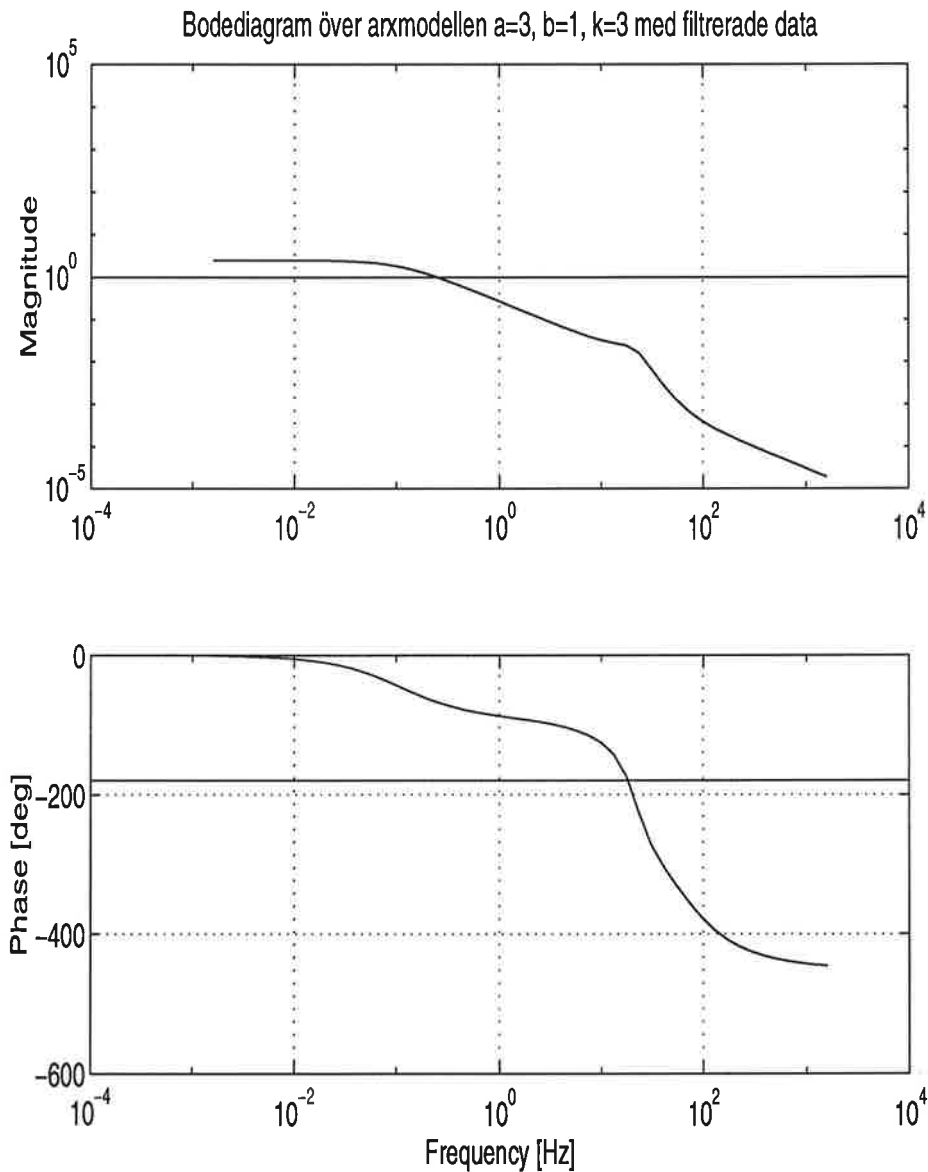
Detta ger ett poldiagram enligt figur 13. Här ser man att de komplexkonjugerade polerna har en dämpning av ungefär 0.4. Om man räknar om dessa

poler till kontinuerlig tid och räknar ut vilken frekvens de motsvarar får man ungefär 20.4 Hz. Detta är alltså en relativt bra modell av vårt system med avseende på resonansen.



Figur 13: Polplacering

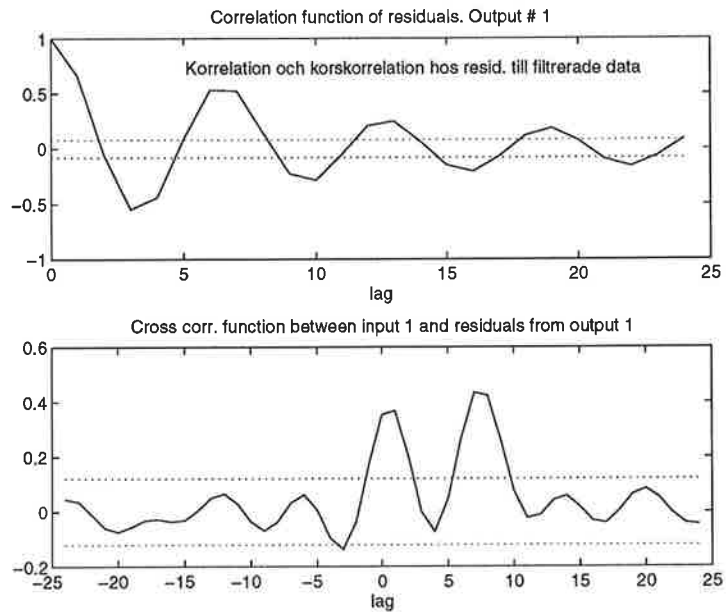
Om man räknar ut hur bodediagrammet för denna modell ser ut får man figur 14. Här ser man att den har uppenbara likheter med det tidigare upptagna bodediagrammet i samband med frekvenssvarsanalysen.



Figur 14: Bodediagram av vår arx-modell

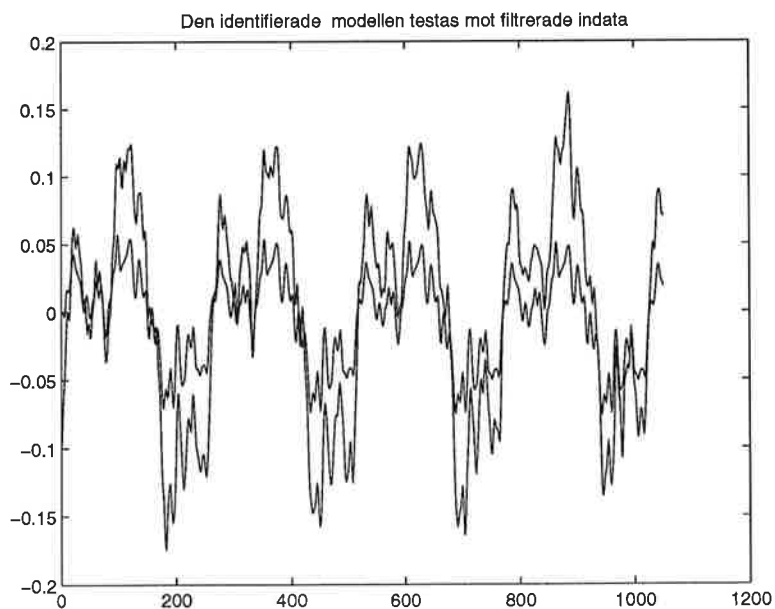
I figur 15 visas en bild av hur residualerna ser ut efter att vi har anpassat en modell till våra filtrerade värden. Figuren visar att det finns mer information kvar i våra mätdata som skulle kunna användas, men samtidigt blir då ordningen så stor att det inte är lönt att fortsätta. Man kan också se att vi har en relativt stor topp i korskorrelationen för lag=7. Detta motsvarar  $4 \text{ ms} * 8 = 32 \text{ ms}$ , vilket i sin tur är en frekvens på 31 Hz.





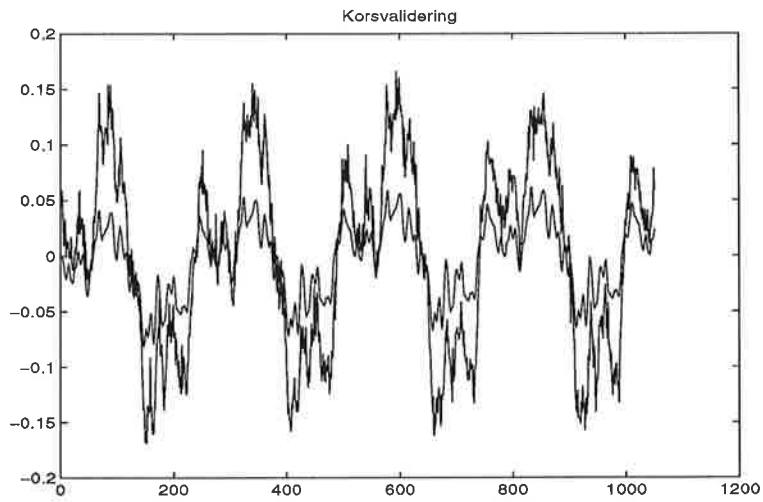
Figur 15: Residualernas utseende

I figur 16 visas en bild av hur vår identifierade modell stämmer mot de filtrerade datavärdena. Som synes ser det bra ut i tiden men amplituden är lite för liten, troligtvis beroende på filtreringen .



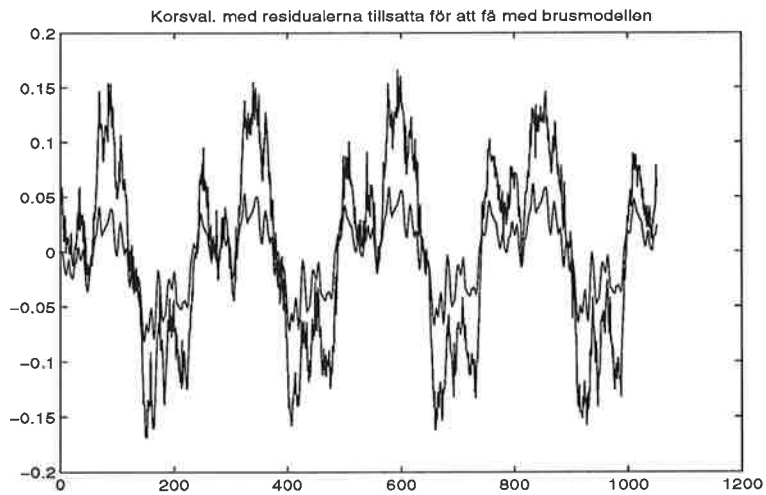
Figur 16: Test av modellen gentemot våra filtrerade indata

I figur 17 visas sedan hur en korsvalidering ser ut. Även här är amplituden för liten.



Figur 17: Korsvalidering gentemot andra data

I figur 18 visas hur det ser ut om vi tar med residualerna vid korsvalideringen för att få med brusdynamiken också. Det blir ingen större skillnad, vilket alltså visar att det inte är lönt att anpassa en arx-modell av högre ordning till våra mätdata.

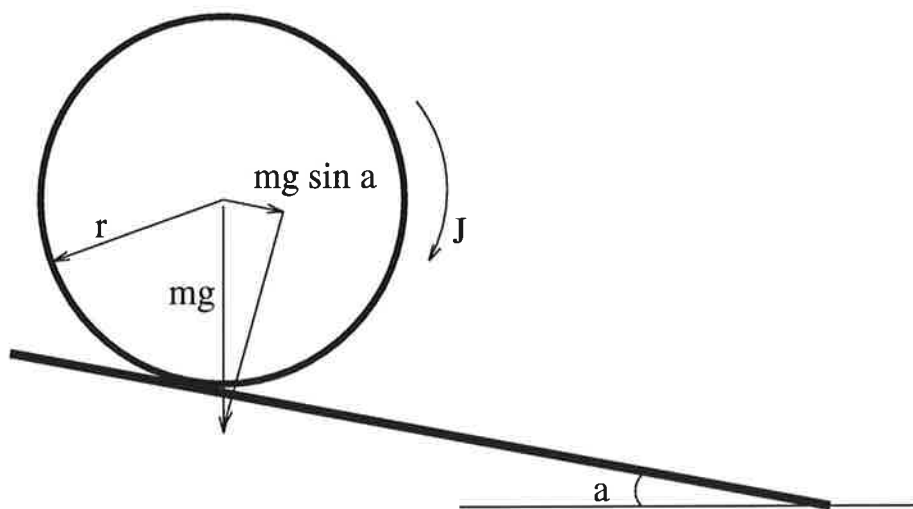


Figur 18: Korsvalidering med residualerna medtagna

## 4 MODELLERING

### 4.1 UNDERSÖKNING AV SAMBANDET VINKEL TILL POSITION

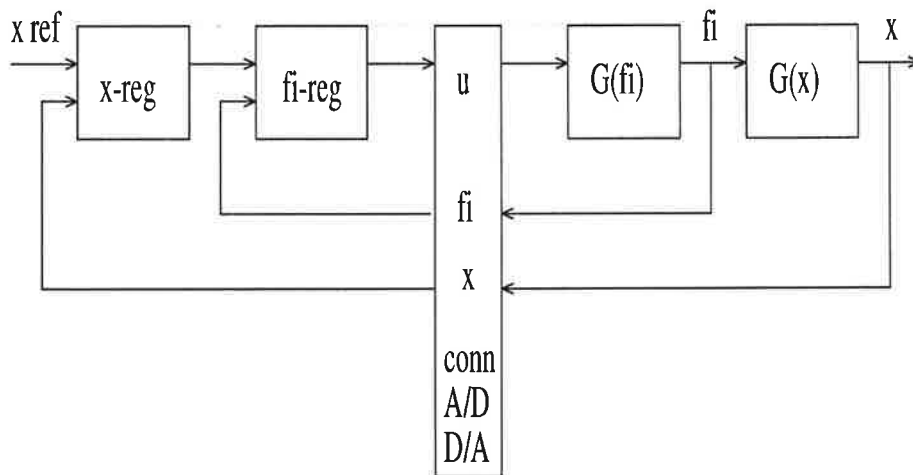
Delsystemet mellan bomvinkel och kulans position är instabilt eftersom kulan rullar av bommen vid konstant vinkel. Därför går det ej att identifiera denna överföringsfunktion på vanligt sätt. Istället försökte vi utnyttja den enkla modell vi satte upp i början och komplettera denna med några mätningar. Vi hade tidigare  $J\ddot{\theta} = mgr \sin \phi$ . För små vinklar kan detta approximeras med  $J\ddot{\theta} = mgr \phi$  för att därigenom erhålla ett linjärt system. Utifrån detta antog vi en överföringsfunktion  $G(s) = K/s^2$ . Konstanten  $K$  bestämdes ur experiment genom att mäta kulans position som funktion av tiden för olika bomvinklar. Som väntat gav mätningarna olika parabelkurvor och genom anpassning till ett andragradspolynom erhöles  $K \approx -10$ .



Figur 19: Krafter som påverkar kulan

## 5 REGLERING AV BOMMEN OCH KULAN

Målet med reglering av bommen-och-kulan-processen är att via motorspänningen styra kulans position längs bommen. Eftersom processen har två utsignaler, vinkel och position, kan man göra en naturlig uppdelning av processen i två delsystem i kaskad. Det första av dessa utgör överföringen från motorspänning till vinkelläge. Det andra utgör överföringen från vinkelläge till kulans position. Genom denna uppdelning är det lämpligt att reglerstrukturen får formen av kaskadreglering. I denna reglerstruktur utgör vinkelregleringen den inre loopen och positionsregleringen den yttre. En generell bild av reglerystemet visas i figur 20.



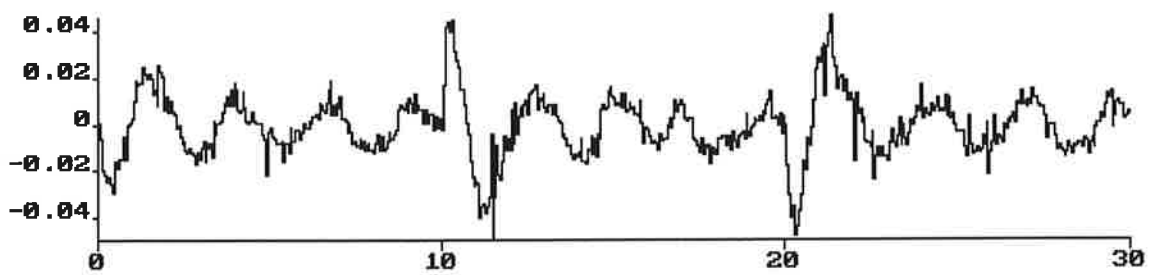
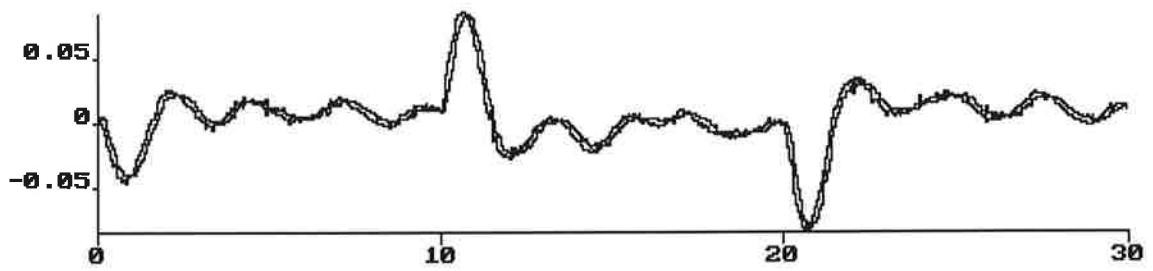
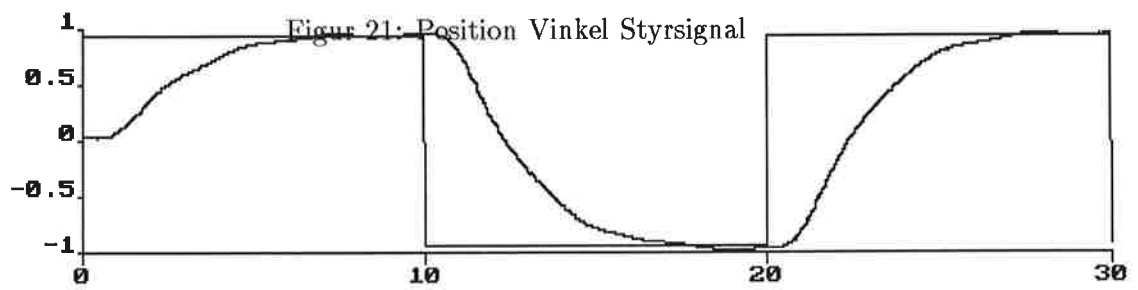
Figur 20: Generellt kaskadreglersystem

### 5.1 INRE LOOPEN

Vid designen av regulatorsystemet började vi med att undersöka den inre loopen. Eftersom detta system har integratoraktör och därmed är neutralt stabilt valde vi en enkel P-regulator för dess reglering. Detta visade sig ge bra resultat och genom att undersöka stegsvaret kunde vi bestämma förstärkningen. Vår önskan var att göra den inre loopen så snabb som möjligt för att på så sätt kunna förenkla den fortsatta designen. Efter några simuleringar kom vi fram till att förstärkningen högst kunde väljas till  $K=3$  utan att få översläng hos stegsvaret.

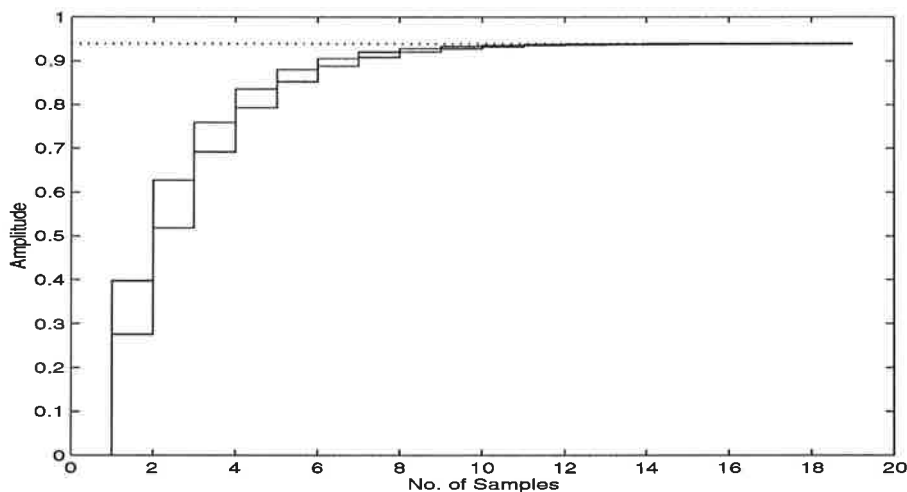
## 5.2 PID-REGULATOR

Efter det att den inre loopen optimerats enligt ovan prövade vi att empiriskt bestämma en regulator för positionen. Vi valde då först en PI-regulator med lämpliga parametrar men det visade sig att systemet inte kunde stabiliseras på detta sätt. Därefter adderade vi en D-del till regulatorn och då kunde systemet stabiliseras med passande parameterintervall. Systemet uppförde sig nu förvånansvärt bra. För att verifiera denna regulator gjorde vi ett antagande. Vi antog att den inre loopen var så snabb att dess dynamik helt kunde försummas. Genom detta antagande och kännedom om det andra delsystemet via vår modell kunde en PID-regulator bestämmas via polplacering. De parametrar som vi på detta sätt erhöll överensstämde mycket väl med de empiriskt funna parametrarna. Resultatet av en realtidssimulering där vi önskade att kulan skulle förflytta sig mellan bommens ändlägen visas i figur 21.



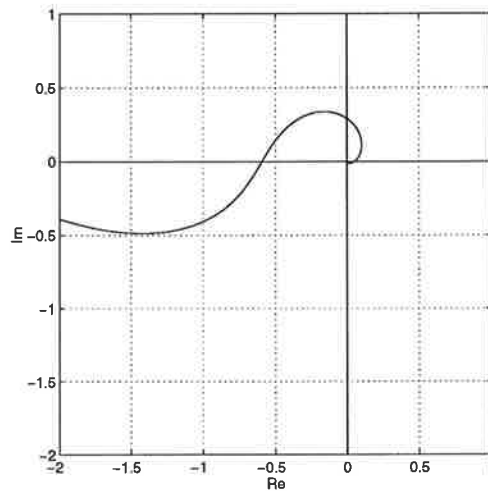
### 5.3 RST-REGULATOR

Eftersom vi har ägnat tid åt att identifiera det första delsystemet ville vi utnyttja denna information för en mer avancerad design. Målet var nu att bestämma en RST-regulator för positionsregleringen. Genom att matematiskt återkoppla vår modell av det första delsystemet med en P-regulator och därefter slå ihop detta inre sluta system med en diskretiserad version av det andra delsystemet erhöles en modell för totala systemet. Det totala systemet blev av ordning fem. Vid RST-designen av detta system erhöles av oförklarliga skäl orimliga resultat. Vi valde istället en enklare variant där vi approximerade det redan erhållna inre slutna systemet med ett första ordningens system. Totalt fick vi då ett system av tredje ordningen. Det approximativa systemet av första ordningen bestämdes genom att jämföra dess stegsvar med den slutna inre loopens stegsvar. Genom lämpligt parameterval erhöles stegsvar enligt figur 22.



Figur 22: Jämförelse av stegsvar

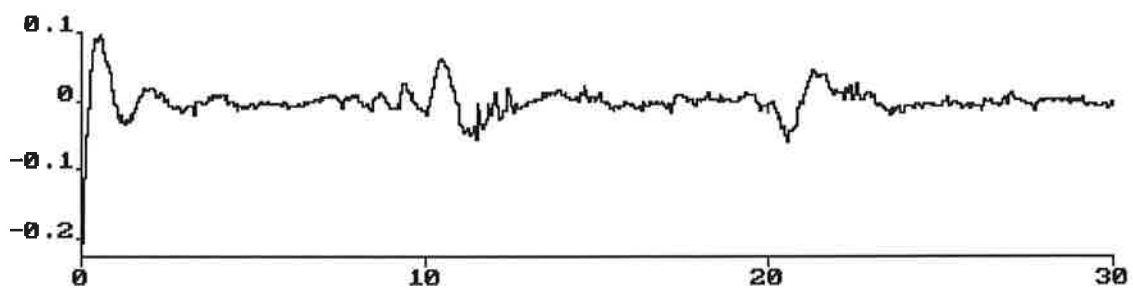
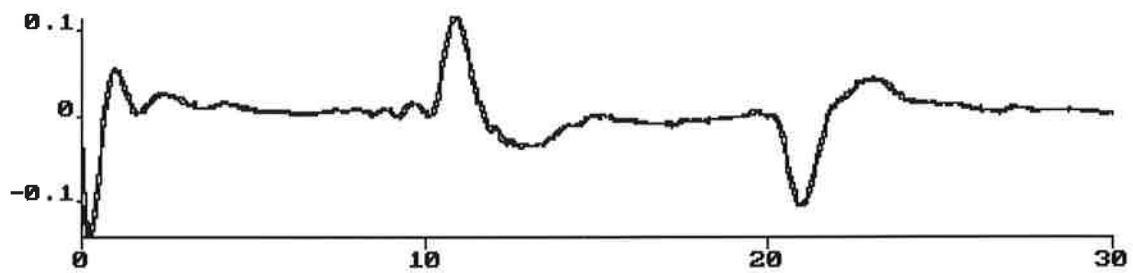
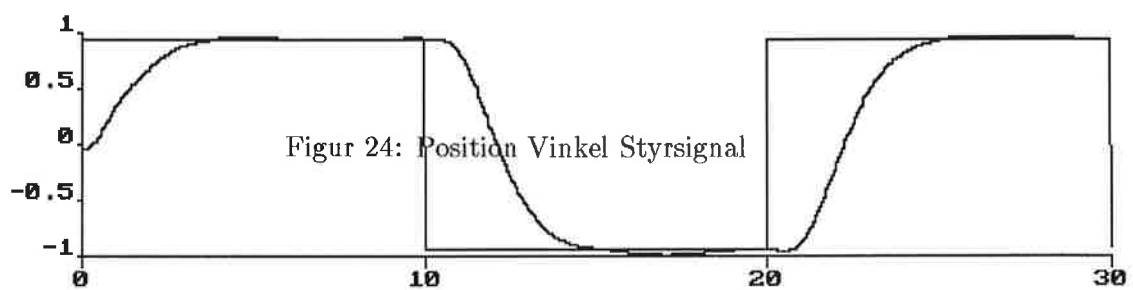
RST-design av systemet av tredje ordningen kunde nu göras. Vi valde en regulator med integralverkan och genom polplacering valdes det önskade slutna systemets poler. Efter ett antal realtidsimuleringar valdes  $\omega = 2$ , där  $\omega$ , som är avståndet från polerna till origo, utgör ett mått på systemets snabbhet. Med detta val av  $\omega$  fås tillräcklig stabilitetsmarginal. Detta visas av Nyquistkurvan för slingförstärkningen i figur 23.



Figur 23: Nyquistkurva av slingförstärkningen.

En realtidsimulering av det framtagna systemet visas i figur 24. Denna reglering är som synes något snabbare än PID-regleringen.





## 5.4 MODIFIERING AV REGULATOR

Vid härledningen av modellen för det andra delsystemet gjordes grova förenklingar för att vi skulle få en linjär och enkel modell. Hänsyn till kraftsamband refererade till ett koordinatsystem vinkelrätt mot bommen försumrades helt. Dessa krafter gör sig gällande vid uppstart från vila och då vi vill att kulan ska byta riktning. Detta yttrar sig genom att kulan vill hoppa till vid dessa tillfällen. Detta är mycket svårt att ta hänsyn till vid regulatordesignen men dess effekter kan emellertid lindras genom vissa modifieringar.

För PID-regulatorn gjordes två modifieringar. För att motverka hopp vid vändlägen lät vi endast en bråkdel av referenssignalen påverka positionsregulatorns P-del. För att lindra hopp vid start sattes D-delen till noll under ett kort startintervall då denna visat sig vara dominerande initialt.

För RST-regulatorn valde vi en annan modifiering. Här beräknas den från regulatorn önskade styrsignalens derivata. Om denna derivata är större än en given nivå begränsas styrsignalens belopp. Detta kan verka konstigt men samtliga dessa modifieringar gav förbättrat resultat.

## 6 SLUTSATSER

Vi har lyckats få ett system som fungerar bra, kulan kan styras dit vi vill. På vägen mot målet har vi fått upp ögonen för en hel del oväntade saker. Det som har skapat mest problem för oss vid identifieringen var den 50Hz störning som vi länge trodde var själva systemet. Det visade sig att man måste veta vart man vill komma för att nå ett godtagbart resultat. Det blev också svårare att välja modellordning än vi trodde. Även här gäller att man måste veta vart man vill komma för att nå målet, betydelsen av en ordentlig inledande studie kan inte underskattas. När vi började reglera i verkligheten insåg vi också problemen med att verkligen utnyttja all den information vi fått fram genom vår estimerade modell. Problematiskt vid regleringen var kompromissen mellan snabbhet och att undvika att kulan hoppar. Det blir en hel del omräkningar och anpassningar innan modell och regulator passar ihop och man får en känsla av att det slutliga systemet hade kunnat göras bättre "om man bara hade...".

## 7 LITTERATURFÖRTECKNING

K.J. Åström, B Wittenmark, *Computer Controlled Systems*. Prentice-Hall 1990.

R. Johansson. *System Modelling & Identification*. Prentice-Hall 1993.

Inst för Reglerteknik *Laboratory Exercises in System Identification*. KF-Sigma  
Lund 1995.

## A PROGRAMLISTNINGAR

Listningar i simnonkod för de olika regulatorerna.

VINKELREGULATOR : fireg.t

POSITIONSREGULATOR-PID : xreg.t

POSITIONSREGULATOR-RST : rstx.t

```
DISCRETE SYSTEM fireg

INPUT firef fi
OUTPUT u
TIME t
TSAMP ts
SORT
v=P "+I+nD
u=IF v<umin THEN umin ELSE IF v<umax THEN v ELSE umax

P=Kfi*(b*firef-fi) "P-del
ts=t+h

"PARAMETRAR
Kfi:1 "regulator förstärkning
b:1 "andel börvärde i P-del
umin:-1 "undre styrgräns
umax:1 "övre styrgräns
h:0.05 "samplingsperiod

END
```

DISCRETE SYSTEM rstx

INPUT xref x  
OUTPUT ut  
STATE xref1 xref2 xref3 x1 x2 x3 ut1 ut2 ut3 v1 vpi1  
NEW nxref1 nxref2 nxref3 nx1 nx2 nx3 nut1 nut2 nut3 nv1 nvpi1  
TIME t  
TSAMP ts

INITIAL

ar=h/Tt

SORT

d1=-r1\*ut1-r2\*ut2-r3\*ut3+t0\*xref+t1\*xref1+t2\*xref2  
d2=t3\*xref3-s0\*x-s1\*x1-s2\*x2-s3\*x3+ar\*(ut1-vpi1)  
v=d1+d2  
vprim=(v-v1)/h  
vpi=IF abs(vprim)>lim THEN 0 ELSE v  
nvpi1=vpi  
ut=IF (vpi < umin) THEN umin ELSE IF (vpi < umax) THEN vpi ELSE umax  
nv1=v  
nxref3=xref2  
nxref2=xref1  
nxref1=xref  
nx3=x2  
nx2=x1  
nx1=x  
nut3=ut2  
nut2=ut1  
nut1=ut

ts=t+h

"PARAMETRAR       w=2

r1:-2.6519  
r2:2.4098  
r3:-0.7578  
s0:0.2721  
s1:-1.2462  
s2:1.6528  
s3:-0.6792  
t0:-0.0878  
t1:0.2189  
t2:-0.1824  
t3:0.0508

lim:10  
Tt:0.1               "trackingtid  
umin:-1              "undre styrgräns  
umax:1               "övre styrgräns  
h:0.05               "samplingsperiod

END

DISCRETE SYSTEM xreg

INPUT xref x  
OUTPUT ut  
STATE I D x1  
NEW nI nD nx1  
TIME t  
TSAMP ts  
INITIAL

$bi = K \cdot h / T_i$   
 $ar = h / T_t$   
 $bd = K \cdot N \cdot T_d / (T_d + N \cdot h)$   
 $ad = T_d / (T_d + N \cdot h)$

SORT  
 $v = (P + I + nD)$

$ut = \text{IF } (v < u_{\min}) \text{ THEN } u_{\min} \text{ ELSE IF } (v < u_{\max}) \text{ THEN } v \text{ ELSE } u_{\max}$

$P = K \cdot (b \cdot x_{\text{ref}} - x)$  "P-del

$nI = I + bi \cdot (x_{\text{ref}} - x) + ar \cdot (ut - v)$  "I-del

$nD = \text{IF } t < 0.2 \text{ THEN } 0 \text{ ELSE } ad \cdot D - bd \cdot (x - x1)$  "D-del  
 $nx1 = x$

$ts = t + h$

"PARAMETRAR

K:0.1	"regulator förstärkning
Ti:4	"integraltid
Td:1	"derivatamid
Tt:0.1	"trackingtid
N:5	"max D-förstärkning
b:1	"andel börvärde i P-del
umin:-1	"undre styrgräns
umax:1	"övre styrgräns
h:0.05	"samplingsperiod

END

Friktionsbestämning i ett servo  
Ett projekt i Processidentifiering

Per Karlsson, E91  
Mats Näslund, E90

Institutionen för Reglerteknik

Handledare : Karl Henrik Johansson

5 april 1995



### **Abstract**

The purpose of the project is to determine a friction model for the servo motor used in the laboratory courses at the Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology. Logger, a PRBS generator, was used for collecting measurement data and Matlab was used for the identification and validation. A simple friction model, Coulomb friction, is first proposed and it is shown that the model is suitable. This report contains theoretic integration of the friction into the servo model, figures and results from the identification. Some of the problems during identification are also discussed.

## Innehåll

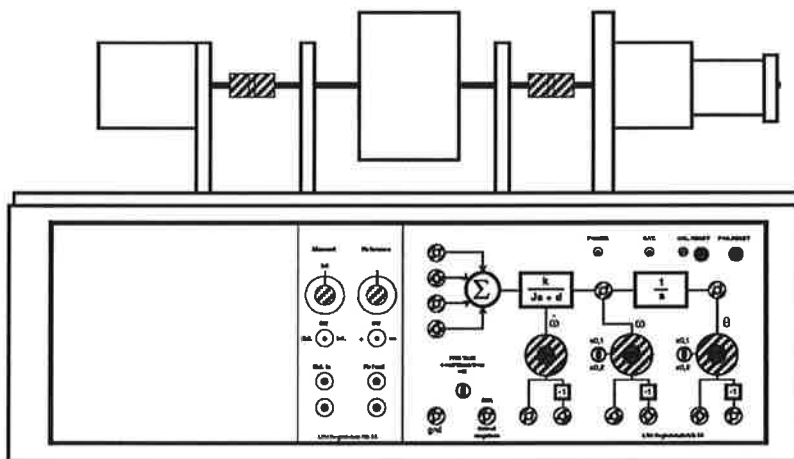
<b>1 Inledning</b>	<b>2</b>
<b>2 Matematisk modell av servot</b>	<b>2</b>
<b>3 Coulombfriktion</b>	<b>3</b>
3.1 Kontinuerlig och diskret modell . . . . .	3
<b>4 Identifiering och validering</b>	<b>4</b>
4.1 Den tidskontinuerliga modellen . . . . .	4
4.2 Den tidsdiskreta modellen . . . . .	4
<b>5 Friktionskompensering</b>	<b>5</b>
<b>6 Slutsatser</b>	<b>6</b>
<b>A Matlab-program</b>	<b>9</b>
<b>B Simnon-program</b>	<b>10</b>

# 1 Inledning

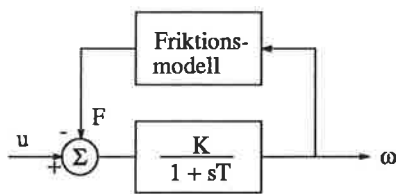
I detta projekt skulle vi ta fram en friktionsmodell för servomotorn, som används vid Reglertekniks laborationer. Vi börjar med att ta fram den teoretiska modellen för servomotorn med friktion. Därefter utför vi identifieringen och diskuterar en del problem kring denna. Sedan gör vi en del tester och jämförelser mellan de olika modellerna. Till sist avslutar vi rapporten med en diskussion av de problem som har uppstått under projektets gång och våra slutsatser.

# 2 Matematisk modell av servot

I detta avsnitt tar vi fram en modell av servosystemet med friktion. Alla mätningar gjordes på en labuppställning av servot, vilket visas i figur 1. Block-



Figur 1: Testriggen för servomotorn med last. Överst till vänster sitter motorn. Till höger sitter varvalsgivaren, som är en tachometer. Mellan dessa sitter ett svänghjul, upphängd på kullager. Axlarna länkas samman med två kopplingar.



Figur 2: Blockschema för servot med friktionskraft.

schemat för servot visas i figur 2. Med ledning av denna kan alltså systemets överföringsfunktion skrivas

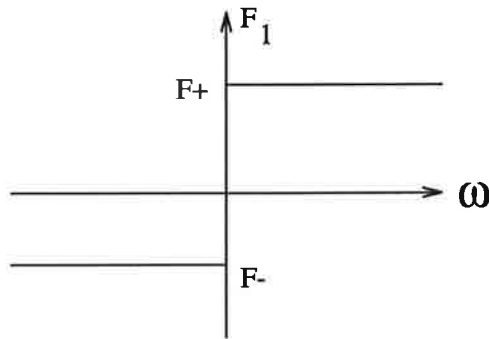
$$\Omega(s) = \frac{K}{(1 + sT)}U(s) - \frac{K}{(1 + sT)}F(s)$$

Denna motsvaras i tidsplanet av

$$\omega(t) = -T\dot{\omega}(t) + Ku(t) - KF(t) = -T\dot{\omega}(t) + Ku(t) - F_1(t)$$

### 3 Coulombfriktion

Till att börja med antar vi en enkel modell baserad på den så kallade Coulombfriktionen, figur 3. Där antas friktionskraften vara beroende på endast rotationsriktningen av servot, vilket ger följande ekvation:



Figur 3: Coulomb-friktionsmodell.

$$\omega = -T\dot{\omega} + Ku - F_1 = \varphi^T \cdot \theta = \begin{bmatrix} -\dot{\omega} & u & x^+ & x^- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ K \\ F^+ \\ F^- \end{bmatrix}$$

Variablerna  $x^+$  och  $x^-$  är dummy-insignaler som används eftersom friktionskraften har olika tecken beroende på rotationsriktningen.

$$x^+ = \begin{cases} -1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega \leq 0 \end{cases}; \quad x^- = \begin{cases} 0, & \omega \geq 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases}$$

#### 3.1 Kontinuerlig och diskret modell

Eftersom vi inte var säkra på vilken metod, som skulle ge bästa resultat ställde vi upp och provade båda modelltyperna. För att få en tidskontinuerlig modell approximerade vi derivatan med ett framåtskift och samplade med maximal hastighet. Datorsystemet begränsade denna till 1 kHz. Sätt in  $s = \frac{z-1}{h}$  i överföringsfunktionen i kapitel två och vi får:

$$\omega(kh + h) = \left(1 - \frac{h}{T}\right)\omega(kh) + \frac{h}{T}Ku(kh) - \frac{h}{T}F_1(kh)$$

Detta skrivs om till standardformen

$$\omega(kh + h) = \varphi^T(kh) \cdot \theta = \begin{bmatrix} \omega(kh) & u(kh) & x^+(kh) & x^-(kh) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Den tidsdiskreta modellen erhålls genom ZOH-sampling<sup>1</sup> på systemet nedan

$$\begin{aligned}\omega &= -T\dot{\omega} + Ku + F^+x^+ + F^-x^- \implies \\ \dot{\omega} &= -\frac{1}{T}\omega + \frac{K}{T}u + \frac{F^+}{T}x^+ + \frac{F^-}{T}x^-\end{aligned}$$

Vi får då

$$\begin{aligned}\omega(kh+h) &= e^{-\frac{h}{T}}\omega(kh) + K(1-e^{-\frac{h}{T}})u(kh) + F^+(1-e^{-\frac{h}{T}})x^+ + F^-(1-e^{-\frac{h}{T}})x^- = \\ &= \begin{bmatrix} \omega(kh) & u(kh) & x^+(kh) & x^-(kh) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Regressionsmodellerna för de olika metoderna skiljer sig alltså bara åt i hur de verkliga parametrarna i  $\theta$ -vektorn räknas ut.

## 4 Identifiering och validering

I detta avsnitt kommer vi att redogöra för de misstag vi gjorde i samband med identifieringen och hur dessa visade vägen till vårt val av insignal för att få en lyckad identifiering. För att underlätta hanteringen av mätdata, skrev vi ett program i Matlab som utför uppdelningen av data i en identifieringsbit och en valideringsbit, samt skapar våra vektorer med dummy-signaler. Programmet, som både gör skattningen och valideringen av modellen och presenterar resultatet, finns listat i appendix A. För val av modellbeteckningar och gradtal hänvisar vi till [2].

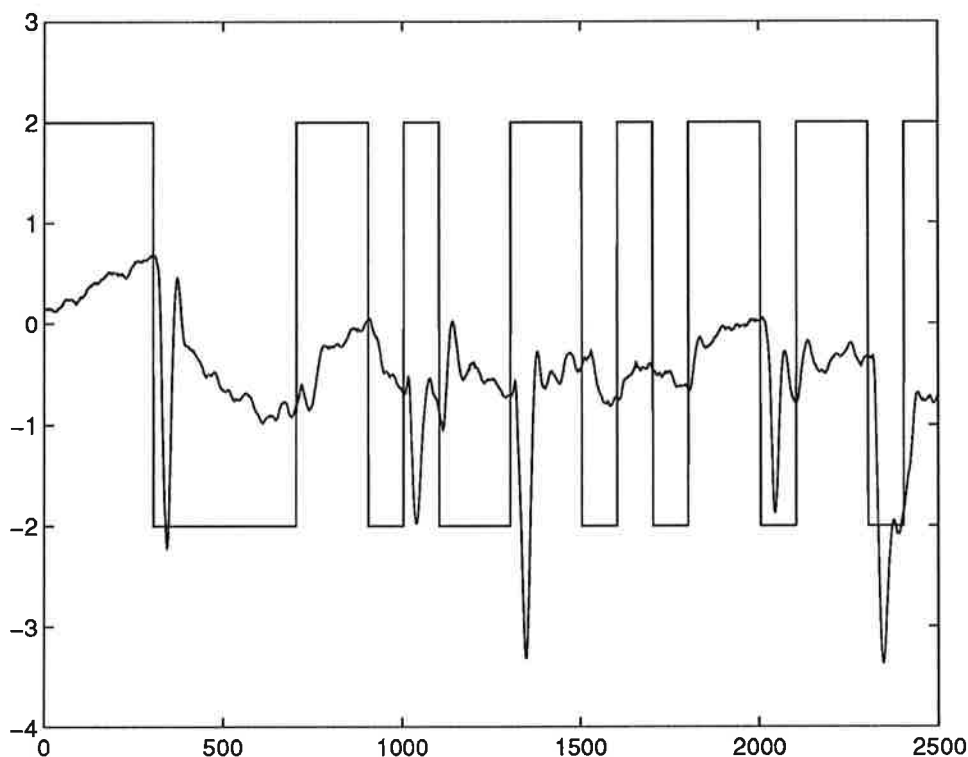
### 4.1 Den tidskontinuerliga modellen

Vi valde att börja med att använda den tidskontinuerliga modellen, det vill säga vår modell med derivatan approximerad med ett framåtskift och med minsta möjliga sampelintervall. Försöket visade sig inte ge bra värden, framför allt på grund av att försökstiden blev alltför kort, cirka 2.5 sekunder. Detta på grund av att PC-Matlabs maximala längd på datavektorn är 2600 element. Motorns tidskonstant visade sig senare vara cirka 10 sekunder, och det innebar att vi aldrig kunde skatta  $T$  och den stationära förstärkningen  $K$  med denna metod. Under dessa försök fick vi även en indikation på att det fanns glapp i systemet, vilket stör identifieringen. Ett typiskt utseende från en sådan mätning visas i figur 4. På grund av glappet var vi tvungna att byta försöksupställning.

### 4.2 Den tidsdiskreta modellen

För den tidsdiskreta modellen uppstod andra svårigheter. Vi blev tvungna att välja PRBS-signalens amplitud mycket omsorgsfullt, eftersom den dels skulle övervinna friktionen och dels inte mätta signalerna. Slutligen fann vi att den lämpligaste amplituden på PRBS-signalen var 1.0 V och med medelvärde 0 V. Vi valde en PRBS-periodtid på 4 sekunder, för att motorn nästan skulle nå sitt

<sup>1</sup>Se [1] för detaljer.



Figur 4: Glappet i servot ger upphov till studsar och detta syns som spikar i figuren.

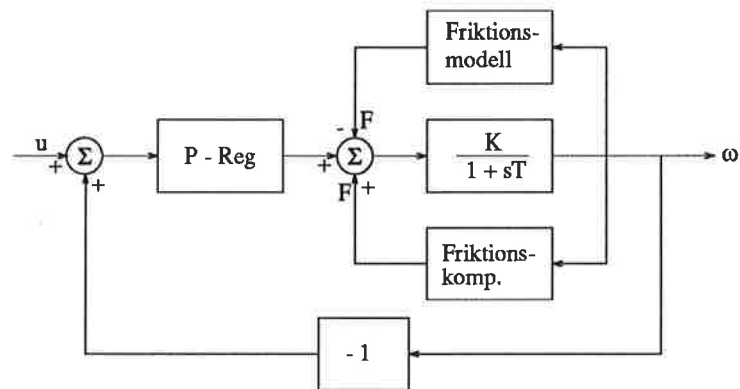
stationära läge, vilket möjliggör en bra skattning av  $T$  och  $K$ . Samplingstiden valdes till 200 ms och det medförde att en PRBS-period bestod av 20 sampel. I och med att antalet sampelpunkter valdes till 2500 blev försökstiden tämligen lång, 8 minuter och 20 sekunder. Servots skattade parametrar blev :

$$\begin{cases} T & = 10.2 \text{ s} \\ K & = 16.8 \\ F^+ & = 0.48 \text{ V} \\ F^- & = -0.46 \text{ V} \end{cases}$$

Observera att  $F^+$  och  $F^-$  är friktionskraften representerad som en spänning. Resultatet av valideringen av modellen med dessa parametrar visas i figur 7.

## 5 Friktionskompensering

För att kunna utvärdera vår friktionsmodell skrev vi ett Simnon-program, för systemet visat i figur 5. Programmet finns listat i appendix B. Med detta program kunde vi undersöka hur vår friktionskompensering förbättrade uppförandet hos det slutna systemet. Vi kunde också jämföra vår modell med den inbyggda friktions kompenseringen i testriggen och hur systemet uppförde sig



Figur 5: Friktionskompensering

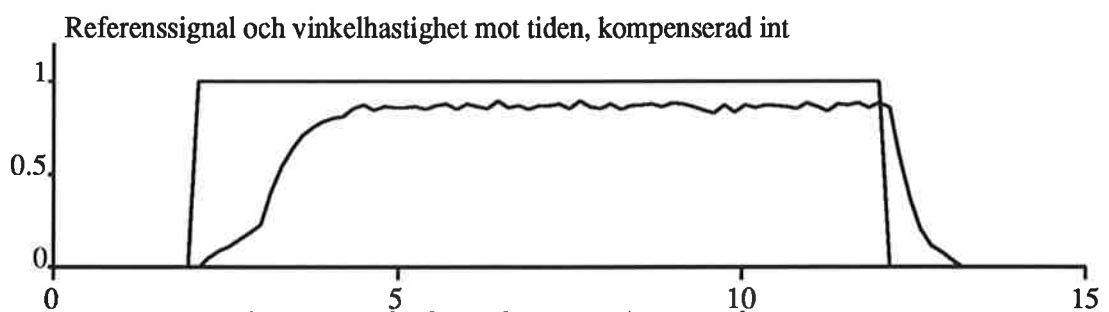
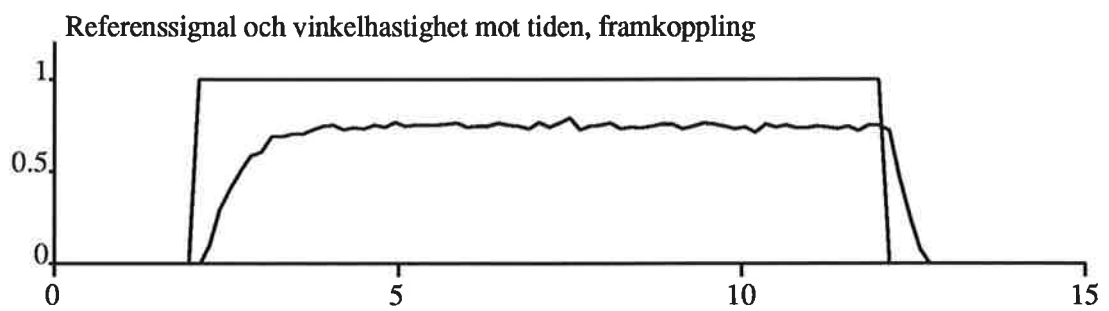
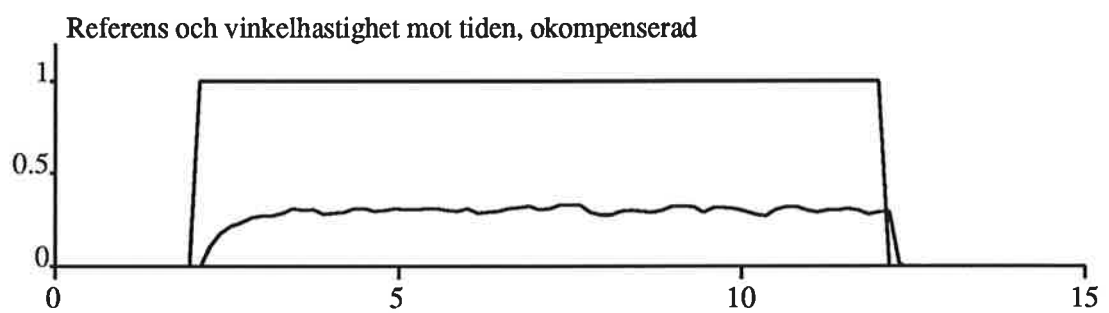
utan kompensering. Resultatet av en sådan jämförelse visas i figur 6. Man ser att vår friktionskompensering ger ett klart bättre resultat än att inte använda någon kompensering alls. Den inbyggda friktions kompenseringen ger det bästa resultatet, vilket är konstigt då det var sagt att den var baserad på samma modell som den vi använde. Vid närmare granskning kunde vi konstatera att den spänning som den interna kompensatorn lade ut var lika stor som vår var stationärt men den innehöll lite dynamik i början av steget. Detta syns också i figuren där man ser en liten knyck vid positiv flank. Vi tror att detta kan bero på kapacitans i systemet.

## 6 Slutsatser

Några av de största problemen med identifieringen av friktionsmodellen var dels att välja en insignal, som gav bra mätdata, och dels att veta när identifieringen resulterade i bra parametervärden. Man kan fråga sig om det är meningsfullt med friktionskompensering och reglering med en P-regulator, när man lika väl kan använda en PI-regulator, som helt eliminerar stationära fel, åtminstone vid stegformiga insignaler. På det hela taget har projektet varit lärorikt och vi har visat att det går att identifiera servomotorn med friktion med hjälp av en enda mätning.

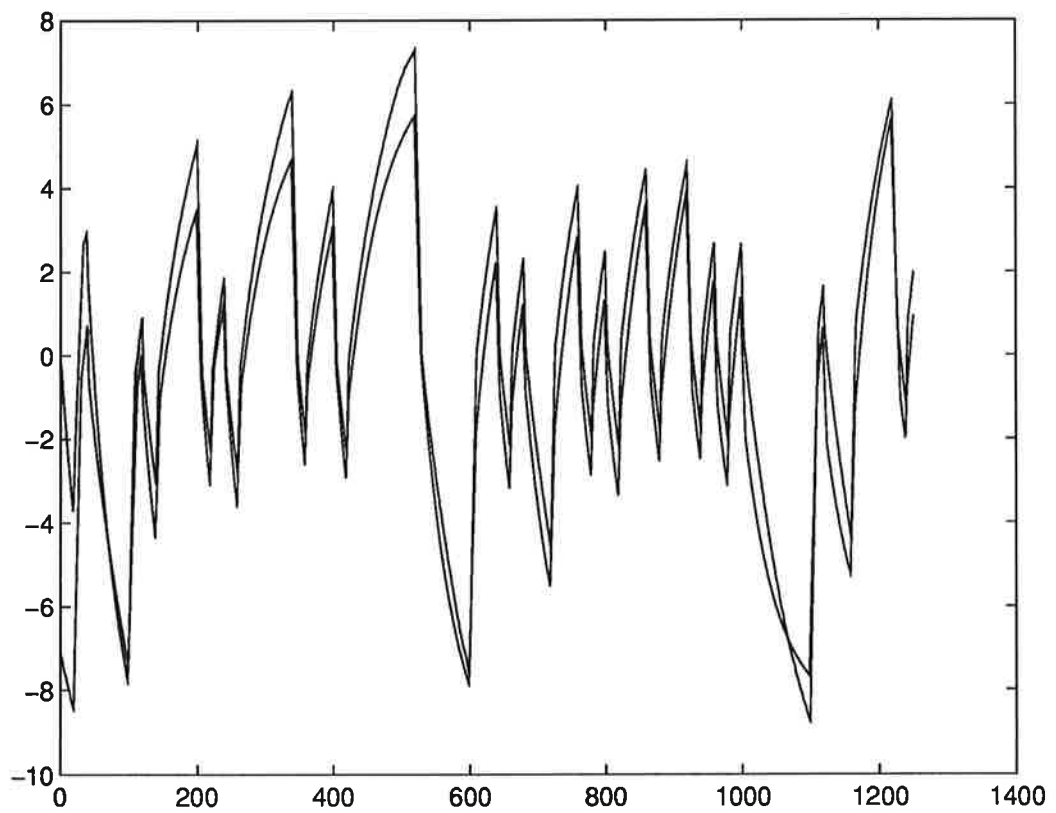
## Referenser

- [1] Karl J. Åström, Björn Wittenmark. *Computer Controlled Systems*. Prentice-Hall, 1990.
- [2] Rolf Johansson. *System modeling & Identification*. Prentice-Hall, 1993.



Figur 6: Jämförelse av kompenseringsmetoder.





Figur 7: Validering av modell med friktion.

## A Matlab-program

```
%DoIT för coulomb-friktionsmodell
format compact
h = 0.2;
load data.mat -ascii
plot(1:1:length(data(:,2)),data(:,2),1:1:length(data(:,3)),data(:,3));
pause;
z = [data(:,2) data(:,3)]; % z = [y u]
clear data
Nmax = input('Ange totala dataaengden ');
N = input('Ange delningspunkt ');
zit = [z(1:N,1) z(1:N,2)];
zvt = [z(N+1:Nmax,1) z(N+1:Nmax,2)];
clear z
zit = detrend(zit);
zvt = detrend(zvt);
zi = [zit -ceil(0.5*sign(zit(:,1))) floor(0.5*sign(zit(:,1)))];
clear zit
zv = [zvt -ceil(0.5*sign(zvt(:,1))) floor(0.5*sign(zvt(:,1)))];
clear zvt
%obs tecken för Fplus och Fminus
TH = arx(zi,[1 [1 1 1] [0 0 0]]);
present(TH)
input('THzi - Tryck RETURN','ch')
[PAR,P,LAM] = th2par(TH)
input('PARzi - Tryck RETURN','ch')
input('Parametrar - Tryck RETURN','ch')
T = -h/log(-PAR(1));
K = PAR(2)/(1+PAR(1));
Fplus = PAR(3)/(K*(1+PAR(1)));
Fminus = PAR(4)/(K*(1+PAR(1)));
input('Validering - Tryck RETURN','ch')
ym = idsim([zv(:,2) zv(:,3) zv(:,4)],TH);
t = [1:1:length(zv(:,1))];
plot(t,zv(:,1),t,ym);
```

## B Simnon-program

```
MACRO srmac2
HCOPY ON
SYST sreg sref sfcomp srcon
STORE y[sref] in
SPLIT 3 1
AREA 1 1
AXES v 0 1.2 h 0 15
TEXT 'Referens och vinkelhastighet mot tiden, okompenserad'
PAR fc[sfcomp]:0
PLOT y[sref] in
SIMU 0 15
AREA 2 1
AXES v 0 1.2 h 0 15
TEXT 'Referenssignal och vinkelhastighet mot tiden, framkoppling'
PAR fc[sfcomp]:1
PLOT y[sref] in
SIMU 0 15
AREA 3 1
AXES v 0 1.2 h 0 15
TEXT 'Referenssignal och vinkelhastighet mot tiden, kompenserad internt'
PAR fc[sfcomp]:0
PLOT y[sref] in
SIMU 0 15
END

CONTINUOUS SYSTEM sreg
"proportional controller
TIME t
INPUT u
OUTPUT y
y = K*u
K:1
END

CONTINUOUS SYSTEM sfcomp
"Coulomb frictioncompensation !with! deadband
TIME t
INPUT u "ie angle velocity
OUTPUT y "frictioncompensationfactor
y1 = IF u > zone THEN Fplus ELSE 0
y2 = IF u < -zone THEN Fminus ELSE y1
y = IF fc < 0.5 THEN 0 ELSE y2
Fplus:0.4845
Fminus:-0.4640
zone:0.02
fc:1          "1 = fcomp on, 0 = fcomp off
END
```

```
CONTINUOUS SYSTEM sref
TIME t
OUTPUT y
ty = IF t < refbeg THEN 0 ELSE stepsize
y = IF t > refend THEN 0 ELSE ty
refbeg:2
refend:12
stepsize:1
END
```

```
CONNECTING SYSTEM srcon
TIME t
in = Ki*ADIN(1,t)+offseti
u[sreg]=y[sref] - in
u[sfcomp]=in
out = y[sreg] + y[sfcomp]
z = DAOUT(0,(Ko*out+offseto))
Ko:0.1
offseto:0
Ki:10
offseti:0
END
```

# Fläkten och Plåten

## Projekt i kursen Processidentifiering

Ola Slätteke, E92  
Hans Karlsson, E92

Institutionen för Reglerteknik  
Handledare: Karl Henrik Johansson

8 april 1995

### **Sammanfattning**

Denna rapport behandlar identifiering och LQG-reglering av en process. Processen består av en fläkt som styr positionen hos en plåt som är upphängd så att den kan pendla runt sin övre kant. LQG-regleringen jämföres sedan med en regulator baserad på polplacering. Resultatet blev att processen reglerades lika bra med de båda metoderna.

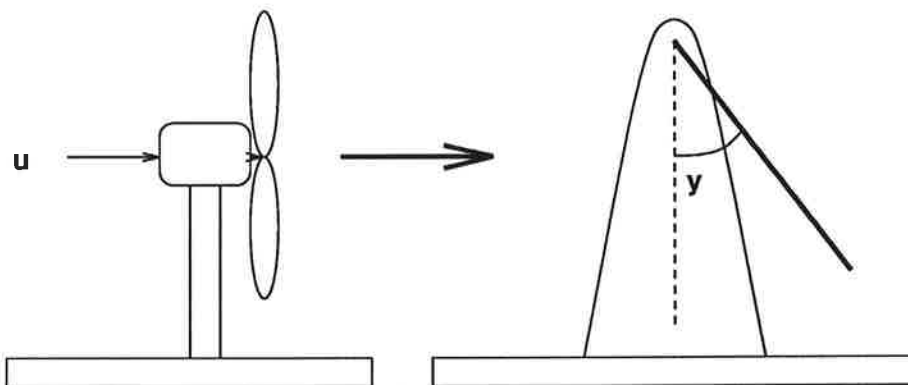
## Innehåll

<b>1 Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2 Processidentifiering</b>	<b>1</b>
2.1 Enkla experiment . . . . .	1
2.2 Slutligt experiment . . . . .	2
2.3 Validering . . . . .	3
<b>3 Regulatordesign</b>	<b>4</b>
3.1 LQG-Design . . . . .	4
3.1.1 Teori . . . . .	4
3.1.2 Fläkt och plåt processen . . . . .	5
3.2 Polplaceringsdesign . . . . .	7
3.2.1 Teori . . . . .	7
3.2.2 Fläkt och plåt processen . . . . .	8
3.3 Jämförelse mellan systemens poler . . . . .	9
<b>4 Resultat och slutsatser</b>	<b>11</b>

## 1 Inledning

Som avslutning till kursen Processidentifiering ingår det att man skall göra ett projekt. Vi valde att arbeta på en process som består av en fläkt som blåser på en plåtskiva. Syftet är att identifiera och reglera systemet med en LQG-regulator samt jämföra den med en regulator baserad på polplacering. Identifieringen utfördes med hjälp av datorprogrammet *logger*, beräkningarna och simuleringen i MATLAB och implementeringen i *toolbox*. Denna rapport behandlar projektets utförande och resultat.

## 2 Processidentifiering



Figur 1: Fläkten och plåten

Processen består av en rektangulär plåt som är upphängd så att den kan pendla runt sin övre kant, se figur 1. En vikt är monterad på ena sidan av plåten för att få den att avvika från vertikallplanet. Plåtens position kan påverkas med hjälp av luftströmmen från en fläkt vars motorspänning utgör processens styrsignal. Utsignalen är en spänning som är proportionell mot plåtens avvikelse från vertikallplanet.

Syftet är att identifiera en modell som kan användas till LQG-reglering av plåtens position.

### 2.1 Enkla experiment

En visuell undersökning visade att processen hade följande egenskaper:

- Plåten uppför sig som en svagt dämpad pendel med egenfrekvensen  $\omega \approx 2\pi$ .
- Det finns en tidskonstant,  $\tau$ , i motorn. Vid en stegändring av motorspänningen från 1 till 2 Volt, tog det cirka 1 sekund för fläkten att uppnå full

hastighet. Uppskattningen gav  $\tau = 1$  sekund.

- Tiden det tog för luftströmmen att nå fram till plåten uppskattades som liten. Tidsfördröjningen antogs därför försumbar. Vidare uppvisade systemet minfaskaraktär, eftersom plåten endast rörde sig framåt vid ett steg i styrspänningen.
- Luftströmmen orsakar turbulens vilket utgör en störning för processen.

De enkla experimenten visade att processen har en dominerande tidskonstant,  $\tau \approx 1$  sekund och egenfrekvensen  $\omega \approx 2\pi$ . En motor och en dämpad svängning kan beskrivas med följande överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{k}{J + s\tau} \cdot \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$$

Den uppskattade överföringsfunktionen är av tredje ordningen och kan användas som en rimlighetskontroll av den slutliga identifieringen.

## 2.2 Slutligt experiment

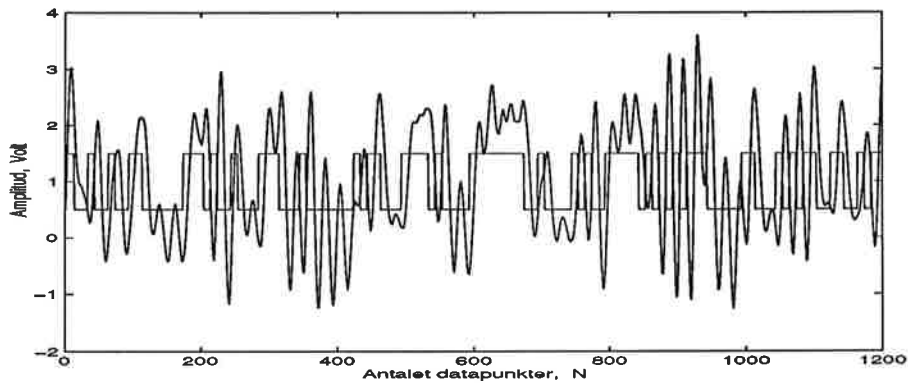
För att erhålla en god identifiering krävs det att den exciterande signalen har stor energi i närheten av de frekvenser där det är extra viktigt att modellen är korrekt. En signal som har stor energi över ett stort frekvensområde är en *Pseudo Random Binary Sequence*, PRBS. I detta fallet är frekvensområdet kring processens egenfrekvens,  $\omega \approx 2\pi$ , speciellt intressant. Vi använde oss av programmet *logger* och där defineras en PRBS signal av parametrarna:

- Samplingsintervallet,  $h$ .
- Minsta antalet samplingsintervall mellan uppdateringar av PRBS signalen, *period*.
- Antalet insamlade datapunkter,  $N$ .
- Medelvärde och amplitud av den exciterande signalen.

Samplingsfrekvensen skall ej väljas för hög eftersom poler och nollställen då hamnar nära punkten 1 i z-planet. Enligt tumregeln är  $\omega h \approx 0,2 - 0,6$ . Med  $\omega = 2\pi$  valde vi  $h=50$  ms och för att undvika vikning valdes *period* = 10. Antalet datapunkter skall vara tillräckligt många för att ge separata data till identifiering och validering. Experimentet kördes i en minut vilket motsvarar  $N=1200$ . Figur 2 visar identifieringsförloppet. Med hjälp av MATLAB tog vi fram en parametrisk modell av processen. Vi valde en ARMAX-modell med följande struktur:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k)$$





Figur 2: Processens utsignal och den exciterande PRBS-signalen.

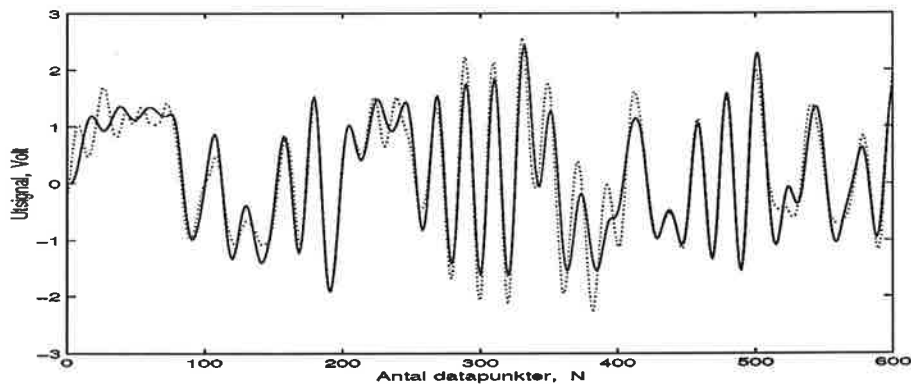
Modellens identifierade polynom:

$$A(q) = q^3 - 2,7920q^2 + 2,6755q - 0,8770 \quad B(q) = 0,0152q$$

$$C(q) = q^3 - 0,9221q^2$$

### 2.3 Validering

Vid identifieringen utnyttjade vi hälften av datapunkterna. Resterande datapunkter utnyttjades till att verifiera modellen. Figur 3 visar en jämförelse mellan modellens och den verkliga processens utsignal. De bägge signalerna stämmer bra överens och vi bestämde oss för att designa en regulator till den erhållna modellen.



Figur 3: Validering av modellen. Modellens utsignal (heldragen) och den verkliga utsignalen.

## 3 Regulatordesign

### 3.1 LQG-Design

#### 3.1.1 Teori

När vi konstruerar vår LQG-regulator utnyttjar vi ett antal specialfunktioner i MATLAB. Dessa behandlar dock endast system på tillståndsform och för att då kunna utnyttja dem måste vi gå från vår ARMAX-modell

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k)$$

till tillståndsform. Vårt system blir då på formen

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + Ke(k) \\ y(k) = Cx(k) + e(k) \end{cases}$$

där

$$\Phi = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_n - a_n \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Ett krav här är att  $\text{grad } C(q) = \text{grad } A(q)$  som kan fås genom att applicera spektralfaktorisering. Vektorn  $K$  är det optimala Kalmanfiltret, som vi kommer att utnyttja i vår regulator. Kriteriet för LQG-reglering är att beräkna återkopplingsvektorn  $L$  så att den minimerar förlustfunktionen

$$J = E \left\{ \sum [x^T Q_1 x + 2x^T Q_{12} u + u^T Q_2 u] \right\}$$

Detta görs genom att lösa den tidsdiskreta Riccati ekvationen

$$S(k) = [\Phi - \Gamma L(k)]^T S(k+1) [\Phi - \Gamma L(k)] + Q_1 + L^T(k) Q_2 L(k)$$

I vårt fall är vi intresserade av att få förlustfunktionen på formen

$$J = E \left\{ \sum [y^2 + \rho u^2] \right\}$$

och låter därför  $Q_1 = C^T C$ ,  $Q_2 = \rho$  och  $Q_{12} = 0$ . Genom att variera  $\rho$  kan vi sedan *straffa* styrsignalen olika mycket och därmed förhindra att den får stora transienta förlopp, vilket kan skada vår motor. Den totala LQG-regulatorn blir sedan med  $K$  och  $L$  vektorerna

$$u(k) = -L\hat{x}(k | k-1)$$

$$\hat{x}(k+1 | k) = \Phi\hat{x}(k | k-1) + \Gamma u(k) + K[y(k) - C\hat{x}(k | k-1)]$$

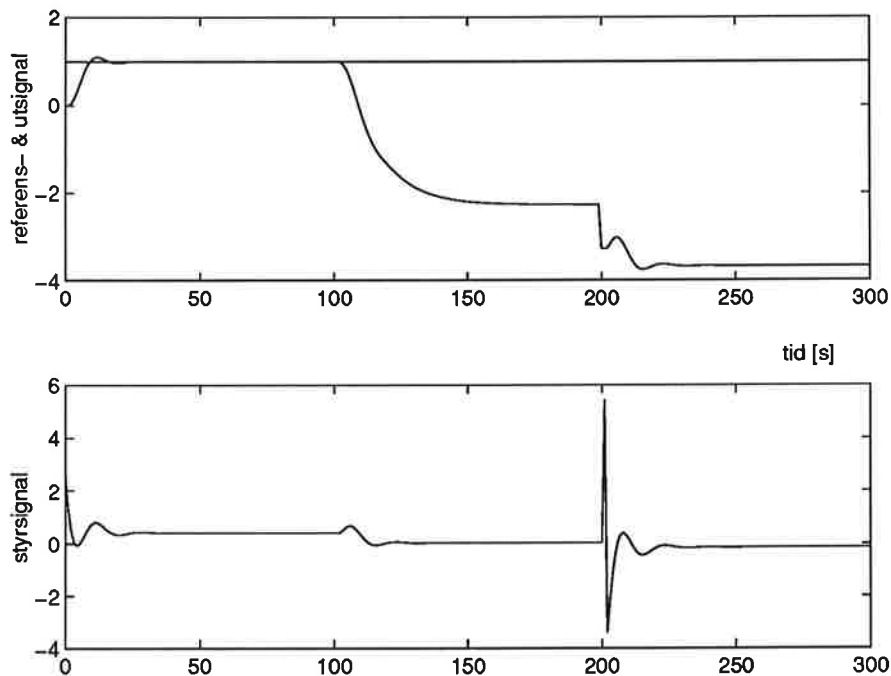
### 3.1.2 Fläkt och plåt processen

Efter att vi från ARMAX-modellen fått  $A(q)$ ,  $B(q)$  och  $C(q)$  översätter vi dessa till tillståndsform enligt resenomang på föregående sida.

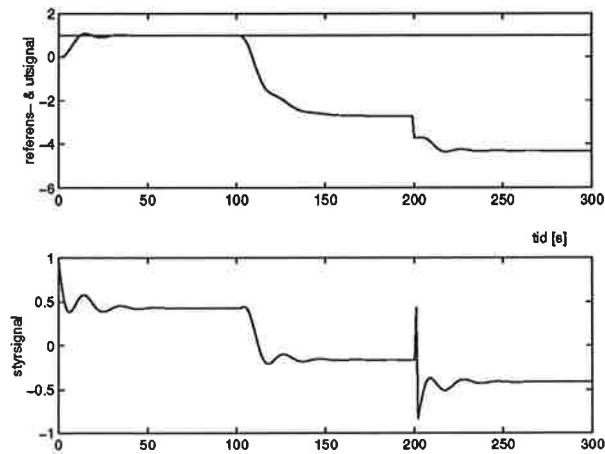
$$\Phi = \begin{bmatrix} 2.792 & 1 & 0 \\ -2.676 & 0 & 1 \\ 0.877 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.015 \\ 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 1.870 \\ -2.676 \\ 0.877 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösningen till Riccati ekvationen ger återkopplingsmatrisen  $L$ . Denna är bl a beroende av  $Q_2 = \rho$  som alltså är en designparameter, se figur 4 och figur 5. Dessa visar simuleringar för  $\rho = 0.1$  och  $\rho = 1$ . Vid tiden 100 s kommer en laststörning på mätsignalen och vid tiden 200 s en laststörning på styrsignalen. Notera hur relativt bra regulatorn klarar att följa steget vid tiden 0 men laststörningarna orkar den inte kompensera. Detta tyder på att vi behöver införa en integralverkan. I figurerna ser man också hur *straffet* påverkar styrsignalen då den är klart mer begränsad i figur 5.



Figur 4: Simulering utan integraldel och  $\rho = 0.1$

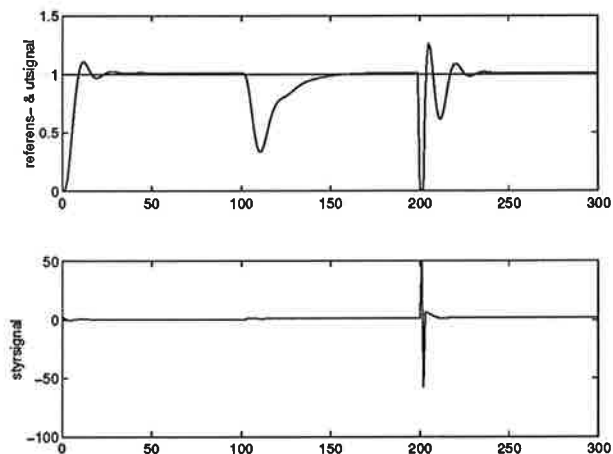


Figur 5: Simulering utan integraldel och  $\rho = 1$

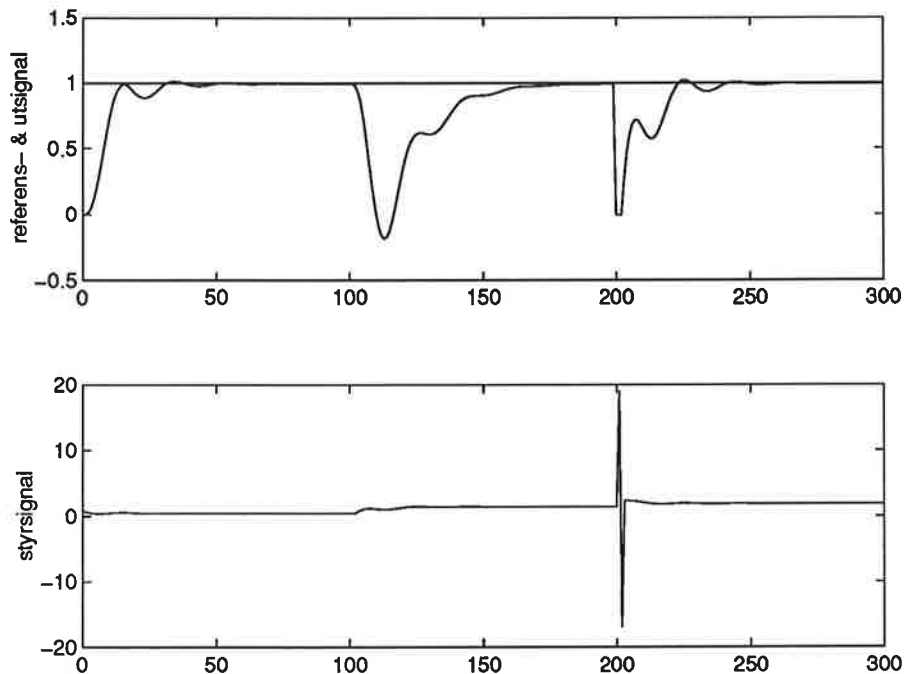
Det vi vill i det här läget är alltså att få in en integralverkan i vårt system. Detta gör vi genom att *tvinga* in en faktor  $(q - 1)$  (d v s integrator) i vår ARMAX-modell.

$$(q - 1)A(q)y(k) = (q - 1)B(q)u(k) + C(q)e$$

Lösningen till detta nya LQG-problemet ger en regulator med integraldel. Se simuleringar i figur 6 och 7. Nu elimineras båda laststörningarna, dock med väldigt stora styrsignaler vid den andra störningen där systemet också blir lite väl *slängigt*.



Figur 6: Simulering med integraldel och  $\rho = 0.1$



Figur 7: Simulering med integraldel och  $\rho = 1$

## 3.2 Polplaceringsdesign

### 3.2.1 Teori

Vid beräkning av en regulator utifrån polplacering specificerar man det önskade karakteristiska polynomet  $A_m$  och observerarpolynomet  $A_o$ . För att erhålla en kausal regulator gäller att

$$\text{grad } A_o \geq 2\text{grad } A - \text{grad } A_m - \text{grad } B^+ + l - 1$$

där  $B^+$  är den stabila delen av  $B$  och  $l$  antalet integratorer vi vill lägga in. För enkelhetens skull väljer vi att inte förkorta några nollställen d v s  $B^+ = 1$  och  $B^- = B$ . Vidare låter vi  $\text{grad } A_m = \text{grad } A \equiv n$  och  $l = 1$ . Då gäller

$$\text{grad } A_o \geq n$$

Slutligen bestäms regulatorn ur *Diophantine-Aryabhata-Bezout* ekvationen

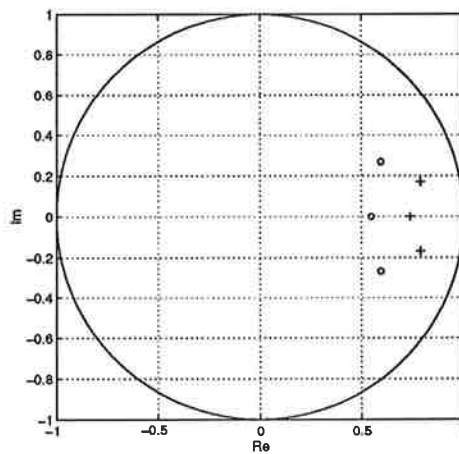
$$(q - 1)AR_1 + B^-S = A_m A_o$$

och

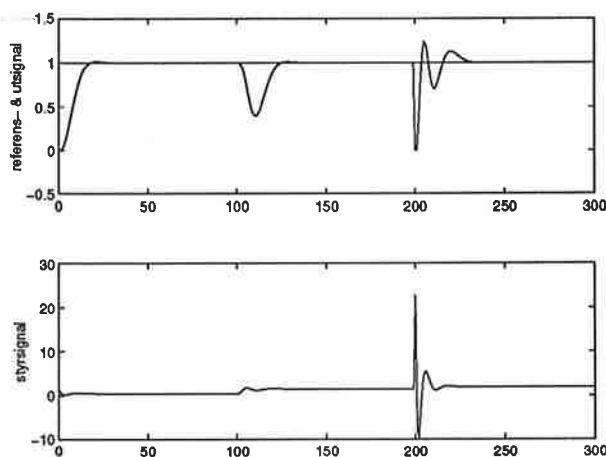
$$\begin{aligned} R &= R_1 B^+ \\ T &= t_0 A_o B'_m \end{aligned}$$

### 3.2.2 Fläkt och plåt processen

När vi väljer polynomen  $A_o$  och  $A_m$  så gör vi det i kontinuerlig tid och går sedan över till diskret genom  $z = e^{sh}$ . Detta för att det är lättare att relatera polernas placering med det återkopplade systemets uppförande i s-planet. Både  $A_m$  och  $A_o$  är av tredje ordningen och placeras ut på ett cirkelsegment med lika avstånd i vänster halvplan. Observerarpolerna lägger vi på det dubbla avståndet jämfört med det karakteristiska polynomet. I vårt fall valde vi avståndet  $\omega_m = 6$  och  $\omega_o = 12$  för  $A_m$  respektive  $A_o$ . Se figur 8 för motsvarighet i z-planet. Vid design av regulatorn använder vi en ARMAX-modell där polynomet  $C(q) = 0$  eftersom vi inte utnyttjar informationen om bruset.



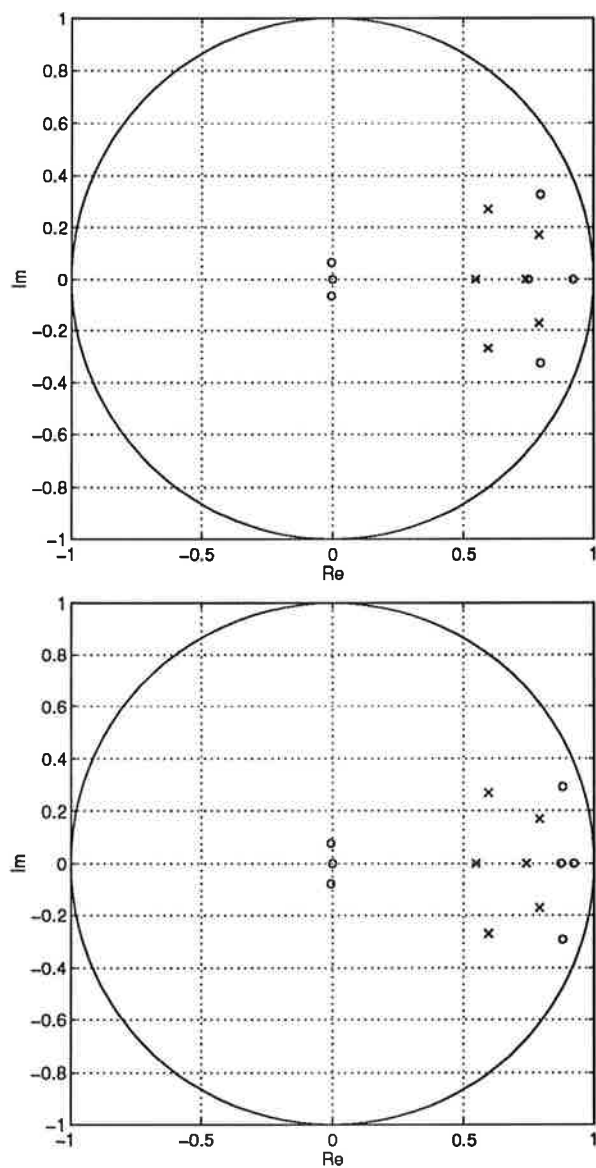
Figur 8:  $A_m$  (+) och  $A_o$  (o) i z-planet.



Figur 9: Simulering av regulatorn

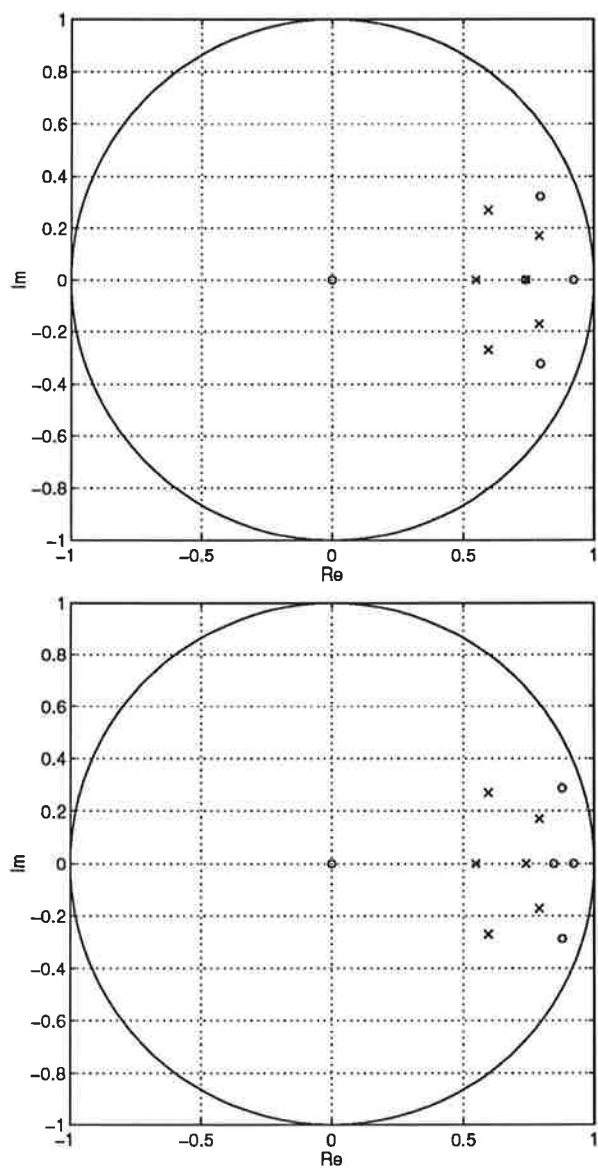
### 3.3 Jämförelse mellan systemens poler

I den här delen har vi jämfört polernas lägen hos de återkopplade systemen mellan LQG-regulatorerna (motsvarar o i graferna) och regulatorn utifrån polplacering i figur 8 (motsvarar  $\times$  i graferna). Den översta grafen i figur 10 är en LQG med integrator och  $\rho = 0.1$ . I den undre är  $\rho$  istället 1. I figuren på nästa sida visas polerna hos LQG-regulatorn utan integrator.



Figur 10: LQG med integrator. Överst:  $\rho = 0.1$  Underst:  $\rho = 1$ .

Det kan var svårt att direkt göra någon kvalitativ bedömning av bilderna. Dock kan man konstatera att poler ligger i den högra delen av enhetscirkeln. Lätt att observera är också att LQG-regulatorn med integratordel har två nästan rent imaginära poler extra jämfört med den utan, annars ser de lika ut. Om  $\rho$  ökas så kryper en av de två reella polerna mot punkten 1, de andra förflyttar sig också i samma riktning dock väldigt marginellt.



Figur 11: LQG utan integrator. Överst:  $\rho = 0.1$  Underst:  $\rho = 1$ .



## 4 Resultat och slutsatser

Vid simulering och prövning på den verkliga processen visade det sig att det inte var någon märkbar skillnad mellan LQG-regulatorn och regulatorn baserad på polplacering. Dock kan det vara av intresse att se skillnaden mellan polernas placering hos de olika systemen. Ett förslag på framtida projekt är att noggrannare studera och utvärdera brusmodellens riktighet då vi inte har lyckats vinna något på LQG-regleringen. Projektet har varit lärorikt och intressant, inte minst tack vare vår handledare Karl Henrik Johansson. Positivt var också återkopplingen till äldre kurser, i synnerhet *Digital Reglering*.

Identifiering av robotled  
Projekt i processidentifiering

Robert Almers E-90  
Jonas Kjellström E-91  
Fredrik Liljenvall E-91

Inst. f. Reglerteknik  
Handledare: Rolf Johansson

5 april 1995

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>2</b>
1.1	Syfte . . . . .	2
1.2	Översikt . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Fysikalisk modell</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Experiment</b>	<b>4</b>
3.1	Mätdata . . . . .	4
3.2	Enkel analys av mätdata . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Parametriska modeller</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Försök att använda tillståndsmetoder</b>	<b>7</b>
5.1	Markov-parameteralgoritm . . . . .	8
5.2	Van Overshees-De Moors algoritm . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Sammanfattning</b>	<b>9</b>
<b>A</b>	<b>Modellparametrar</b>	<b>11</b>

# 1 Inledning

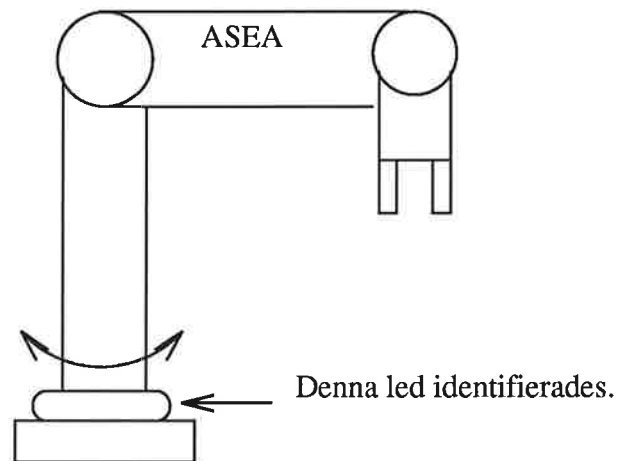
## 1.1 Syfte

Syftet med projektet är att finna en modell av en robotled som är praktiskt användbar vid reglering. Modellerna skall valideras dels genom simulering och dels med hjälp av statistiska metoder.

## 1.2 Översikt

I rapporten har vi ställt upp en enkel fysikaliskt modell över en led på en robot. Vi har funnit en Box-Jenkins-modell av leden, som kan användas i regleringssyfte. Vi har försökt använda metoder för att direkt skatta en tillståndsmo­dell av leden, men tyvärr inte lyckats fullt ut.

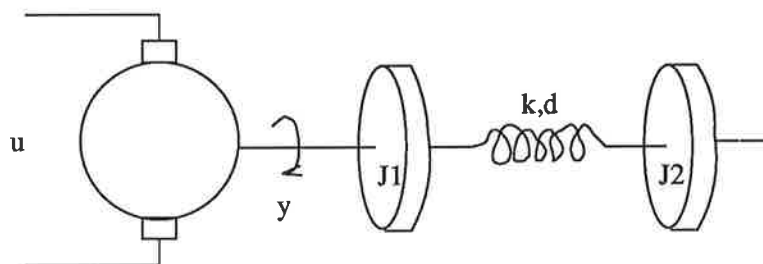
# 2 Fysikalisk modell



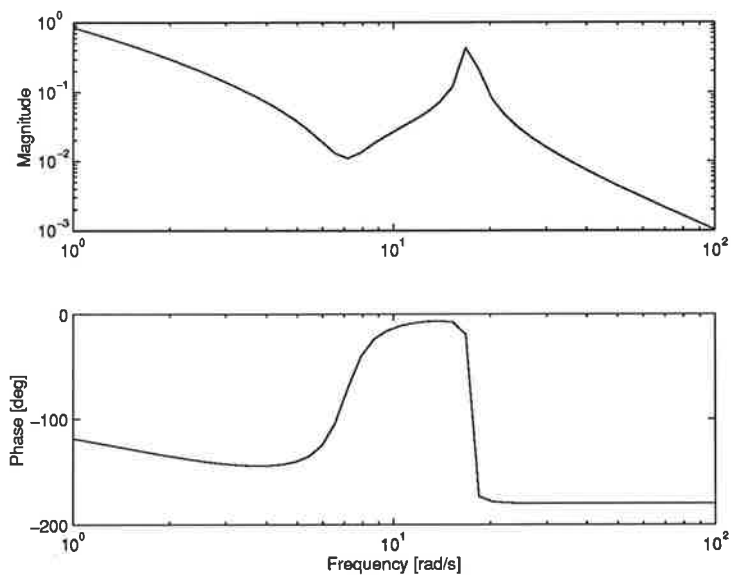
Figur 1: ASEA-robot.

Identifieringen baseras på mätningar på reglerteknikinstitutionens ASEA-robot. Den led som skall identifieras är golvleden (figur 1), som enkelt kan modelleras som ett servo i serie med två tyngder och en fjäder (figur 2).

$$G(s) = \frac{J_2 s^2 + ds + k}{s(J_1 J_2 s^3 + J_1 ds^2 + k(J_1 + J_2)s + kd)}$$



Figur 2: Fysikalisk modell av en robotled.  $J_1$  och  $J_2$  är tröghetsmoment,  $k$  är en fjäderkonstant och  $d$  är en dämpningsfaktor.  $U$  är insignalen till servot och  $y$  är den uppmätta utsignalen.



Figur 3: Typisk bodekaraktäristik för ett system enligt figur 2

Systemet har en typisk bodekaraktäristik enligt figur 3. Integratorn ger upphov till lutningen -1 vid låga frekvenser. De komplexa nollställena syns som en antiresonans strax till vänster om fjäderns resonanstopp. Den återstående polen i servot bryter någonstans i mitten av diagrammet vilket medför en lutning -2 för frekvenser nära Nyqvist-frekvensen.

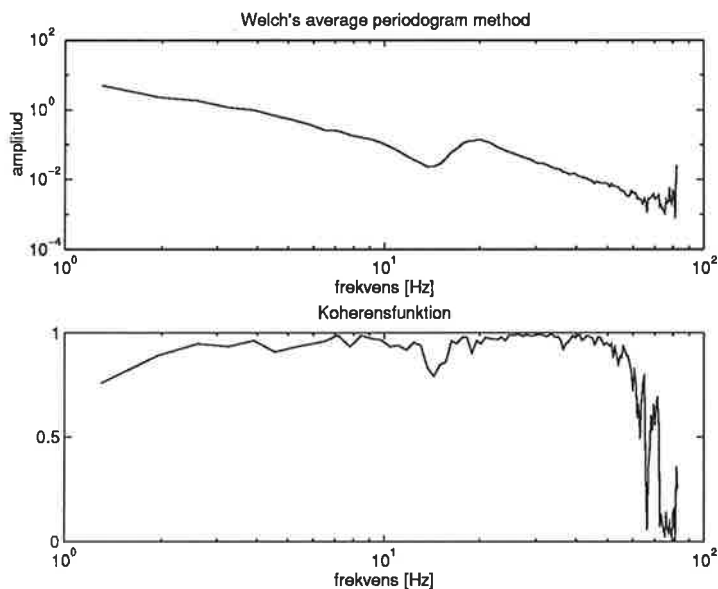
## 3 Experiment

### 3.1 Mätdata

Vår första mätserie bestod av mätningar på systemet då insignalen var en PRBS, som uppdaterades var femte sampel. Sampelperioden var 2 ms. I ett bodediagram, skattat med Welchs periodogrammetod (MATLAB: spectrum), såg vi att det fanns en hel del högfrequensdynamik som måste modelleras. En plot av koherensspektrumet visade dock att mätdata ej var tillförlitliga för frekvenser över ca 75 Hz. Detta innebar att en stor del av högfrequensdynamiken inte kunde modelleras tillfredsställande. För att komma runt detta problem försökte vi sampla ned våra mätdata med en faktor tre (MATLAB: decimate). Vi fick då en kraftig lågpasfiltrering kring brytfrekvensen  $0.8 * (Fs/2)/3 = 67\text{Hz}$  och en koherensfunktion, som låg nära ett mellan 0 och  $(Fs/2)/3 = 83\text{Hz}$ . Skattade modeller baserade på dessa data blev avsevärt bättre, men nya problem uppstod. De skattade modellerna gav en indikation om att systemet innehöll en direktterm. Detta kan anses som relativt ofysikaliskt i ett diskret system, varför vi införskaffade nya data med samplingsperioden 6 ms. Koherensfunktionen för dessa data visade att mätserien var tillförlitlig i ett större del av frekvensintervallet jämfört med tidigare (figur 4).

### 3.2 Enkel analys av mätdata

För att få en uppfattning om systemets poler, nollställen, tidsfördröjningar och stationära förstärkning skattade vi överföringsfunktionen (figur 4) med en periodogrammetod (skattningar baserade på periodogram visade sig vara bättre än skattningar baserade på kovarianser). Överensstämmelsen mellan den skattade överföringsfunktionen och den teoretiska modellen visade sig vara mycket bra. Antiresonansen tycktes ligga vid 14 Hz och resonanstoppet vid 20 Hz. Lutningen -1 vid låga frekvenser indikerade, som väntat, att systemet innehöll en integrator. På grund av detta kunde ingenting sägas om någon stationär förstärkning. Fasen tycktes inte innehålla någon linjär trend, vilket vi tolkade som att systemet inte hade några tidsfördröjningar.



Figur 4: Över: Amplitudplot av en modell, skattad med Welchs periodogrammetod. Under: Koherensfunktion för mätserien samplad med 6 ms. Notera att koherensfunktionen har en "dipp" vid antiresonansen, där signal-brusförhållandet är dåligt.

För frekvenser över 60 Hz var systemet antingen olinjärt eller så hade det ett dåligt signal-brusförhållande (enligt koherensfunktionen). Detta återspeglades i den dåliga skattningen av frekvensfunktionen vid frekvenser över 60 Hz.

## 4 Parametriska modeller

De parametriska modeller vi har utvärderat är

ARX

$$A(q)y(t) = C(q)w(t)$$

ARMAX

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - k) + C(q)w(t)$$

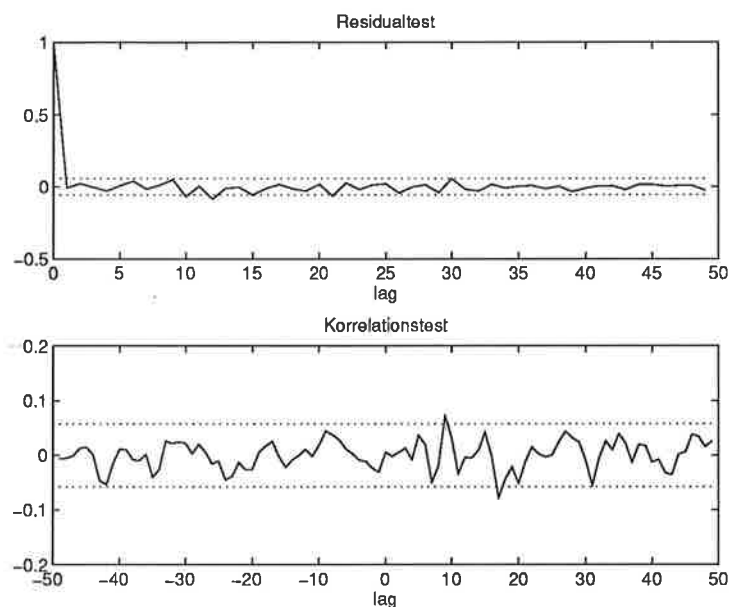
Box-Jenkins

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t - k) + \frac{C(q)}{D(q)} w(t)$$

PEM

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t - k) + \frac{C(q)}{D(q)} w(t)$$

ARX och ARMAX har gemensam dynamik för systemet och bruset vilket gör att dessa modeller lämpar sig bäst då bruset kommer in tidigt i processen och är relativt vitt. Box-Jenkins och PEM har däremot separata överföringsfunktioner för systemet och bruset och kan därför bättre beskriva brus som är färgat eller kommer in sent i processen, t ex mätbrus.



Figur 5: *Över*: Residualerna mellan modellens utsignal och den uppmätta utsignalen är korrelerad endast då lag=0, dvs residualen är nästan vitt brus, vilket är önskvärt. *Under*: Korrelationen mellan insignal och residualen ligger nästan helt innanför det 99%-iga konfidensintervallet.



Modellskattningen gjordes med hjälp av MATLAB's System Identification Toolbox. Stor vikt lades vid att finna en bra modell, med så få parametrar som möjligt, för att möjliggöra en enkel reglering av systemet. Vid modellval tittade vi först på hur "final prediction error" varierade för modeller med olika antal parametrar. På detta sätt fick vi fram en undre gräns för hur många parametrar som krävdes för att kunna skatta systemets dynamik. I nästa steg valde vi ut de intressanta modellerna och utvärderade dessa med följande tester:

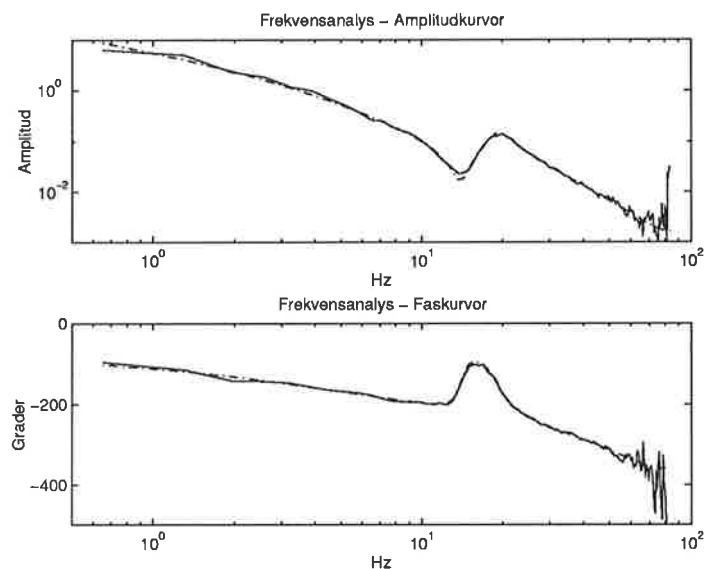
- Residualtest: Undersöker om residualerna, skillnaden mellan modellens utsignal och den uppmätta utsignalen, är okorrelerade med varandra. De uppmätta signalerna är samma signaler som används vid modellskattningen (identifieringsdata).
- Korskorrelationstest: Korrelationen mellan modellens insignal och residualen skall idealt vara noll.
- Frekvensanalys: Amplitud och faskurvor från modellen skall stämma överens med motsvarande kurvor framtagna med spektralanalys.
- Simulering: Modellens förmåga att följa nya data (valideringsdata) undersöks.
- Parametervaliditet: De skattade parametrarnas varians får ej vara stora i förhållande till respektive parametervärde.

Vi fann att varken ARX eller ARMAX-modeller beskrev vårt system på ett bra sätt. Detta torde bero på att de störningar som fanns i processen antingen kom in på ett sent stadie eller var färgade. Då vi försökte öka modellordningen i exempelvis en ARMAX-modell, för att på sätt förbättra residualerna, fick vi instabila modeller.

Box-Jenkins och PEM gav båda ett klart bättre resultat än ARX och ARMAX och vårt slutliga val blev en Box-Jenkins med  $[n_b \ n_c \ n_d \ n_f \ k] = [5 \ 4 \ 5 \ 5 \ 1]$ , där  $n_b$  svarar mot antalet parametrar i B-polynomet osv. Denna modell har goda resultat i samtliga test, se figur 5–8, samt har ett rimligt antal parametrar. Modellparametrarna och dess varianser finns angivna i appendix A.

## 5 Försök att använda tillståndsmetoder

Som komplement till de parametriska metoderna försökte vi använda två olika varianter av tillståndsmodellskattning.



Figur 6: Den streckade kurvan svarar mot den parametriska modellen och den heldragna mot modellen framtagen med spektralanalys. Ripplet som finns vid höga frekvenser beror på olinjäriteter eller dåligt signal-brusförhållande i den uppmätta signalen.

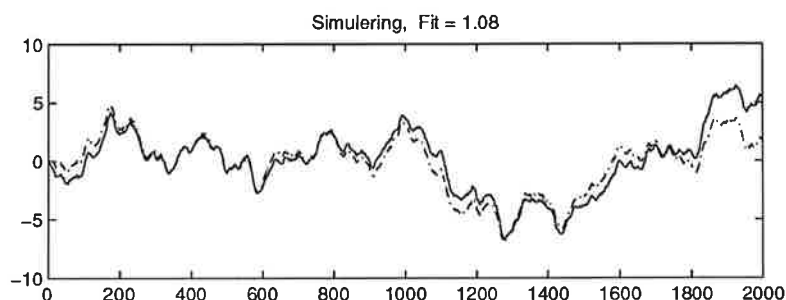
## 5.1 Markov-parameteralgoritm

Den första metod som vi försökte oss på var en Markov-parameteralgoritm [2], som kan användas som en metod för att reducera stora modeller. Förfarandet gick till på följande sätt; en överdimensionerad modell togs fram med ARMAX, Box-Jenkins, PEM eller liknande. Modellens impulssvar bestämdes genom en simulering av modellen. Detta impulssvar användes sedan för att skatta en tillståndsmodell

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

av lämplig ordning. Algoritmen gav som delresultat en singularvärdesuppdelning, ur vilken en reducerad ordning kunde bestämmas. Tidigare identifieringar av systemet visade att en modell av 6–7 ordningen kunde fånga upp det mesta av systemets dynamik. En överdimensionerad modell skulle alltså ha en ordning större än 7. Vi fick problem med ARX och ARMAX-modellerna,



Figur 7: Korsvalidering. Simulering med nya indata och validering med nya utdata ger ett bra resultat.

då dessa hade dåliga numeriska egenskaper för höga modellordningar. Box-Jenkins och PEM gav fungerande stora modeller, men gav instabila reducerade system. Detta kan antingen bero på att de stora modellerna var dåligt konditionerade eller att vår implementering av algoritmen var för enkel.

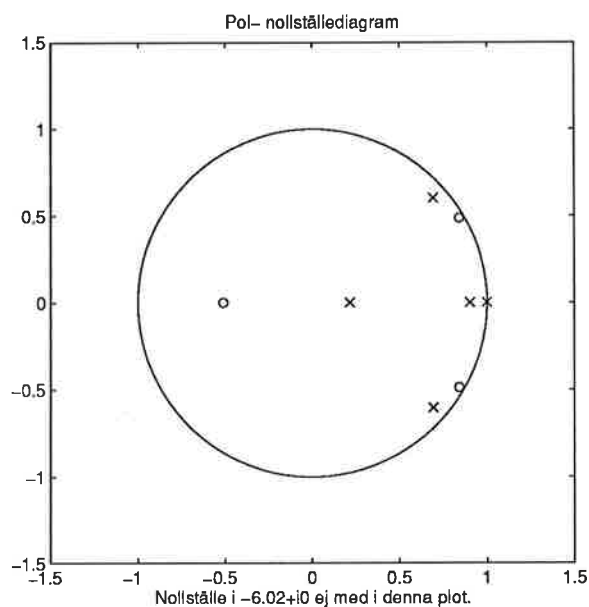
## 5.2 Van Overshees-De Moors algoritm

Den andra metoden var Van Overshees och De Moors algoritm för tillståndsmodellsfattning [3]. I denna metod krävs inte att impulsvaret är känt, utan en godtycklig sekvens data, som är tillräckligt exciterande, kan användas. Dessutom gav denna algoritmen en modell för bruset, vilket inte Markov-algoritmen kunde erbjuda. Algoritmen föreslog en tillståndsmodell av ordning fem eller sex. Dessa modellers frekvensfunktioner stämde mycket bra överens med den skattade frekvensfunktionen. Tyvärr hade algoritmen problem med att hålla integratörpolen innanför enhetscirkeln, vilket medförde att modellerna blev instabila.

## 6 Sammanfattning

Vi har identifierat en robotled med en Box-Jenkins-modell,  $[nb \ nc \ nd \ nf \ k] = [5 \ 4 \ 5 \ 5 \ 1]$ , utifrån givna mätdata. Modellen är anpassad för reglering, dvs stor vikt har lagts vid att modellen skall ha ett rimligt antal parametrar.

Projektet har inneburit en grundlig genomgång av vad processidentifiering innebär, vilka problem man kan ställas inför och vilka hjälpmedel som finns att tillgå. Vi har behandlat teoretisk modellering, analys av mätdata, icke parametrisk modellering, parametrisk modellering, tillståndsmodellering



Figur 8: Pol- nollställediagram för Box-Jenkins-modellen. Integralpolen ses vid  $z=1$ . Antiresonans och resonans svarar mot de komplexkonjugerade nollställena respektive de komplexkonjugerade polerna. Servopolen är den som ligger närmast  $z=0$ .

samt validering.

Den mesta analysen har gjorts med MATLAB som är ett alldeles utmärkt verktyg för modellidentifiering. Dock bör man använda MATLAB kritiskt och inte bara acceptera de värden som fås ur de färdiga rutinerna.

## Referenser

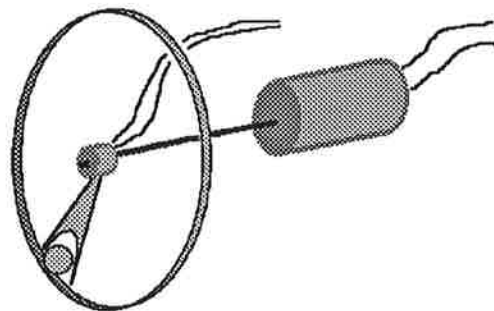
- [1] Rolf Johansson (1993). *System Modeling and Identification*.
- [2] Rolf Johansson (1995). *State-space Methods*.
- [3] Karl Henrik Johansson (1994). *Identification of a Double Fan and Plate Process Using Subspace Methods*.
- [4] Lennart Ljung, Torkel Glad (1991). *Modellbygge och simulering*.
- [5] Lennart Andersson, Ulf Jönsson (1995). *Manual for Practical System Identification*.

## A Modellparametrar

<i>B</i>	<i>Stdav</i>	<i>F</i>	<i>Stdav</i>	<i>C</i>	<i>Stdav</i>	<i>D</i>	<i>Stdav</i>
0		1		1		1	
0.0028	0.0001	-3.5078	0.0117	-0.4676	0.0228	-2.3896	0.0040
0.0134	0.0003	5.1042	0.0395	-0.6053	0.0204	1.3341	0.0058
-0.0192	0.0005	-3.8162	0.0545	0.6274	0.0204	1.2776	0.0012
0.0028	0.0006	1.3867	0.0369	-0.0639	0.0225	-1.9937	0.0051
0.0080	0.0003	-0.1668	0.0103			0.7715	0.0024

Tabell 1: Box-Jenkins-modellens skattade parametrar och standardavvikelser.

# Ball & Hoop



utförd av

**Patric Nilsson, F91**  
**Magnus Gäfvert, F90**

<b>Innehållsförteckning</b>	<b>1</b>
<i>Inledning</i>	<b>2</b>
<i>Processen som skall identifieras</i>	<b>2</b>
<i>Fysikalisk modellering</i>	<b>2</b>
<b>Identifiering</b>	<b>6</b>
<b>Förutsättningar</b>	<b>6</b>
<b>Inledande experiment</b>	<b>6</b>
<b>Frekvensanalys</b>	<b>6</b>
<i>Datinsamling</i>	<b>6</b>
<i>Analys av data</i>	<b>7</b>
<i>Slutsats</i>	<b>8</b>
<b>Tidsserieanalys</b>	<b>8</b>
<i>Almänt om analys och PRBS signal</i>	<b>8</b>
<i>Datinsamling</i>	<b>8</b>
<i>Icke parametrisk analys</i>	<b>8</b>
<b>ARMAX-modellering</b>	<b>12</b>
<b>Validering</b>	<b>13</b>
<b>Reglering</b>	<b>20</b>
<b>Design av RST-regulator</b>	<b>20</b>
<b>Realisering av reglerat system</b>	<b>22</b>
<b>Sammanfattning</b>	<b>25</b>
<b>Kommentarer</b>	<b>25</b>
<b>Referenser</b>	<b>25</b>

## Inledning

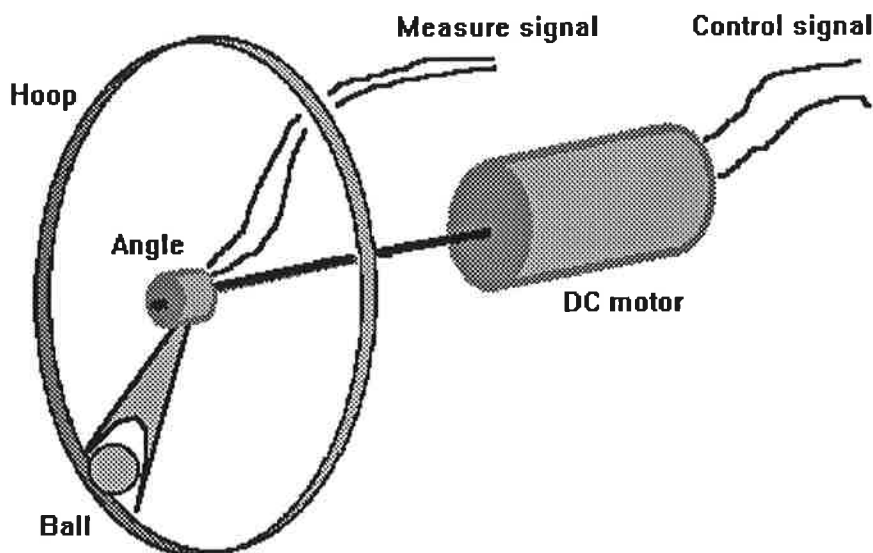
Den här rapporten är resultatet av ett projektarbete i kursen Processidentifiering, som ges av Institutionen för Reglerteknik vid Lunds Tekniska Högskola våren 1995.

Uppgiften är att modellera en given process. Dels genom att bygga en fysikalisk modell från grunden, och dels genom identifieringsexperiment där processen betraktas som ett insignal-utsignalsystem. Med hjälp av den erhållna modellen skall vi därefter konstruera en regulator som styr processen.

Vi vill tacka vår tålmodige handledare Lennart Andersson för hans hjälp. Ett litet tack också till Anders Wallén som har hjälpt oss med en del praktiska detaljer.

## Processen som skall identifieras

Processen består av en kula som rullar fritt i ett roterande cirkulärt hjul. Se Figur 1. Kulan är placerad i en klyka som är fäst i en vinkelgivare. Hjulets rotation styrs av en DC-motor. Vår uppgift är att bestämma en modell för processen från DC-motorns inspanning till kulans vinkelavvikelse från jämviktsläget (motsvarande spänning från vinkelgivaren).



Figur 1. "Ball and Hoop"-processen. (Kula och Hjul)

## Fysikalisk modellering

Som underlag för identifieringsexperimenten, och för att få större kännedom om processens beteende gör vi först en fysikalisk modellering.

En DC-motor med låg viskös dämpning och mycket låg induktans har en dynamik enligt

$$G_m(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{1/K_E}{(\tau_m \cdot s + 1) \cdot (\tau_e \cdot s + 1)}$$

$\omega$  är vinkelhastighet,  $V$  är inspanning till motorn,  $K_E$  är en konstant,  $\tau_m$  är den mekaniska tidskonstanten och  $\tau_e$  den elektriska. Om  $\tau_m > 10 \cdot \tau_e$  kan approximation göras med en första ordningens överföringsfunktion. Kulans rörelse i hjulet beskriver en lågt dämpad svängning som beror av hjulets vinkelhastighet, d.v.s. har en dynamik av andra ordningen. Totalt kan vi alltså vänta oss ett tredje ordningens system från motorns insignal till vinkelgivarens utsignal. Övrig eventuell dynamik i givare och dylikt bortses från tills vidare.

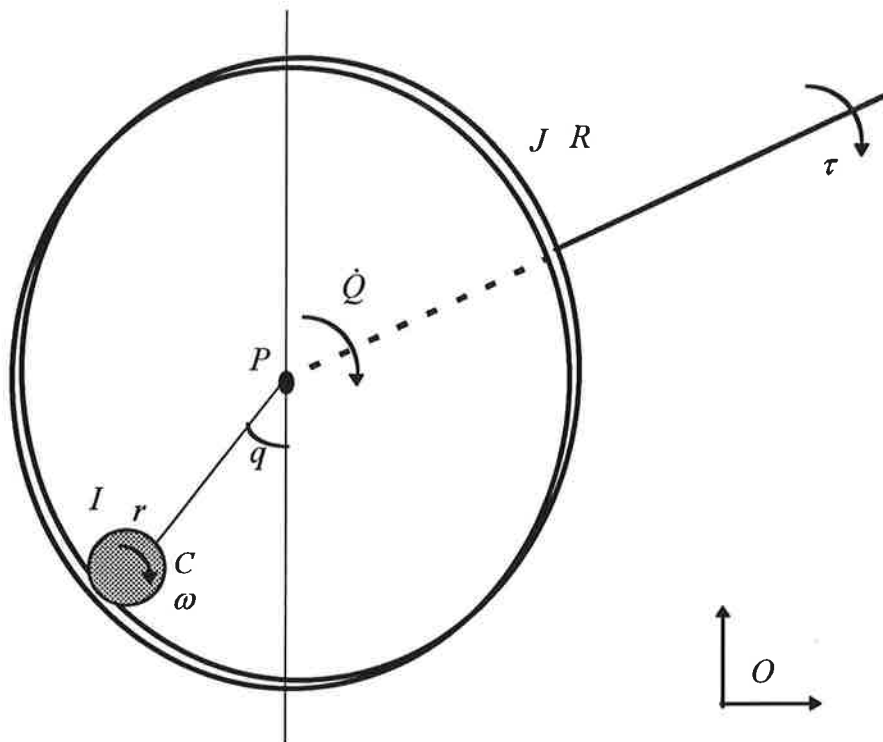
Vi vill nu ha en mer exakt systembeskrivning i form av differentialekvationer med fysikaliska parametrar som koefficienter. För att ta fram detta använder vi Lagranges ekvationer:



$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dx} \right) - \frac{dL}{dx} = \tau$$

$T$  betecknar total kinetisk energi,  $U$  potentiell energi och  $\tau$  på systemet verkande moment. Vi väljer som system kulan, hjulet och DC-motorns mekaniska delar med  $\tau$  som drivande moment. Se Figur 2.



Figur 2. "Ball & Beam"-processen med beteckningar.

Vi börjar med att bestämma ingående energiuttryck. Den potentiella energin beror endast av kulans avvikelse i höjdlängd från jämviktsläget.

$$U = m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$U = m \cdot g \cdot (R - r) \cdot (1 - \cos q)$$

All kinetisk energi i systemet är ren rotationsenergi. För att bestämma denna krävs att vi känner uttryck för relevanta vinkelhastigheter, och samband mellan dessa. Beteckna med  $\omega$  kulans vinkelhastighet relativt ett rumsfast koordinatsystem, och låt denna vara en summa av vinkelhastigheterna kring punkterna C och P.

$$\omega = \omega_C + \omega_P$$

$$\omega_C = \frac{R}{r} \cdot (\dot{Q} + \dot{q})$$

$$\omega_P = \dot{q} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{R}{r} \cdot \dot{Q} + \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \dot{q}$$

Nu kan vi ställa upp rotationsenergierna för kula respektive hjul, uttryckta i tidsderivator av hjulets vinkel  $Q$  och kulans vinkelavvikelse från jämviktsläget  $q$ .

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left( \frac{R}{r} \cdot \dot{Q} + \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \dot{q} \right)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{Q}^2, \quad (J = J_{skiva} + J_{DC})$$

Vi inför därefter generaliserade koordinater och derivator av Lagrangefunktionen med avseende på dessa enligt

$$x = \begin{bmatrix} q \\ Q \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \end{bmatrix}.$$

Lagranges ekvationer kan nu uttryckas i dessa koordinater. Vi passar också på att införa viskösa dämpningstermer för både kula och hjul.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -d \cdot \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = -D \cdot \dot{Q} + \tau \end{cases}$$

Lagrangefunktionen blir med energiuttrycken insatta

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left\{ I \cdot \left( \frac{R}{r} \cdot \dot{Q} + \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \dot{q} \right)^2 + J \cdot \dot{Q}^2 \right\} - m \cdot g \cdot (R - r) \cdot (1 - \cos q).$$

Derivatorna som krävs i Lagranges ekvationer beräknas enligt följande:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = I \cdot \left( \frac{R}{r} \cdot \dot{Q} + \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \dot{q} \right) \cdot \left(1 + \frac{R}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = I \cdot \left( \frac{R}{r} \cdot \ddot{Q} + \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \ddot{q} \right) \cdot \left(1 + \frac{R}{r}\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -m \cdot g \cdot (R - r) \cdot \sin q$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = I \cdot \left( \frac{R}{r} \cdot \dot{Q} + \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \dot{q} \right) \cdot \frac{R}{r} + J \cdot \dot{Q}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right) = I \cdot \left( \frac{R}{r} \cdot \ddot{Q} + \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \ddot{q} \right) \cdot \frac{R}{r} + J \cdot \ddot{Q}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0$$

Insättning och hyfsning ger slutligen ett olinjärt system av kopplade differentialekvationer.

$$\begin{cases} I \cdot \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2 \cdot \ddot{q} + I \cdot \frac{R}{r} \cdot \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \ddot{Q} + d \cdot \dot{q} + m \cdot g \cdot (R - r) \cdot \sin q = 0 \\ I \cdot \left(1 + \frac{R}{r}\right) \cdot \frac{R}{r} \cdot \ddot{q} + \left(I \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 + J\right) \cdot \ddot{Q} + D \cdot \dot{Q} = \tau \end{cases}$$

Man kan skriva om systemet på matrisform, varvid man i någon mening kan tolka ingående matriser som tröghetsmatris  $M$ , matris innehållande centripetal- och Corioliskrafter  $C$  och en matris med gravitationella krafter  $G$ .

$$M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + G(x) = \bar{\tau}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} g_1 \cdot \sin q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}$$

Vi vill gärna ha vårt system på tillståndsform. Vi inför därför tillstånden  $x$  och linjäriserar systemet kring jämviktspunkten  $q=0$ .

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ \dot{Q} \end{bmatrix}, \quad u \equiv \tau$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\begin{cases} A \cdot \dot{x} = B \cdot u \\ y = C \cdot x \end{cases}$$

Systemets koefficienter kan om man så önskar efter en hel del jobb uttryckas i fysikaliska parametrar. Vi nöjer oss emellertid med att konstatera att systemet är av tredje ordningen, och att det verkar rimligt att förvänta sig ett approximativt linjärt beteende för små vinklar  $q$ .

Vi återgår till att betrakta systemet av olinjära kopplade differentialekvationer ovan. Den övre ekvationen beskriver kulans rörelse som en styrd dämpad harmonisk svängning, om vi linjäriserar och betraktar vinkelaccelerationen som insignal och antar att kulans dämpning  $d$  är liten. Detta ger att kulans vinkelavvikelse  $q$ , som är storheten vi är speciellt intresserade av, väsentligen beror av hjulets vinkelacceleration. En rimlig approximation är att hjulets rörelse ej nämnvärt påverkas av kulan. Det betyder att hjulets rörelse endast beror av signalen  $\tau$ . Mer precist kan vi säga att hjulets vinkelhastighet ges ur en första ordningens differentialekvation med  $\tau$  som insignal. Dock är det ju hjulets vinkelacceleration som styr kulans vinkelavvikelse. Detta kan vi tolka som att vi har en differentiator i systemet sett från  $\tau$  till  $q$ . Det betyder att vi har en stationär förstärkning som är  $0$ .

Vidare kan vi anta att drivande moment  $\tau \propto V$ , d.v.s. vi antar att det erhållna systemet gäller från DC-motorns inspanning  $V$  till kulans vinkelavvikelse  $q$ , fast med en annan förstärkning. Vi bortser därmed från den elektriska dynamiken.

Ett egenskap som inte är modellerad ovan är det glapp som finns mellan kulan och klykan den rullar i. Denna olinjäritet förväntar vi oss kunna ställa till en del bekymmer vid identifieringen senare, när processen förutsätts vara linjär.

Modelleringen ovan är gjord i kontinuerlig tid, men i fortsättningen skall vi framför allt betrakta det samplade systemet i diskret tid.

# Identifiering

## Förutsättningar

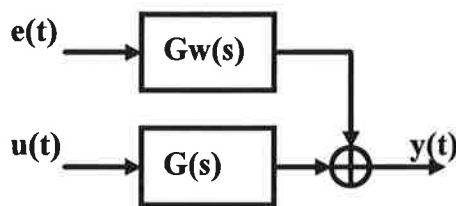
Processen kan identifieras i öppen loop eftersom den är stabil.

Stabiliteten går att inse lätt om vi betraktar kulans energi. Om vi betraktar nedre delen av hjulet, d.v.s. den del som är aktuell för kulans bana, finner vi att den enda stationära punkten är när kulan befinner sig i botten. Kulan är utsatt för dämpning som medför att dess energi minskar om någon energi tillförs via pålagt moment. Energiminskningen medför att kulan intar den position och hastighet som svarar mot lägsta energin, d.v.s. i botten av hjulet, stillaliggande. Det är detta stabila läge som vi identifierar och linjäriserar runt.

Stabiliteten medför att vi kan sända in de signaler vi önskar direkt i processen och får direkt svar som motsvarar processens dynamik, dock eventuella störningar undataget. Se figur 3.

Insignalen till processen är spänningen till motorn och utsignalen är den uppmätta vinklen för kulans avvikelse från bottenläget.

DC-motorn ej linjär i nollan, varför en konstant bias för hjulets hastighet har använts. Detta är en gängse metod vad gäller DC-motorer, och eftersom vår linjära modell gäller oberoende av hjulets hastighet, inom det aktuella området, spelar det ingen roll.



Figur 3. Blockschemabeskrivning av modellen.

## Inledande experiment

Det enklaste inledande experimentet är i vårt fall, att utan annan insignal lyfta upp kulan och släppa den för att därigenom skatta egenfrekvensen för kulan i banan. Enligt ekvationerna under fysisk modellering borde detta medföra att även hjulet och resten av systemet sätts i rörelse. Detta är dock ej fallet då dämpningen och friktionen är större, och för att beskriva hjulets rörelse kan man därför försumma kulan. En svängning tar här för kulan något mellan en halv och en sekund. Egenfrekvensen torde därför ligga mellan en och två Hertz.

Vidare ger oss en snabb körning med frekvensanalysatorn som exciterare en övre gräns för vilka frekvenser systemet hinner reagera på (glapp, motorns begränsningar, se fysikalisk modellering).

## Frekvensanalys

I korthet kan den använda metoden beskrivas som att man sänder in sinussignaler i systemet och mäter vad man får för svar. Man kan därigenom bestämma systemets förstärkning och färförskjutning för den aktuella frekvensen. Genom att upprepa experimentet för olika frekvenser inom det aktuella intervallet kan man få en skattning av systemets förstärknings- och faskurvor. Genom okulär besiktning av dessa kurvor kan man skatta systemets poler och nollställen och därigenom överföringsfunktionen. Metoden finns beskriven i kapitel 12 i [Johansson].

## Datinsamling

Vi beslutar oss att ta upp data även utanför de intressanta intervallen för att försäkra oss om att vi inte missat någon viktig dynamik. Av praktiska tidsskäl nöjer vi oss dock med ett mindre antal mätpunkter för de väldigt låga frekvenserna. En konstant bias på 2V lade vi. Amplituden på insignalen är teoretiskt

sett ointressant i en frekvensanalys eftersom det är de relativa storheterna man jagar. Verkligheten sätter dock gränser såväl uppåt som nedåt, varför vi valde att sända in olika amplituder för olika frekvenser. Nedanstående tabell sammanfattar datainsamlingen.

Frekvens [Hz]	Amplitud [V]	Antal mätpunkter
0.01-0.1	1	5
0.1-1	1	20
1-2	0.2	20
2-15	1	20

Tabell 1. Sammanfattning av datainsamling för frekvensanalys.

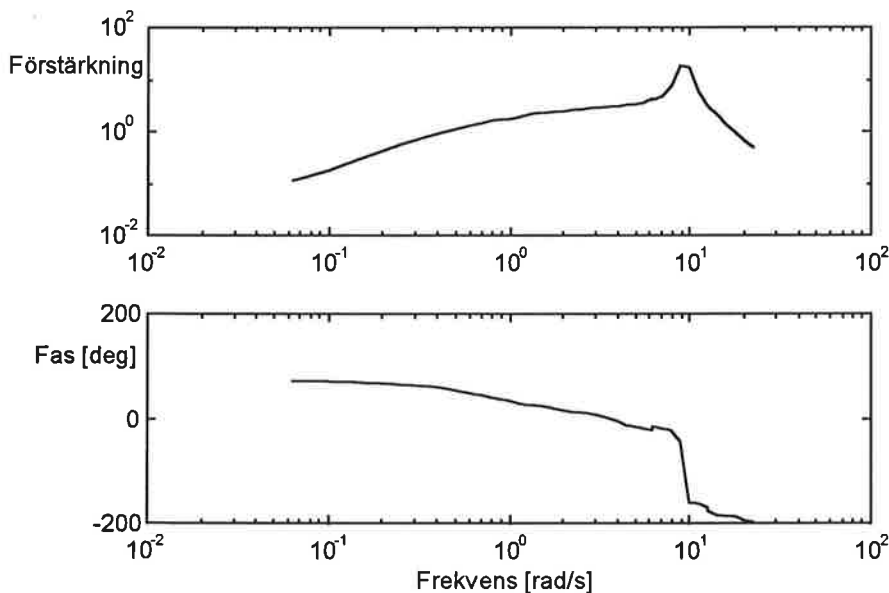
### Analys av data

För de höga frekvenserna fick vi bara brus som svar, då kulan inte hinner ändra position mellan svängningarna. Som all annan mekanik fungerar alltså vårt system som ett lågpassfilter. Då detta gör att faskurvan dyker iväg någon tiopotens har vi nedan valt att rita bodediagrammet endast för frekvenser under dessa störningar. Se Figur 4.

Vid 9rad/s som motsvarar 1.4 Hz ser vi en typisk resonanstopp för ett andra ordningens system. Faskurvan förlorar precis som förväntat 180°. Frekvensen ligger inom det intervall vi förväntade oss från de inledande experimenten.

En extrapolation av faskurvan mot lägre frekvenser ger oss att den borde vara 90° vid 0 Hz. Även detta var förväntat från den fysikaliska modelleringen eftersom vi enligt den borde ha ett nollställe i origo ty  $\arg(i\omega) \rightarrow 90^\circ$  då  $\omega \rightarrow 0$ .

Ungfär vid 0.8rad/s = 0.13 Hz, motsvarande en tidskonstant på ca 1.2 s, ändrar förstärkningskurvan lutning och stiger inte längre lika brant. Samtidigt förlorar faskurvan 90°. Det går att härleda från den mekaniska dynamiken för motor och hjul att en pol borde ligga här.



Figur 4. Bodediagram ur frekvensanalys.

### Slutsats

Frekvensanalysen stärker tesen som ställdes upp i fysikalisk modellering att systemet borde ha tre poler, varav två beskriver en egensvängning, ett nollställe i origo, och vara av lågpasskaraktär.

## Tidserieanalys

### Allmänt om analys med PRBS signal

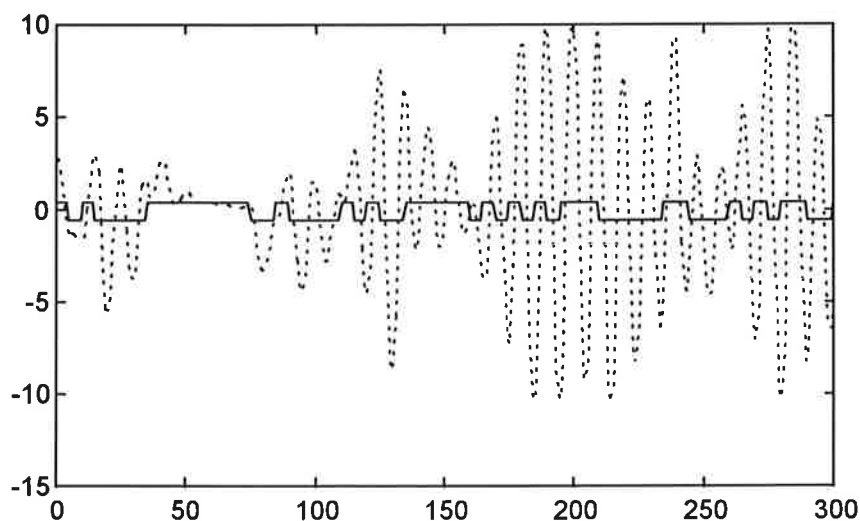
Ett steg innehåller alla frekvenser samtidigt och man skulle kunna analysera systemet helt utifrån ett enda stegsvar om man bara fick tillräckligt med energi ut vid alla frekvenser. Idealt skulle vara att skicka in vitt brus. I praktiken faller detta orimligt, bland annat eftersom man då inte har någon kontroll över signalamplituder, mer än i statistisk mening. Men man kan istället sända in ett antal steg, varannat upp och varannat ner, med slumpmässig varaktighet. PRBS är inte slumpmässig men har egenskaper som om den vore inom rimligt frekvensomfång. Nedan följer en analys gjord utifrån en sådan upptagning. Det man analyserar är spektrumet för signalerna.

### Datainsamling

Vid datainsamlingen är det viktigt att välja ett lämpligt samplingsintervall,  $h$ . Av frekvensanalysen återgiven ovan framgår att den intressanta frekvensen, resonansen, ligger runt  $\omega=9\text{rad/s}$ . Tumregeln säger oss att  $\omega h=0.2-0.6$  bör ge ett bra resultat. Detta ger oss  $h$  mellan 0.02 och 0.07. Efter lite experimenterande med datorns snabbhet fann vi för gott att välja den övre gränsen. Det bör då påpekas att detta resonansområde gäller för det öppna systemet, och när systemet slutar vid reglering fås andra, oftast snabbare tidskonstanter. Identifieringsdata som används vid regleringen är dock specifik för samplingsintervallet och vi måste därför redan på detta stadium uppskatta tidskonstanterna för det slutna systemet. Vi antar att de kommer att vara i samma storleksordning som för det öppna systemet. Detta antagande visar sig senare vara gott, se avsnittet om reglering.

Vi väljer här en bias på 1.5V och amplitud på 0.498V. Totalt tas 8500 datapunkter upp, de 500 första förkastas för att undvika det transienta förloppet. De återstående 8000 delas i två serier, en för att bygga modeller utifrån och en att validera dessa modeller med. Vi ställer även in att sampla 5 gånger per period hos PRBS. Det sista leder till att den kortaste tiden mellan ändringar av insignalen blir 0.35s.

Figur 5 nedan visar dels den insända insignalen i form av PRBS, dels tidssvaret som fås från systemet.



Figur 5. Insignal och utsignal, datapunkterna 1000-1299.

### Icke parametrisk analys

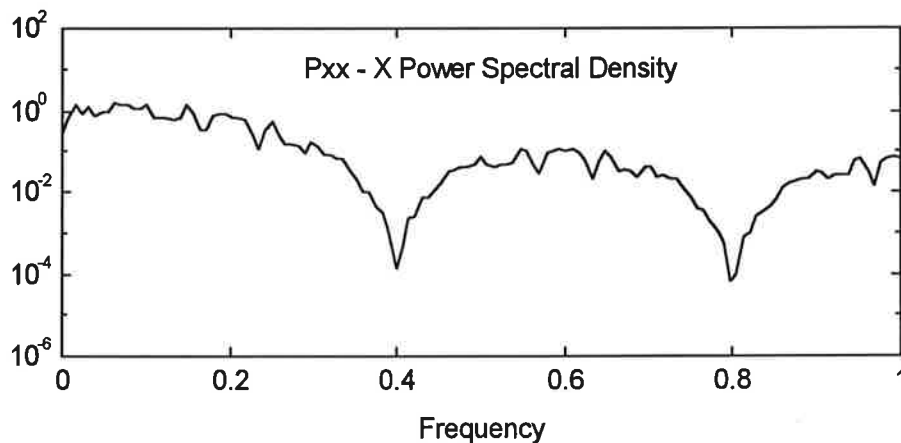
Följande spektrum är gjorda utifrån den ovannämnda datainsamlingen. Samtliga är normerade med Nyquistfrekvensen som i vårt fall är 7 Hz.

Först har vi insignalens autokovarians. Teoretiskt borde detta spektrum vara konstant lika med ett, se resonansområdet om PRBS-signal ovan. De stora hacken beror på fönstereffekten som uppkommer i samband

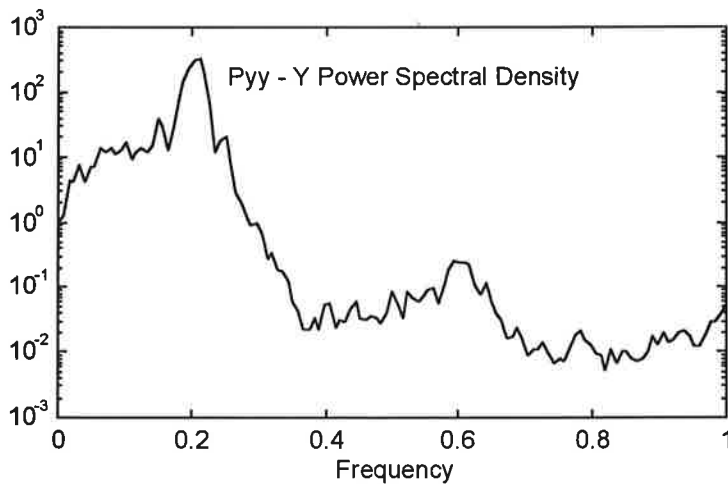
med samplingen. Frekvensanalysen sade oss att vi borde vara intresserade av frekvenser upp till 11 rad/s, vilket motsvarar 0.25 normalerat. För dessa frekvenser kan spekrat betraktas som nöjsamt, och man kan sig sträcka så långt som att identifieringen har giltighet upp till 14 rad/s.

I kovariansspektrat för utsignalen återfinner vi vår frekvenstopp runt 1.5 Hz.

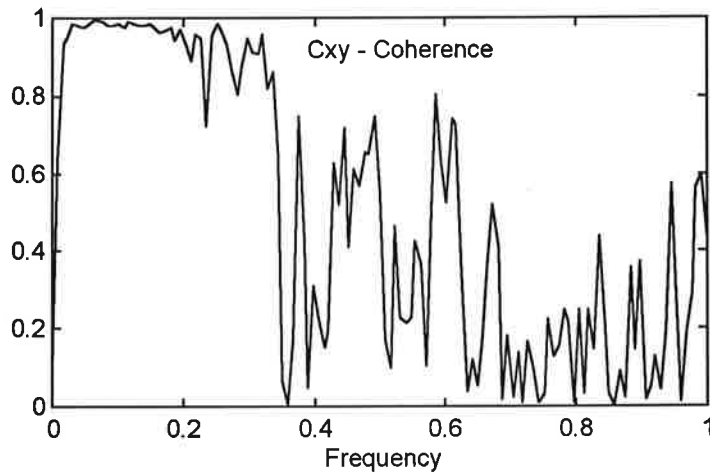
Därefter följer koherensfunktionen för in- och utsignal. För de aktuella frekvenserna är sambandet mellan signalerna entydigt och det råder inget tvivel om att vi exciterat tillräckligt. Detta tyder på att systemet kan beskrivas med en linjär överföringsfunktion i detta intervall.



**Figur 6.** Kovariansspektrum för PRBS-signalen.

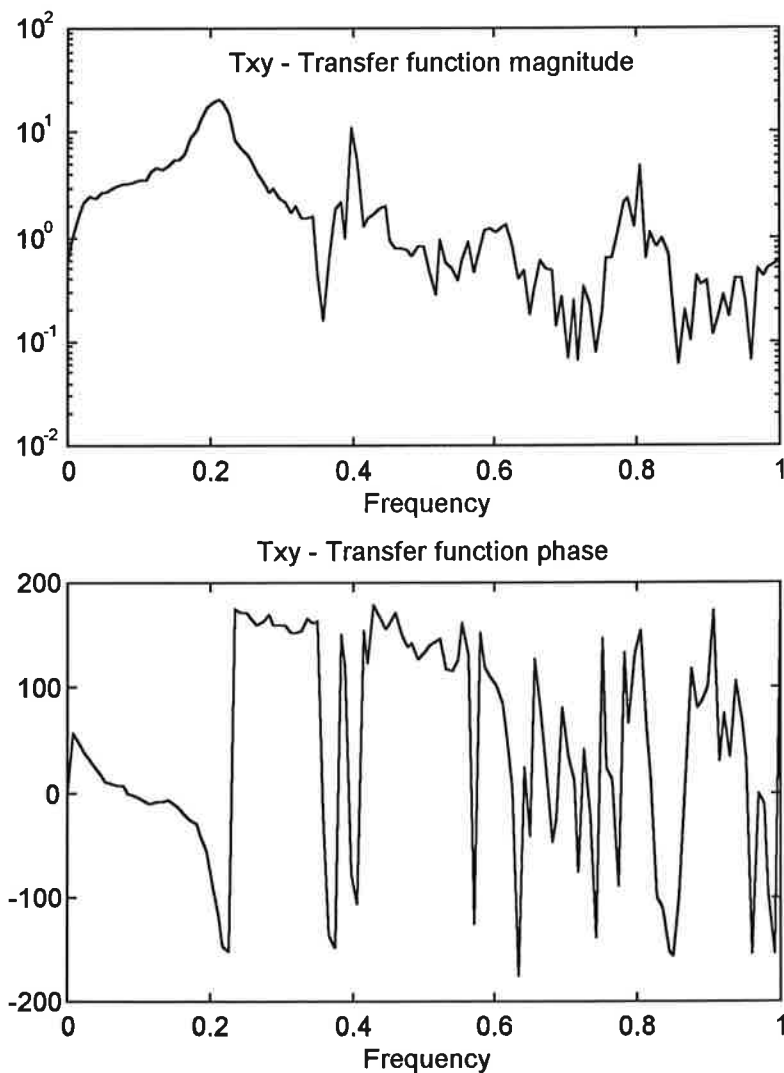


**Figur 7.** Kovariansspektrum för utsignalen.



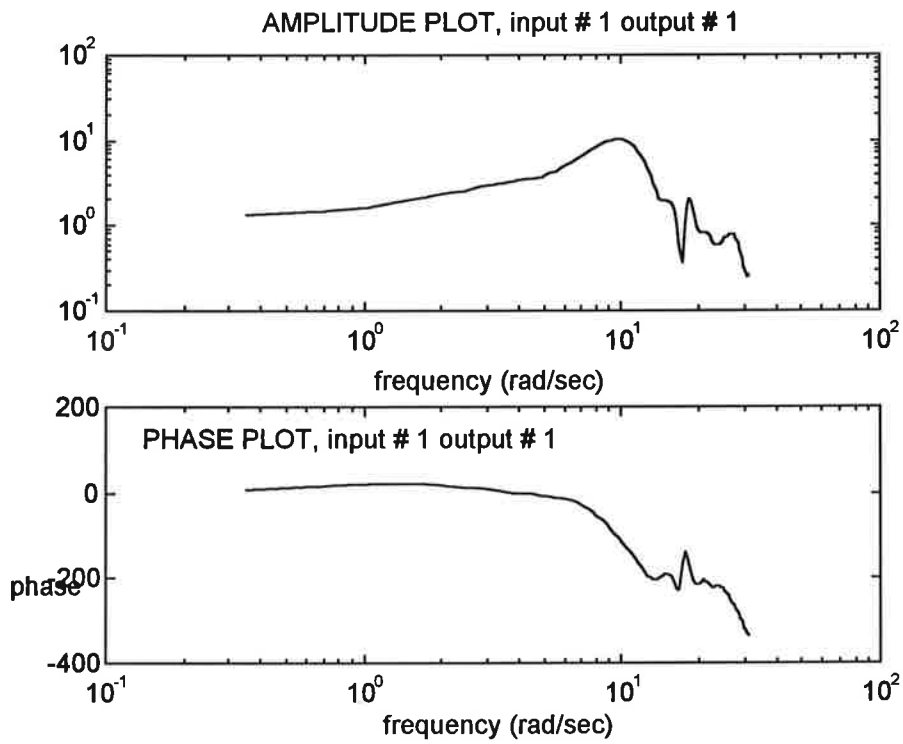
**Figur 8.** Koherensfunktion för insignal-utsignal.

Nedan följer bodeplottar gjorda efter två skattningar av överföringsfunktionen. De två skattningarna är beräknade på olika sätt. I första fallet ur signalernas periodogram, och i det andra ur kovariansfunktionerna. Eftersom bruset i vårt fall är okorrelerat med insignalen (PRBS), så bör överföringsfunktionen skattad ur kovariansfunktionerna ge bättre resultat. Se [Johansson] kap 4.4.

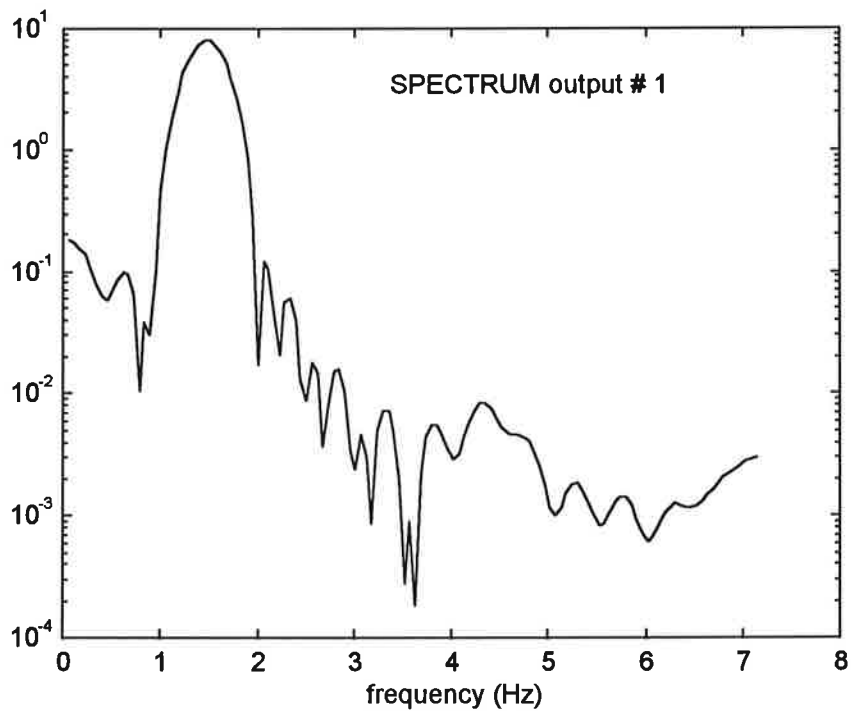


**Figur 9.** Överföringsfunktionsestimat (Ur periodogram).





Figur 10. Överföringsfunktionsestimat (Ur kovariansfunktion).



Figur 11. Plot av överföringsfunktion i linjär skala.

## ARMAX-modellering

I detta avsnitt redovisar vi resultat erhållna med hjälp av *Matlab* och *System Identifikation Toolbox*.

Med lämpligt val av modellordning och polynomkoefficienter kan vårt diskreta system approximeras med en ARMAX-modell.

$$A(q^{-1}) \cdot y(t) = B(q^{-1}) \cdot u(t - n_k) + C(q^{-1}) \cdot e(t)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 \cdot q^{-1} + \dots + a_{na} \cdot q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 + b_2 \cdot q^{-1} + \dots + b_{nb} \cdot q^{-nb+1}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 \cdot q^{-1} + \dots + c_{nc} \cdot q^{-nc}$$

Vi vet sedan den fysikaliska modelleringen och frekvensanalysen att ett tredje ordningens system verkar rimligt, d.v.s.  $na=3$ . Av de tre polerna bör de två som svarar mot kulans svängningsrörelse vara komplexkonjugerade, och den som svarar mot DC-motorns tidskonstant vara reell. Dessutom känner vi till att det finns ett nollställe i punkten 1, motsvarande en differentiator. Alltså har vi  $nb \geq 2$ . Övriga parametrar att variera,  $nc$ ,  $nd$ , skall vi tillsammans med olika val av  $nb$  använda för att anpassa modellen så bra som möjligt.

För att på ett smidigt sätt kunna hänvisa till modeller svarande mot olika parameterintervall inför vi följande beteckning:

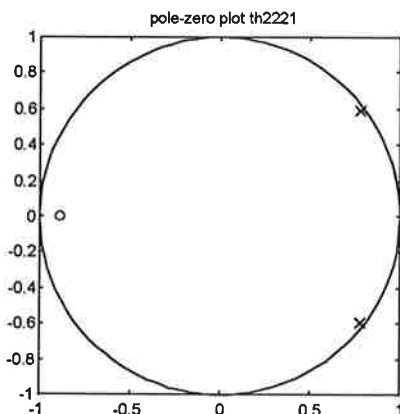
$th[na][nb][nc][nd]$  = ARMAX-modellen svarande mot parameterintervallet  $\{na, nb, nc, nd\}$

(Beteckningen *th* härrör från *System Identifikation Toolbox* lagringsformat för processmodeller – *theta*-formatet.)

Utrymmet här medger inte att vi redovisar alla resonemang som ligger bakom våra modellval, men det viktigaste bör framgå. Proceduren att välja modell är av naturliga skäl av iterativ art, varför en hel del "trial and error" har tillämpats.

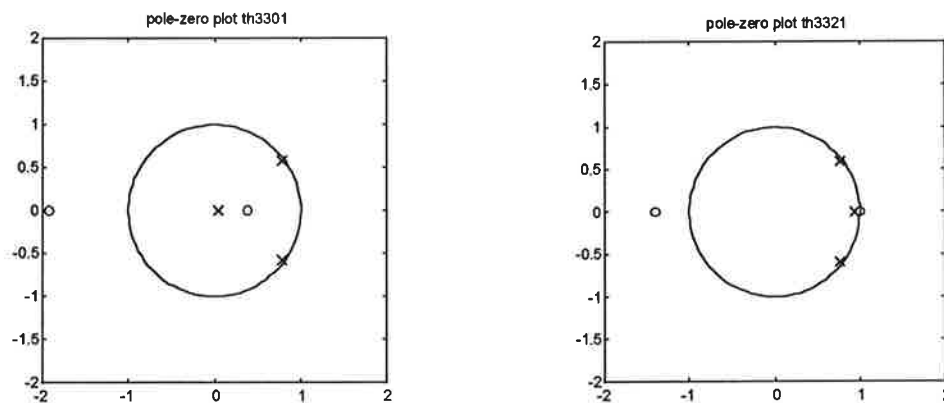
En naturlig start är modellen *th3200* som ger ett bedrägligt resultat. Efter en stunds provande upptäcker vi att ett nollställe till behövs,  $nb=3$ , liksom att en fördröjning på en tidsenhet,  $nd=1$ , ger bättre resultat. Om vi därtill lägger ett nollställe på brusmodelleringen,  $nc=2$ , får vi den modell som bäst beskriver systemet, efter vad vi erfar, nämligen *th3321*.

Modellerna som vi väljer att redovisa här är *th2221*, *th3320*, *th3321*, *th3322* och *th4321*. Vi skall titta lite närmare på dessa modellers egenskaper. Vi börjar med att undersöka pol-nollställe-diagram.



Figur 12. Pol-nollställe-diagram för *th2221*.

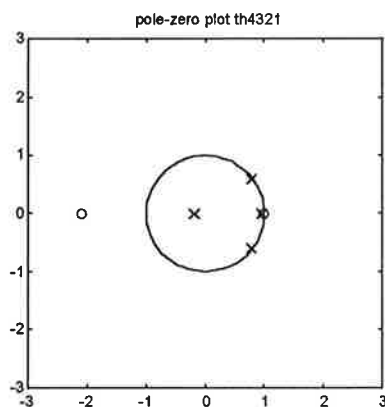
I den här modellen har vi en pol för lite. De två poler som finns har använts för att modellera kulans svängningsrörelse. Nollstället har inte hamnat i punkten  $1$ , där vi ju vet att det skall finnas ett.



**Figur 13.** (a) Pol-nollställe-diagram för *th3301*. (b) Pol-nollställe-diagram för *th3321*.

I figur 13 (a) har vi rätt antal poler, och dessutom två nollställen. Fortfarande har vi inget nollställe i punkten  $1$  dock, och den reella polen har hamnat på alltför hög frekvens för att stämma med Bode-diagram från frekvensanalysen.

Situationen förbättras väsentligt när vi lägger till en brusmodell med två nollställen. Se figur 13 (b). Ett nollställe hamnar där vi vill ha det, och den reella polen blir långsammare än de komplexa, vilket stämmer överens med tidigare resultat.



**Figur 14.** Pol-nollställe-diagram för *th4321*.

Om vi ökar modellordningen till  $na=4$  hamnar den extra polen på höga frekvenser. Möjligen skulle detta kunna vara den elektriska dynamiken i DC-motorn. Det visar sig emellertid vid valideringen att den här polen inte förbättrar modellen.

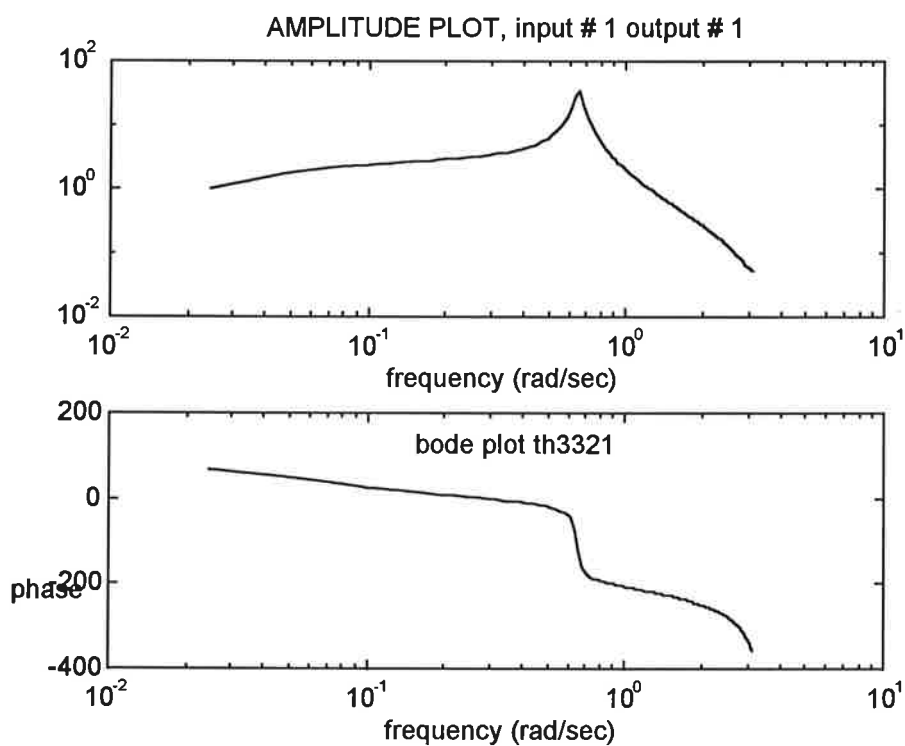
## Validering

Vid valideringen av modellerna simulerar vi modellerna mot data som inte använts vid identifieringen. Vi undersöker egenskaper hos residualer och jämför olika nyckeltal.

För samtliga modeller som undersöks räknar vi ut *Akaike's Final Prediction Error (FPE)*. Vi ser att *th4321* ger ett lägre värde än *th3321*, varför vi borde välja modellen med högre ordning. Skillnaden är dock så liten att vi ändå väljer den enklare modellen, d.v.s. *th3321*. Se Tabell 2.

Modell	Förlustfunktion	FPE
th2221	0.1565	0.157
th3320	0.1407	0.1412
th3321	0.0934	0.09378
th3322	0.1095.	0.1099
th4321	0.09164	0.09205

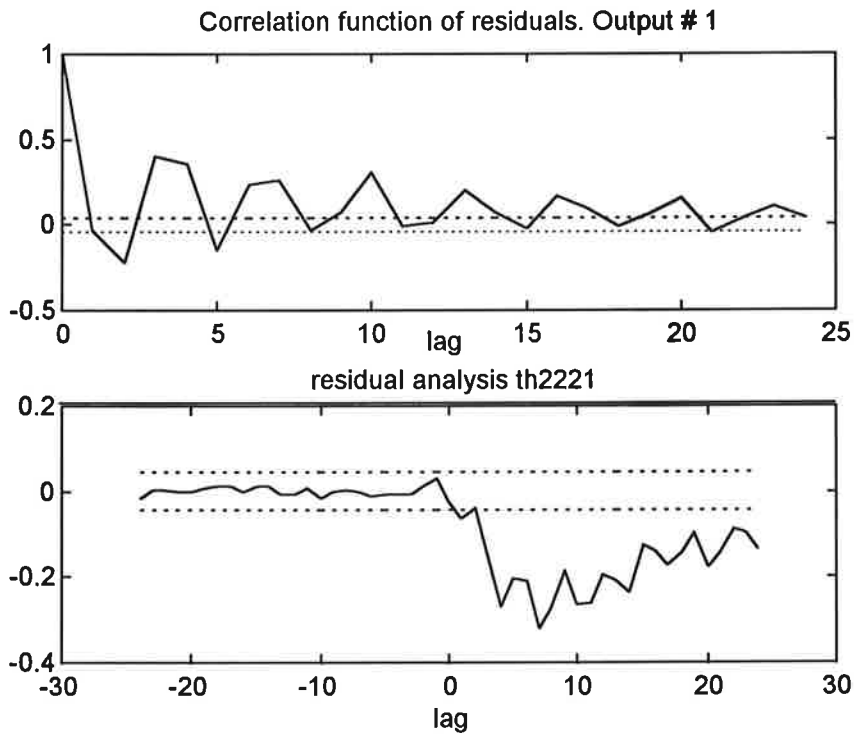
**Tabell 2.** Akaike FPE och förlustfunktion för några undersökta modeller.



**Figur 15.** Bode-diagram för *th3321*.

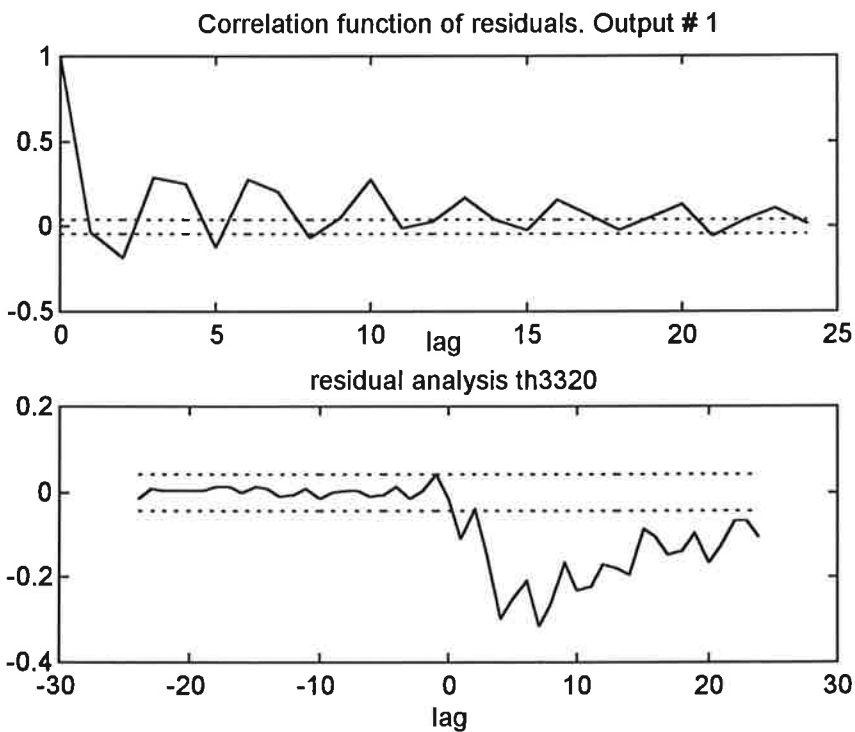
Bode-diagrammet som svarar mot den valda modellen *th3321* visar tydliga likheter med Bode-diagrammen från frekvensanalysen och den icke-parametriska tidsserieanalysen.

Ett av verktygen för att avgöra en modells lämplighet är undersökning av korrelationsfunktionerna för residualerna. Vid perfekt modellering är residualerna vitt brus, och följaktligen okorrelerade. I diagrammen nedan visas överst korrelationsfunktionen för residualerna, och nederst korskorrelationsfunktionen mellan insignal och residualer.

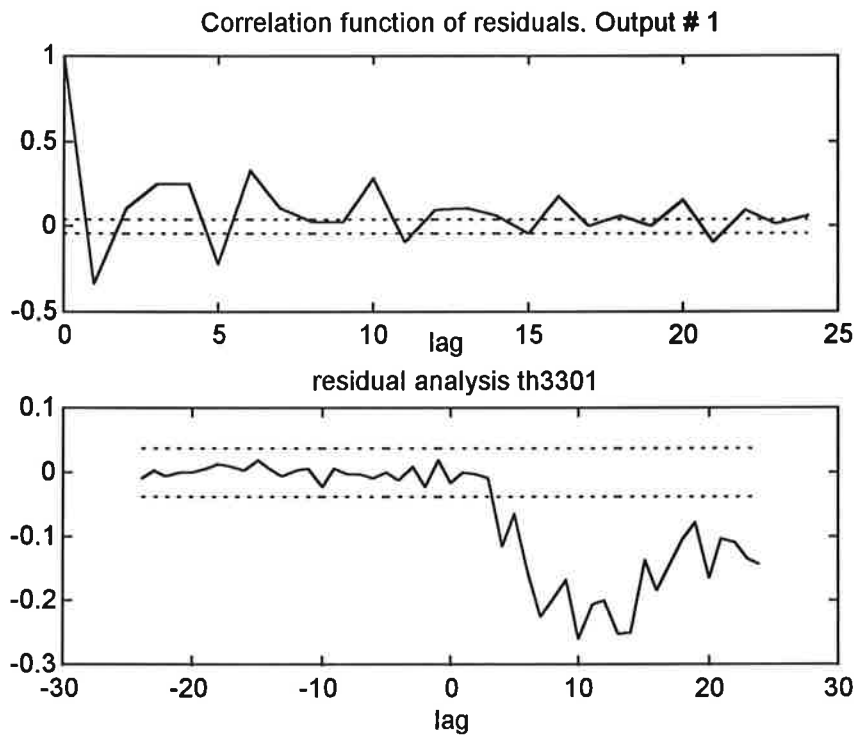


**Figur 16.** Korrelation för residualer och korskorrelation mellan residualer och insignal för *th2221*.

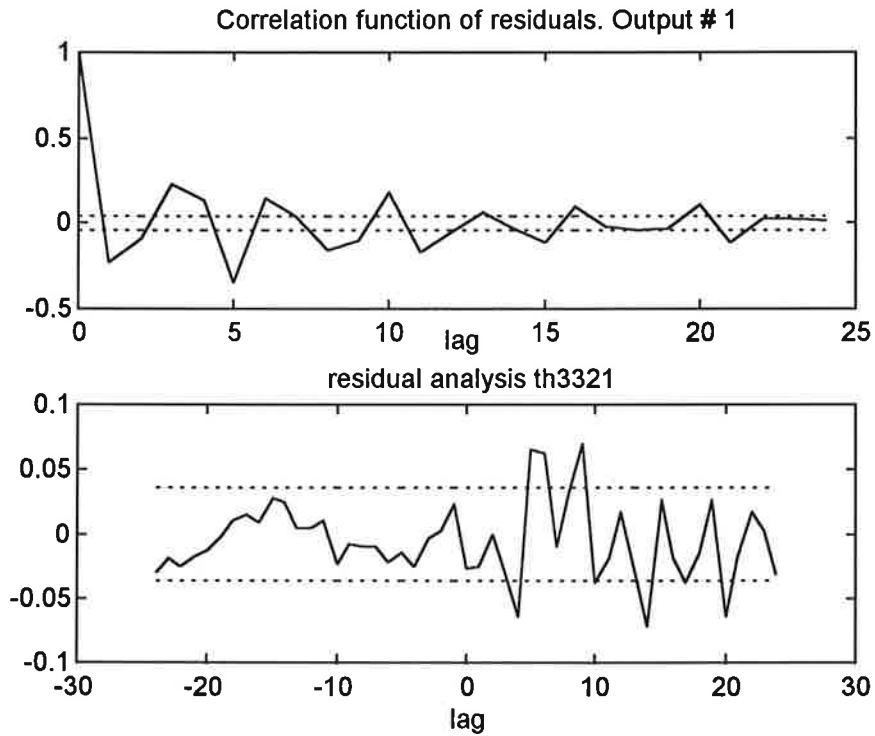
Korrelationsfunktionen ovan antyder att residualerna kan ses som vitt brus filtrerat genom en AR(2)-process. Det kan alltså vara lämpligt att införa ytterligare två nollställen, d.v.s. sätta  $nb=4$ . För att bibehålla kausaliteten måste vi då öka modellordningen med 1, d.v.s. sätta  $na=3$ , vilket ju är rimligt enligt tidigare resultat.



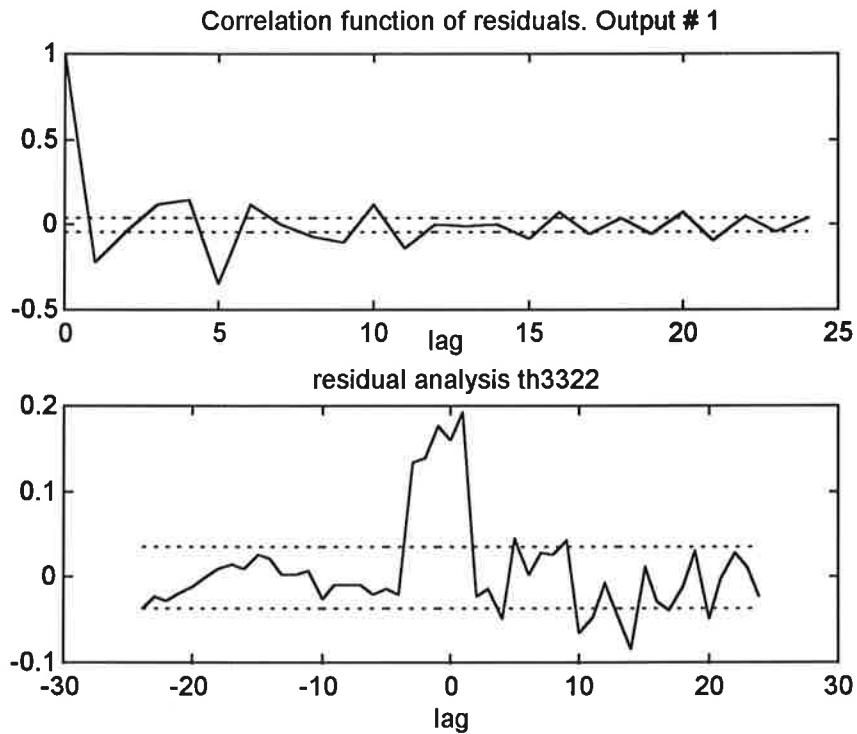
**Figur 17.** Korrelation för residualer och korskorrelation mellan residualer och insignal för *th3320*.



**Figur 18.** Korrelation för residualer och korskorrelation mellan residualer och insignal för *th3301*.

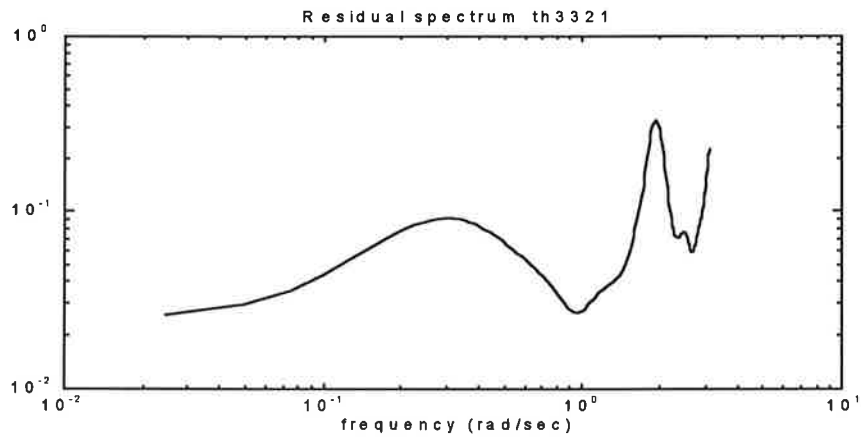


**Figur 19.** Korrelation för residualer och korskorrelation mellan residualer och insignal för *th3321*.

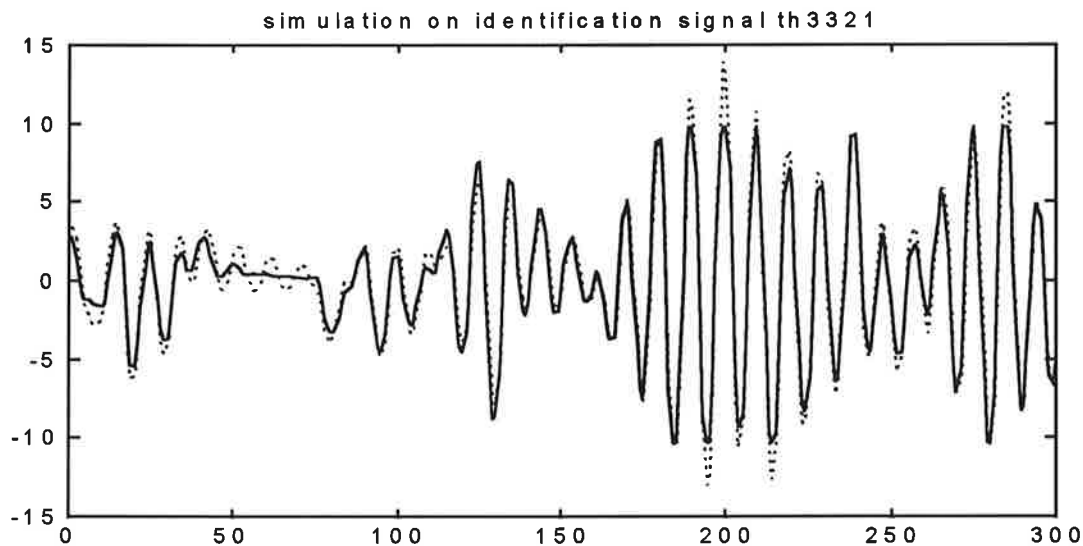


**Figur 20.** Korrelation för residualer och korskorrelation mellan residualer och insignal för *th3322*.

Betraktar vi residualernas spektrum vill vi se ett spektrum för vitt brus. Spektrum som erhålls med *th3321* har ett någorlunda jämnt frekvensinnehåll, men visst ser man kulans resonansfrekvens, liksom DC-motorns lågpassfilterkaraktär.

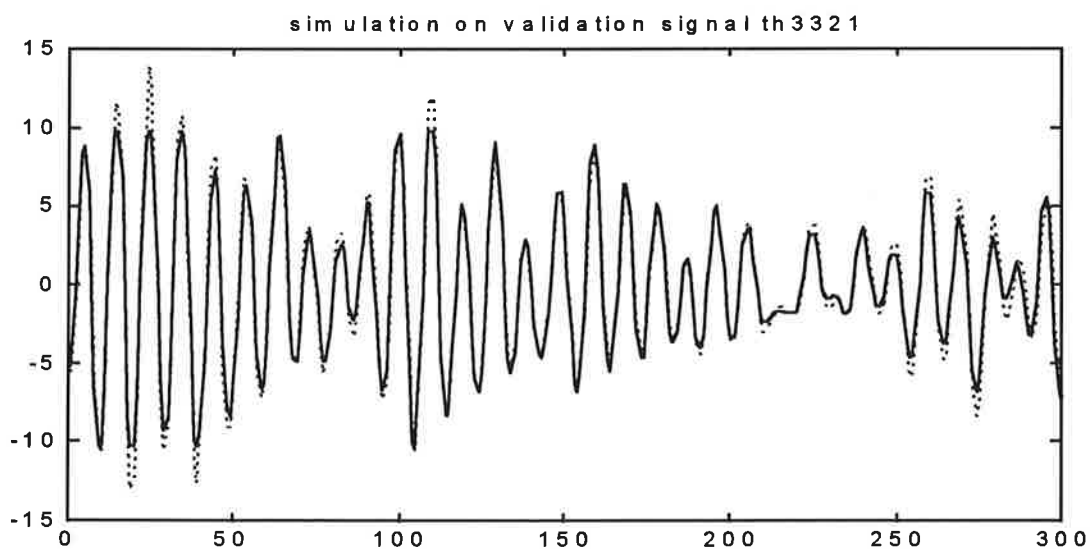


**Figur 21.** Residualspektrum för *th3321*.



**Figur 22.** Simulering av *th3321* mot identifieringsdata.

Simulerar vi systemet med modellen *th3321* med identifieringsdata får vi ett hyggligt resultat. För låga amplituder stämmer simuleringen dåligt. Detta beror nog framför allt på det glapp systemet uppvisar, och som praktiskt taget eliminerar små rörelser.



**Figur 23.** Simulering av *th3321* mot valideringsdata.

Simulering mot valideringsdata uppvisar lika god överensstämmelse som den mot identifieringsdata.

Sammanlagt visar modellen *th3321* upp de bästa egenskaperna. Vi väljer att utgå från den när vi konstruerar en regulator för systemet. Denna modell har koefficienter med värden och standardavvikelse enligt följande (utskrift från *Matlab*).



» present(th3321)

This matrix was created by the command ARMAX on 3/31 1995 at 9:1

Loss fcn: 0.0934 Akaike`s FPE: 0.09378 Sampling interval 1

The polynomial coefficients and their standard deviations are

B =

0	0.4530	0.1807	-0.6347
0	0.0145	0.0294	0.0157

A =

1.0000	-2.4868	2.4046	-0.8934
0	0.0032	0.0051	0.0030

C =

1.0000	-1.4645	0.5306
0	0.0150	0.0148

Sammanfattningsvis har vi arbetat oss fram till systemmodellen

$$y(t) = H(q)u(t) + H_w(q)e(t)$$

med

$$H(z) = 0.45 \cdot \frac{(z - 1.001) \cdot (z + 1.400)}{(z - 0.940) \cdot (z^2 - 1.548 \cdot z + 0.951)},$$

$$H_w(z) = \frac{(z - 0.807) \cdot (z - 0.658)}{(z - 0.940) \cdot (z^2 - 1.548 \cdot z + 0.951)}.$$

Vi transformerar den diskreta mekaniska polen  $z=0.940$  till kontinuerlig tid, och får fram att den motsvarar en tidskonstant på 1.12s, vilket stämmer väl överens med tidigare resultat. De komplexa polerna transformeras också till kontinuerlig tid och visar sig motsvara ett andra ordningens system med  $\omega=9.4$  rad/s, och  $\zeta=0.039$ . Resonansfrekvensen stämmer med den tidigare observerade, och dämpningen verkar rimlig eftersom vi förväntar oss låg dämpning.

$$\begin{array}{l} 0.77636 \pm 0.5936 \cdot i \xrightarrow{z \rightarrow s} -0.3602 \pm 9.350 \cdot i \\ 0.9395 \xrightarrow{z \rightarrow s} -0.8915 \end{array}$$

## Reglering

### Design av RST-regulator

Nu skall vi använda modellen vi har fått ur ARMAX-modelleringen för att designa en regulator för systemet.

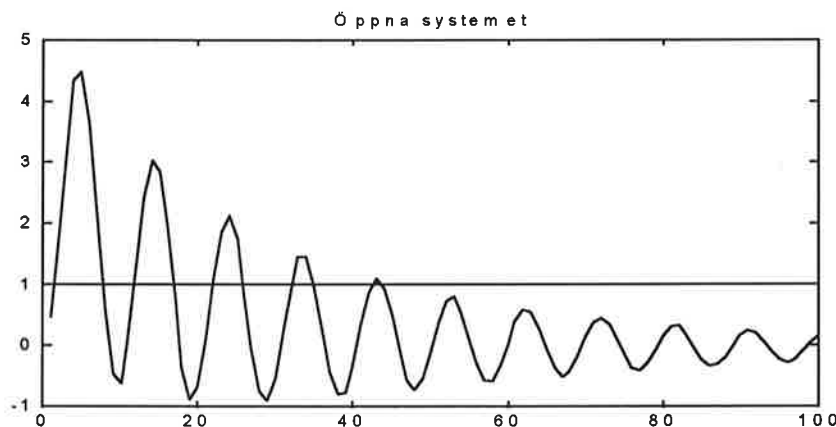
$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \cdot u(t-1)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 + b_2 \cdot q^{-1} + b_3 \cdot q^{-2}$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 \cdot q^{-1} + a_2 \cdot q^{-2} + a_3 \cdot q^{-3}$$

Med värden på koefficienter enligt tidigare.

Systemets egenskaper sätter en del begränsningar för vad som kan presteras. För att hålla kvar en konstant vinkelavvikelse för kulan måste hjulet accelereras. Med andra ord, den stationära förstärkningen som är noll beroende på ett enkelt nollställe i punkten  $1$  medför att vi måste ha en ramp som styrsignal för att följa ett steg. Detta framgår av stegsvaret för öppna systemet i figur 6.1. Systemets resonansfrekvens är  $\approx 9$  rad/s, vilket ger en vägledning om vad som kan vara rimligt att begära av systemet. Vår identifiering gäller också bara till strax ovanför denna frekvens, cirka 14 rad/s.



Figur 24. Simulerat stegsvar för öppna systemet.

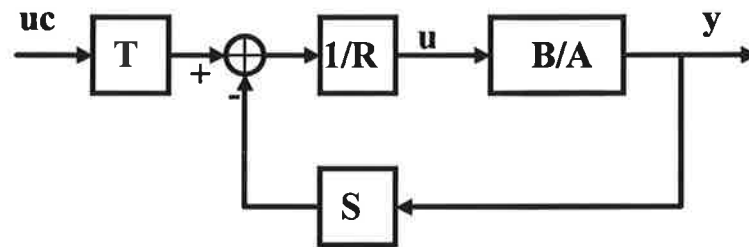
Som mål för regulatorn väljer vi att slutna systemet skall kunna följa trajektorier med små vinklar med en begränsad styrsignal. Eftersom vi arbetar i diskret tid är det lämpligt att använda en RST-regulator. Det ger oss möjlighet att placera polerna där vi vill ha dem.

Regulatorstrukturen blir alltså

$$R \cdot u(t) = -S \cdot y(t) + T \cdot u_c(t)$$

med  $R$ ,  $S$  och  $T$  polynom i bakåtskiftoperatorn.

Vi använder den designalgoritm som finns beskriven i [Åström] kapitel 10. Inga nollställen bör kancelleras då de ligger antingen utanför enhetscirkeln, eller på denna. Eftersom öppna systemets nollställe i punkten  $1$  (motsvarande en differentiator) medför en stationär förstärkning på noll, även för slutna systemet *måste* vi kancellera detta ändå. Problemen som kan uppstå när man kancellerar "instabila" nollställen, är bland annat att man får tillstånd som växer mot oändligheten om man inte kancellerar exakt. Här *vet* vi dock att nollstället ligger exakt i punkten  $1$ , varför kancelleringen borde fungera, och inga problem verkar heller uppstå när vi kör regulatorerna.



**Figur 25.** Blockschemarepresentation av slutna systemet reglerat med en RST-regulator.

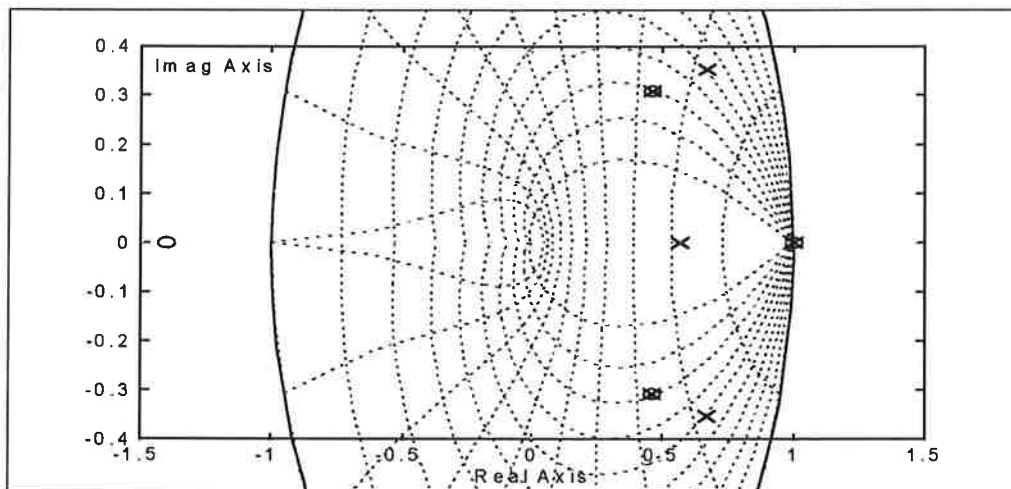
Genom att betrakta följande ekvationer för polynomen i slutna systemets överföringsfunktion kan vi bestämma lämpliga gradtal för  $R$ ,  $S$ ,  $T$  och  $A_o$ .

$$B \cdot T = B_m \cdot A_o$$

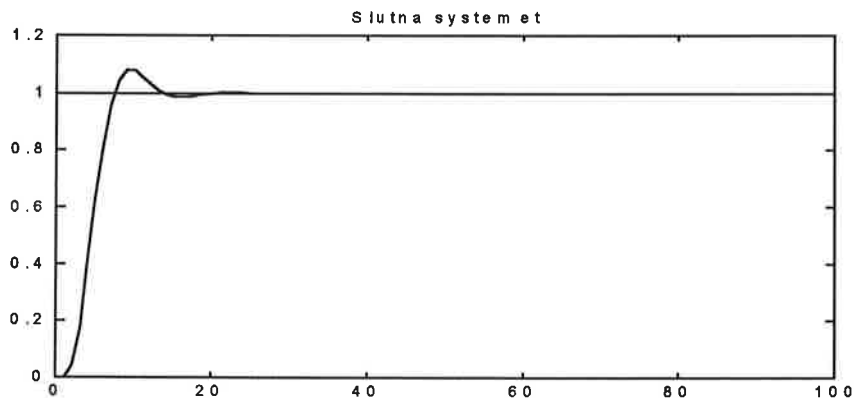
$$A \cdot R + B \cdot S = A_m \cdot A_o$$

Med kännedom om gradtalen kan vi med hjälp av Matlab lösa ekvationerna och erhålla koefficienterna för regulatorpolynomen. Vi placerar slutna systemets poler som för ett Butterworthfilter.

Vi provar ett antal regulatorer med eller utan integrator och med olika hastigheter. I figurerna nedan ser vi pol-nollställediagram och simulerat stegsvar för en av regulatorerna ( $\omega=8$  rad/s, ingen integrator).



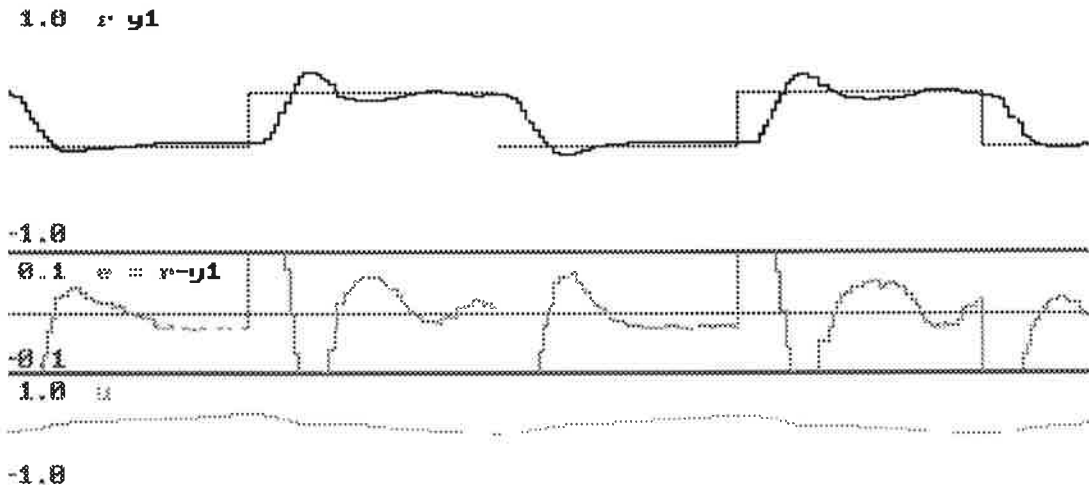
**Figur 26.** Pol-nollställe-diagram för slutna systemet,  $\omega=8$  rad/s.



**Figur 27.** Simulering av stegsvar för slutna systemet,  $\omega=8$  rad/s.

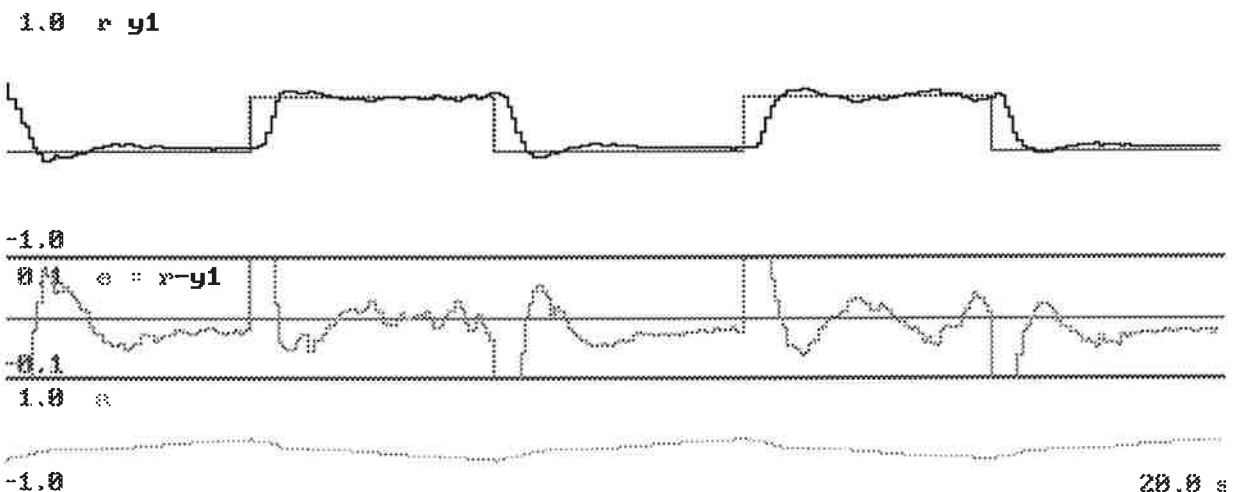
## Realisering av reglerat system

Nu skall vi se hur väl regulatorerna uppför sig. Som väntat går det bra att kräva hastigheten  $\omega=5$  rad/s. Stegsvaret ser hyfsat ut, och styrsignalerna är måttliga. Se Figur 28. Systemet visar god robusthet då kulan rör sig utanför det linjära området, d.v.s. regulatorn stabiliserar systemet även för stora vinkelavvikelser.



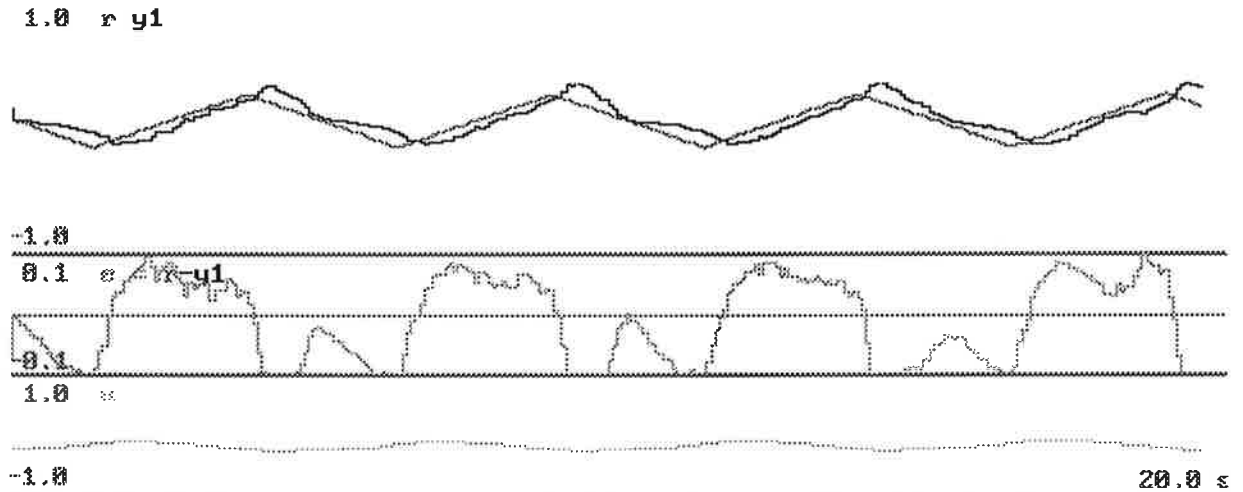
Figur 28. Realisering av slutna systemet med  $\omega=5$  rad/s, utan integrator. Fyrkantsvåg som referens.

Ännu bättre blir det med en snabbare regulator,  $\omega=8$  rad/s. Se Figur 29. Mycket bättre resultat än det här medger knappast en linjär modell.



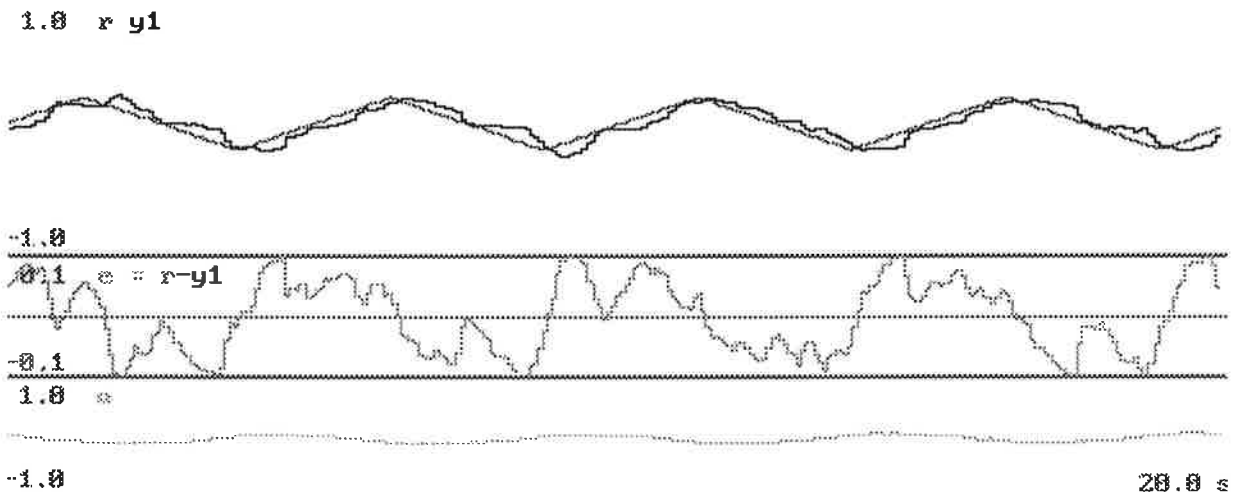
Figur 29. Realisering av slutna systemet med  $\omega=8$  rad/s, utan integrator. Fyrkantsvåg som referens.

När vi kör denna regulator med en ramp som referens visar det sig att vi får ett stationärt fel. Se figur 30.

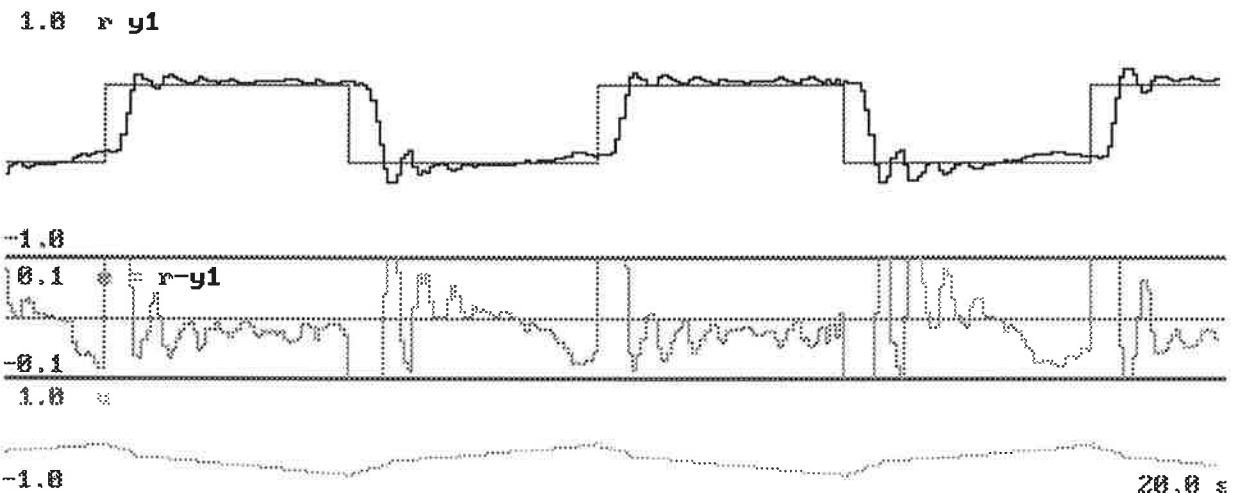


Figur 30. Realisering av slutna systemet med  $\omega=8$  rad/s, utan integrator. Triangelvåg som referens.

För att förbättra regleringen i detta fall lägger vi till en integrator (en faktor  $(z-1)$  i  $R$ ). Det stationära felet blir då mindre, men i gengäld får vi ett mindre robust system. Se figur 30. Vid stora svängningar hos kulan kan systemet bli instabilt.



Figur 31. Realisering av slutna systemet med  $\omega=8$  rad/s, en integrator. Triangelvåg som referens.



Figur 32. Realisering av slutna systemet med  $\omega=10$  rad/s, utan integrator. Fyrkantsvåg som referens.

Om vi pressar systemet och begär en hastighet över öppna systemets resonansfrekvens blir resultatet lite svängigt. Den bästa regleringen får vi för hastigheter runt  $\omega=8$  rad/s.

## Sammanfattning

Den fysikaliska modelleringen visar att vårt system är av tredje ordningen, med ett nollställe i origo (kontinuerlig tid). Två poler som svarar mot kulans rörelse i hjulet, och en som svarar mot den mekaniska tidskonstanten för DC-motorn och hjulet. Vidare ser vi att systemet är olinjärt, och måste linjäriseras.

Frekvensanalysen bekräftar att systemet har tre poler. Dessutom ser vi att kulans poler är komplexa och beskriver en dämpad harmonisk svängning med frekvensen 1.4 Hz. Den mekaniska reella polen är långsammare än kulans poler, 0.13 Hz, och fungerar som ett lågpasfilter. Nollstället i origo visar sig också i Bodediagrammet.

Tidserieanalysen stärker ytterligare våra tidigare resultat. Vi använder en ARMAX-model och ett uttryck för systemets överföringsfunktion.

$$H(z) = 0.45 \cdot \frac{(z - 1.001) \cdot (z + 1.400)}{(z - 0.940) \cdot (z^2 - 1.548 \cdot z + 0.951)}$$

Överföringsfunktionen ger samma poler som tidigare, och vi får dessutom ett värde på de komplexa polernas dämpning,  $\zeta=0.039$ .

Överföringsfunktionen ovan används som utgångspunkt för design av en regulator för systemet. Vi designar en diskret RST-regulator med snabbheten  $\omega=8$  rad/s och dämpningen  $\zeta=0.7$  vilket fungerar bra.

## Kommentarer

Vi tycker att projektet har varit givande. "Ball & Hoop"-processen har varit trevlig att arbeta med, eftersom den är relativt enkel att modellera och förstå. Det medför att arbetsinsatsen för att utföra alla stegen från fysikalisk modellering och identifiering till reglering blir överkomlig.

Projektet har tagit ganska mycket tid i anspråk, till en del beroende på att vi startade med en annan process först, men var tvungna att byta på grund av praktiska problem. Det är lite synd att vi skall behöva lägga ner flera dagars arbete på en process innan vi upptäcker att den inte går att använda.

Arbete i projektform är mycket bra eftersom man använder kunskaper från många olika ämnesområden. Dels inom ämnet reglerteknik, men också från andra områden, till exempel mekanik och elektronik. Arbetsformen ger också en helhetssyn på reglertekniskt arbete.

## Referenser

- [Johansson] Rolf Johansson. *System modelling & Identification*. Prentice Hall, 1993.
- [Åström] Karl Johan Åström, Björn Wittenmark. *Computer controlled systems, theory and design*. Prentice Hall, 1990.
- [Silverberg] Lars Silverberg. *Klassisk Mekanik*. Kompendium, Institutionen för teoretisk fysik, Lunds Universitet.
- [Uhlhorn] Ulf Uhlhorn. *Teknisk mekanik 2F*. KF Sigma, Lund.

Department of Automatic Control  
Lund Institute of Technology  
April 14, 1995  
Instructor: Lennart Andersson

# **A Rubber Band Machine Project in System Identification**

Filipe Alves  
Kenneth Straschko

# 1 Introduction

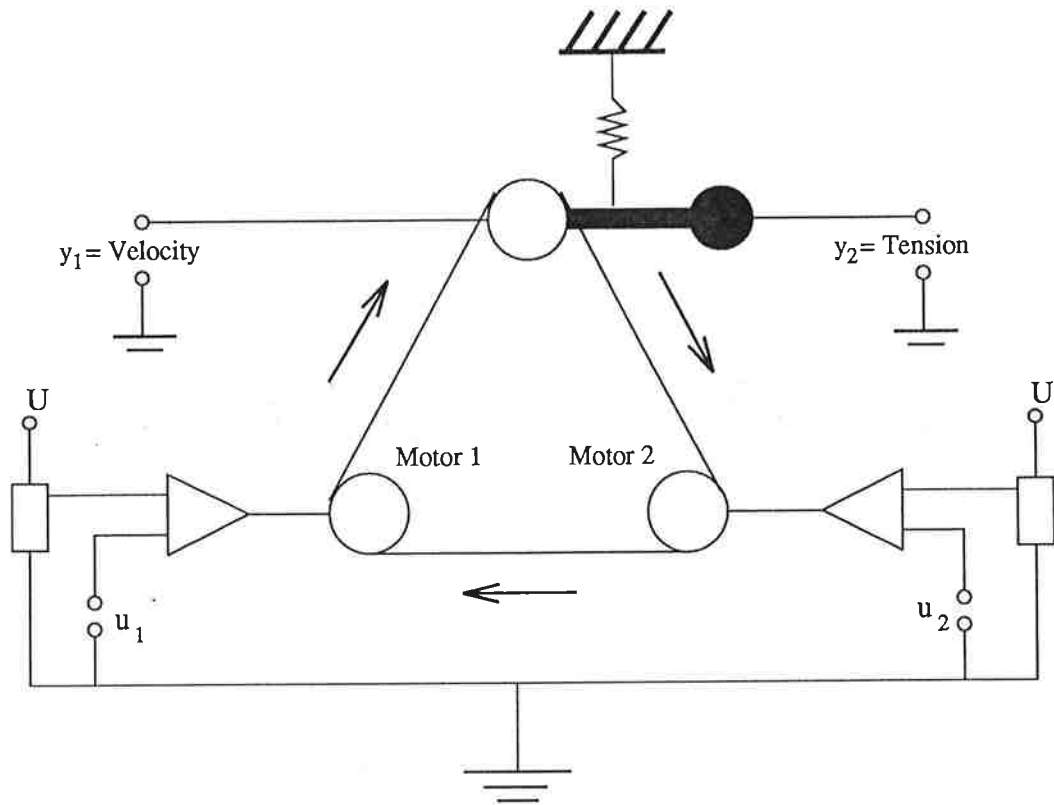


Figure 1: A rubber band machine.

In figure 1, there are two motors moving a rubber band around at a velocity available to measurement by the output  $y_1$ . The output  $y_2$  is the angle of the block holding the velocity measurement wheel, which can be understood as the tension of the rubber band. If motor 2 is pulling the band with greater force than motor 1 in the marked direction, the band will be stretched at the measurement wheel and the angular value  $y_2$  will decrease. Conversely,  $y_2$  will increase if motor 2 is pulling with smaller force than motor 1. The inputs  $u_1$  and  $u_2$  are the voltages feeding the motors.

In a two-input two-output case, generally, four transfer functions have to be estimated:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

But, by recognizing that the sum of the inputs,  $u_1 + u_2$ , is mainly affecting the velocity and the difference,  $u_1 - u_2$ , the tension, we can use the following



model:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x_1 &= u_1 + u_2 \\ x_2 &= u_1 - u_2 \end{aligned} \quad (2)$$

In this model,  $\tilde{G}_{12}$  and  $\tilde{G}_{21}$  can be considered as zero, because  $x_1$  mainly affects the velocity and  $x_2$  the tension. Due to this conclusion and to the lack of proper programs to analyse MIMO processes, we feed  $u_1$  and  $u_2$  with the same voltage to estimate  $\tilde{G}_{11}$  and to estimate  $\tilde{G}_{22}$  we feed  $u_1$  with a preset constant voltage, while  $u_2$  is varied.

## 2 Experiments

When analysing the process we concluded that, in our experiments, we couldn't let the speed be close to zero and neither very high, because of nonlinearities. When the speed of the motors is close to zero we have a big friction of the motors and of the rubber band as well. When the speed is too high, the tension doesn't change that much and we have a bigger amplitude of noise.

The frequency response analysis in figures 2 and 3 is performed with amplitudes chosen to be big, while still kept in approximately linear intervals. Because of the setup described in section 1, the tension model starts with a 180 degrees phase. Considering the frequency response analysis and some intuitive physical modeling, it might be suspected that the velocity model looks like

$$y_1 = \frac{K_1}{1 + sT_1} \cdot \frac{\omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2} x_1 \quad (3)$$

and the tension model like

$$y_2 = \frac{K_2}{1 + sT_2} \cdot \frac{\omega_2^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2} x_2, \quad (4)$$

where the first factor is mainly due to the motor time constant and the second factor to the rubber band resonance.

According to the step responses in figure 4 and the rule of thumb to choose the sampling interval 5 to 10 times shorter than the rise time of the subsequent closed loop system, the sampling interval is chosen to 20 ms. After the step responses, PRBS-experiments are performed with a shift register update period of 5 samples, and a total of 6000 data points are collected for each model to allow for both identification and validation.

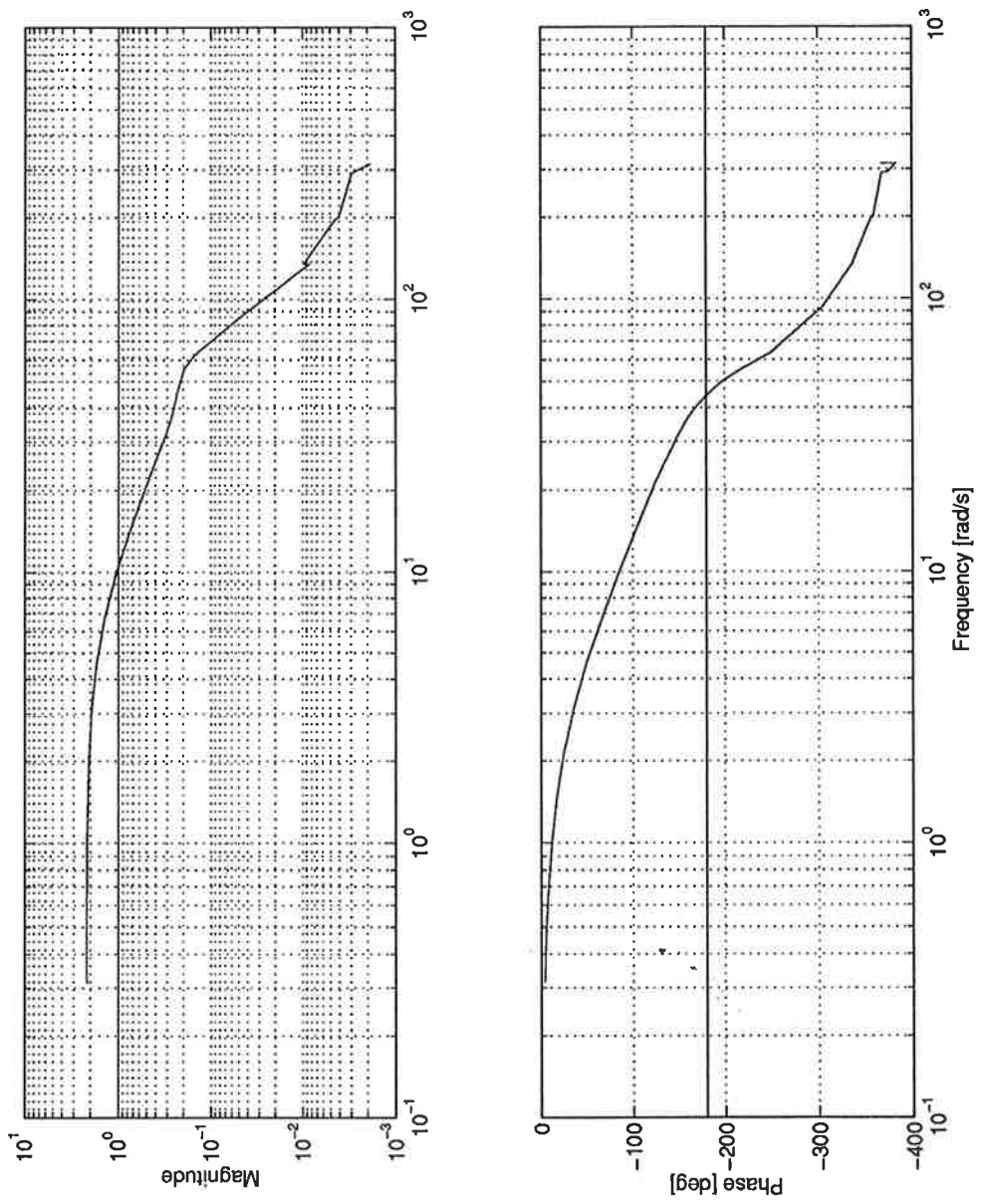


Figure 2: Frequency response analysis of the velocity.

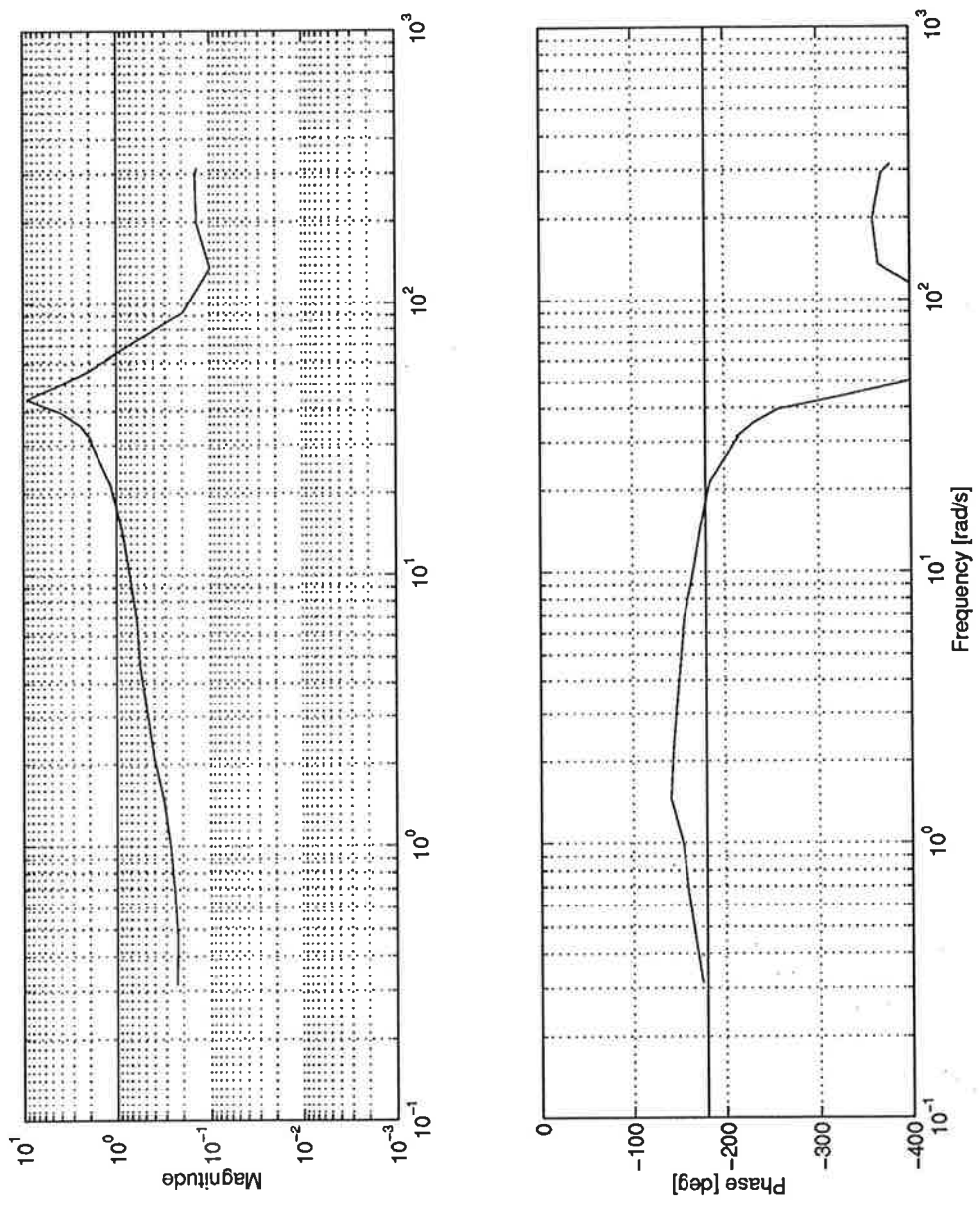


Figure 3: Frequency response analysis of the tension.

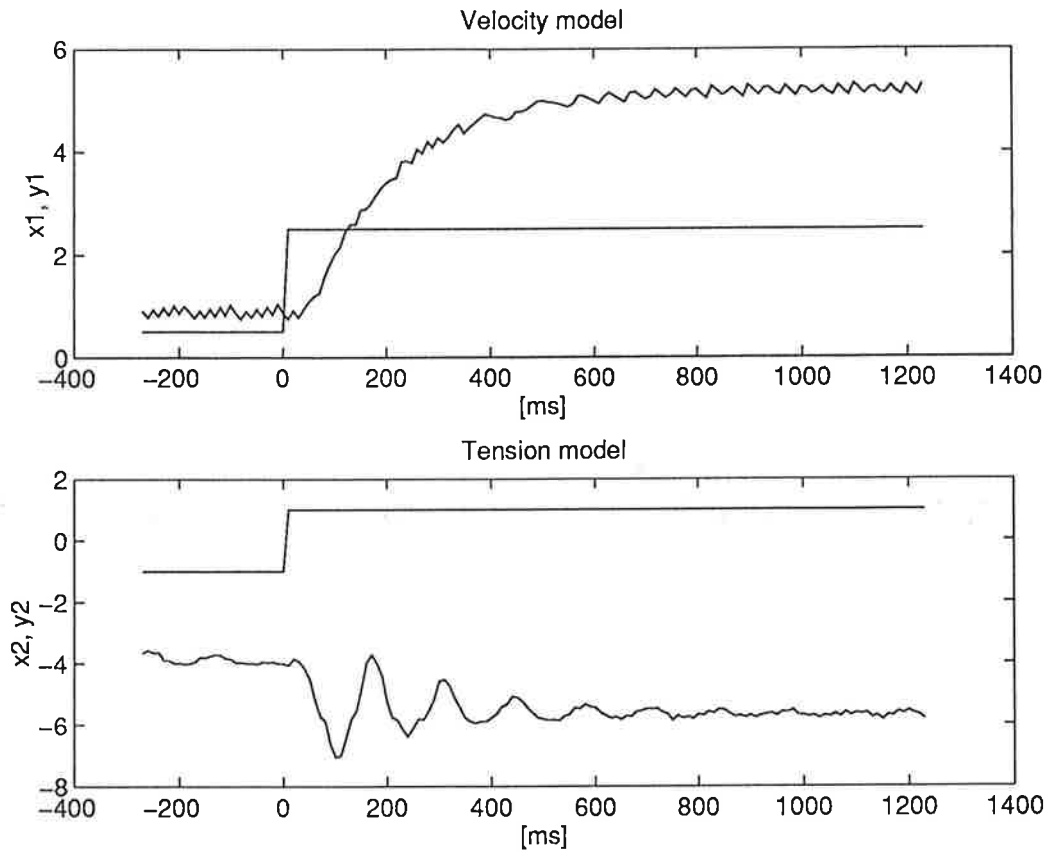


Figure 4: Step responses.

### 3 Identification and validation

After detrending the PRBS data, we obtain the spectral analysis based on the covariance functions in figures 5 and 6. To know in what frequencies the models have capacity to be good, the coherence spectra in figure 7 are plotted. For frequencies where the coherence is close to one, the relationship between input and output is approximately linear and not too noisy, which hold for both models just beyond the peak frequency of the tension model.

We continue by splitting data so that the first 3000 data points in each series are used for identification and the remaining 3000 for validation. Using the identification data, some ARMAX and Box-Jenkins models are estimated, from which we pick out a few considering Akaike's FPE, loss function and parameter variances. Among those, cross validation simulations are compared to the validation data. By weighting the wish to have a good cross

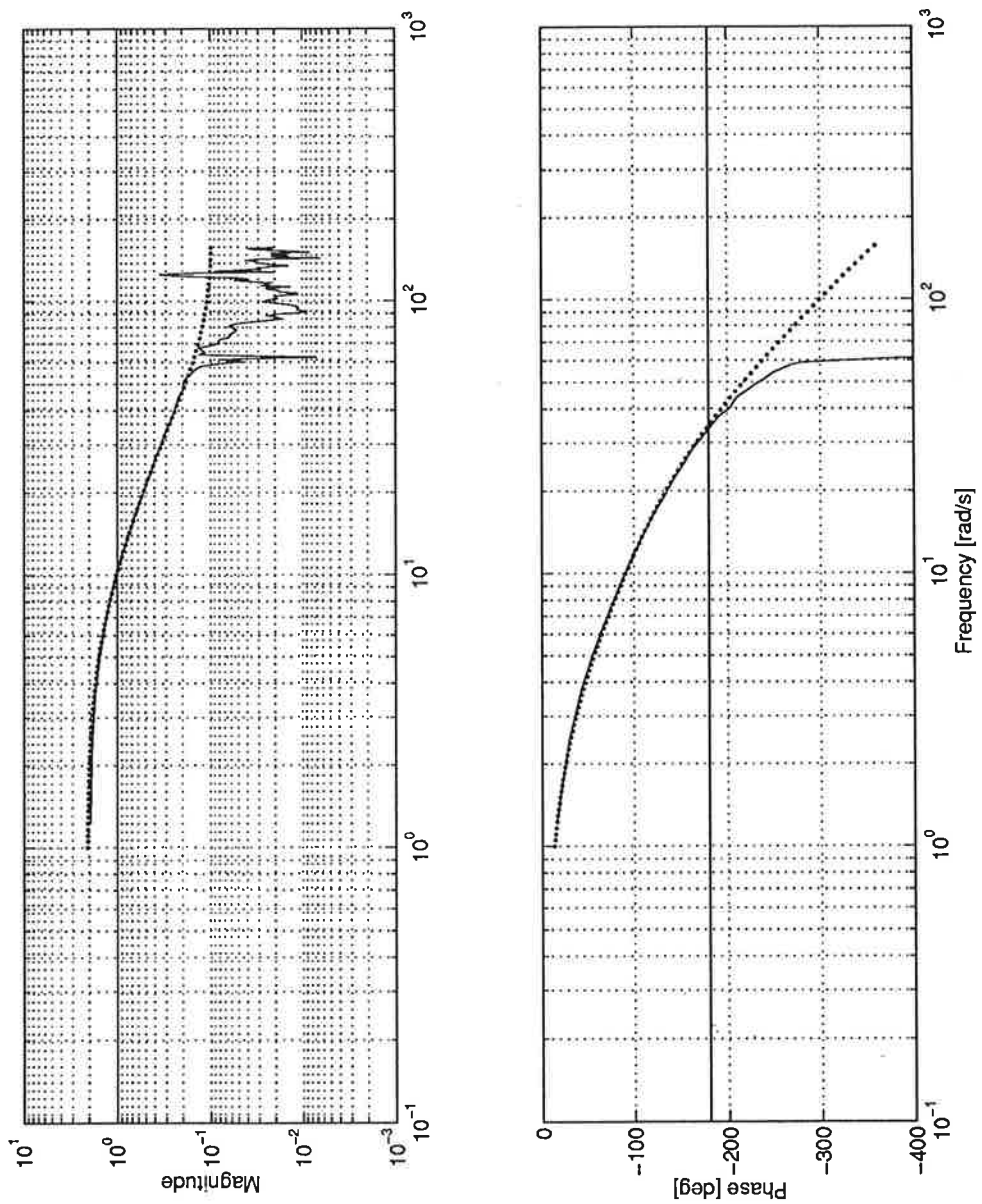


Figure 5: Spectral analysis of the velocity based on the covariance functions (solid lines). The bode plot of the reduced order model (12) is added for comparison (dotted lines).

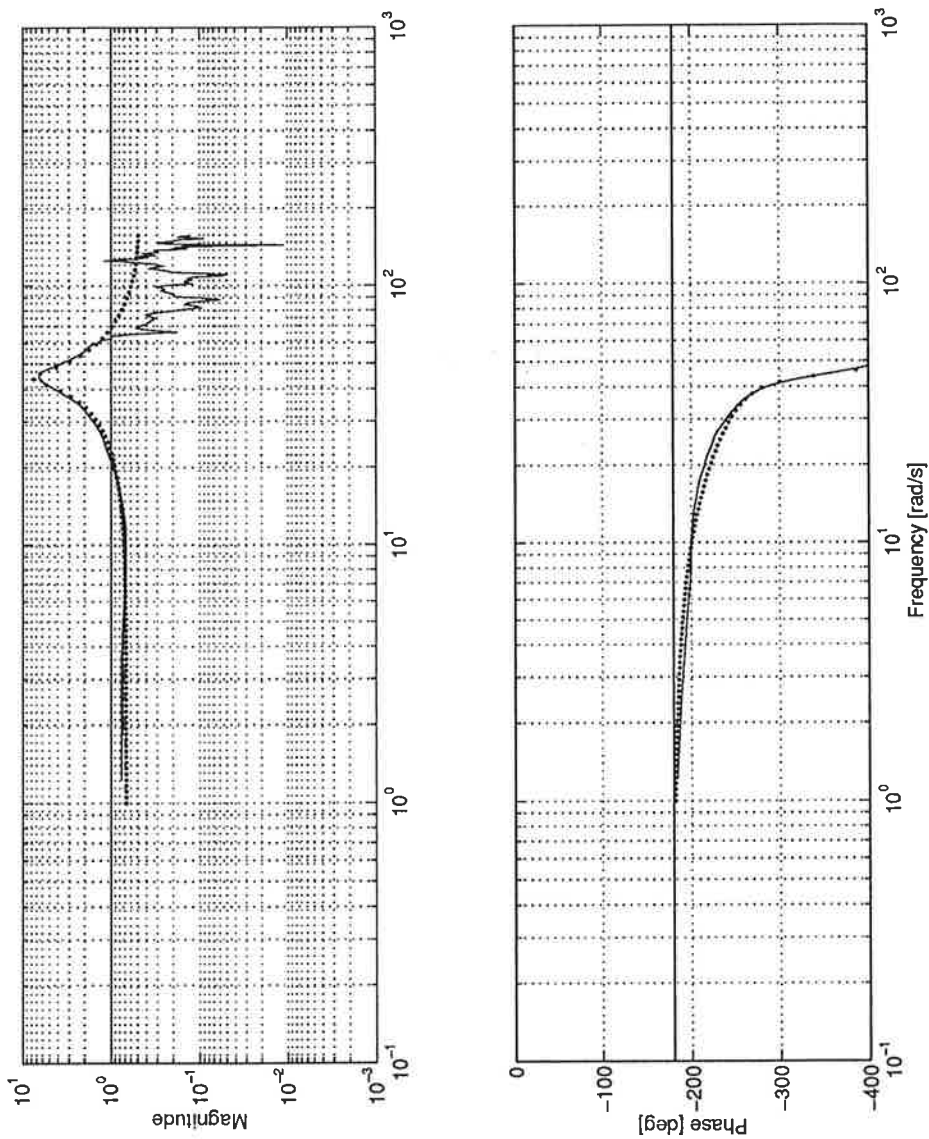


Figure 6: Spectral analysis of the tension based on the covariance functions (solid lines). The bode plot of the reduced order model (13) is added for comparison (dotted lines).

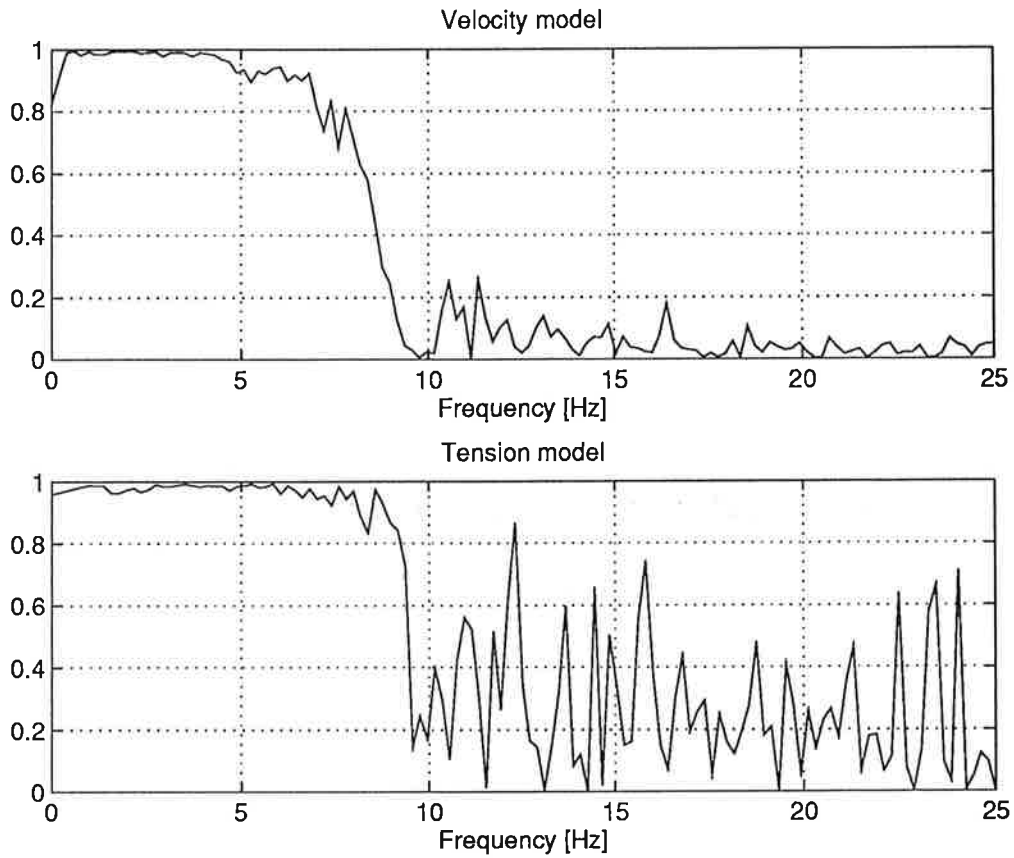


Figure 7: Coherence spectra.

validation against the practicality of a low model order, the following “best” models are selected among those few picked out models.

With a model structure

$$A(z)y(t) = B(z)x(t) + C(z)e(t), \quad (5)$$

for the velocity, an estimated ARMAX model with Akaike’s  $FPE=0.007268$  and loss function= $0.007229$  is

$$\begin{aligned} A(z) &= 1.000 - 0.8610z^{-1} - 0.0840z^{-2} + 0.0491z^{-3} \\ B(z) &= z^{-2}(0.0597 + 0.0819z^{-1} + 0.0780z^{-2}) \\ C(z) &= 1.0000 - 0.7822z^{-1} - 0.0283z^{-2} \end{aligned} \quad (6)$$

and using a model structure

$$y(t) = \frac{B(z)}{F(z)}x(t) + \frac{C(z)}{D(z)}e(t), \quad (7)$$

an estimated Box-Jenkins model with Akaike's FPE=0.007057 and loss function=0.007019 is

$$\begin{aligned} B(z) &= z^{-2}(0.0533 + 0.0305z^{-1}) \\ C(z) &= 1.0000 - 0.8203z^{-1} \\ D(z) &= 1.0000 - 0.8856z^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$F(z) = 1.0000 - 2.0549z^{-1} + 1.8165z^{-2} - 0.9489z^{-3} + 0.2275z^{-4}.$$

Similarly, for the tension, the polynomials of an estimated ARMAX model with Akaike's FPE=0.04957 and loss function=0.04914 are

$$\begin{aligned} A(z) &= 1.0000 - 2.1606z^{-1} + 2.7441z^{-2} - 1.8326z^{-3} + 0.7825z^{-4} - 0.1171z^{-5} \\ B(z) &= z^{-1}(0.1089 - 0.4522z^{-1} + 0.1606z^{-2} - 0.0955z^{-3}) \\ C(z) &= 1.0000 - 1.9007z^{-1} + 2.2625z^{-2} - 1.3697z^{-3} + 0.5253z^{-4} \end{aligned} \quad (9)$$

and of an estimated Box-Jenkins model with Akaike's FPE=0.04985 and loss function=0.04945 the polynomials are

$$\begin{aligned} B(z) &= z^{-1}(0.1139 - 0.4164z^{-1}) \\ C(z) &= 1.0000 - 1.8661z^{-1} + 1.5054z^{-2} - 0.5143z^{-3} \\ D(z) &= 1.0000 - 2.1259z^{-1} + 1.9993z^{-2} - 0.8141z^{-3} \\ F(z) &= 1.0000 - 1.8732z^{-1} + 2.0755z^{-2} - 1.0554z^{-3} + 0.3326z^{-4}. \end{aligned} \quad (10)$$

After concluding that there are no pole-zero cancelations to make in order to obtain lower order models, we try the method of balanced realization and model reduction. The ARMAX models are transformed into balanced state space realizations, where the diagonal of the Gramian corresponding to the velocity model is (1.28, 0.27, 0.06, 0.02) and to the tension model (4.15, 4.06, 0.43, 0.24, 0.01) (model reductions of the Box-Jenkins models give almost identical results so only the ARMAX models are considered here). The magnitude of the elements in a diagonalized Gramian indicates the relative importance of each state. Both models are thus reduced to second order. Back transformation then gives the model structure

$$A(z)y(t) = B(z)x(t) \quad (11)$$

with the velocity model polynomials

$$A(z) = 1.0000 - 1.3539z^{-1} + 0.4117z^{-2} \quad (12)$$



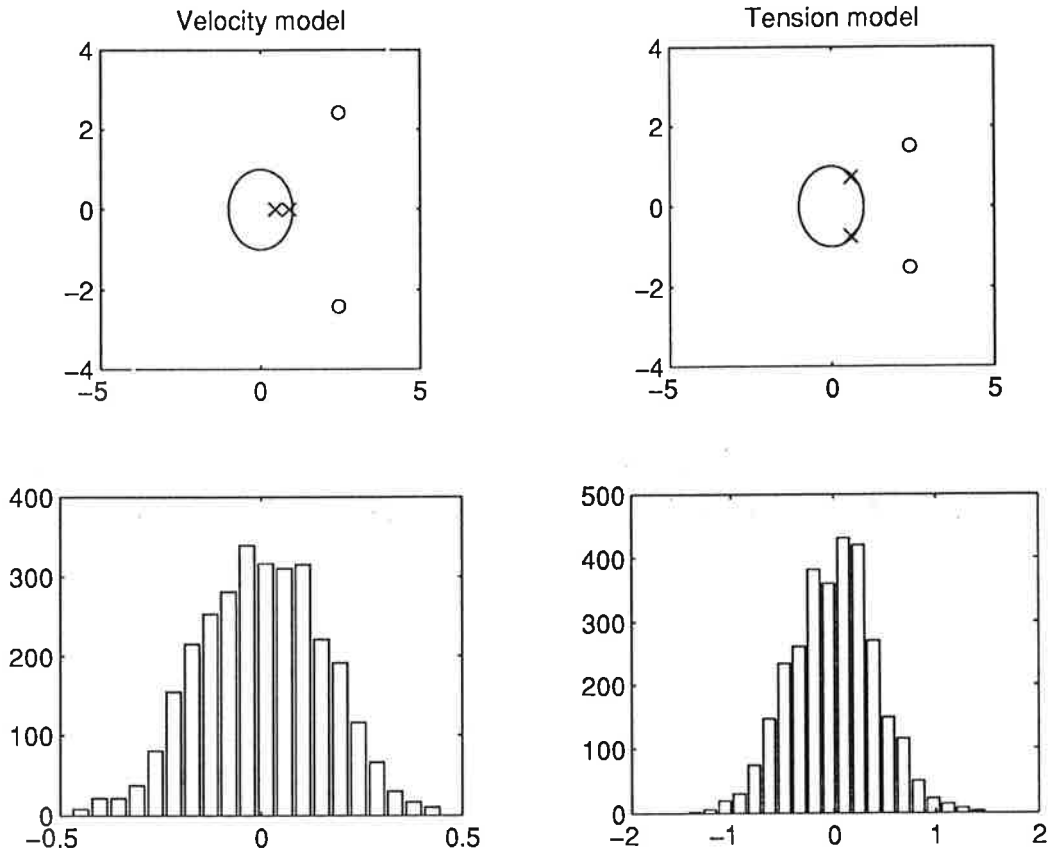


Figure 8: Pole-zero plots (upper) and histograms of the residuals (lower) of the reduced order models.

$$B(z) = 0.0154 - 0.0753z^{-1} + 0.1819z^{-2}$$

and the tension model polynomials

$$A(z) = 1.0000 - 1.1996z^{-1} + 0.8973z^{-2} \quad (13)$$

$$B(z) = -0.1094 + 0.5264z^{-1} - 0.8831z^{-2}.$$

Bode plots of these reduced order models are added to figures 5 and 6 for comparison with the spectral analysis based on the covariance functions. Furthermore, the pole-zero plots are shown in figure 8.

Residual analysis of a model is based on the assumption that the residuals should constitute a normally distributed white noise process with zero mean that is uncorrelated with inputs. But, since the models are reduced and there are no  $C(z)$  polynomials, this assumption is not expected to be fulfilled. Nevertheless, it might be worthwhile to see that the residual analysis does not

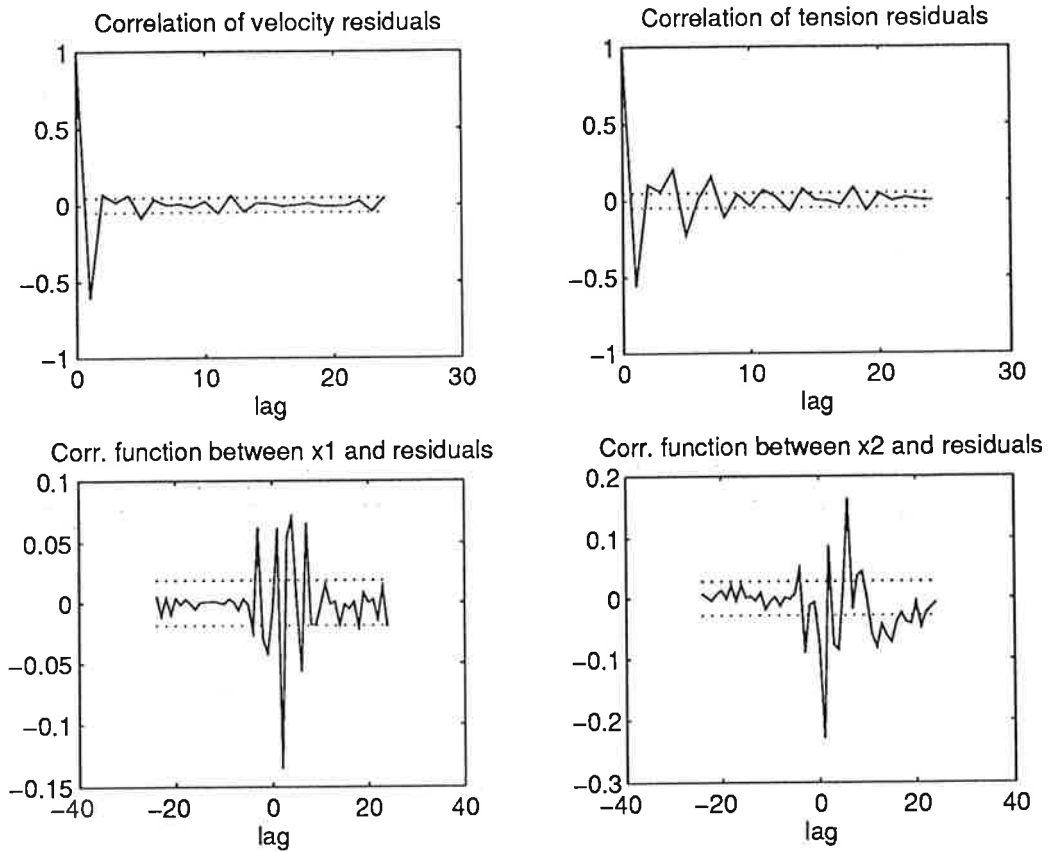


Figure 9: Cross validation residual analysis of the reduced order velocity model (left) and tension model (right).

look too bad. The histograms of the cross validation residuals in figure 8 seem to approximately fulfil normal distribution with zero mean. However, the correlations of the residuals in figure 9 do not stay within the 99% confidence limits for the residuals to be uncorrelated. Neither do the correlation functions between residuals and inputs. For the unreduced models, residual analysis looks slightly better for the velocity but however not for the tension. From figure 10 it can be seen that the cross validation simulations of the reduced order models follow the recorded outputs pretty well. Since the difference as compared to the unreduced models is small, we opt for the lower order reduced models.

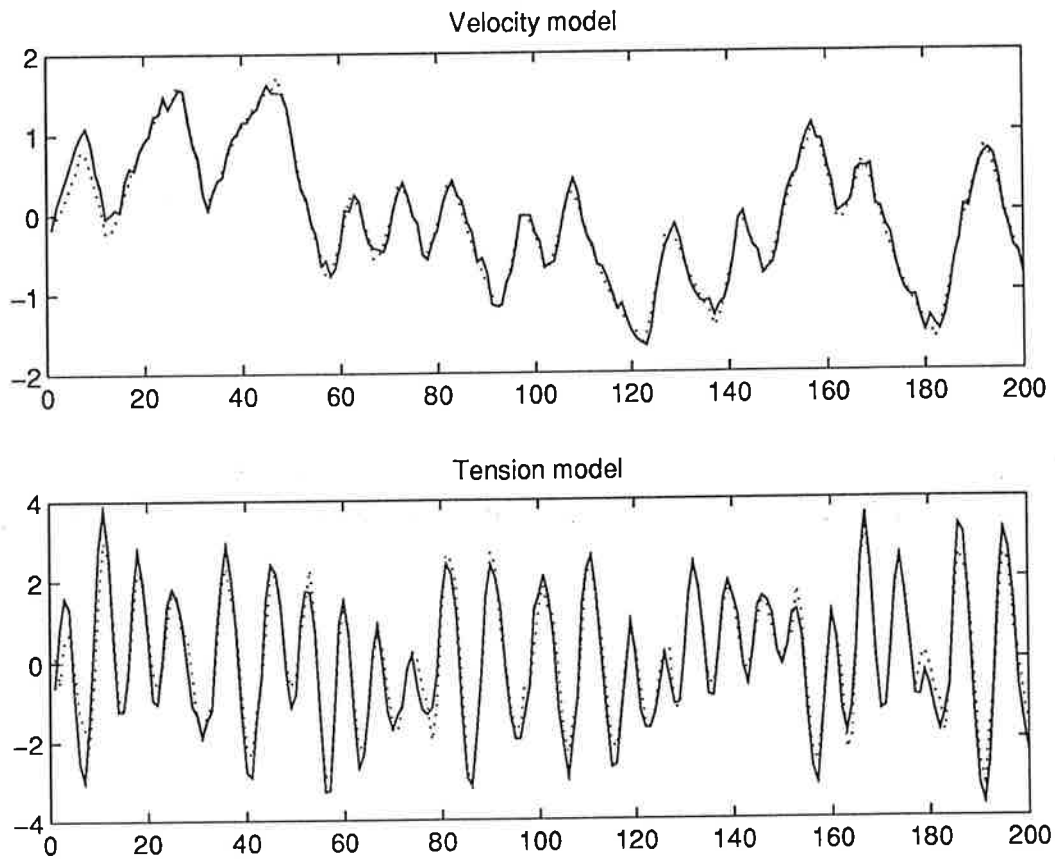


Figure 10: Cross validation simulations of the reduced order models (dotted lines). Recorded outputs are shown for comparison (solid lines).

## 4 Control

We use the method of pole placement in the same manner as in Laboratory Exercise 3, choosing a natural frequency of 30 and placing the  $A_m$  poles at 45 degrees angles in the left half of the  $s$ -plane, with the  $A_o$  pole placed twice as fast at - 60. Using conversion to discrete time of the  $A_m$  and  $A_o$  polynomials, we obtain, with help of the `rstd`-function, the velocity RST controller

$$\begin{aligned}
 R(z) &= 1.0000 - 0.0496z^{-1} \\
 S(z) &= 1.5442 - 0.6134z^{-1} \\
 T(z) &= 2.5700 - 0.7740z^{-1}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

With the zeros of the  $S$  polynomial approximately canceling the poles of the tension model (see figure 8) and the  $R$  polynomial behaving almost as an

integrator, we get the tension RST controller

$$\begin{aligned}R(z) &= 1.0000 - 1.8000z^{-1} + 0.8125z^{-2} \\S(z) &= 0.0556 - 0.0685z^{-1} + 0.0527z^{-2} \\T(z) &= 0.0700.\end{aligned}\tag{15}$$

Bode plots of the loop transfer functions are shown in figures 11 and 12. As can be seen, there are enough of both gain and phase margin (for reasons explained earlier, the tension regulator phase starts at 180 degrees, so the margins should be considered relative to a 360 degrees phase). Finally, listings of software files implementing both regulators at the same time are found in appendix A.

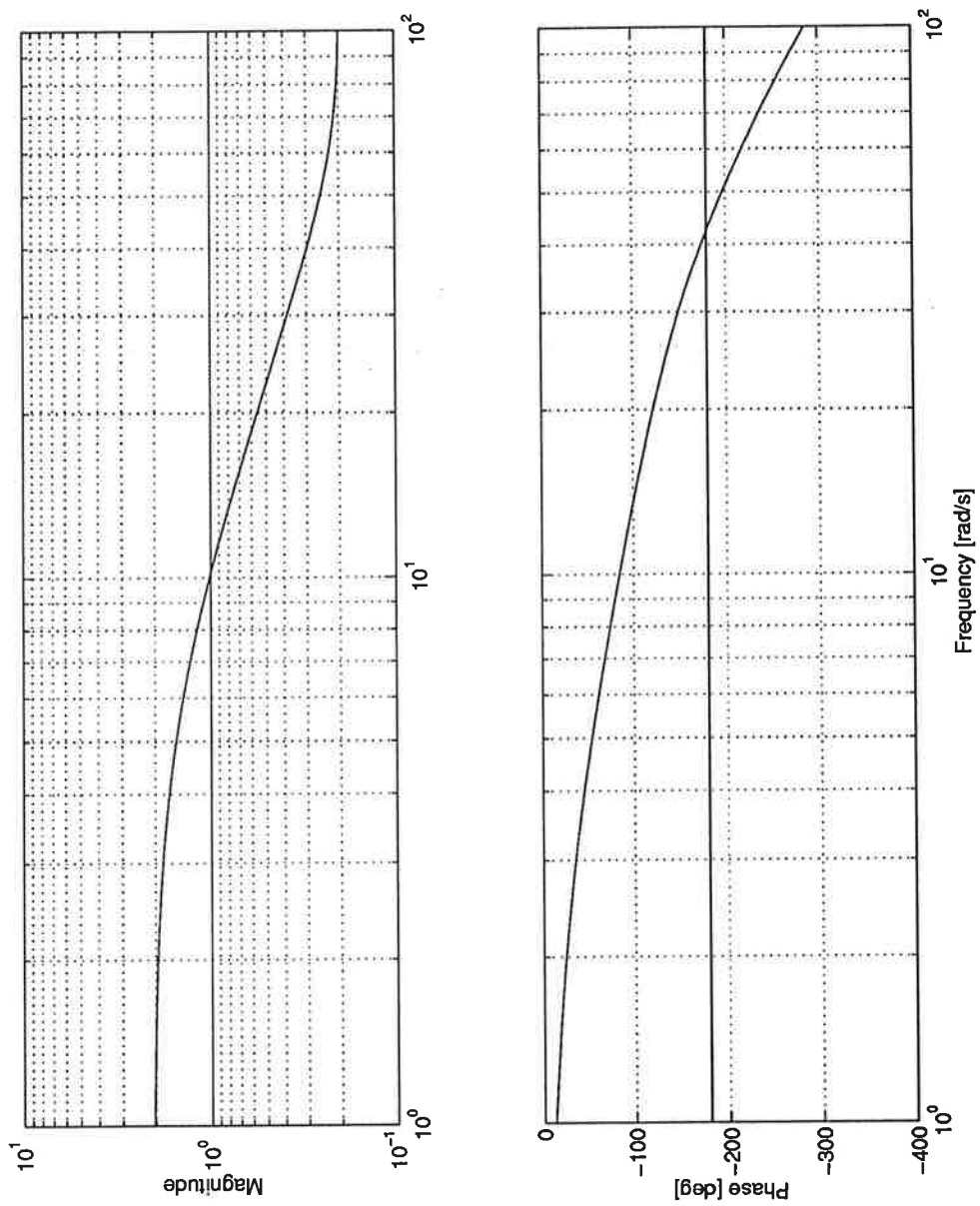


Figure 11: Bode plot of the loop transfer function with the velocity regulator.

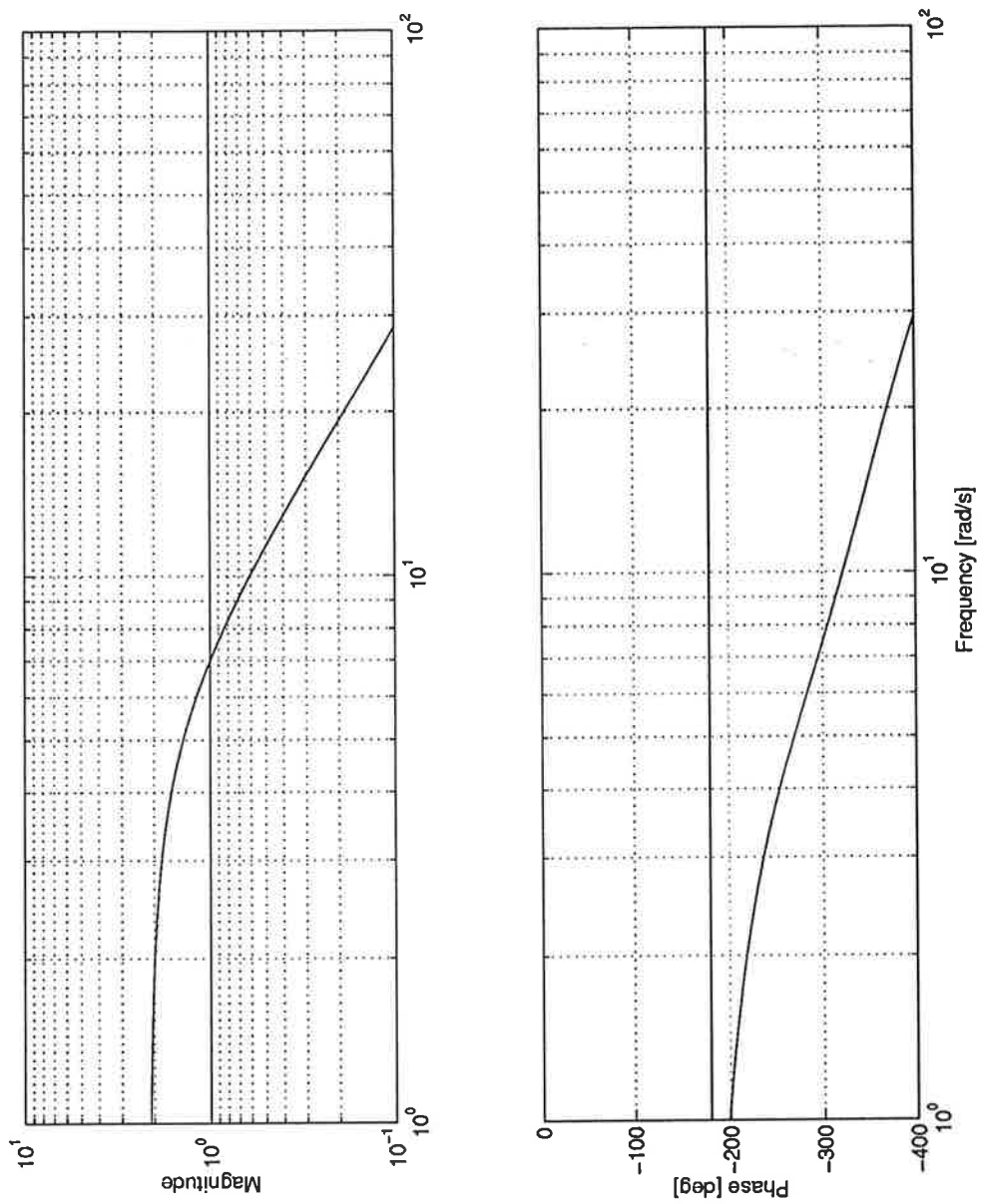


Figure 12: Bode plot of the loop transfer function with the tension regulator.

## A Listing

The Simnon file implementing the regulators and the initialization file for Ddcmain to use the simnon file are listed here.

### A.1 Listing of the Simnon regulator implementation

```
DISCRETE SYSTEM velten
```

```
INPUT   yv   yt   refv   reft
OUTPUT  u1   u2
STATE   yt1  u11  u21   dif1   yv1   ucv1  sum1
STATE   yt2  u12  u22   dif2
NEW     nyt1 nu11 nu21  ndif1  nyv1  nucv1 nsum1
NEW     nyt2 nu12 nu22  ndif2
```

```
TIME t
TSAMP ts
```

```
" Controller for the Tension
```

```
tens=yt*3
uct=reft/3
auxt1=u11-u21
auxt2=u12-u22
dif=t0t*uct-s0t*yt-s1t*yt1-s2t*yt2-r1t*auxt1-r2t*auxt2
```

```
" Controller for the Velocity
```

```
vel=yv*1
ucv=refv/1
auxv=u11+u21
sum=t0v*ucv+t1v*ucv1-s0v*yv-s1v*yv1-r1v*auxv
```

```
" Input signals
```

```
var1= dif/2+sum/2
var2=-dif/2+sum/2
u1=if var1<-ulim then -ulim else if var1>ulim then ulim else var1
```

```
u2=if var2<-ulim then -ulim else if var2>ulim then ulim else var2
```

```
" Update controller state of Tension  
nyt2=yt1  
ndif2=dif1  
nyt1=yt  
ndif1=dif
```

```
" Update controller state of Velocity  
nucv1=ucv  
nyv1=yv  
nsum1=sum
```

```
" Update controller state of Inputs  
nu12=u11  
nu22=u21  
nu11=u1  
nu21=u2
```

```
ts=t+h
```

```
h:0.02  
ulim:0.600
```

```
" Parameters of the Tension controller  
r1t:-1.8000  
r2t: 0.8200  
s0t:+0.0833  
s1t:-0.1028  
s2t: 0.0790  
t0t:+0.0700
```

```
" Parameters of the Velocity controller  
r1v:-0.0496  
s0v:+1.5442  
s1v:-0.6134  
t0v:+2.5700  
t1v:-0.7740
```



END

## A.2 Listing of the Ddcmain initialization file

```
" Initialization of the Tension Controler
"
"File : initvt.mac

newsystem vt velten
adconnect vt yv 0 yt 1
daconnect vt u1 0 u2 1
plotconnect vt tens 0 reft 0
plotconnect vt vel 1 refv 1
bgconnect vt reft refv
showsystem vt
```

# System Modeling & Identification

## Project

### Identification of a flexible servo

Nuno Filipe Rodrigues da Costa

*Lund Institute of Technology, LTH, 1995*

Advisor: Lennart Andersson

## Contents:

1. Introduction	2
2. Purpose Formulation	2
3. Physical Modeling	2
4. Experiments	3
4.1 Simple experiments	3
4.1.1 Frequency response analysis	3
4.1.2 Step response analysis	5
4.2 Final experiments	6
5. Identification	7
5.1 Estimation of $H(z)$	7
5.2 Model validation	10
5.3 Estimation of $G(s)$	13
6. Control Design	14
6.1 Proportional controller	15
6.2 Proportional integral controller	16
6.3 Comparison	18
7. Bibliography	20
8. Resources	20

## 1. Introduction

The main goal of this project was to identify a flexible servo. I started by deriving the continuous transfer function of the real system from the physical specifications. A second order transfer function was then obtained. Some experiments were then performed in order to get some insight on the process. In particular, frequency response analysis as well as step response analysis and some experiments with Pseudo-Random Binary Sequences (PRBS). Some problems came up during the experiments. They were related with nonlinearities due to friction. In order to reduce these problems a bias had to be introduced when performing the experiments.

After getting some primary knowledge about the system, I tried to obtain an estimate of the process from the collected data of the PRBS experiment. It happened that the process could be approximated by a first order model in quite a good way. It was then necessary to demonstrate the ability of the model to reproduce the behavior of the real system.

Finally, I tried to get a good controller for the servo by using the pole-placement design method and then basing our choice on the ability of the regulator to control the model obtained previously.

## 2. Purpose Formulation

The accuracy of the identified model depends on the purpose of use of the model. In our case, the model is to be used for control. Therefore, it is necessary to have an accurate model around the crossover frequency.

## 3. Physical Modeling

In the last section we defined the purpose of our model. In this section we will derive the transfer function of the real system by direct application of the physical laws that govern the system. Some knowledge regarding model order, linearity and possible pole and zero locations, can then be obtained from the transfer function.

The servo system can be divided into two subsystems: one electrical and one mechanical. We then try to get the transfer functions of these subsystems and then, from these, we try to get the global transfer function.

For the electrical system we have, according to Kirchoff's voltage law, that

$$u = Ri - k\omega + L\frac{di}{dt}$$

where  $i$  denotes the electric current,  $R$  a resistance,  $\omega$  the angular velocity and  $L$  the inductance. As for the mechanical system we get that

$$J\frac{d\omega}{dt} = T_d - T_l$$

where  $T_d$  denotes the drive torque and  $T_l$  the load torque due to friction. This expression can be written as

$$J \frac{d\omega}{dt} = ki - T_0 - D\omega$$

where  $T_0$  is the load torque and  $D$  the damping proportional to the angular velocity,  $\omega$ , since that when  $\omega$  increases, the friction also increases. We then have for

$$\begin{aligned} T_d &= ki \\ T_l &= T_0 + D\omega \end{aligned}$$

the system's equations given by

$$\begin{aligned} u &= Ri - k\omega + L \frac{di}{dt} \\ J \frac{d\omega}{dt} &= ki - T_0 - D\omega \end{aligned}$$

If we take the Laplace transform and replace  $\omega$  by  $y$ , we have as the final result, the transfer function

$$G(s) = \frac{k}{LJs^2 + (LD + RJ)s + (RD - k^2)}$$

## 4. Experiments

In the previous section, we derived the transfer function of our process from the physical laws. In this section, we show the results obtained when performing some experiments with the servo system.

First, we do some frequency response analysis using a Frequency Response Analyzer and the IBM PC/AT program PCFRA. The Bode plots obtained are presented. From them it is possible to get some knowledge about the process.

Secondly, we do some analysis based on the step response obtained when using the LOGGER program. Some results concerning time constants can then be obtained.

Finally, a Pseudorandom Binary Sequence (PRBS) is generated, also with the help of the LOGGER program, to be used in the identification process.

### 4.1 Simple Experiments

#### 4.1.1 Frequency Response Analysis

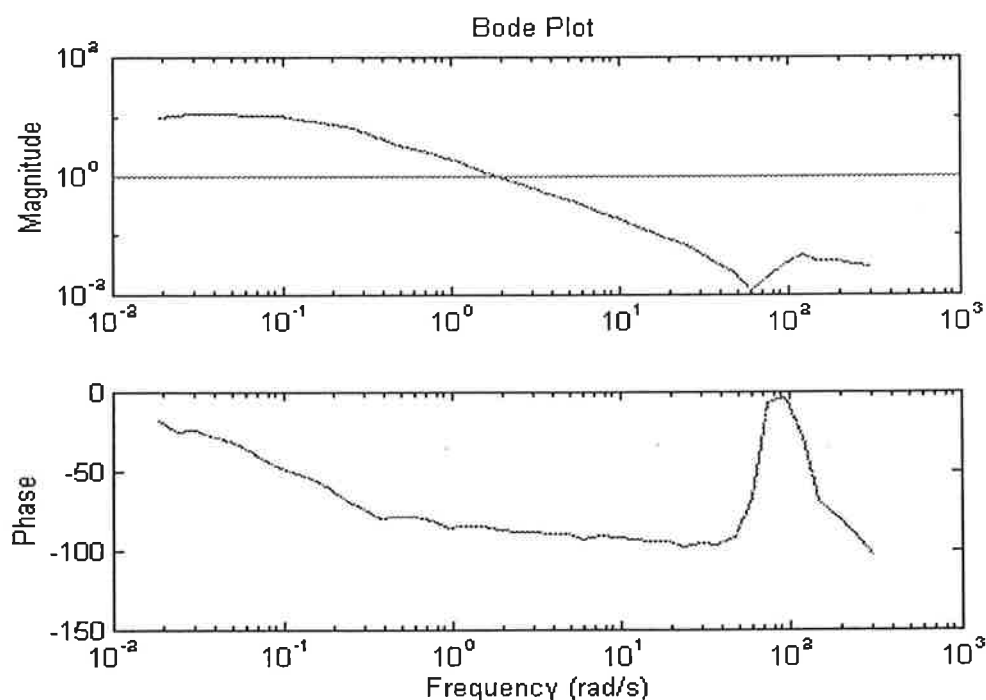
The frequency response analysis is done according to the Correlation method.

Some conditions have to be chosen such as frequency range, measurement time, measurement delay, Bias and amplitude. First, we tried with mean velocity equal to zero and we have obtained a response different from the one we expected. This was due to the nonlinearities that come from the friction acting on the servo motor. In order to reduce or eliminate such problems, a bias has to be introduced so that we can guarantee that the servo will only rotate in one direction reducing, in this way, the problems caused by friction. Experiment 3 gives a better result closer to what we have expected. Figure 4.1 shows what we have obtained.

### Experiment 3:

amplitude	0.3v
bias	0.8v
waveform	sinus
min frequency	0.001Hz
max frequency	50Hz
log increment	1E1steps/dec

integration time	50s
measurement delay	30s



**Figure 4.1.** Frequency response analysis - experiment 3.

Figure 4.1 is not very clear. We can see that the system can be approximated by a first order system since that the influence of the second pole is not visible and therefore it should be considered a non-dominating pole. It appears that the pole is at a frequency of  $0.17\text{rad/s}$ . However, this is not the case, as we can see from the phase plot. It is known that for a frequency close to the frequency of a pole, the phase should be  $-45^\circ$ . If we use this knowledge, we see that when the phase is around  $-45^\circ$  the pole is then located approximately at  $0.06\text{rad/s}$ . Therefore, something is wrong about the magnitude plot. After doing some more experiments, in which I have used different experimental conditions, I came to the conclusion that we have an input signal with a very high level of excitation, in experiment 3, which makes the servo reach the top limit. In order to test the linearity of the system, another experiment is performed. Some changes are introduced in the amplitude and mean values. However it was noticed that the system behaved in the same way. We can then assume that the process is linear.

#### 4.1.2 Step Response Analysis

In here, some transient response analysis is performed using the step as input. Some more information can be obtained regarding the dominating time-constants, time-delays and stationary gain.

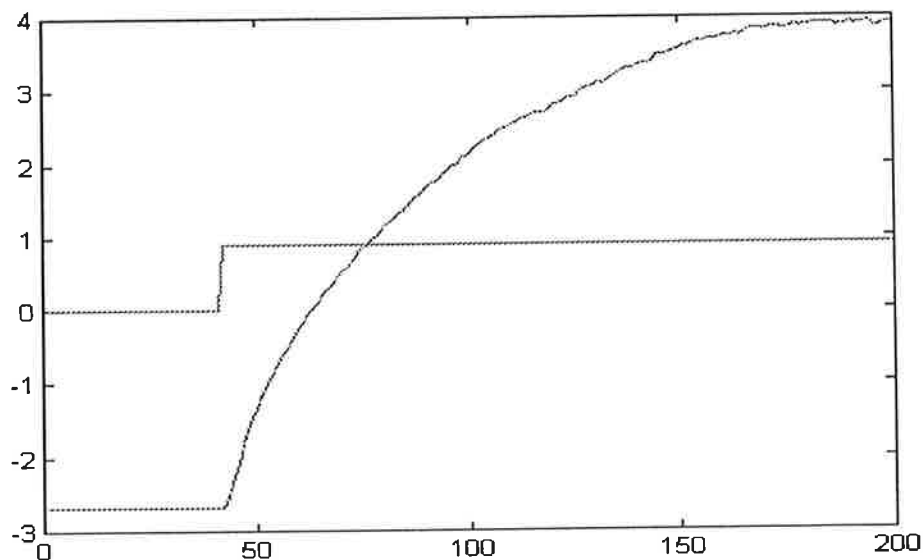


Figure 4.2. Step response analysis.

As before, we need a mean velocity different from zero to reduce friction. The conditions used to obtain the step response were

Amplitude:	0.45
Mean:	0.45
Sampling period:	500ms
PRBS period:	400samples
Number of data points:	200

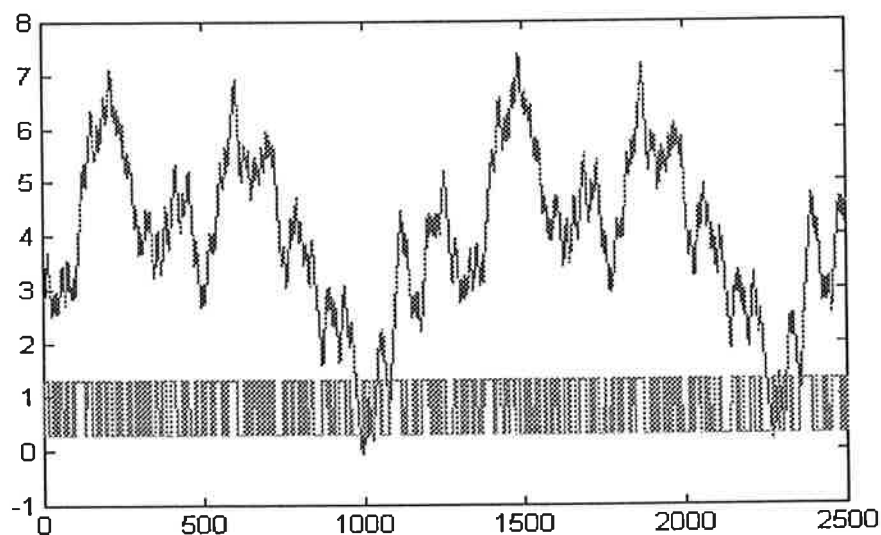
From the figure we obtain a time constant of about 21.65s for a percentile level of 63.5% and a gain of 6.5714.

## 4.2 Final Experiments

In order to get a good experiment the input signal has to have high energy in a large frequency range ( $|U_k|^2$  large). Again, we use LOGGER to generate our input signal. We have to impose some conditions in order to avoid aliasing and to reduce friction problems. My choice was

Amplitude:	0.5
Mean:	0.8
Sampling period:	100ms
PRBS period:	5samples
Number of data points:	2500

Figure 4.3 shows our PRBS signal as well as the system's response.



**Figure 4.3.** PRBS response.

Some investigation will now be performed, in order to get a suitable model. The steps will be given in section 5.



## 5. Identification

This section is divided into four small sections. Section 5.1 describes the procedure followed to identify a discrete-time model for the servo system. We use the data generated by the LOGGER experiment with the PRBS signal and apply it to reach “a model of least possible complexity within the limits of required model accuracy”, Rolf Johansson, (1993). In section 5.2 some validation criteria is used to prove that the model obtained is a good approximation and that it fulfills the modeling requirements. Section 5.3 deals with continuous-time identification. The results obtained are compared in section 5.4 with the ones obtained in section 5.1 according to the transformation  $z = e^{i\omega h}$

### 5.1 Estimation of $H(z)$

Taking the data collected and using Matlab we proceed our calculations. First, it is necessary to do some bias reduction so that we are able to get some consistent estimates for a certain model order. We start by eliminating the trends of the data. As it was said before, we need a signal with good excitation. We can check if the input excites the system or not by studying the coherence spectrum. From the spectrum, figure 5.1, we can conclude that the input signal has good excitation for frequencies below 2rad/s.

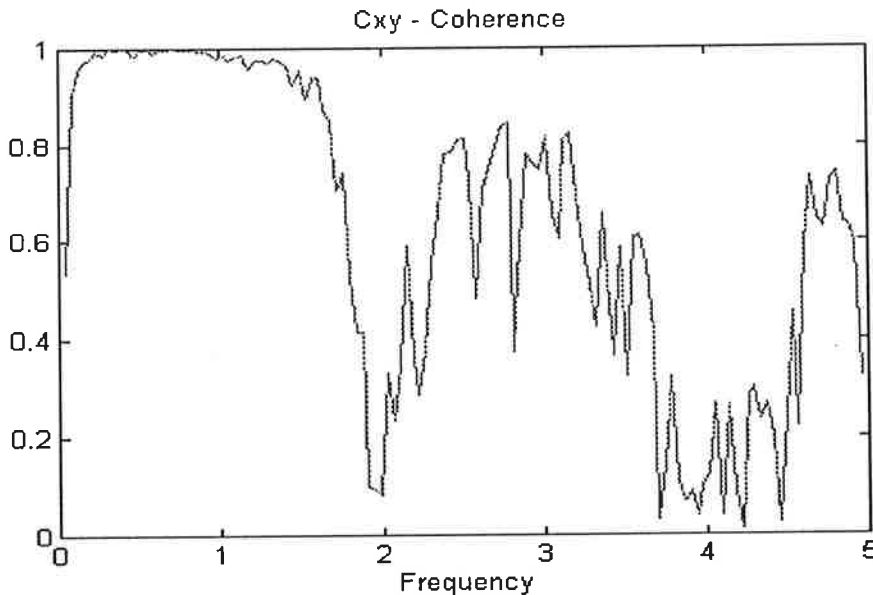


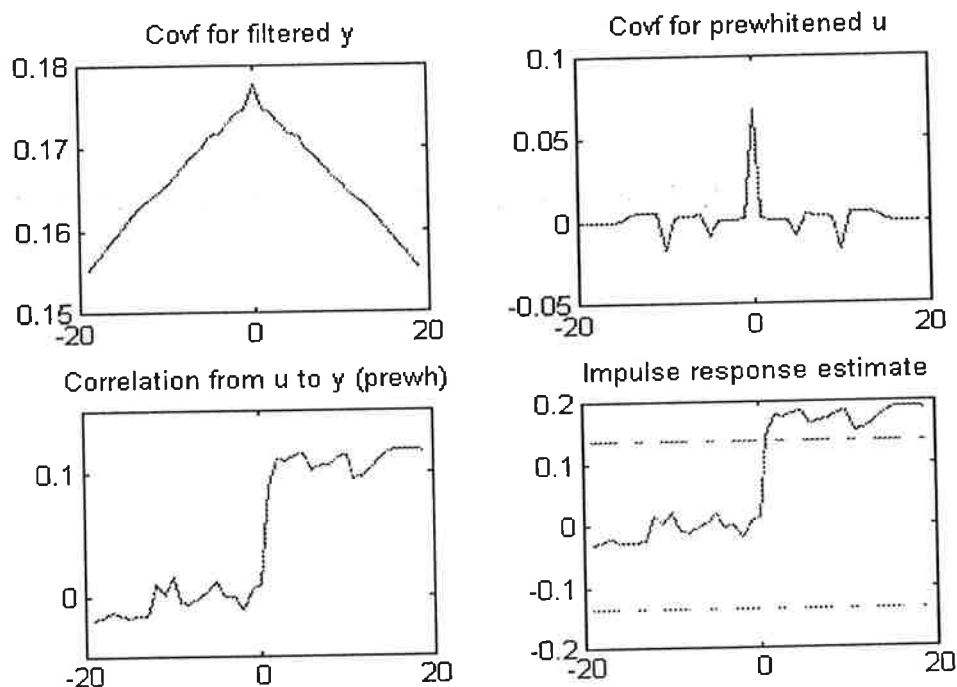
Figure 5.1. Coherence spectrum for different frequencies in rad/s.

Some spectral estimation techniques as well as correlation analysis are now used to obtain a nonparametric model estimation.

### Correlation Analysis

Using correlation analysis, we can estimate the impulse response, also known as weighting function, by using the covariance function

$$\hat{C}_{yu}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l) \cdot \hat{C}_{uu}(k-l)$$



**Figure 5.2.** Correlation analysis.

It can be seen from the covariance graphic of the prewhitened  $u$  ( $u_f$ ), that it resembles white noise. The correlation from  $u_f$  to  $y_f$  is also shown as well as an estimate of the true impulse response, for a significance level of 99%. The step response can now be computed as the cumulative sum of the impulses.

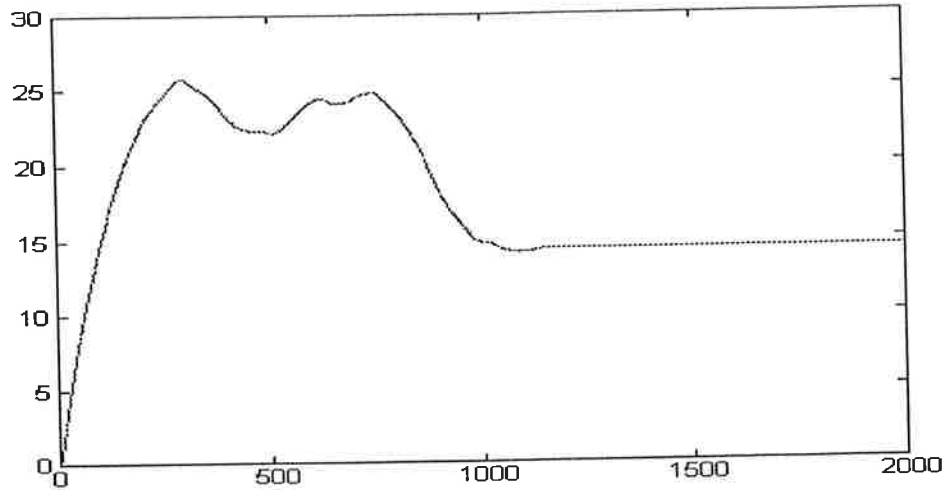


Figure 5.3. Step response.

Figure 5.3 shows the systems step response. We have a static gain of about 14 and a time constant of about 11 or 12s, which is rather fast when compared with the result I got in section 4.1.2.

### Spectral Analysis

As it was said before, two important methods are used to get an estimate of the transfer

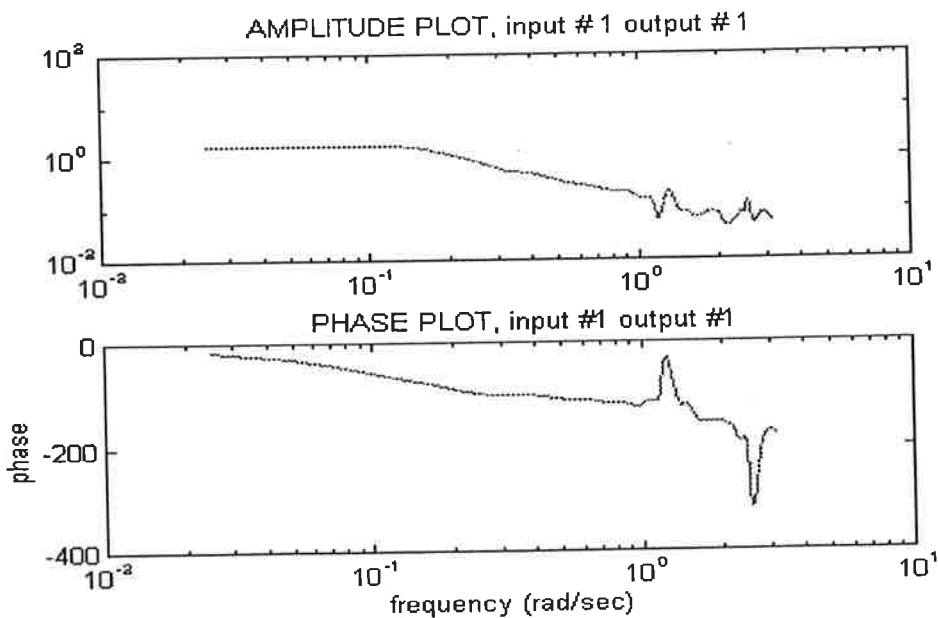


Figure 5.4. Correlogram.

function between  $u$  and  $y$ . The first uses a direct approach, i.e, it uses the discrete Fourier transform directly. This method gives the periodogram. The second one, is based on a covariance estimate followed by the discrete Fourier transform and gives the correlogram. The noise properties are, of course, different for the two methods since that they rely on the noise spectrum and on the crosscovariance between the input and the disturbance. In the correlogram, the contribution of the disturbance is small if  $u$  and  $v$  are uncorrelated. We therefore simply present the correlogram as it can be seen in figure 5.4. Using the same knowledge as in section 4.1.1, we see, from the phase plot, that the pole is at 0.06.

We will now try to obtain a parametric model of the process. First, an autoregressive model with exogenous input (ARX) is considered. We start by estimating an ARX-model of order 10 and then try to reduce the model order using balanced state space realization. By looking at the Grammian matrix,

$$\Sigma = [14.1228 \ 0.0339 \ 0.0058 \ 0.0026 \ 0.0026 \ 0.0023 \ 0.0013 \ 0.0005 \ 0.0003 \ 0.0001]$$

we see that we can eliminate the last 9 states and thus reduce the model to a first order model. After some calculations we get to the transfer function

$$H(z) = \frac{-0.0347z + 0.2064}{z - 0.9939}$$

The ARX-model doesn't, however, describe colored noise. An autoregressive moving average model with exogenous input (ARMAX) may behave better as it gives a more exact description of the noise sequence. We calculate two ARMAX-models with different orders, one of order 3 with a delay of 2 and a C polynomial of order 2 and the other of order 5 with a delay of 1 and a C polynomial of order 3. By applying the Akaike's Final Prediction Error (FPE) method we chose the ARMAX of order 5. Using the same procedure as before, we do a balanced realization to reduce the order of the system and we get the Grammian

$$\Sigma = [14.1321 \ 0.0336 \ 0.0076 \ 0.0014 \ 0.0007]$$

which also suggests a first order model. After reducing the model's order we see that the first order model obtained is identical to the one derived from the high order ARX-model.

## 5.2 Model Validation

The ARX model obtained in section 5.1 needs now to be evaluated according to some criteria like pole-zero plotting, Bode diagrams, simulation and cross-validation. The purpose of this section is to verify that the "identified model fullfils the requirements of good model approximation".

### Pole-zero plot

The pole-zero can be a good test to check if the order of our model is too high. We have already an idea of the location of the dominating pole from section 4.1.1. We thus calculate the right position of the pole and zero

$$H(q) = \frac{-0.0347q + 0.2064}{q - 0.9939} = -0.0347 \cdot \frac{q - 5.9481}{q - 0.9939}$$

We then have a pole at 0.9939 and a zero at 5.9481.

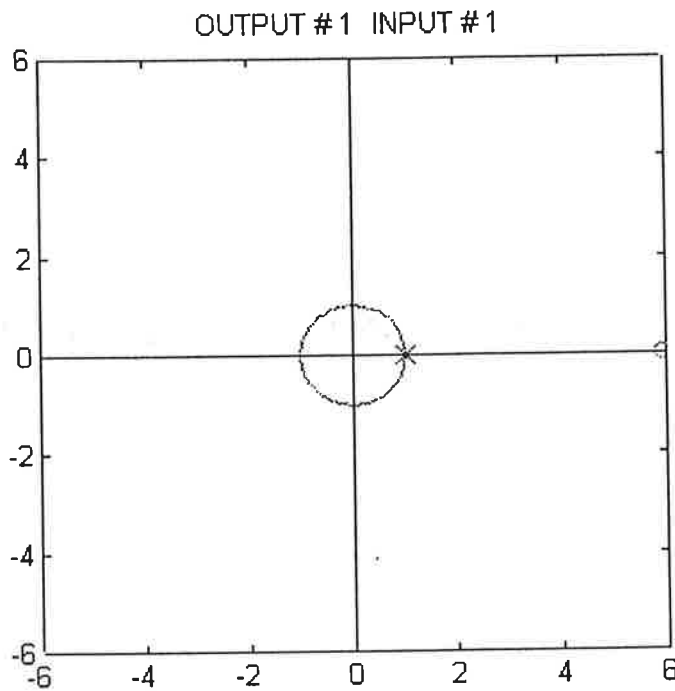
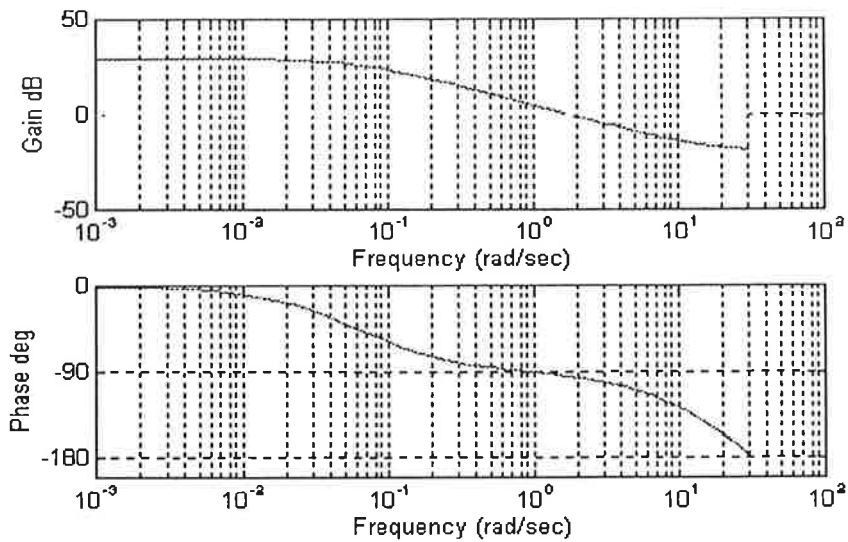


Figure 5.5. Pole-zero plot.

### Bode plot

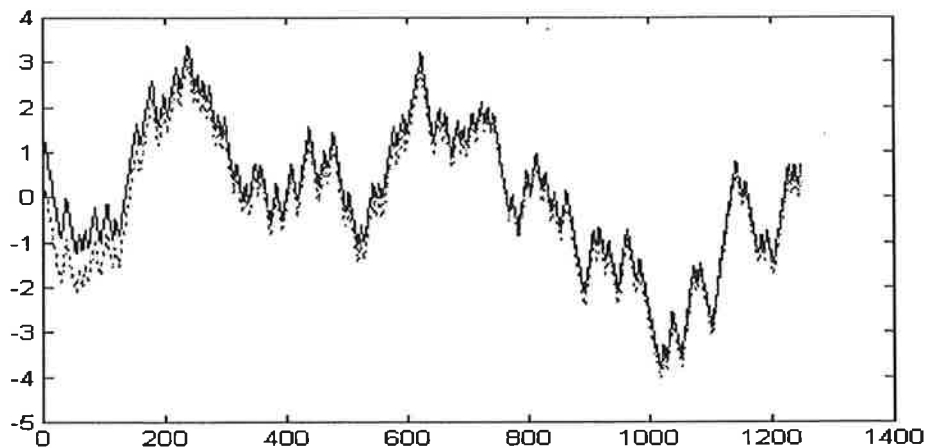
The Bode plot should be consistent with the ones obtained in sections 4.1.1 and 5.1. In fact there are some resemblances, for the frequencies shown in figure 5.6. From this figure we see that the model's constant gain and the dominating pole have similar values to the real system.



**Figure 5.6.** Bode plot of the estimated model.

### Cross validation

An interesting test is the cross validation. The model's response to the input data not used before is compared with the response of the real system. In order to get a more realistic result, the residuals are also used so that the noise model can also be taken into consideration. Again, the results presented in figure 5.8, show that the model is appropriate.



**Figure 5.8.** Cross validation.

An extra experiment is done using the ARMAX-model of order 3 used in section 5.1, to see if there would be any improvement but the results obtained were the same as before. Therefore we may conclude that the purpose of "finding a model of least complexity possible, within the limits of required accuracy", was achieved. Our identification has been completed.

### 5.3 Estimation of $G(s)$

In the last section, we have derived a discrete-time model for our process. We now try to give the continuous-time counterpart of the obtained model, just by applying a zero order hold transformation. Since that our input signal to the process is piecewise constant, this will give a very precise approximation. The pole obtained (-0.0612) through this transformation is approximately at the same position as the one of the real process. However, there are problems when translating the zeros from the discrete-time system to the continuous one. Therefore, we shall attempt to do a continuous-time estimation of the real process transfer function. First, we shall try to reduce the second order system to a first order system just by cancelling some parameters. Then we filter the input and output through a filter  $\lambda$ . After, using a PRBS signal we try to estimate the parameters using the Least-squares method. Finally we compare the results with the results obtained for the discrete-time model.

Our transfer function is given by

$$G(s) = \frac{k}{L.J.s^2 + (R.J + L.D).s + (R.D - k^2)}$$

Since we want a first order transfer function, we then should have

$$\frac{b}{a_1.s + a_2} = \frac{k}{L.J.s^2 + (R.J + L.D).s + (R.D - k^2)}$$

from which we take

$$\begin{cases} b = k \\ a_1 = R.J + L.D \\ a_2 = R.D - k^2 \\ L.J = 0 \Rightarrow L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = k \\ a_1 = R.J \\ a_2 = R.D - k^2 \end{cases}$$

Since the mechanical time constant is bigger than the electrical time constant, we assume that the inductance  $L$  of the electrical circuit can be neglected. Applying the filter  $\lambda$  we come to the final linear equation

$$y(t) = \left( [\lambda.y](t) \quad [\lambda.u](t) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{a_2}{a_1} \tau \\ \frac{b}{a_1} \tau \end{pmatrix} = \phi^T \cdot \theta$$

We see that it is only possible to estimate two of the three parameters.

We now generate a PRBS signal in order to perform the estimation.

The filter is approximated in discrete-time using Tustin's method. We use  $h=0.01$  and we get for the filter

$$\lambda = \frac{0.01z + 0.01}{(2\tau + 0.01).z + 0.01 - 2\tau}$$

where  $\tau$  is the only unknown parameter. Some values for  $\tau$  were tried. I tried to get some results that would indicate some kind of relationship between the values of the gain and the pole of the model and the values of  $\tau$ . Unfortunately, I didn't get good results in general. However, the results I got indicated that  $\tau$  should be chosen within the interval from 0.1 to 1, approximately. When choosing  $\tau$  a compromise needs to be done between the sensitivity to noise and the excitation we want to have. I therefore chose the value  $\tau=1$

$$\begin{aligned} \frac{b}{a_1} \tau = 1.7728 &\Rightarrow \frac{b}{a_1} = 1.7728 \\ 1 - \frac{a_2}{a_1} \tau = 0.9273 &\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = 0.0727 \end{aligned}$$

As we can see we have a pole quite close to the one of the real process. Discretizing the transfer function with  $h=0.1$  we get

$$\frac{1.7728}{s + 0.0727} = 24.385 \frac{0.0727}{s + 0.0727} \xrightarrow{h=0.1} 24.385 \frac{1 - e^{-(0.0727h)}}{z - e^{-(0.0727h)}} = \frac{0.1766}{z - 0.9927}$$

which gives a discrete-time pole similar to the one, obtained in the discrete-time model.

## 6. Control

In the last section we have derived a model capable of describing the real system. In this section, we attempt to design a regulator capable of controlling our system. Pole placement is used to design the controller based on the model. After it has been designed, it needs to be evaluated. This is done by plotting the Nyquist curve of the loop transfer function.

$$H_0(q) = \frac{B(q).S(q)}{A(q).R(q)}$$

If the curve passes close to -1 the design is probably not very good. Of course that our controller stabilizes the model, but since that this is just an approximation of the true process, it doesn't describe it with total exactitude and therefore our closed-loop system may be unstable.



When we think about closeness to -1 we think about phase and gain margins. Suitable values are 2 for the gain and 60 for the phase margin. For our model, we see from figure 5.6, that we have a gain margin of about 20 and a phase one of  $90^\circ$ . We can also see from the step response graphic, in figure 6.1, that the model has a time constant of about 16.2s.

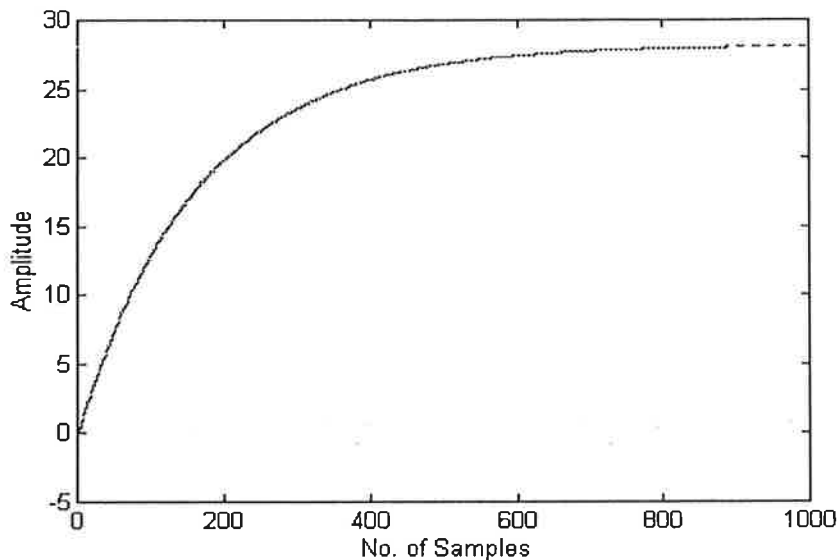


Figure 6.1. Step response plot of the estimated model.

Two types of controllers are going to be derived: proportional and proportional-integral controllers.

### 6.1 Proportional controller

As we have seen in section 5.1, we have a model with a denominator polynomial

$$A = [1.0000 \ -0.9939]$$

and a numerator

$$B = [-0.0347 \ 0.2064]$$

I first built a controller for a frequency  $w=1$  and an order  $n=1$ . Since we are using a proportional controller, we get a closed-loop system of order one which is always stable. The system has a gain margin of about 25 and a phase margin of about 90. However, the closed-loop step response is very slow which is due to a low gain in our controller, figure 6.2. The closed-loop pole is in 0.9048, rather close to 1. If we think in continuous terms, the pole will be rather close to the origin,  $w$  is approximately zero, and therefore we don't get a fast response.

The polynomials are

$$\begin{aligned} A_{mc} &= [1 \ 1] \\ A_{oc} &= 1 \\ A_m &= [1 \ -0.9048] \\ A_o &= 1 \\ R &= 1 \\ S &= 0.5089 \\ T &= 0.5444 \end{aligned}$$

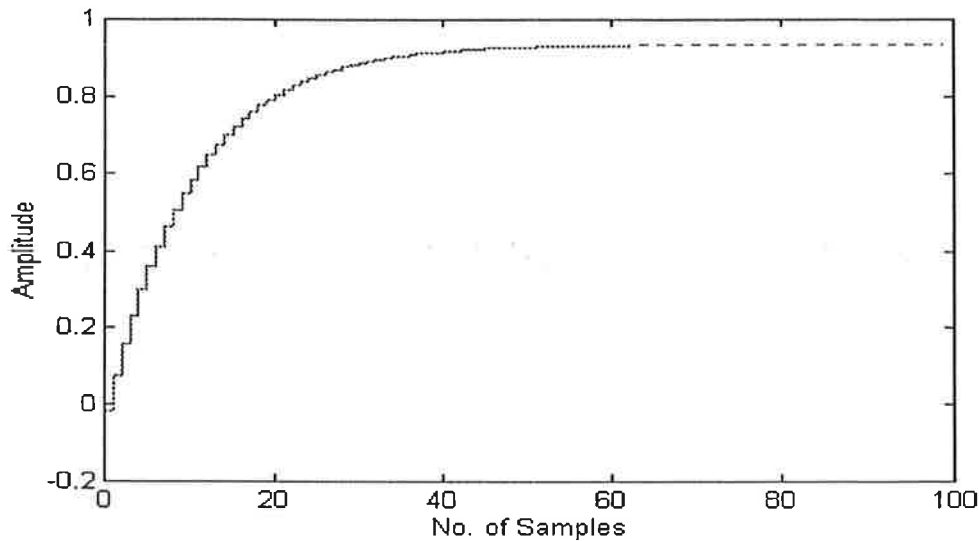


Figure 6.2. Closed-loop step response - proportional controller with  $w=1$ .

Of course that we can increase the speed by increasing the frequency  $w$ . We tested several values for  $w$  and we noticed that got closer to -1 but still different from the desired value, -0.5 (gain margin=2).

There are, however, some problems with the proportional controllers, since that they will not eliminate load disturbances (in this case, friction) in stationary. A static error will always be present. This is due to friction that acts on the servo system as a torque-load. Therefore, to eliminate the stationary errors it is necessary to use an integrating controller. This will give a high feedback gain at low frequencies in order to obtain a system insensitive to low frequency disturbances.

## 6.2 Proportional-Integral Controller

The robustness of a system in relation to small errors in the model is often desired. The purpose is to make the output follow the reference. This is one of the reasons to introduce integrators. It is thus necessary to modify the  $R$ -polynomial.

*Identification of a flexible servo*

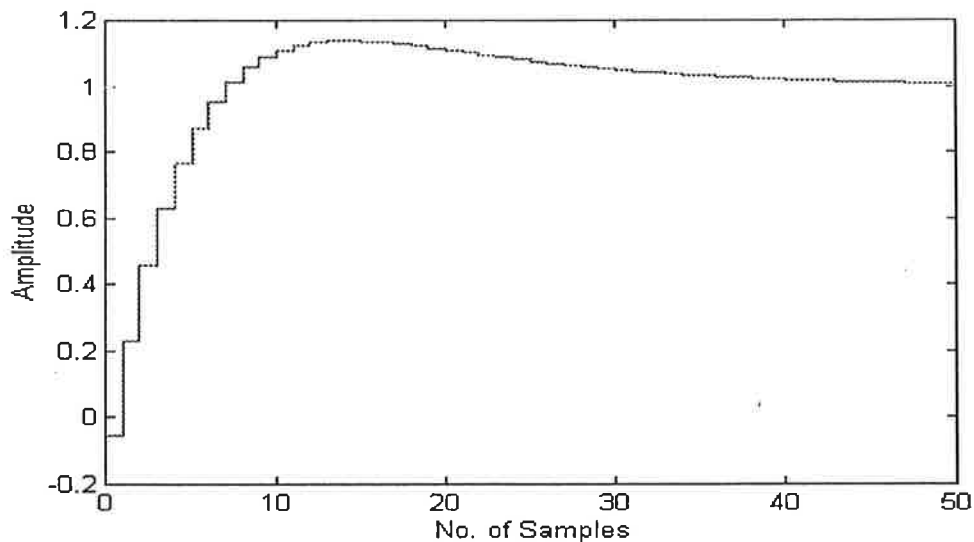
$$R = (z - 1)^k \cdot R_1$$

We have now an observer polynomial with an order higher than 0. There are also some considerations about the observers. A fast observer would detect the load disturbances much faster and consequently, the system would behave better since the control signal would respond faster. However, this can also introduce some problems like an increase on the sensitivity of the system to measurement errors.

Again, several controllers were developed according to different values of  $w$ . We present the one with  $w=1$ , for comparison. The Nyquist plot is now located in the left half plane and we have a gain margin of 20 and a phase margin close to 30. We have

$$\begin{aligned} A_{mc} &= [1 \ 1] \\ A_{oc} &= [1 \ 2] \\ A_m &= [1 \ -0.9048] \\ A_o &= [1 \ -0.8187] \\ R &= [1 \ -1] \\ S &= [1.5094 \ -1.4142] \\ T &= [0.5252 \ -0.4300] \end{aligned}$$

We see from figure 6.3 that it is rather slow, which will give rise to a large error during rather long time intervals. However, when compared to the proportional, we see that this controller is faster despite having an overshoot. The closed-loop poles are in 0.9048 and 0.8187, that is, quite close to the unit circle. We then attempted to place them closer to the origin by increasing the frequency  $w$ .



**Figure 6.3.** Closed-loop step response - proportional-integral controller with  $w=1$ .

### 6.3 Comparison

The controllers obtained will now be tested with the real system using TOOLBOX. As there is no way to print the results, the main ideas and differences are going to be presented together with an approximation of the system's response. The behavior of the control signal is also described. We use the TOOLBOX program and set the experiment conditions.

SETUP:      Number of Inputs (NUMINP) = 1  
               Plot y every sample  
               Horizontal Plot Time (HPT) = 40  
               Sampling Interval (TSAMP) = 0.1  
               Ulimits (ULIM): -1      1

REFSIG:     Signal Type = square  
               Mean            = 0.5  
               Amplitude    = 0.2  
               Period         = 15

REGUL:  
               read regn1fg1.m

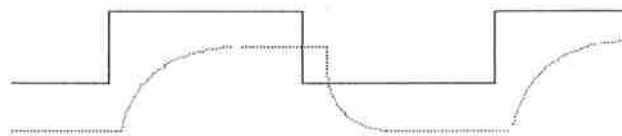


Figure 6.4. Proportional controller with  $w=1$ .

- very large stationary error;
- control signal,  $u$ , with very small peaks, almost zero;
- slow;

              read regn2fg1.m

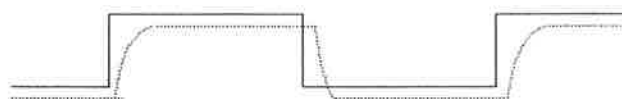


Figure 6.5. Proportional controller with  $w=10$ .

- small stationary error;
- control signal,  $u$ , almost zero apart from high amplitude peaks, in which saturates;
- very fast;

read regifg1.m

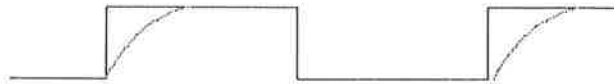


Figure 6.6. Proportional-integral controller with  $w=1$ .

- no stationary error, although it assumes large values during long time intervals before stationary is reached;
- control signal very small, almost zero;
- slow;

read regifg2.m



Figure 6.7. Proportional-integral controller with  $w=10$ .

- error with peaks but null in stationary;
- control signal almost equal to zero apart from high amplitude peaks, in which saturates;
- overshoot;
- very fast, 4 samples to reach stationary;

read regifg3.m



Figure 6.8. Proportional-integral controller with  $w=6$ .

- error with peaks but null in stationary;
- control signal almost null apart from peaks, doesn't saturate;
- no overshoot;
- very fast, 6 to 7 sample to reach stationary;

By comparing the controllers it is natural to choose the last one. All proportional controllers give rise to stationary errors, more or less large, depending on the frequency used, i.e, the gain. In order to avoid stationary errors, integral action is needed, as explained in section 6. In fact, we see that none of the proportional-integral controllers give rise to stationary errors. They all seem able to get rid of the error. Then, it is just a question of choosing one of the integral controllers. The first, has low gain and therefore the global system converges very slowly. It is clear that a faster regulator is needed. We then increase the gain. The result is as expected, the convergence is very fast. However, the gain seems to be too large as we can see that there is an overshoot. Decreasing the frequency to 6, we get an ideal controller: no error, no overshoot and no saturation. We therefore conclude that the controller in figure 6.18 is the best one for the servo system in order to avoid friction problems.

## 7. Bibliography

- ROLF JOHANSSON, *System Modeling & Identification*, Englewood Cliffs:Prentice-Hall, 1993;
- KARL ÅSTRÖM and BJÖRN WITTENMARK, *Computer-Controlled Systems:Theory and Design*, 2nd edition, Englewood Cliffs:Prentice-Hall, 1990;

and also the manual

- LENNART ANDERSSON and ULF JÖNSSON, *Manual for Practical System Identification*, 1995.

## 8. Resources

The following resources were used during the experiments:

- Servo motor;
- Schlumberger Solartron 1250-Frequency Response Analyzer;
- Software:
  - PCFRA;
  - LOGGER;
  - MATLAB 4.2;
  - TOOLBOX.

*Nuno Filipe Rodrigues da Costa, Lund Institute of Technology, LTH, 1995.*

# Projektrapport i Processidentifiering Tension and speed control

Inlämnad 950405

Inst. Reglerteknik  
Handledare: Lennart Andersson  
Projektet utfört av: Henrik Öjelund e91  
Fredrik Oehmichen e90

# Innehållsförteckning

## 1 Inledning

## 2 Genomförande

2.1 Utredande av grundläggande mekaniska samband

2.2 Tidsdiskret identifiering av processen

2.2.1 Val av PRBS och samplingsparametrar

2.2.2 Armax modellering

2.2.3 Identifiering av modell : differentiell insignal -- nedböjningsvinkel.

2.2.4 Identifiering av modell : summa insignal -- vinkelhastighet.

2.2.5 Identifiering av modell : summa insignal -- nedböjningsvinkel.

2.2.6 Identifiering av modell : differentiell insignal -- vinkelhastighet.

2.3 Tidskontinuerlig identifiering av processen.

2.3.1 Val av PRBS och samplingsparametrar

2.3.2 Tidskontinuerlig modellering

2.3.3 Identifiering av modell : differentiell insignal -- nedböjningsvinkel.

2.3.4 Identifiering av modell : summa insignal -- vinkelhastighet.

2.4 Konstruktion av RST regulator.

## 3 Slutsats

## 4 Appendix



# 1 Inledning

Rapporten behandlar projektet i kursen processidentifiering. Uppgiften i projektet var att identifiera en process och göra en matematisk modell av denna. Den matematiska modellen skulle sedan användas för att konstruera en regulator. Vi valde en process bestående av en elastisk gummirem uppspänd över tre hjul placerade i hörnen på en liksidig triangel. De två nedre hjulen drevs med varsin likströmsmotor och det övre hjulet var fritt löpande. Processen kan liknas med en pappersbana på ett pappersbruk. Pappret matas fram med valsar för att sedan rullas upp på en spole. Man är intresserad av att rulla upp pappret så snabbt som möjligt d.v.s. man vill kunna accelerera upp pappersrullen snabbt till en hög rotationshastighet. Samtidigt vill man kunna kontrollera dragspänningen i pappret, spänningen får inte bli för hög eftersom man inte vill att pappret skall gå av och inte heller för låg så pappret börjar slaka. Gummiremmen i processen kan liknas med pappret och valsarna med hjulen.

## 2 Genomförande

### 2.1 Identifiering av grundläggande mekaniska samband

För att få en bild av processen och dess mest dominerande moder kördes processen manuellt. Processen hade en viss igångsättningsfriktion vilket utgjorde en klar olinjäritet och därför valdes en konstant grundhastighet under identifieringen. För att få hjulen att snurra med en konstant hastighet lades en bias spänning på bägge motorerna. På bias spänningen superponerades sedan en styrsignal för respektive motor. Vi konstaterade att summan av styrsignalerna nästan bara påverkade bandets hastighet medan skillnaden av styrsignalerna enbart påverkade dragspänningen i bandet. För att komma undan problemet med multivariabla in- och ut-signaler skapades två nya insignaler : en differentiel och en summa. På detta sätt lyckades vi dela upp vårt multivariabla system i två enkelvariabla system (SISO).

Processens utsignaler är ett vinkelutslag och en vinkelhastighet. Vinkelutslaget är ett mått på dragspänningen i remmen och vinkelhastigheten är proportionell mot remmens hastighet. Eftersom tröghetsmomenten i respektive hjul var små i jämförelse med elasticiteten i remmen, antogs det att tröghetsmomenten på de med gummiremmen sammanlänkade hjulen, kunde beskrivas med ett gemensamt tröghetsmoment  $J$ . Motorerna antogs vara identiska och därför beskrevs motorens

dynamik med en gemensam motorekvation  $L \frac{di}{dt} = -k\omega - Ri + U_{in}$  där  $\omega$  är hjulens vinkelhastighet och

$L$  är motor induktans. Det drivande moment  $M$  är proportionellt mot  $i$  ( $M = i K_i$ ). Sambandet mellan

det drivande momentet och vinkelhastigheten ges av differentialekvationen  $J \frac{d\omega}{dt} = M$ . Vi får följande ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K_i}{J} \\ -\frac{k}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} * U_{summa}$$

Eftersom strömmens tidskonstant är mycket mindre än vinkelaccelerationens tidskonstant kan  $\frac{di}{dt}$  sättas till noll. Laplacetransformation ger då följande samband:

$$\omega(s) = \frac{\frac{K_i L}{J R}}{s + \frac{K_i k}{J R}} U_{\text{summa}}(s)$$

Sambandet mellan den differentiella insignalen och vinkelutsignalen blir mera komplicerat. Sambandet

mellan en fjäder och en massa är  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_f * x + F$  där  $m$  är massan,  $k_f$  är fjäder konstanten,  $F$  är den yttre kraften och  $x$  är en koordinat i fjäderns töjningsriktning.

Gummiremmen har en fjäderkonstant  $k_l$  och vinklarna från ett fixt utgångsläge på drivande hjulen a och c kallas  $\phi_a$  respektive  $\phi_b$ .

Hjulens vridning i förhållande till varandra orsakar en dragspänning i gummiremmen. Kraften i gummiremmen kommer att åstadkomma en töjning av upphängningsfjädern. Vi antar att alla hjulen har samma radie ( $r$ ). Uttrycket för den kraft med vilken remmen drar ner det övre hjulet blir följande.

$$F = k_l r (\phi_b - \phi_a) * \cos 30 + 2x k_l$$

Eftersom en differentiell insignal antas, kommer hjul a att vridas ungefär lika mycket moturs som hjul b kommer att vridas medurs. Vridningsvinklarna slås därför samman till

$$\phi_l = \phi_b - \phi_a$$

Fjädertöjningsekvationen sätts samman med kraftekvationen.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = (2k_l - k_f) x + \cos 30 r k_l \phi_l$$

På samma sätt som tidigare beskrivs de båda motorens dynamik med en gemensam motorekvation.

$$L \frac{di}{dt} = -k \omega - R i + U_{\text{diff}} \text{ där } \frac{d\phi_l}{dt} = \omega$$

Hänsyn tas till tröghetsmomentet

$$J \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} + r \left( k_1 r \phi_1 + \frac{2xk_1}{\cos 30} \right) = M = Ki * i$$

och detta ger ekvationssystemet.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2k_1 - k_f}{m} x + \frac{\cos 30 r k_1}{m} \phi_1$$

$$\frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = \frac{Ki}{J} i - \frac{r}{J} \left( k_1 r \phi_1 + \frac{2xk_1}{\cos 30} \right)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{k}{L} \frac{d\phi_1}{dt} - \frac{R}{L} i + \frac{U_{diff}}{L}$$

Eftersom hjulens rotationsinsvängningstid är mycket snabbare än massans insvängningstid kan den andra och den tredje ekvationens tidsderivata sättas till noll. Laplacetransformation ger då följande samband:

$$x(s) = \frac{Ki \cos 30}{s^2 - \frac{2k_1 - k_f}{m} + \frac{2k_1}{rm}} U_{diff}(s)$$

Vi har nu med hjälp av mekanikens lagar skaffat oss en bild av systemet. Man ser att systemet är dåligt dämpat och vi kan därför vänta oss lång insvängningstid.

## 2.2 Tidsdiskret identifiering av processen

### 2.2.1 Val av PRBS och samplingsparametrar

När samplingshastigheten skall bestämmas måste man känna till de snabbaste moderna i systemet. Detta kan antingen göras genom att räkna på den mekaniska modellen eller genom att provsampla och därefter räkna antalet sampel per period hos den snabbaste moden. För att kunna köra regulatorerna samtidigt i Simnon valdes samplingsperioden till 50ms vilket är på gränsen till att vara för långsamt. Vid identifieringen av sambandet mellan den differentiella insignalen och dragspänningen valdes PRBS signalens period till 2 sampelperioder för att exitera så höga frekvenser som möjligt. Eftersom sambandet mellan summainsignalen och vinkelhastigheten hade sina dominerande moder vid lägre frekvenser valdes PRBS signalens period till 6 sampelperioder. Detta är ett balanserat val för att exitera både de snabba och långsamma moderna i systemet. På grund av olinjäriteter i systemet måste man använda en begränsad amplitud på PRBS signalen ( 0.3 Volt i vårt fall).

Filnamn	Insignal	Utsignaler	Datalängd	Samplingsperiod	PRBS period
summan.m	Summan av insignalerna till motor1 och motor2	Vinkelhastigheten på det övre hjulet och hjulets nedböjningsvinkel	4000	50 ms	6
differan.m	Differensen mellan insignalerna till motor1 och motor2.	Vinkelhastigheten på det övre hjulet och hjulets nedböjningsvinkel	4000	50ms	2

Tabell 1

### 2.2.2 Armax modellering

Vi valde att använda ARMAX modellen. Som ett alternativ till ARMAX modellen kan Box-Jenkins modell användas. Vi fann dock att behovet av de extra frihetsgraderna i brusbeskrivningen som Box-Jenkins modellen har inte behövdes. Metodiken i vårt sökande kan beskrivas av följande punkter.

1. Prova med ökande ordning av ARMAX modeller tills det minsta Akaike's FPE värde fås.
2. Validera denna modell och även andra intressanta modeller av lägre ordning.
3. Välj modell.

2.2.3 Identifiering av modell : differentiell insignal -- nedböjningsvinkel.  
 Resultatet av de olika ARMAX modellerna redovisas i tabell 2.

Armax modell	Felfunk.	Akaike`s FPE
th2110	0.5947	0.5971
th2111	0.2227	0.2236
th2112	0.1658	0.1665
th2113	0.5709	0.5732
th2210	0.1996	0.2006
th2211	0.05971	0.06001
th2212	0.1576	0.1584
th2221 Provas (Appendix A fig 7)	0.04562	0.04589
th3221	0.04478	0.0451
th4441 Provas (Appendix A )	0.04412	0.04465

Tabell 2

#### Val av modell

Eftersom modellreduktion av th4441 ger th2221 och valideringen av th2221 visar på en bra modell, väljs th2221.

2.2.4 Identifiering av modell : summa insignal -- vinkelhastighet.  
 Resultatet av de olika ARMAX modellerna redovisas i tabell 3.

Armax modell	Felfunk.	Akaike`s FPE
th1110	0.01686	0.01691
th1111	0.01092	0.01096
th1112 Provas Appendix B (fig 8)	0.00772	0.007743
th1113	0.0146	0.01465
th2213	0.007244	0.07281

Tabell 3

#### Val av modell

Eftersom korrelationen mellan bruset och insignalen i modell th1112 har en buk vid noll, tyder detta på att fördröjningen i modellen är lång. Om man har kortare fördröjning men i övrigt samma modell, förbättras korskorrelationen men på bekostnad av felfunktionen. I valet mellan th1112 och th2213 väljs den första, eftersom förbättringen mellan dem är marginell.

2.2.5 Identifiering av modell : summa insignal -- nedböjningsvinkel.  
Resultatet av de olika ARMAX modellerna redovisas i tabell 4.

Armax modell	Felfunk.	Akaike`s FPE
th3222	0.05127	0.05163
th3322	0.04849	0.04888
th3323	0.04914	0.04953
th3321	0.0472	0.04758
th4321	0.04547	0.04588
th4322	0.04843	0.04887
th4331	0.04545	0.04591
th4421	0.04569	0.04615
th5421 Provas	0.04517	0.04567
<b>Appendix C (fig 9)</b>		

Tabell 4

För att kunna göra en mycket bra reglering, utan att använda teorin för multivariabel reglering, hade vi hoppats på att det ej skulle finnas någon korrelation mellan summa insignalen och vinkel utsignalen. Detta kan approximativt sägas gälla så länge man ej kommer upp till systemets resonansfrekvens 0.38 (se fig 9 i Appendix C).

2.2.6 Identifiering av modell : differentiell insignal -- vinkelhastighet

Korrelationen mellan den differentiella insignalen och vinkelhastigheten var med god approximation noll p.g.a. att två identiska motorer användes.

## 2.3 Tidskontinuerlig identifiering av processen.

### 2.3.1 Val av PRBS och samplingsparametrar

Eftersom vi var intresserade av att göra identifieringen med hjälp av dator samplade vi in mätdata. I motsats till den tidsdiskreta identifieringen behövdes vid kontinuerlig identifiering ej hänsyn tas till vilken samplingshastighet som var lagom vid realisering av en regulator. Istället samplades systemet med en hög hastighet för att kunna modellera även höga frekvenser med stor noggrannhet och därmed få en bättre bild av systemet. Det kortaste samplingsintervall som var möjligt att använda i programmet Logger var 1ms, vilket innebar en samplingsfrekvens på 1kHz. Den längsta datasekvens som gick att lagra i Logger var dock bara 10 000 sample. Detta medförde att datainsamlingstiden bara var 10s, vilket vi ansåg var en för kort tid för att få en god bild av systemets lågfrekvens egenskaper. Vi valde därför att använda en samplingshastighet på 2ms vilket gav en datainsamlingstid på 20s (se tabell 5).

Filnamn	Insignal	Utsignaler	Datalängd	Samplingsperiod	PRBS period
kontsum.m	Summan av insignalerna till motor1 och motor2	Vinkelhastigheten på det övre hjulet och hjulets nedböjningsvinkel	10000	2 ms	125
kontdiff.m	Differensen mellan insignalerna till motor1 och motor2.	Vinkelhastigheten på det övre hjulet och hjulets nedböjningsvinkel	10000	2 ms	50

Tabell 5

### 2.3.2 Tidskontinuerlig modellering

En metod vid tidskontinuerlig identifiering är att lågpasfiltrera insignal och utsignal ett antal gånger. Signalerna man får ut från filterna används sedan för att med hjälp av MK anpassa en modell. Eftersom samplingshastigheten var hög i förhållande till brytfrekvensen på lågpasfiltret kunde ej ett IIR-filter användas. Som metod att lågpasfiltrera användes istället multiplikation mellan filtrets överföringsfunktion och en DFT av signalen. Den tidskontinuerliga modellen man fick kontrollerades genom att det kvadratiska felet mellan modellen och den verkliga utsignalen räknades ut. Vi märkte att om man försköt in- och utsignalen i förhållande till varandra minskade det kvadratiska felet. På detta sätt räknades dödtiden ut. I kursen Processidentifiering har sagts att valet av lågpasfiltrets brytfrekvens ej är kritiskt. Vi fann dock att detta ej stämde i vårt fall (se fig 2). Genom att variera filtrets brytfrekvens och att förskuta in-och utsiganlen i förhållande till varandra, kunde felfunktionen minimeras (se fig. 1 för scriptfil)

```

load kontsum.m
fel=zeros(1,40);
for rakn=1:40 % Leta efter lämplig dödtid
    brytfrek=8/10; % Hz Har vid tidigare tillfälle provats ut
    T=1/(brytfrek*2*pi); %Tidskonstanten räknas ut
    L=8192/(2*pi*T*500); %Vad motsvarar T i antal sample
    z=dtrend([kontsum(rakn:8191+rakn,2) kontsum(1:8192,3)],0);
    fil=1./(1.+[-4096:4095].*i./L); %Filtret skapas
    filt=[fil(4097:8192) fil(1:4096)];
    y=z(:,1);
    u=z(:,2);
    yf=fft(y);
    uf=fft(u);
    ly=real(iff(yf.*filt));
    l2y=real(iff(yf.*filt'.*filt));
    lu=real(iff(uf.*filt));
    l2u=real(iff(uf.*filt'.*filt));
    fi=[l2u lu -l2y -ly];
    thata=(fi*fi)^(-1)*fi*y;
    M=[T^2 -T 0 0;0 T 0 0;0 0 -T T^2;0 0 T 0];
    a=M^(-1)*(thata-[0 0 1 -2]);
    jw=[-4096:4095]./(4096/250/2/pi/i);
    ove=(a(1)+a(2).*jw)./(jw.^2+a(3).*jw+a(4)); %Den kontinuerligamodellens överföringsfunktion räknas ut.
    overforing=[ove(4097:8192) ove(1:4096)];
    ytest=real(iff(overforing'.*uf))-y; %Skillnads signalen räknas ut
    fel(1,rakn)=ytest*ytest; %Felet sparas i en vektor
end

```

Figur 1

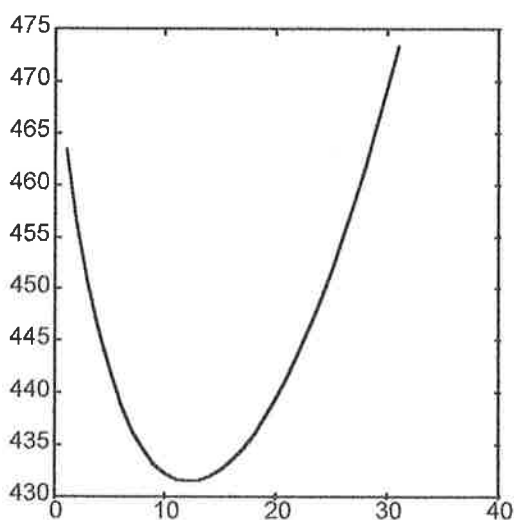


### 2.3.3 Identifiering av modell : differentiell insignal -- nedböjningsvinkel.

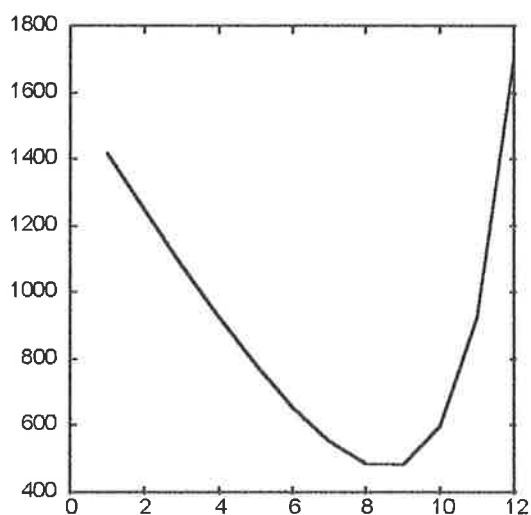
Modellen som beskrev relationen mellan den differentiella insignalen och nedböjningsvinkeln var svår att hitta. Identifieringsproblemen var en följd av att processen hade en döttid och att valet av filtrets brytfrekvens hade en stor betydelse. Ett stort antal modeller provades men om graden blev större än fyra ökade det kvadratiske felet. En trolig orsak till detta var de begränsningar som en begränsad samplingslängd och samplingshastighet ger. Genom att variera T och döttiden kunde till slut en modell av andra ordningen bestämmas (se figur 2 och 3).

$$H(s) = \frac{3014}{s^2 + 4.9s + 1954} e^{-s \cdot 0.016}$$

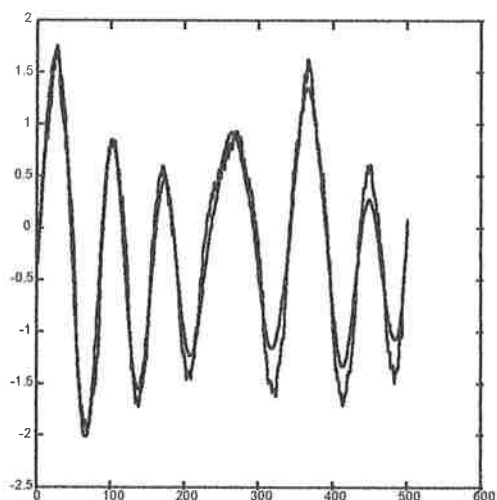
(Nämnar polynomet efter sampling av överföringsfunktionen med  $T_s=50\text{ms}$ :  
 $A=1.0000 \quad 1.0510 \quad 0.7827$  jmf med th2221 i appendix A)



Figur 2 Det kvadratiske felet vid olika T. Minst fel vid brytfrekvensen 13 Hz.



Figur 3 Olika tidsförskjutningars inverkan på felfunktionen. Fördröjning  $8 \cdot 2\text{ms}$ .

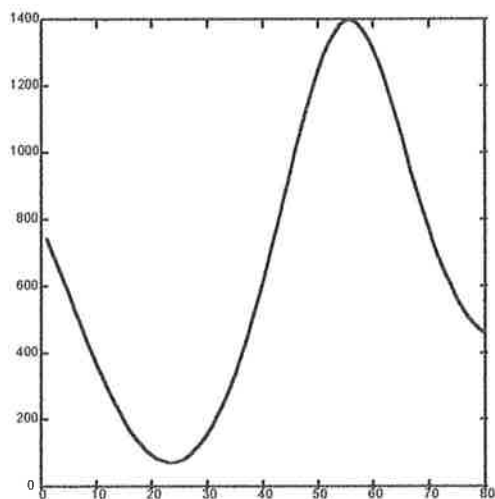


Figur 4 Modellens utsignal och den verkliga utsignalen.

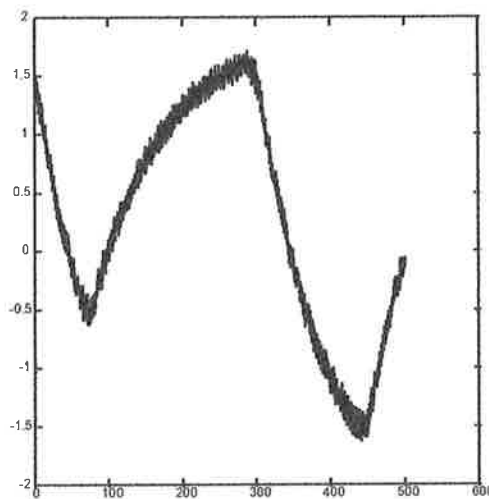
### 2.3.4 Identifiering av modell : summa insignal -- vinkelhastighet.

Vid första identifieringsförsöket togs ej hänsyn till dödtiden i systemet. Detta resulterade i en dålig modell med en stor felfunktion. När hänsyn togs till dödtiden minskade felfunktionen (se fig 5) och identifieringen blev bra (se fig 6).

$$H(s) = \frac{11.752}{s + 5.69} e^{-s \cdot 0.046}$$



Figur 5 Dödtidens inverkan på felfunktionen  
Min vid dödtiden 23\*2ms



Figur 6 Modellens utsignal och den  
verkliga utsignalen

### 2.4 Konstruktion av regulator

Vi använde oss av en RST-regulator vilket innebär att man gör en polplacering för regulator och observerare. Polplacering görs genom att utifrån det öppna och det önskade slutna systemets täljar- och nämnar-polynom räkna ut regulator polynomen. Detta kan göras genom att lösa den Diophantinska ekvationen. Det slutna systemets poler valde vi i Butterworth formation, d.v.s. jämnt utsprida i en halvcirkel i det kontinuerliga komplexa talplanet.

I båda regulatorerna hade vi en integrator för att undvika stationära fel. Vi valde de slutna systemens ordningar till 2. Observerarna valdes dubbelt så snabba som de slutna systemen. Det är nödvändigt att känna dessa efter som det är dessa man vill styra. Ordningen på observerar polynomen valdes också till 2. Vi kanceleerade ej några nollställen.

Som hjälpmedel vid regulator konstruktionen användes två funktioner i matlabs toolbox. Polybutt för att placera det slutna systemets och observerarpolynomets poler. Polybutt skapar polynomen i det kontinuerliga komplexa talplanet. Dessa polynom måste sedan transformeras till det diskreta komplexa talplanet. Funktionen RSTD användes för att räkna ut regulatorpolynomenas poler.

Det slutna systemets bandbred bör väljas så nära det öppna systemets bandbred som möjligt. För att göra det slutna systemet snabbare än det öppna krävs stora styrsignal utslag. Eftersom den verkliga styrsignalen skapas genom att förstäka en skalad signal från datorn och alla förstärkare har en maximal utsignal finns risken att man bottnar förstärkaren. Att förstärkaren är bottnad innebär att den verkliga styrsignalen ligger konstant på en nivå och inte längre beror av den skalade styrsignalen. Det här är i praktiken samma sak som att bryta reglerloppen. Regulatorn förlorar kontakten med processen och börjar skena vilket inte får inträffa.

Vi valde därför de slutna systemens bandbred så nära de öppnas som möjligt. RST -regulatorerna visade sig vara mycket känsliga just för bandbredden. En bandbred hos det slutna systemet som avviker alltför mycket från det öppna systemets ger en styrsignal som bottnas. I appendix D finns utskrift av regulatorerna som användes.

#### Differentiell insignal-vinkel utsignal

Slutna systemets bandbred:  $7 \cdot 2\pi$  rad/s med en integrator.

$$R = [ 1 \quad -1.1176 \quad 0.1176 ]$$

$$S = [ 0.0091 \quad 0.2244 \quad -0.0263 ]$$

$$T = [ 0.1983 \quad 0.0088 \quad 0.0001 ]$$

#### Summa insignal-vinkelhastighet

Slutna systemets bandbredd:  $2\pi$  rad/s med en integrator.

$$R = [ 1 \quad -1.8680 \quad 0.8680 ]$$

$$S = [ 0.7177 \quad -1.1124 \quad 0.4382 ]$$

$$T = [ 0.1570 \quad -0.1756 \quad 0.0561 ]$$

Styr lag  $U = \frac{T}{R}U_c - \frac{S}{R}Y$  där U är insignal till processen,  $U_c$  styrsignal och Y utsignal.

### 3 Slutsats

Med hjälp av modellerna konstruerades två regulatorer för att reglera dragspänningen i gummiremmen samt dess hastighet. Regulatorerna fungerade väl. En viktig erfarenhet från projektet var att en bra modell är av avgörande betydelse för att kunna göra en RST- regulator. Vikten av en lämpligt vald excitationssignal och samplingshastighet kan inte nog poängteras. Identifieringsprocessen är iterativ. Under analysens gång lär man sig mer om processens dynamik vilket resulterar i att en bättre sampling kan göras.

Vid en första mekanisk betraktelse, verkade systemet komplext och av en hög ordning. Identifieringen visade dock att modeller av första och andra ordningen beskrev systemet väl.

# Appendix A

## th2221

Loss fcn: 0.04562 Akaike's FPE: 0.04589 Sampling interval 1  
The polynomial coefficients and their standard deviations are

B = 0 1.4479 2.9378  
0 0.0186 0.0199

A = 1.0000 1.0696 0.7318  
0 0.0036 0.0031

C = 1.0000 0.8390 0.5599  
0 0.0191 0.0191

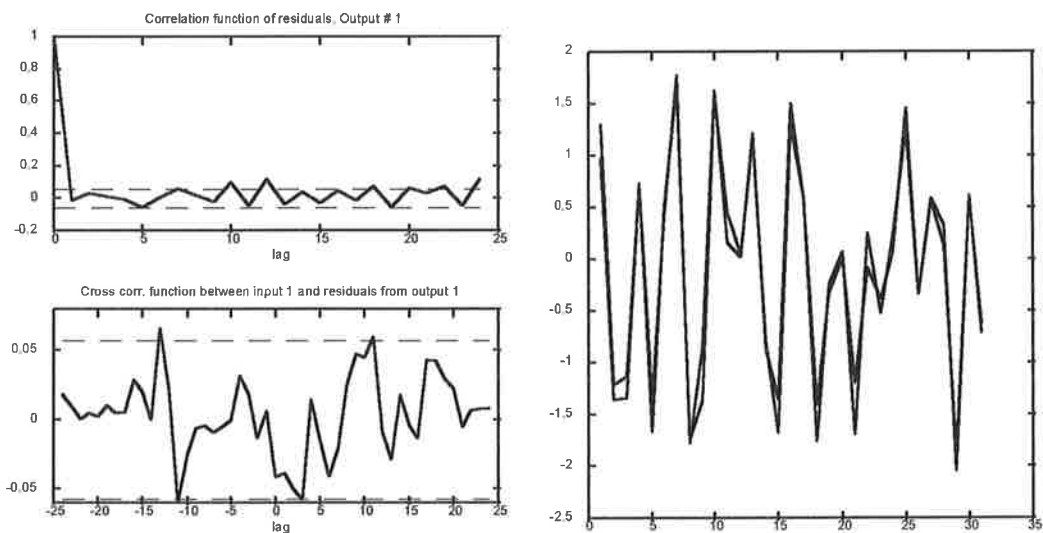


fig 7 Validering av modellen th2221

## th4441

Loss fcn: 0.04412 Akaike's FPE: 0.04465 Sampling interval 1  
The polynomial coefficients and their standard deviations are

B = 0 1.3804 2.3196 -2.2148 -1.4493  
0 0.0210 0.1657 0.1723 0.3306

A = 1.0000 0.6145 -0.2923 -0.8901 -0.3983  
0 0.1113 0.0118 0.0386 0.0805

C = 1.0000 0.3728 -0.3524 -0.6842 -0.2632  
0 0.1148 0.0253 0.0358 0.0677

Gramian = 6.7140 6.2962 0.2848 0.2210

Modellreduktion ger:

B = -0.3097 0.8966 2.4566

A = 1.0000 1.0982 0.7555

# Appendix B

## th1112

Loss fcn: 0.00772 Akaike's FPE: 0.007743 Sampling interval 1  
The polynomial coefficients and their standard deviations are

B = 0 0 0.4873  
0 0 0.0036

A = 1.0000 -0.7718  
0 0.0020

C = 1.0000 -0.7542  
0 0.0147

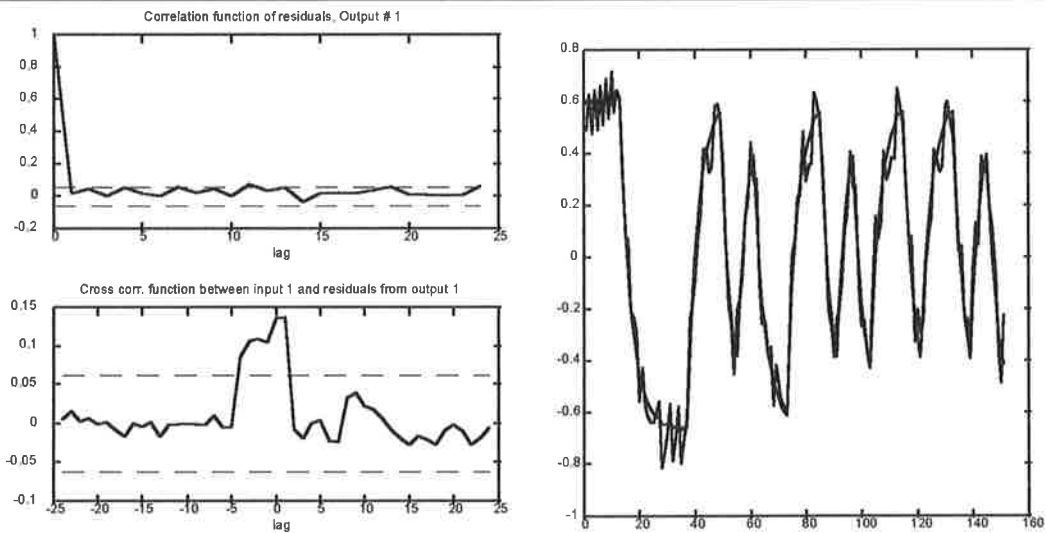


Fig 8 Validering av th1112

# Appendix C

th5421

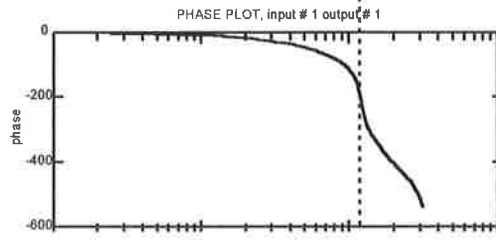
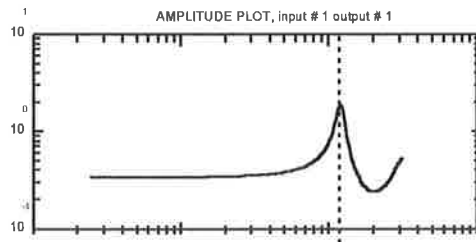
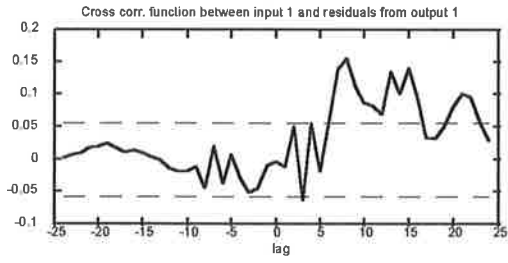
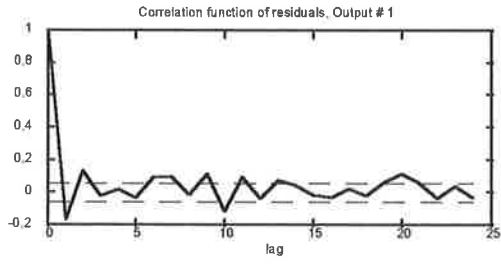


Fig 9 Validering av th5421

## Appendix D

```
DISCRETE SYSTEM TENREG

INPUT yref y  "set point and measured value
OUTPUT u    "controller output

" States and time variables:
STATE u1 u2 uc1 uc2 y1 y2
NEW   nu1 nu2 nuc1 nuc2 ny1 ny2
TIME  t
TSAMP ts

nu1=u
nu2=u1

nuc1=yref
nuc2=uc1

ny1=y
ny2=y1

v=-r1*u1-r2*u2 +t0*yref+uc1*t1-s0*y-s1*y1-s2*y2

u=IF v<umin THEN umin ELSE IF v>umax THEN umax ELSE v

ts=t+h
" Parameter values:
r1:-1.1176
r2:0.1176

s0:0.0091
s1:0.2244
s2:-0.0263
t0:0.1983
t1:0.0088
umax:1
umin:-1
h:0.05

END
```

*Regulator för spänningskontroll av bandet*



### DISCRETE SYSTEM SPDREG

INPUT yrefs ys "set point and measured value  
OUTPUT us "controller output

" States and time variables:

STATE u1 u2 u3 uc1 uc2 y1 y2

NEW nu1 nu2 nu3 nuc1 nuc2 ny1 ny2

TIME t

TSAMP ts

nu1=us

nu2=u1

nu3=u2

nuc1=yrefs

nuc2=uc1

ny1=ys

ny2=y1

us1=-r1\*u1-r2\*u2+t0\*yrefs+t1\*uc1+t2\*uc2

us2=-s0\*ys-s1\*y1-s2\*y2

"us=us1+us2

"us=IF v<umin THEN umin ELSE IF v>umax THEN umax ELSE v

us=yrefs-0.7\*ys

ts=t+h

" Parameter values:

r1:-1.868

r2:0.868

s0:0.7117

s1:-1.1124

s2:0.4382

t0:0.157

t1:-0.1756

t2=0.0561

umax:1

umin:-1

h:0.05

END

*Regulator för hastighetskontroll av bandet*

### CONNECTING SYSTEM RSTCON

TIME t

" Connections:

yref[tenreg]=0.2+sqw(t/4)\*0.1

yrefs[spdreg]=1

ys[spdreg]=ADin(1,t)

y[tenreg]=ADin(0,t)

ureal1=DAOUT(0,-u[tenreg]+us[spdreg])

ureal2=DAOUT(1,u[tenreg]+us[spdreg])

END

*Beskrivning av hur regulatorerna kopplades samman.*

# Projekt i processidentifiering

Svante Andersson E-90  
Daniel Elvin E-91  
Fredrik Sörensson E-90

20 april 1995

# Innehåll

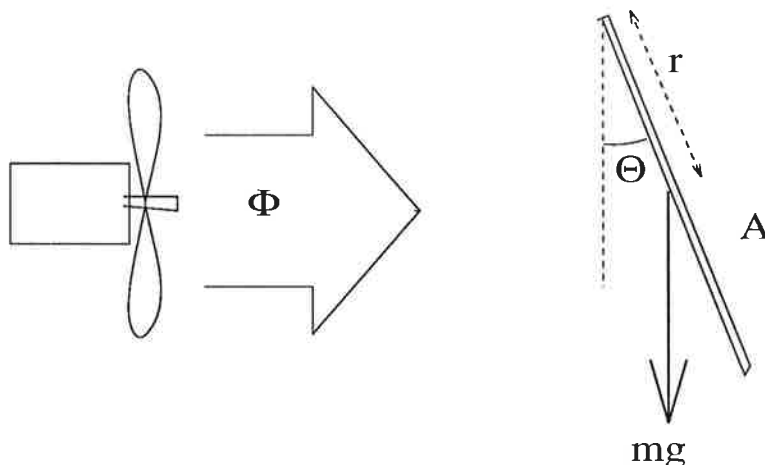
<b>1 Syfte</b>	<b>3</b>
<b>2 Modellering</b>	<b>3</b>
<b>3 Enkla experiment</b>	<b>4</b>
<b>4 Slutliga experiment</b>	<b>4</b>
4.1 Icke-parametrisk skattning . . . . .	5
4.2 Parametrisk skattning . . . . .	7
4.3 Modellreduktion via balanserad tillståndsform . . . . .	11
<b>5 Reglering</b>	<b>15</b>
5.1 Resultat . . . . .	17
<b>6 Slutsatser</b>	<b>18</b>

# 1 Syfte

Syftet med projektet är att identifiera en process som utgörs av en fläkt med en vippbräda för att kunna reglera denna.

# 2 Modellering

Processen består av en rektangulär plåt upphängd i en av sina långsidor så att den kan svinga fram och tillbaka. En vikt är placerad på den upphängda långsidan för att få plattan att avvika från sitt vertikala plan. På ett kort avstånd från plattan finns en fläkt som blåser en luftström mot plattan för att styra dess vinkel. Processens insignal är spänningen till fläkten och dess utsignal är vinkeln mellan vertikala planet och plattans position, se även figur 1



Figur 1: Schematisk bild av processen.

Plattans drivande momentet  $M^+$ , som ett resultat av fläkten, samt det bromsande momentet  $M^-$ , till följd av egentygngden kan skrivas enligt (1), där  $\Phi$  betecknar luftflödet från fläkten och  $A$  betecknar plattans area. De bägge  $\cos \theta$  termerna i  $M^+$  kommer sig av moment- respektive area-ändringen till följd av plattans vinkelutslag.

$$\begin{aligned} M^- &= rmg \sin \theta \\ M^+ &= A\Phi \cos \theta \cos \theta = A\Phi \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (1)$$

För små vinkelutslag är  $\sin \theta \approx \theta$  och  $\cos \theta \approx 1$ . Introducera skillnadsmomentet  $M_{diff} = M^+ - M^- = A\Phi - rmg\theta$ . Denna skillnad måste stationärt vara noll eftersom de bägge momenten då blir lika. Klassisk mekanik ger då

$$M = J\ddot{\theta} = M_{diff} - Fr\dot{\theta} \quad (2)$$

Detta kan sedan skrivas som

$$\ddot{\theta} = \frac{A\Phi - rmg\theta}{J} - \frac{Fr}{J}\dot{\theta} \quad (3)$$

Ytterligare en omskrivning ger då

$$\ddot{\theta} + \frac{Fr}{J}\dot{\theta} + \frac{rmg}{J}\theta = \frac{A\Phi}{J} \quad (4)$$

Vilket i sin tur kan skrivas på den slutgiltiga formen (5).

$$\frac{\theta}{\Phi} = \frac{\frac{A}{J}}{s^2 + \frac{Fr}{J}s + \frac{rmg}{J}} \quad (5)$$

Både motorn och luftströmmen ger upphov till tidsfördröjningar innan processens utsignal påverkas. Plattan fungerar som en pendel med lätt dämpade svängningar. Luftturbulenser agerar som brus och ger små snabba oscilleringar kring ett utslag. Fläktmotorn bör tillföra termen

$$\frac{K}{1 + sT} \quad (6)$$

Tidsfördröjningen för luftströmmen från fläkten till plattan modelleras med  $e^{-sL}$ , vilket ger oss en slutlig modell enligt (7).

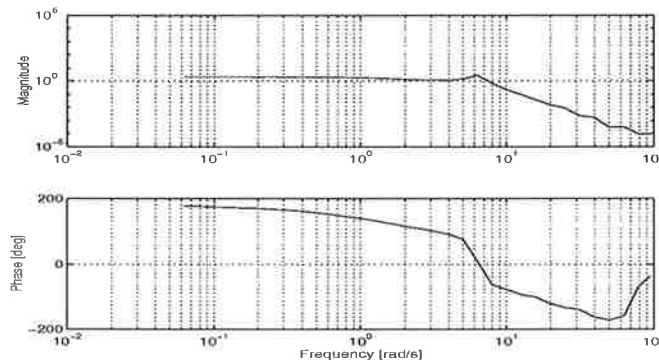
$$G(s) = \frac{b_0}{(s + a_2)(s^2 + a_1s + a_0)} e^{-sL} \quad (7)$$

### 3 Enkla experiment

För att få en grov uppfattning om processen provades några enkla experiment. Här kom vi fram till att tidsfördröjningen för luftströmmen från fläkt till stålplatta är så kort i jämförelse med de andra att denna term kan försummas. Processen är självklart tidsinvariant och betraktar man små utslag kan den anses vara linjär. När processen utsätts för en dirac svänger den med ungefär 1 Hz, en svängning som dämpas ut på ungefär 5 sekunder. Denna svängning går igenom även när processen utsätts för ett steg.

### 4 Slutliga experiment

Först analyserades systemet med en frekvensanalysator, *Schlumberger Solartron*. Vi undersökte frekvenser mellan 0,1 och 15 Hz, med 10 mätningar per dekad. Vi körde frekvensanalysatorn med medelvärdet 0,7 V och amplituden 0,5 V. Denna körning gav upphov till bodediagrammet i figur 2. Som synes i diagrammet, kan vi förvänta oss ett fjärde ordningens system.



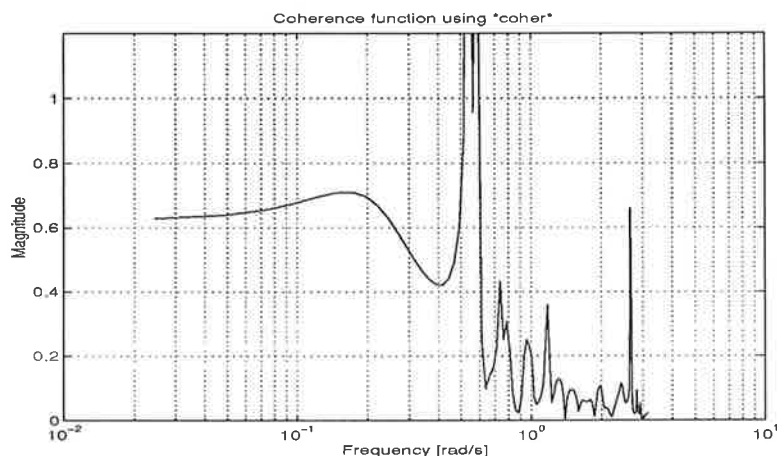
Figur 2: Skattad Öff med frekvensanalysator.

För att bilda oss en bättre uppfattning om systemet använde vi oss av *logger* för att generera en PRBS-signal till fläktprocessen och samtidigt logga responsen från systemet. Vi genererade två mätserier, mätserie 1 respektive mätserie 2. Mätserie

1 var på 2000 mätpunkter, och systemet kördes med medelvärde 1,0 V och amplitud 0,5 V. Mätserie 2 var på 10000 mätpunkter, och där kördes systemet med medelvärde 0,4 V och amplitud 0,2 V. Gemensamt för bägge mätserierna var samplingsperioden 50 ms och perioden på 10 s.

#### 4.1 Icke-parametrisk skattning

Först avlägsnades alla linjära trender och medelvärden ur de bägge serierna. Därefter studerades respektive series koherens. Som framgår av figur 3 överstiger koherensen i något fall 1. Det beror på numeriska problem och inte på något verkligt fenomen.

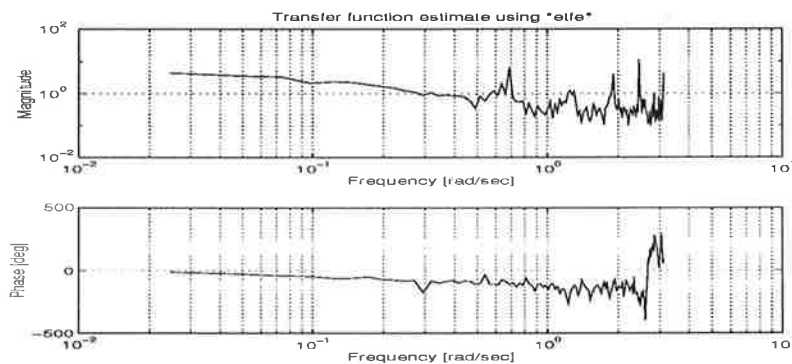


Figur 3: Koherensfunktion för mätserie 2.

Överföringsfunktionen ( $\hat{H}$ ) skattades med hjälp av två olika metoder. I det första fallet är skattningen kvoten mellan ut- och insignalernas respektive diskreta Fourier transform (DFT). Överföringsfunktionen skattas alltså som

$$\hat{H}(e^{i\omega_k}) = \frac{\hat{Y}(e^{i\omega_k})}{\hat{U}(e^{i\omega_k})}$$

Som framgår av figur 4 tar metoden ingen hänsyn till brus. Det gör att metoden i vårt fall är oanvändbar.

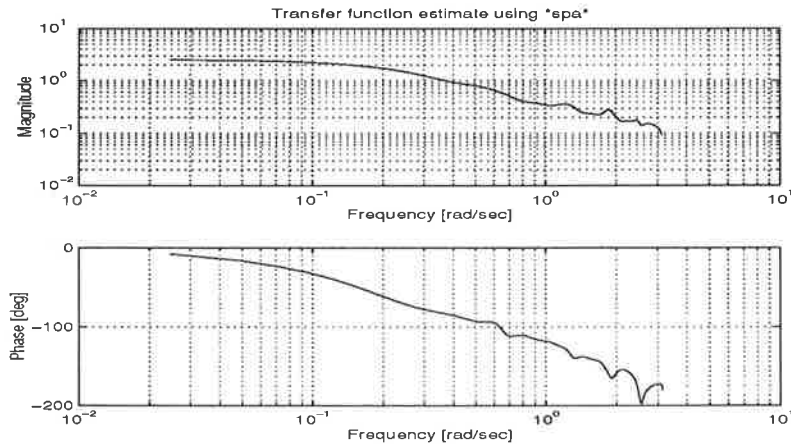


Figur 4: Skattning av  $\hat{H}$  baserat på periodogram för mätserie 1.

Den andra metoden bygger på spektralanalys baserat på kovariansfunktionerna, där spektralskattningarna fås som de diskreta Fourier transformerna av respektive kovariansskattning. Överföringsfunktionen skattas som

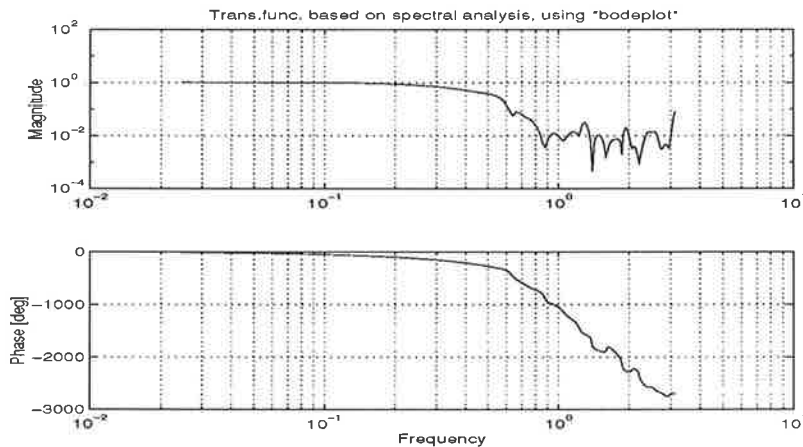
$$\hat{H}(e^{i\omega}) = \frac{\hat{S}_{yu}(i\omega)}{\hat{S}_{uu}(i\omega)}$$

Skattningen av överföringsfunktionerna för de bägge mätserierna framgår av figur 5 respektive figur 6.



Figur 5: Skattning av Öf baserat på spektralanalys för mätserie 1.

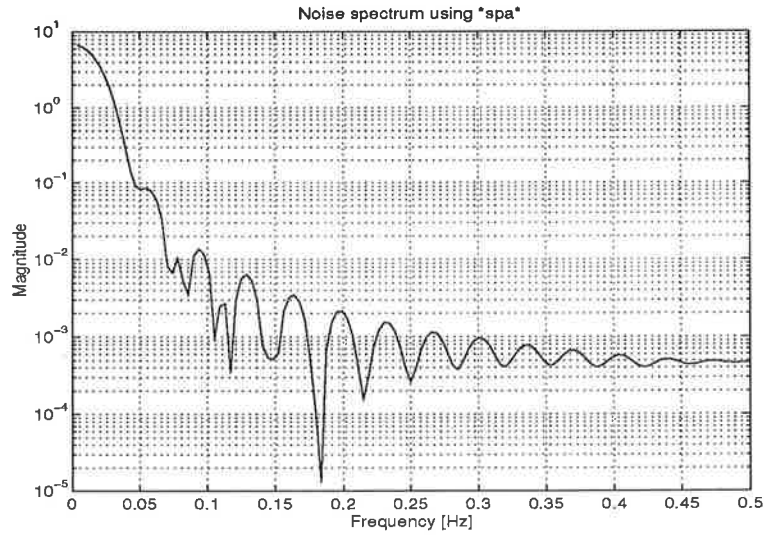
Genom att studera figurerna kan man konstatera att det för mätserie 1 verkar vara frågan om ett första ordningens system, medan det för mätserie 2 verkar vara ett högre ordningens system. Resultaten beror på att de härör från mätningar med två olika jämviktslägen och amplituder. Jämför även med resultaten för den parametriska skattningen.



Figur 6: Skattning av Öf baserat på spektralanalys för mätserie 2.

Skattningen av brus-spektrat, se figur 7, fås som

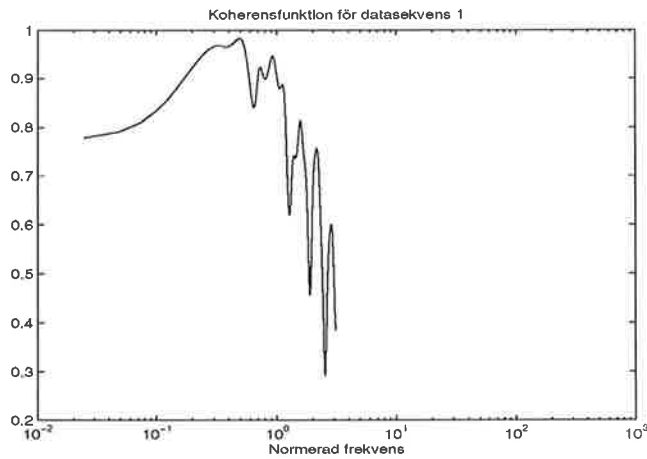
$$\hat{S}_{nn}(i\omega) = \hat{S}_{yy}(i\omega) - \frac{|\hat{S}_{yu}(i\omega)|^2}{\hat{S}_{uu}(i\omega)}$$



Figur 7: Skattning av brus-spektrat.

## 4.2 Parametrisk skattning

Mätdata lästes in i Matlab där den delades upp i en del för estimering och en del för validering. Precis som i fallet med den icke-parametriska skattningen anlägsnades alla linjära trender och medelvärden från både estimerings- och valideringsdata. PRBS-signalen är PE av ordning  $\infty$  så alla önskade parametrar skall kunna estimeras. Koherensspektrumet visar på en godtagbar linjär approximation upp till 5 Hz, se figur 8.



Figur 8: Koherensfunktion för mätserie 1.



*System Identification toolbox* använder sig av följande generella modell för parametrisk estimering:

$$A(q) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$

Eftersom *System Identification Toolbox* representerar systemen med bakåt-shift måste man ange systemets tidsfördröjning ( $k$ ).

$$y = q^{-k} \frac{b_0}{q^k + q^{k-1} + q^{k-2} + \dots} u$$

Man kan ta reda på denna fördröjning genom att göra en estimering med många B-parametrar och noll fördröjning. Den första signifikanta B-parametern visar vilken fördröjning systemet uppvisar. I vårt fall blir  $k = 1$ .

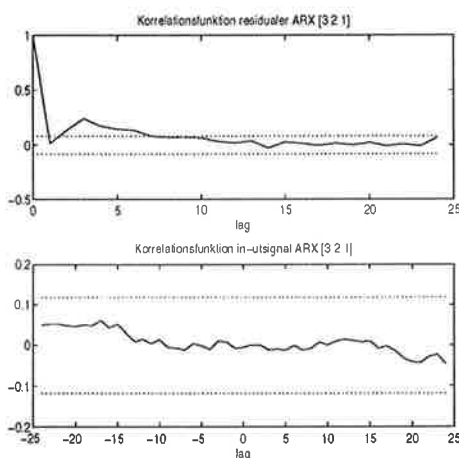
Vi börjar med en enkel parametrisk modell, ARX, för att sedan prova mer komplicerade om denna ej visar sig vara tillräcklig. ARX-strukturen är enligt följande:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - n_k) + e(t)$$

Följande parameteruppsättningar bedömdes med resulterande Akaike's FPE;

parametrar	Akaike's FPE
[3 1 1]	0.0003381
[3 2 1]	0.0003241
[2 1 1]	0.0003443
[2 2 1]	0.0003303

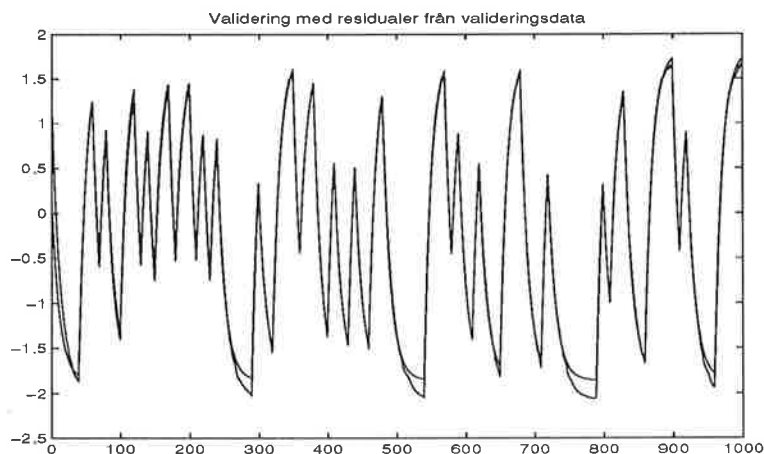
Figur 9 visar korrelationsfunktioner för de olika parameteralternativen.



Figur 9: Korrelationsfunktioner för olika antal ARX-parametrar.

Alternativet med [3 2 1] har "bäst" korrelationsfunktioner och residualerna är "vitt brus-lik". Man kan validera denna ARX-modell genom att köra samma insignaler som användes vid identifiering och jämföra modellens utdata mot uppmätta utdata. En sådan simulering visar mycket god överensstämmelse mellan verkliga utdata och modellens utdata. Ännu intressantare är att göra motsvarande test med de indata vi sparar speciellt för validering och alltså ej använt för estimering av modellen. Även detta test visar på en mycket god överensstämmelse.

Ännu bättre överensstämmelse fås genom att i simuleringen ta hänsyn till residualerna från valideringsdatan, figur 10. Modellen är dock redan så bra att man ej kan urskilja någon förbättring bara genom att studera resultaten av simuleringarna.

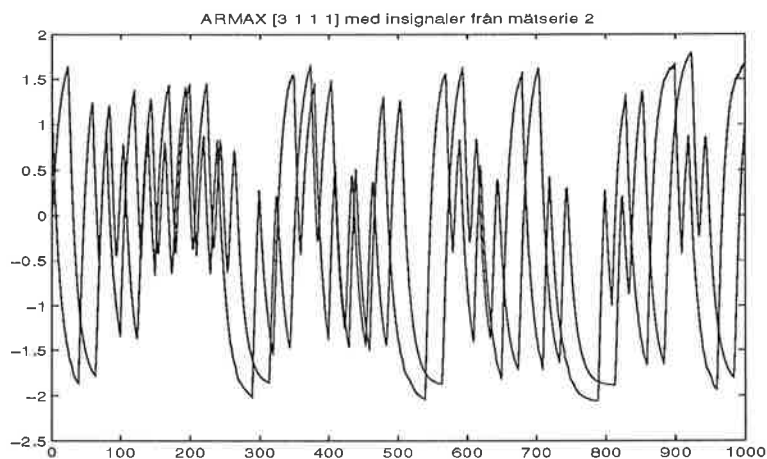


Figur 10: Validering med residualer från valideringsdata.

Skillnaderna i Akaike's FPE är väldigt små och en validering av modell ARX [2 1 1] skiljer sig inte synbart från ARX [3 2 1].

Faktum är att en första ordningens modell verkar fungera utmärkt vilket bekräftas med ett test med insignaler från en annan mätserie. ARX [1 1 1] verkar således vara en användbar modell för att beskriva systemet.

Överensstämmelsen är så god att det ter sig onödigt att pröva någon annan modell, de blir komplicerade och stämmer kanske bra mot identifieringsdata men är för "exakta" och sämre vid jämförelse mot valideringsdata. Figur 11 visar detta.

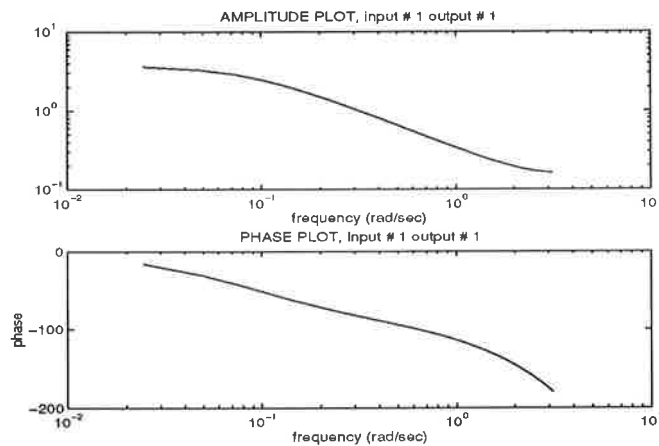


Figur 11: Validering med residualer från valideringsdata.

Bodediagrammet för den estimerade överföringsfunktionen finns i figur 12.

Efter att ha omvandlat toolboxens *thetaformat* till en överföringsfunktion kan vi presentera följande resultat:

$$H(q) = \frac{0.3126}{q - 0.9167}$$



Figur 12: Bodediagram för överföringsfunktion ARX [1 1 1].

Detta kan jämföras med en tredje ordningens funktion (ARX [3 2 1]);

$$H(q) = \frac{0.2927q + 0.0658}{q^3 - 0.7520q^2 - 0.1873q + 0.0365}$$

Frågan är varför vi inte får det tredje ordningens system vi förväntade oss? En teori är att vårt medelvärde och vår amplitud i mätserie 1 är för kraftiga och att systemets resonansgenskaper därför ej slår igenom. För att undersöka detta använde vi oss mätserie 2, med både lägre amplitud och medelvärde.

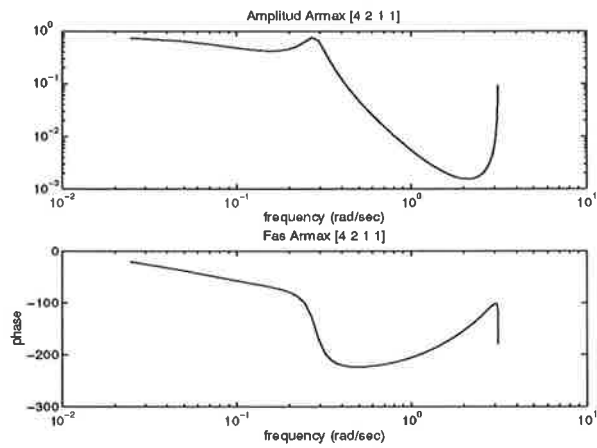
Vi provar som tidigare en ARX[3 2 1]-modell men utan något vidare resultat. Med högre modellordning, ARX[4 2 1] får vi däremot ett något bättre resultat. Överensstämmelsen är dock inte helt tillfredställande och därför provades också ARMAX-modeller. Även här visade det sig behövas ett fjärde ordningens system. När man plottar identifieringsutsignalen och den mätta utsignalen för en fjärde ordningens Armax, samt en av tredje ordningen, kan man konstatera att den högre ordningens modell har bättre överensstämmelse, naturligtvis på bekostnad av modellkomplexitet. En tabell över Akaike's FPE ger mera insikt:

parametrar	Akaike's FPE
[3 1 1 1]	0.0002504
[3 2 1 1]	0.0002416
[3 2 2 1]	0.0002370
[3 3 2 1]	0.0002283
[4 1 1 1]	0.0001655
[4 2 1 1]	0.0001486
[4 2 2 1]	0.0001380
[4 3 2 1]	0.0001345

Bodediagram för en fjärde ordningens modell, Armax [4 2 1 1], finns i figur 13. Koherensfunktionen har tidigare visat att modellen ej stämmer i de högre frekvenserna vilket bodediagrammet också visar.

De nya mätdata, med mindre utslag från ett mer vertikalt läge på stålplattan, ger oss alltså ett fjärde ordningens system. En överföringsfunktion med bra överensstämmelse är således:

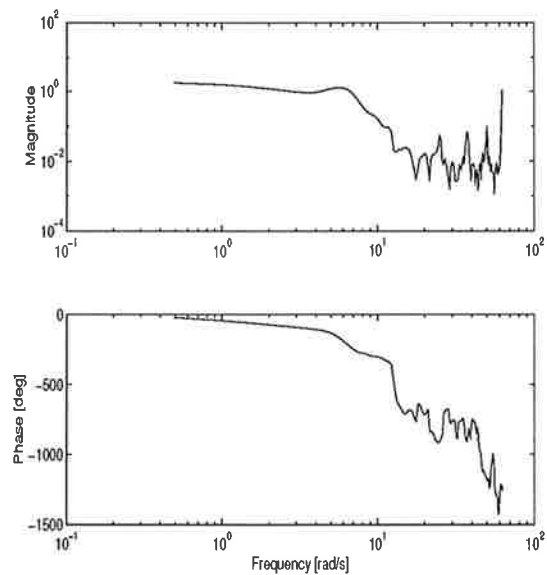
$$H(q) = \frac{-0.0127q + 0.0297}{q^4 - 1.8111q^3 - 0.958q^2 - 1.8015q - 0.8870}$$



Figur 13: Armax [4 1 1] Bodediagramm.

### 4.3 Modellreduktion via balanserad tillståndsform

Vid modellreduktionen användes mätserie 2. Dess spektrum ser ut enligt figur 14. Det antyder att det är fråga om ett system av ordning tre.

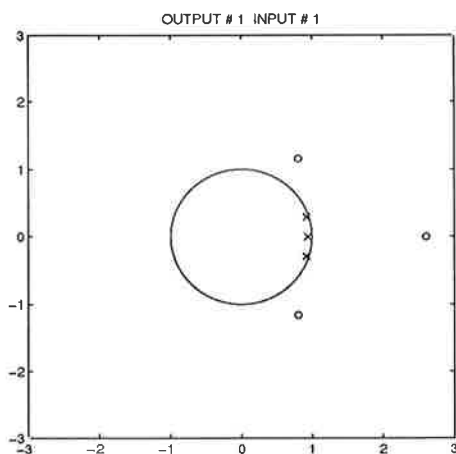


Figur 14: Spektrum för in- och utsignaler hos mätserien.

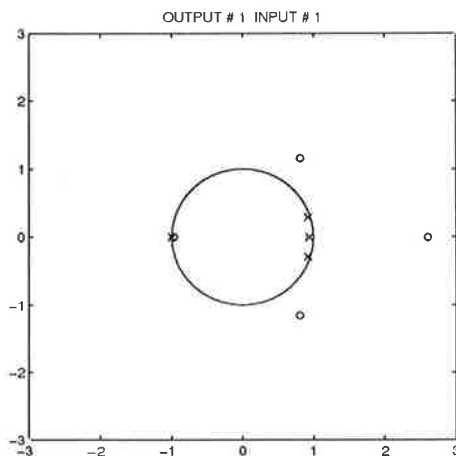
För att få en uppfattning om process-ordningen estimerade vi först en ARX-modell av 10:e ordningen. Sedan transformerade vi den till balanserad tillståndsform och räknade ut  $\Sigma$ -matrisen för att kunna se vilka tillstånd som var viktiga och vilka som kunde ignoreras.  $\Sigma$ -matrisen till systemet blev:

$$\Sigma = \text{diag}(1.4422, 1.0776, 0.7059, 0.0974, 0.0103, 0.0052, 0.0045, 0.0027, 0.0017, 0.0010)$$

Det var svårt att se om vi skulle reducera systemet till ett tredje eller fjärde ordningens system. Skillnaden mellan tredje och fjärde diagonalelementen är 7,2 och mellan fjärde och femte 9,5. Därför ritade vi upp pol- nollställediagram för de två modellerna, se figur 15 respektive figur 16.



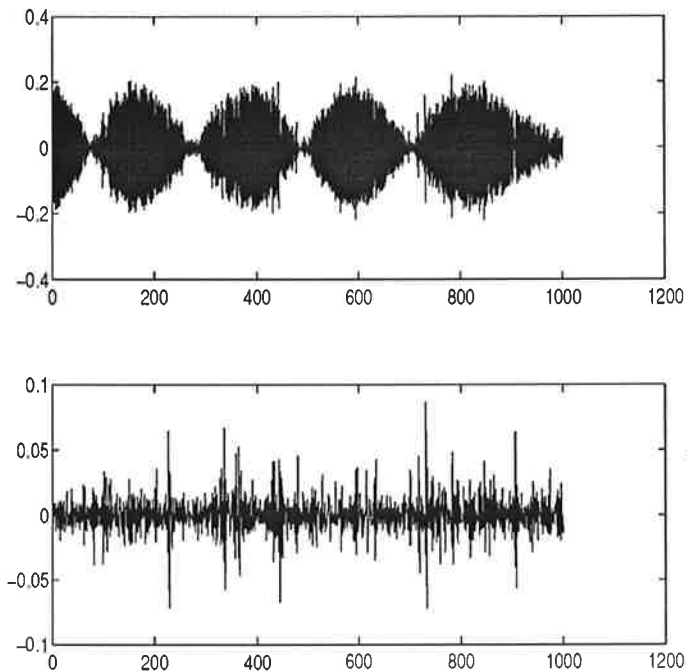
Figur 15: Poler och nollställen för tredje ordningens system.



Figur 16: Poler och nollställen för fjärde ordningens system.

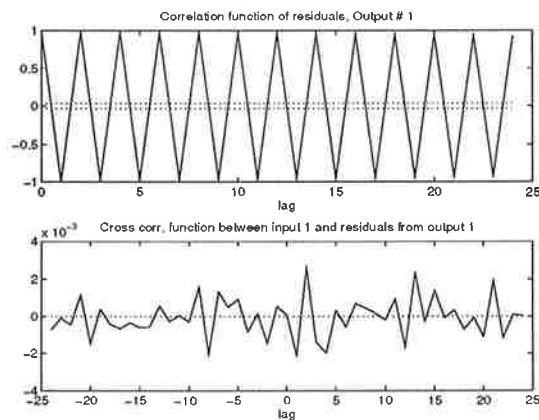
Som man kan se i figur 16 cancelerar det fjärde nollstället och den fjärde polen nästan varandra och bortser man från dem är de två modellerna lika. Nollställena skiljer sig bara 3 % och polerna är identiska. Tittar man däremot på residualerna, figur 17, blir resultatet att fjärde ordningens system är mycket bättre.

Ser man på korrelationsfunktionen hos residualerna, figur 18 och figur 19, får man samma resultat. Det tredje ordningens systemet har en periodisk korrelationsfunktion vars toppvärde är ett. Detta kan bero på att det inte tar med polen

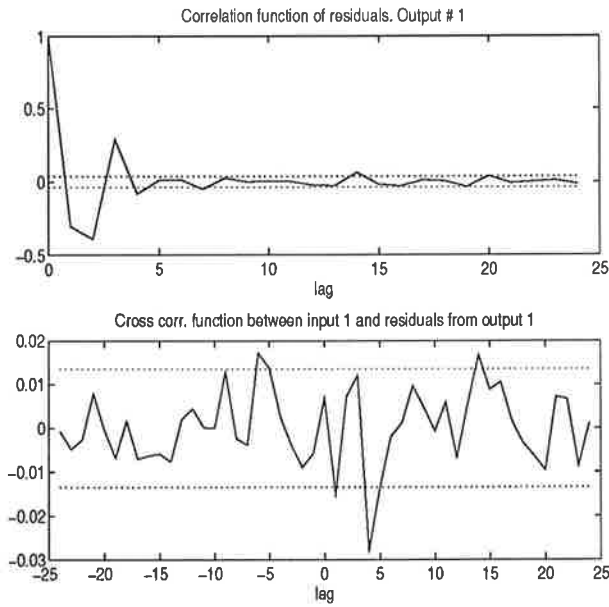


Figur 17: Residualer för tredje (överst) och fjärde (underst) ordningens system.

i -0.9985 eller att vi inte har fått helt rätt överföringsfunktion vid modellreduceringen. Eftersom felet man får om man väljer tredje i stället för fjärde ordningens modell främst uppkommer vid höga frekvenser (frekvenser nära Nyquistfrekvensen) bör detta inte ha någon betydelse när man ska göra en regulator. Detta märks också på residualen för tredje ordningens modell som mest består av höga frekvenser.

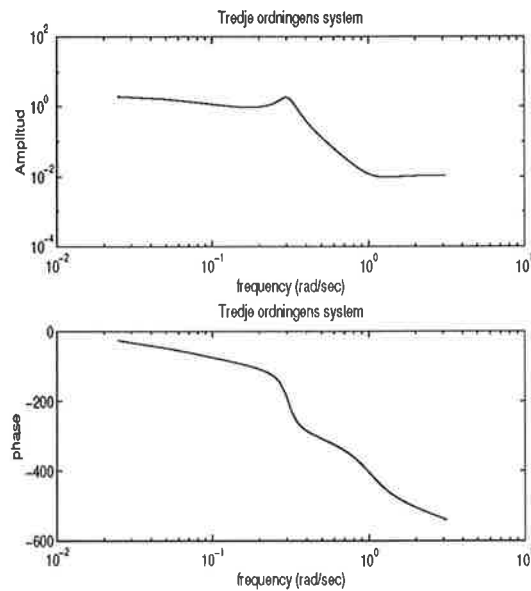


Figur 18: Korrelationsfunktion för residual och korskorrelation mellan insignal och residual för tredje ordningens system.

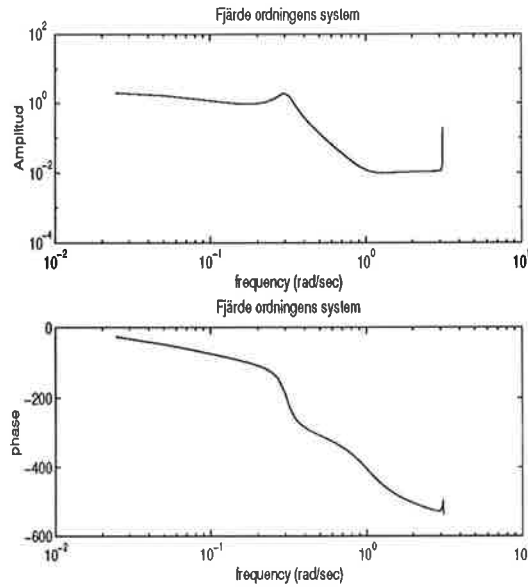


Figur 19: Korrelationsfunktion för residual och korskorrelation mellan insignal och residual för fjärde ordningens system.

Som man ser i figur 20 och figur 21 är det ingen skillnad på Bodediagrammen för systemen eftersom det fjärde ordningens systemets pol i  $-0.9985$  cancellassas av nollstället i  $-0.9719$ .



Figur 20: Bodediagram för tredje ordningens system.



Figur 21: Bodediagram för fjärde ordningens system.

Sammanfattningsvis borde modellen av ordning tre räcka för reglering av processen.

## 5 Reglering

Vi valde att reglera systemet med hjälp av en integrerande LQG-regulator. Vi har prövat att introducera integratorn på två olika sätt. I första fallet utgick vi från tillståndsbeskrivningen i (8).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (8)$$

Eftersom vi inte kan mäta tillstånden skattade vi dem enligt (9), samt introducerade det integrerande tillståndet  $x^{n+1}(k)$ .

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k)) \\ x^{n+1}(k+1) &= x^{n+1}(k) + u_c(k) - y(k) \end{aligned} \quad (9)$$

Därefter återkopplade vi systemet enligt (10).

$$u(k) = -L\hat{x}(k) + l_i x^{n+1}(k) \quad (10)$$

Systemet kan då skrivas om på formen (11).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Phi - KC - \Gamma L & \Gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_k^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{c,k} \\ y_k \end{pmatrix} \\ y_k &= \begin{pmatrix} -L & -l_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$



Vid LQG-reglering minimerar man funktionen (12).

$$J = E \left\{ \sum_{k=0}^N x^T(k) Q_1 x(k) + u^T(k) Q_2 u(k) \right\} \quad (12)$$

De bägge Q-matriserna beskriver hur man straffar tillstånden respektive styrsignalen. I vårt fall vill vi bara straffa systemets utsignal  $x^1$  samt dess styrsignal. Detta gör man genom att välja  $Q_1 = C^T C$  och  $Q_2$  till en skalär konstant  $\rho$ . Med hjälp av  $Q_1$  och  $Q_2$  beräknar man sedan den optimala tillståndsåterkopplingsvektorn  $L$  genom att lösa Riccati-ekvationen. Detta gjorde vi med hjälp av Matlab-funktionen *lqrd*. Om systemet låter sig beskrivas av en ARMAX-modell enligt (13), så fås Kalman-filtrets  $K$ -matris genom (14).

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k) \quad (13)$$

$$K = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_n - a_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

Det visade sig emellertid att denna regulator inte blev så bra som vi hade trott. Anledningen till det är naturligtvis att LQG-algoritmen ger oss en optimal regulator, men sedan hänger vi på en integrator utanför denna regler-loop. Naturligtvis förändras förutsättningarna för regulatorn när integratorn introduceras på det sätt vi gjort här, och det medför att det inte längre blir någon LQG-regulator längre.

Vi provade även en konventionell RST-regulator. Den LQG-regulator vi konstruerat fungerade något sämre än vår RST-regulator. Vid LQG-design är det egentligen bara  $\rho$  som är designparameter, men i vår "integrerande" LQG-regulator blir även integratorförstärkningen  $l_i$  en design-parameter. Integrationsdelen hamnar på detta sätt i en yttre reglerloop runt det LQG-reglerade systemet och därför borde vanliga designalgoritmer med specifikationer på polplacering, amplitud- och fasmarginal vara tillämpliga.

Eftersom vår första LQG-regulator inte var teoretiskt korrekt valde vi att introducera integratorn på det sätt som finns beskrivet i *Computer Controlled System* på sidorna 265 respektive 272. Vi introducerade ett nytt (integrerande) tillstånd  $x^{n+1}(k)$  samt nya tillstånd  $x_m(k)$  som beskriver våra tillstånds önskade uppförande, samt skattningar av de icke mätbara tillstånden  $\hat{x}(k)$  enligt (15).

$$\begin{aligned} x^{n+1}(k+1) &= x^{n+1}(k) + u_c(k) - Cx(k) \\ x_m(k+1) &= \Phi_m x_m(k) + \Gamma_m u_c(k) \\ \hat{x}(k+1) &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k)) \end{aligned} \quad (15)$$

Därefter återkopplade vi systemet enligt (16).

$$u(k) = L(x_m(k) - \hat{x}(k)) - l^{n+1} x^{n+1}(k) + u_m(k) \quad (16)$$

Men dessutom kan  $u_m(k)$  skrivas om enligt (17), se också *Computer Controlled Systems* sidan 268.

$$u_m(k) = \frac{b_{m0}}{b_0} u_c(k) = l_r u_c(k) \quad (17)$$

Systemet kan då skrivas som (18).

$$\begin{pmatrix} \hat{x}(k+1) \\ x^{n+1}(k+1) \\ x_m(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi - KC - \Gamma L & -\Gamma l^{n+1} & \Gamma L \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(k) \\ x^{n+1}(k) \\ x_m(k) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \Gamma l_r & K \\ 1 & -1 \\ \Gamma_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c(k) \\ y(k) \end{pmatrix} \\ u(k) = \begin{pmatrix} -L & -l^{n+1} & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(k) \\ x^{n+1}(k) \\ x_m(k) \end{pmatrix} \quad (18)$$

$\Phi_m$  och  $\Gamma_m$  kommer från den modell som ger det önskade utseendet på det slutna systemet. Dessa kan väljas godtyckligt, bara modellen är stabil och på styrbar kanonisk form (förutsatt att  $\Phi$  och  $\Gamma$  är på styrbar kanonisk form). På samma sätt som tidigare bestäms  $K$  ur (13). Tillståndsåterkopplingsvektorn  $L$  och  $l^{n+1}$  bestäms ur Riccati-ekvationen, enligt tidigare resonemang.  $Q_2$  bestäms nu enligt (19), för att kunna vikta det integrerade felet mellan referens- och utsignal.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} C^T \\ k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & k_i \end{pmatrix} \quad (19)$$

## 5.1 Resultat

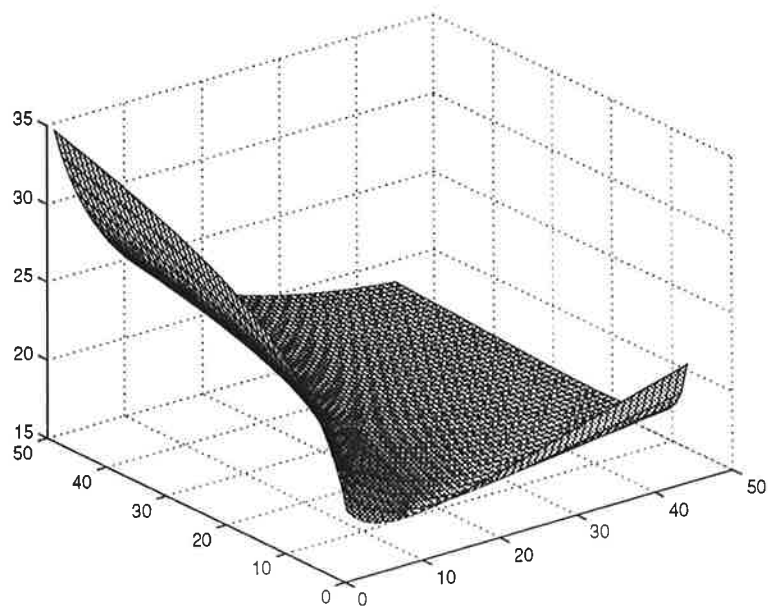
Vi simulerade process och regulator med olika  $\rho$  och  $k_i$ . Vi använde hela tiden samma modell av Butterworth-typ med en gränshfrekvens på 1Hz, samma gränshfrekvens som processen. Ett stort  $\rho$  straffar styrsignalen mycket och ger därför ett lugnare system som återhämtar sig långsammare efter en laststörning. Eftersom vi har en integrator i regulatorn får vi inget stationärt fel. Ett litet  $\rho$  ger istället ett snabbt system som återhämtar sig snabbare efter en laststörning. Dock blir systemet mycket känsligt för mätbrus.

Vi provade att öka  $k_i$ , dvs staffet för integralen av felet mellan bör- och ärvärde ökades. Detta ger på samma sätt ett snabbare system som blir känsligt för mätbrus.

För att få en uppfattning om lämpliga  $\rho$  och  $k_i$  simulerade vi systemet med olika värden på parametrarna och plottade därefter felet  $f_E$ , se figur 22.

$$f_E(\rho, k_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - u_{c,k})^2$$

Vid en studie av matrisen kunde det konstateras att för Armax [4 3 4 1] var  $\rho = 0, 1$  och  $k_i = 1, 3$  lämpliga val.



Figur 22: Felet för olika  $\rho$  och  $k_i$ .

## 6 Slutsatser

Efter att ha stött på processen i laboration 3 förväntade vi oss ett tredje ordningens system. Mätserien med små vinkelutslag gav snarare ett fjärde ordningens system medan mätserien med stora vinkelutslag gav ett system av första ordningen. Förklaringen är att de stora utslagen gör systemet olinjärt.

En ny erfarenhet är att A- och C-polynomen i en Armax-modell måste vara av samma gradtal om systemet ska kunna regleras med en LQG-regulator. Om så inte är fallet blir koefficienterna i K-vektorn lika med första kolumnen i  $\Phi$ -matrisen om systemet är på styrbar kanonisk form. Detta gör systemet icke-nåbart (not reachable).

En annan nyttig erfarenhet var att standard-återkopplingen  $u(k) = -Lx(k)$  driver tillstånden mot noll, vilket vi inte alls önskade. Detta innebar en hel del extra funderande. Till sist vill vi uttrycka vår förhoppning om att detta tydligare ska framkomma i kursen *Digital Reglering* framöver.