



LUND UNIVERSITY

Markvärme en handbok om termiska analyser: en handbok om termiska analyser : Del 1-3

Claesson, Johan; Efring, Bengt; Eskilson, Per; Hellström, Göran

1985

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Claesson, J., Efring, B., Eskilson, P., & Hellström, G. (1985). *Markvärme en handbok om termiska analyser: en handbok om termiska analyser : Del 1-3*. (BFR T-skrift; Vol. T16-18:1985). Bygghälsningsrådet (BFR). <http://libris.kb.se/hitlist?q=L772%3A536105+OR+L772%3A9905547479&d=libris&m=10&p=1&s=r>

Total number of authors:

4

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

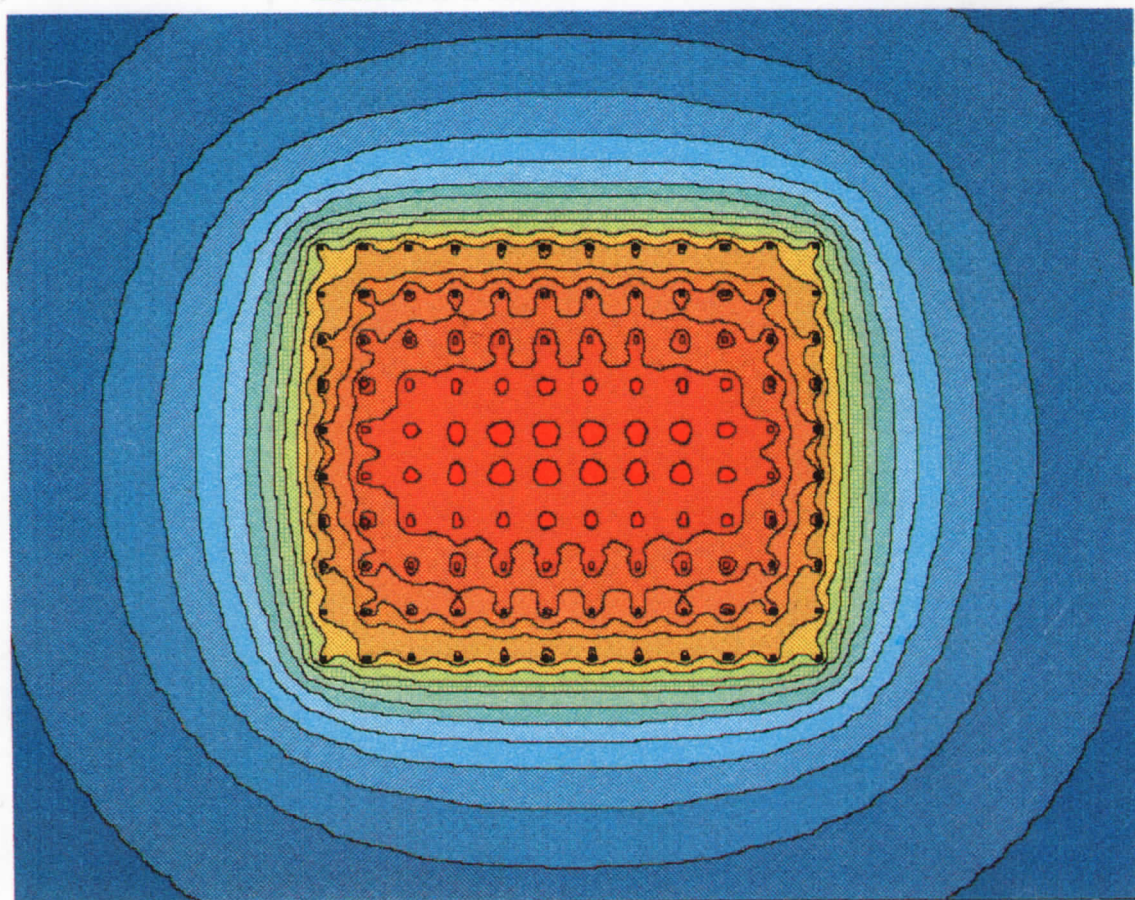
MARKVÄRME

En handbok om termiska analyser

Johan Claesson m fl

DEL I

ALLMÄN DEL



Byggforskningsrådet

MARKVÄRME

En handbok om termiska analyser

DEL I ALLMÄN DEL

Johan Claesson
Bengt Eftring
Per Eskilson
Göran Hellström

Byggeforskningsrådet

Denna skrift hänför sig till forskningsanslag 821398-9 från Statens råd för byggnadsforskning och 2060373 från Nämnden för energiproduktionsforskning till Avd för Matematisk fysik och Byggnadsteknik, LTH.

KAPITELINDELNING

DEL I: KAPITEL 1-5 ALLMÄN DEL. T16:1985

- KAPITEL 1. MARKVÄRMESYSTEM
- KAPITEL 2. FÄLTFÖRSÖK
- KAPITEL 3. INTRODUKTION TILL HANDBOKEN
- KAPITEL 4. STATIONÄRA TEMPERATURFÖRLOPP, VÄRMEFÖRLUSTFORMLER
- KAPITEL 5. GRUNDLAGGANDE DYNAMISKA TEMPERATURFÖRLOPP

DEL II: KAPITEL 6-8 VÄRMELAGER. T17:1985

- KAPITEL 6. VÄRMELAGRING I VATTEN. BERGRUM, GROPP M M
- KAPITEL 7. MARKVÄRMELAGER. BORRHÅL I BERG, SLANGAR I LERA
- KAPITEL 8. AKVIFERVÄRMELAGER

DEL III: KAPITEL 9-13 NATURVÄRMEKÄLLOR. T18:1985

- KAPITEL 9. GRUNDVATTENVÄRME, GEOTERMI
 - KAPITEL 10. BERGVÄRME
 - KAPITEL 11. YTJORDVÄRME
 - KAPITEL 12. TEMPERATURFÖRÄNDRINGAR I OMGIVANDE MARK
 - KAPITEL 13. ÖVERSIKT AV DATORPROGRAM
- REFERENSER
- APPENDIX

T16:1985

ISBN 91-540-61-3

Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

Liber Tryck AB Stockholm 1985

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

DEL I: ALLMÄN DEL

Förord	sid
1. MARKVÄRMESYSTEM	1.1
2. FÄLTFÖRSÖK	2.1
2.1 Bergrum, grop och blockfyllt bergrum	2.1
2.1.1 Svenska fältförsök	2.1
2.1.2 Svenska förprojekterade anläggningar	2.4
2.1.3 Utländska projekt	2.5
2.2 Markvärmelager. Borrhål i berg, slangar i lera	2.6
2.2.1 Svenska fältförsök	2.6
2.2.2 Svenska förprojekterade anläggningar	2.9
2.2.3 Utländska projekt	2.11
2.3 Akvifervärmelager	2.12
2.3.1 Svenska fältförsök	2.12
2.3.2 Svenska förprojekterade anläggningar	2.12
2.3.3 Utländska projekt	2.13
2.4 Övrigt	2.16
3. INTRODUKTION TILL HANDBOKEN	3.1
3.1 Uppläggning och innehåll	3.1
3.2 Beteckningar	3.2
3.3 Effektivitetsmått	3.4
3.4 Partiella differentialekvationer	3.6
3.5 Superposition	3.9
3.6 Error function	3.13
3.7 Värmeledning i svensk berggrund	3.15
4. STATIONÄRA TEMPERATURFÖRLOPP, VÄRMEFÖRLUSTFORMLER	4.1
4.1 Introduktion	4.1
4.1.1 Stationär delprocess	4.1
4.1.2 Dimensionslös form. Värmeförlustfaktor h	4.2

4.2 Sferiskt lager	4.4
4.3 Cylinderformat värmelager under mark	4.7
4.3.1 Temperaturfält	4.7
4.3.2 Värmeförlust	4.9
4.3.3 Effekt av isoleringar	4.13
4.4 Värmeförlust vid måttliga kontra stora djup	4.14
4.5 Ellipsoidformat värmelager	4.16
4.5.1 Rotationsellipsoid på stort djup	4.16
4.5.2 Jämförelse mellan cylinder och rotationsellipsoid	4.18
4.5.3 Allmän ellipsoid	4.19
4.5.4 Värmeförlustens variation med formen vid fix volym	4.22
4.5.5 Korrektion för ändligt djup	4.23
4.6 Allmän formel för värmeförlust från lager under mark	4.25
4.7 Värmeförlustanalys för lager med överytan vid marknivå	4.28
4.7.1 Delvärmeförluster	4.29
4.7.2 Värmeförlust genom övre isolering	4.29
4.7.3 Värmeförlust genom kantisolering	4.30
4.7.4 Värmeförlust direkt mot mark	4.31
4.7.4.1 Allmänna samband	4.31
4.7.4.2 Formel för små isolerdjup	4.32
4.7.4.3 Formel för godtyckligt isolerdjup	4.33
4.7.5 Vertikal kontra horisontell kantisolering	4.36
4.8 Cylinderformat värmelager med överytan vid marknivå	4.37
4.8.1 Temperaturfält	4.37
4.8.2 Total värmeförlust	4.38
4.8.3 Värmeförlust direkt mot mark	4.39
4.8.3.1 Vertikalt isolerdjup $D_i = 2\text{ m}$	4.39
4.8.3.2 Vertikalt isolerdjup $D_i = H/10$	4.40
4.8.3.3 Godtyckligt vertikalt isolerdjup	4.41
4.8.4 Värmelager med formen av en stympad kon	4.42
4.8.5 Några numeriska exempel	4.43
4.9 Parallelepipedformat värmelager	4.44
4.9.1 Total värmeförlust	4.45
4.9.2 Värmeförlust mot mark	4.45
4.9.3 Jämförelse mellan cylinder och parallelepiped	4.47

4.10	Värmelager med formen av en halvsfär	4.48
4.10.1	Temperaturfält	4.48
4.10.2	Värmeförlust	4.50
4.11	Värmeförlust för tvärsnitt av långsträckt lager	4.51
4.11.1	Rektangulärt tvärsnitt	4.51
4.11.2	Trapetsformat tvärsnitt	4.52
4.11.3	Jämförelse mellan vertikal och sned lagervägg	4.53
4.11.4	Cirkulärt tvärsnitt under markytan	4.54
4.11.4.1	Värmeförlust	4.55
4.11.4.2	Temperaturfält	4.55
4.12	Lager med värmeisolering över hela ytan mot mark	4.56
4.12.1	Allmänna formler	4.56
4.12.2	Cylinderformat lager	4.58
4.12.3	Parallelepipedformat lager	4.59
4.12.4	Jämförelse mellan cylinder och parallelepiped	4.61
4.12.5	Plana tvärsnitt	4.62
4.12.5.1	Rektangulärt tvärsnitt	4.62
4.12.5.2	Rektangulärt tvärsnitt under mark	4.64
4.12.6	Två skikt - morän, granit	4.66
4.12.6.1	Rektangulärt tvärsnitt	4.66
4.12.6.2	Cylinder	4.67
4.12.7	Effekt av grundvattenström	4.70
4.13	Tidsskala för stationär värmeförlust	4.71
4.14	Översikt över värmeförlustformler	4.73
5.	GRUNDLÄGGANDE DYNAMISKA TEMPERATURFÖRLOPP.....	5.1
5.1	Transient process vid konstant yttemperatur	5.1
5.1.1	Transient temperaturfält	5.1
5.1.1.1	Cylinderformat värmelager med överytan vid marknivån	5.2
5.1.1.2	Cylinderformat värmelager under mark	5.4
5.1.1.3	Plant, endimensionellt fall	5.5
5.1.1.4	Transient förlopp utanför sfär	5.6
5.1.2	Transient värmeförlust	5.7
5.1.2.1	Dimensionslös form	5.8
5.1.2.2	Cylinderformat lager med överytan vid marknivån ...	5.9
5.1.2.3	Plant, endimensionellt fall	5.12

5.1.2.4	Skiva	5.13
5.1.2.5	Cylinder eller rör	5.14
5.1.2.6	Sfär	5.16
5.1.2.7	Extraförlust vid hörn	5.17
5.1.2.8	Värmelager på stort djup	5.18
5.1.2.9	Värmelager på måttligt djup	5.23
5.1.2.10	Sfär på måttligt djup	5.23
5.1.2.11	Cylinderformat värmelager under marknivå	5.25
5.1.2.12	Parallelepipedformat värmelager under marknivå ..	5.27
5.1.3	Översikt över transienta värmeförlustformler	5.28
5.2	Periodiska temperaturförlopp	5.29
5.2.1	Komplexa temperaturer	5.29
5.2.2	Temperaturfält	5.30
5.2.2.1	Plant, halvoändligt fall. Inträngningsdjup d_0	5.30
5.2.2.2	Periodiskt förlopp utanför rör eller cylinderyta ..	5.33
5.2.2.3	Periodiskt förlopp utanför sfär	5.37
5.2.2.4	Jämförelse mellan plan, cylindrisk och sfärisk yta	5.37
5.2.3	Samband mellan temperatur och värmeflöde vid randen	5.38
5.2.3.1	Plant, halvoändlig fall	5.39
5.2.3.2	Rör eller cylinder	5.40
5.2.3.3	Sfär	5.43
5.2.3.4	Effekt av ytmotstånd	5.44
5.2.3.5	Kanter	5.46
5.2.3.6	Parallelepipedformat värmelager under mark	5.47
5.2.3.7	Cylinderformat värmelager under mark	5.49
5.2.3.8	Värmelager med överytan vid marknivå	5.51
5.2.4	Isolerad cylinderregion	5.54
5.2.4.1	Rörtemperatur	5.55
5.2.4.2	Optimalt röravstånd	5.58
5.2.4.3	Approximativa formler	5.59
5.2.4.4	Rörmotstånd m_p	5.60
5.2.4.5	Två exempel	5.61
5.3	Värmeuttag via rör. Stegpulsanalys	5.65
5.3.1	Superposition	5.65
5.3.2	Analytisk lösning för stegpuls	5.66
5.3.3	Avklingning efter en effektpuls	5.73
5.3.4	Superponering av effektpulser	5.74
5.3.5	Pulståg	5.78

5.4	Temperaturavklingning av ett uppvärmt område	5.85
5.4.1	Lager på stort djup	5.85
5.4.1.1	Endimensionellt plant fall	5.86
5.4.1.2	Parallelepipediskt lager	5.90
5.4.1.3	Endimensionellt radiellt fall	5.92
5.4.1.4	Cylindriskt lager	5.95
5.4.2	Lager nära markytan	5.98
5.4.2.1	Endimensionellt plant fall	5.98
5.4.2.2	Parallelepipediskt lager	5.100
5.4.2.3	Cylindriskt lager	5.101
5.4.3	Cylindriskt lager omedelbart under markytan	5.102

FÖRORD

Denna skrift redovisar resultat från våra studier av markvärmesystem under åren 1977-85. Projektet finansierades under åren 1978-82 av Byggforskningsrådet (BFR) och Nämnden för energiproduktionsforskning (NE). Den senaste perioden 1982-85 har finansierats av BFR.

Förutom författarna har följande personer deltagit i projektet. Johan Bennet har utvecklat datormodellerna för grundvattenvärme, geotermi och akvifervärmelager samt utfört en stor del av de simuleringar som redovisas i kapitel 8 och 9. Vidare har Mats Areskoug, Mats Johansson, Tord Bengtsson och Peter Olanders medverkat i forskargruppen. Pia Bruhn och Birgitta Salmi har svarat för utskrift. Sigurd Madison har hjälpt till med datorkörningarna mm. Figurerna har ritats av Lilian Johansson.

Avsnitt 3.7 är skrivet av Jacob Johnsson, SGU, Jan Sundberg, Jordvärme-gruppen och Bo Thunholm, SLU.

Under de gångna åren har vi haft ett givande samarbete och många stimulerande kontakter och diskussioner med ett stort antal ingenjörer, konsulter, forskare, uppfinnare, byggare, brunnsborrare, geologer, företagare, forskningssekreterare m fl. Följande personer skall här nämnas: Ove Platell, vars banbrytande idéer och entusiasm har varit en stor inspirationskälla för vårt arbete; Palne Mogensen, som kommit med många goda råd och konstruktiva anmärkningar; Bo Nordell, LuTH, med vilken vi haft ett givande samarbete om borrhålslager; Sören Andersson, Sam Johansson, Anders Eriksson, (AIB), Klas Cedervall och Bengt Åberg, (Vattenbyggnad, KTH), med vilka vi haft ett gott och nära samarbete om akvifervärmelager m m; Leif Bjelm, Per-Gunnar Persson m fl (Geoteknologi, LTH) och Sören Gotthards-son (ASEA Stal Geoenergy AB), med vilka vi haft ett långvarigt och resultatrikt samarbete om olika geotermiska system; Johan Tollin, AIB, som varit till stor hjälp vid vårt arbete med bergvärmebrunnar; Hans Hydén, Leif Lemmeke m fl på VBB; Bengt Rydell och Caroline Palmgren, SGI; Mats Larsson, Lennart Spante och Bengt Vasseur, Vattenfall; K-Gösta Eriksson, Per-Åke Franck, Ingvar Rehn, Gösta Rosenblad, Jan Sundberg och Peter Wilén, Jordvärmegruppen, CTH; Kent Adoifsson, Ingvar Bogdanoff och Ulf Lindblom, Geoteknik, CTH; Örjan Haag m fl, Geologi, CTH; Göran Hultmark och Stefan Olsson, Andersson & Hultmark AB; Peter Margen, Margen-Consult; Torgny Ager-

strand, Olof Andersson, Peter Englöf, Lars Eriksson, Gunnar Gustafsson, Johan Landberg m fl på VIAK AB; Christer Gedda, Kjessler & Mannerstråle AB; Hans Gransell (Studsvik Energiteknik AV); Kjell Windelhed och Torgny af Forselles (Hagconsult); Stellan Braun, Firma Brunnsborningar i Höör AB; Lars Persson m fl, Energisparteknik AB; Sven-Erik Lundin och Björn Svedinger (BFR) samt Ingvar Östen Andersson (NE); Torbjörn Jilar m fl vid Installationsteknik,CTH; Ingemar Johansson, AGA-Thermia.

Vi har haft ett nära samarbete med Chin-Fu Tsang och dennes forskargrupp vid Earth Sciences Division, Lawrence Berkeley Laboratory, USA, angående termohydrauliska förlopp för akvifervärmelager och geotermiska system. Samarbetet har bl a skett i form av långvariga forskarbesök. Ett samarbete har också skett med Georges Vachaud, Alain Dunand m fl vid Institut de Mécanique des Fluides, Grenoble.

I samband med ett programutvecklingsarbete för simulering av energisystem inom IEA (Int Energy Agency), Task VII, Central Solar Heating Plants with Seasonal Storage, vill vi nämna följande samarbetspartner: Rune Håkansson, Sören Rolandsson (Studsvik Energiteknik AB), Arne Boysen (Hidemark och Danielsson AB), Verne Chant (Canada) och Jean-Christophe Hadorn (Schweiz).

Till de ovan nämnda personerna och till alla andra som på olika sätt varit oss till hjälp vill vi rikta ett varmt tack.

Vi vill gärna ha synpunkter på innehållet i denna handbok. Dessa kan gälla kompletteringar av teorin, vidareutveckling, datorprogram, oklarheter och felaktigheter. Telefonnummer: 046-107382 (Johan Claesson), 0500-37995 (Bengt Eftring), 046-107387 (Per Eskilson), 046-109091 (Göran Hellström).

Lund i augusti 1985
Avd för Matematisk Fysik
BYGGNADSTEKNIK
Lunds Tekniska Högskola

1. MARKVÄRMESYSTEM

Ett markvärmesystem utnyttjar marken som värmekälla eller som lagringsmedium för värme. Till markvärmesystem hänföres också värmelagring i vattenfyllda bergrum, gropar o. dyl. Ordet mark användes här något oegentligt för att beteckna berg, jord och grundvattenförande skikt (akviferer), dvs undergrunden.

Värmen från marken eller marklagret används normalt för bostadsuppvärmning. Vid höga temperaturer kan värmen användas direkt. Vid lägre temperaturer försörjer markvärmesystemet en värmepump med lågtemperaturvärme. Värmekällan för värmelagret kan vara solvärme eller spillvärme. Vid låga temperaturnivåer är olika slag av naturvärme eller "sommarvärme" - varmt ytvattnen, varm luft o dyl - en viktig värmekälla.

Systemen för värmelagring i mark kan indelas i tre huvudtyper:

1. Bergrum, grop, blockfyllt bergrum.
2. Markvärmelager. Borrhål i berg, slangar i lera.
3. Akvifervärmelager.

Värmelagren kan användas för säsongslagring mellan sommar och vinter eller för kortare perioder.

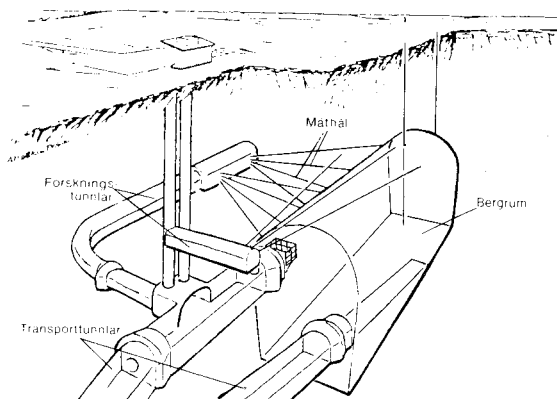
System för uttag av värme ur mark kan uppdelas i fyra huvudkategorier:

1. Ytjordvärme.
2. Bergvärmebrunnar.
3. Grundvattenvärme.
4. Geotermisk värme.

I vissa uttagssystem förekommer aktiv återladdning med värme under sommaren för att återställa naturliga ostörda temperaturförhållanden.

En introduktion till markvärmeområdet ges i referenserna 107 och 148. Olika projekt och översikter finns redovisade i referenserna 149-155. Den första större internationella konferensen om markvärme hölls i Stockholm i juni 1983; referens 156.

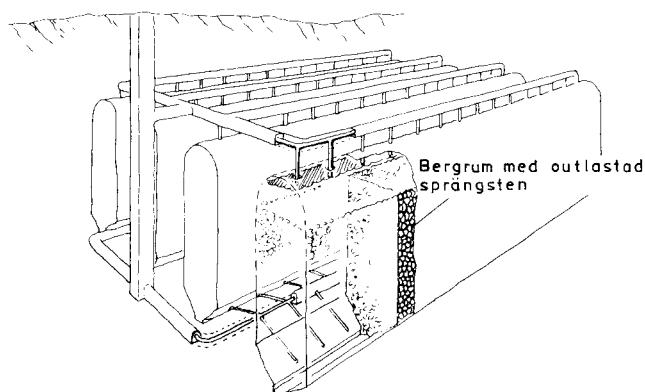
Figur 1.1 visar ett bergrumsvärmelager. Bergrummet är fyllt med vatten som värmelagringsmedium. En viss värmelagringskapacitet hos angränsande berg utnyttjas också. Normalt är vattnet temperaturstratifierat med varmare och därmed lättare vatten överst.



Figur 1.1. Bergrumsvärmelager. (Fältförsök i Avesta).

Alternativ till bergrum är gropar, dammar, nedgrävda tankar, gruvschakt, bergtunnlar m m.

En variant av bergrummet med vatten är ett bergrum fyllt med en blandning av sprängsten och vatten. Se figur 1.2. Ett sådant blockfyllt bergrum kan byggas i större dimensioner än ett vanligt eftersom stenblocken stabiliserar berget. I ett gropmagasin kan man också ha denna blandning av sten och vatten i stället för rent vatten.

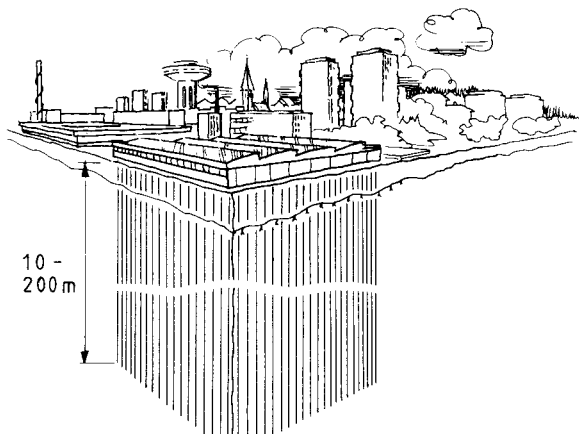


Figur 1.2. Värmelagring i blockfyllt bergrum.

En markvolym kan utnyttjas direkt för värmelagring. Vid laddningen uppvärms marken. Vid återvinning av värme sänks markvolymens temperatur. För att kunna tillföra och ta ut värme måste man skapa ett rör- eller kanalsystem genom den utnyttjade markvolymen. Värmebärande fluiden cirkuleras i kanalsystemet. Som allmän beteckning för denna typ av värmelager skall termen markvärmelager användas.

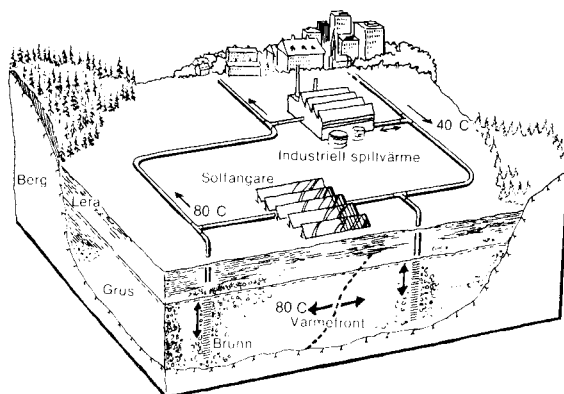
Figur 1.3 visar ett markvärmelager i berg, där man utnyttjar djupa borrhål som kanalsystem för värmebärande fluiden. Varje borrhål har en nedåtgående och en uppåtgående kanal för värmebäraren. Ett normalt system har många borrhål som ligger i ett regelbundet mönster. Avståndet mellan borrhålen är i storleksordningen 4 meter. En alternativ utformning är att borrhålen ligger som ett divergerande knippe för att minska arean vid markytan.

Många typer av kanalsystem är möjliga. I lera förekommer en typ där plastslangar i form av U-rör drivs ner i marken. Slangarna ligger i ett regelbundet mönster. Avståndet mellan dem kan vara i storleksordningen 2 meter. Ett alternativ är att gräva upp hela jordvolymen och placera ut horisontella slangar under återfyllningen. I något fall har man utnyttjat rader med nedgrävda plattvärmväxlare. Ett sätt att placera ut slangarna är att gräva rader av smala och djupa diken i vilka plastslangar placeras på ett antal nivåer.



Figur 1.3. Markvärmelager. Borrhål i berg.

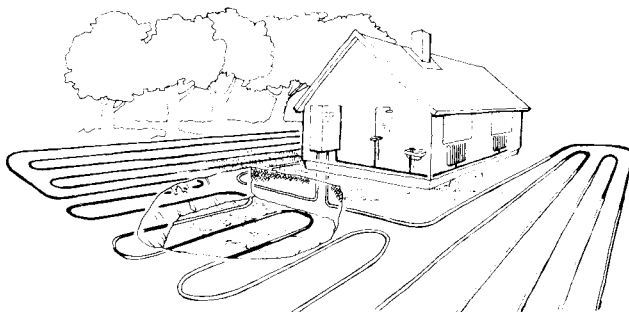
Ett akvifervärmelager utnyttjar en akvifer, dvs. ett grundvattenförande markskikt, för värmelagring. Grundvattnet används som värmebärare, medan värmelagringen utnyttjar blandningen av jord och vatten. I det enklaste fallet har man två brunnar. Se figur 1.4. Vid laddning tas grundvatten upp ur den ena brunnen. Efter uppvärmning injekteras vatten i den andra brunnen. Vid uttag vändes cirkulationsriktningen.



Figur 1.4. Akvifervärmelager.

Det har varit besvärligt att hitta en bra terminolgi. I denna skrift är värmelager i mark det överordnade begreppet, medan markvärmelager är en undergrupp.

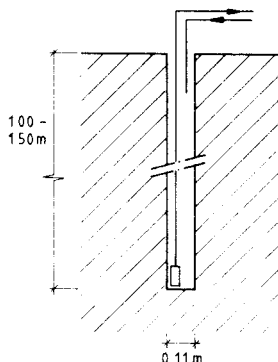
Figur 1.5 visar ett ytjordvärmesystem. Via ytjordvärmeslangarna som kan ligga på en knapp meters djup tas värme från marken. I allmänhet fryses under vintern ett område runt varje slang. Därmed utnyttjas markens frysvärme. Under vår och sommar återställs naturliga, ostörda temperaturförhållanden genom uppvärmning från markytan. Man har en passiv, naturlig återladdning.



Figur 1.5. Ytjordvärmesystem.

En bergvärmebrunn utnyttjar en djup, bergborrad brunn för att ta ut värme ur marken. Se figur 1.6. Man kan ha en inre och en yttre kanal i brunnen genom vilka vatten cirkuleras. Genom att pumpa runt vatten som är kallare än omgivande berg får man en värmeförsel från berget. Värmen fås genom nedkylning av omgivande berg. Nedkylningen stabiliserar sig efter hand. På mycket lång sikt erhålles större delen av värmen från markytan. Temperaturer under 0°C kan användas om cirkulations-systemet för värmebärarfluiden är slutet. Bergvärmebrunnen kan kombineras med ett uttag av grundvattenvärme. Man har då både en cirkulation av vatten i brunnen och ett nettouttag av vatten. Denna allmänna typ kan kallas för en energibrunn. System med flera bergvärmebrunnar förekommer. Återladdning av brunnarna sommartid kan vara aktuell.

Det enklaste grundvattenvärmesystemet består av en enda brunn. Värme-innehållet i grundvattnet ner till lägst 0°C utnyttjas, varefter vattnet avbördas t.ex. i dagvattensystemet. I allmänhet måste dock grundvattnet återinjekteras. Man kan ha ett tvåbrunnssystem som visas i figur 1.4.



Figur 1.6. Bergvärmebrunn.

Grundvattnet tas upp ur den ena brunnen och återinjekteras nedkyllt i den andra brunnen. En återladdning av systemet kan vara nödvändig. Sommartid tas det kalla vattnet upp och återinjekteras efter uppvärmning. Man kan få en viss värmelagringsfunktion om vattnet värms över naturlig ostörd temperaturnivå.

Temperaturen i marken stiger med ökande djup på grund av den geotermiska gradienten. Ett riktvärde är en ökning med 3°C per hundra meter. Djupare liggande grundvattenformationer är därför en intressant värmekälla. Då djupen blir stora talar man om geotermiska system. Man behöver minst två brunnar för produktion och återinjektering av geotermalvattnet.

Ett markvärmesystem kan karakteriseras av sin medeltemperaturnivå relativt den ostörda marken. För ett värmelager ligger medeltemperaturnivån över medeltemperaturen i ostörd mark, medan ett värmeuttagssystem har temperaturer under den ostörda markens. Ett markvärmesystem får en värmeförlust medan ett uttagssystem får en tillförsel av värme från omgivande mark.

De relativa värmeförlusterna beror kraftigt på värmelagrets storlek. Värmelager i mark måste göras stora. De är ej aktuella vid säsongslagring för ett enskilt eller ett fåtal småhus. Värmeuttagssystemen kan å andra sidan ofta med fördel användas för den enskilda villan.

En mellanform av markvärmesystem har en medeltemperaturnivå som är väsentligen lika med omgivningens. Man tar ut värme under uppvärmnings-säsongen och återladdar systemet till måttliga temperaturer på sommaren. Dessa system kan vara små.

Markvärmesystemen är starkt beroende av geologiska förutsättningar. I berggrund kan bergvärmebrunnar och markvärmelager med borrhål användas. Markvärmelager i lera kräver att leran är tillräckligt mäktig och att slangsystemet kan anläggas till rimlig kostnad. Potentialen för akvifer-värmelager begränsas av krav på tillgång till en akvifer av lämplig typ. Systemen med grundvattenvärme kräver brunnar med stor vattenföring. Stora områden i Skåne är här speciellt gynnade. I sydvästra Skåne finns potential för geotermiska system.

För markvärmesystemen finns en mängd problem och frågeställningar som är förknippade med de termiska processerna i lagret eller uttagssystemet och i omgivande mark. Frågorna rör värmeförluster och andra termiska prestanda, temperaturpåverkan på omgivningen, lämpliga röravstånd, brunnskonfigurationer, återladdning.

Denna skrift behandlar dessa ting. Enbart de rent termiska förloppen och härmed förknippade analyser tas upp.

2. FÄLTFÖRSÖK

I detta kapitel ges en summarisk redovisning av ett antal markvärmeprojekt. Syftet är att ge en översikt för olika typer av värmelager. Översikten är ej heltäckande. Någon värdering av projekten göres ej.

System för uttag av värme ur mark, såsom ytjordvärme, grundvattenvärme och bergvärmebrunnar redovisas, sånär som på några fall, ej här. För dessa system hänvisas till referens 112 och 113.

2.1 Bergrum, grop och blockfyllt bergrum

2.1.1 Svenska fältförsök

1. Avesta (1980-). Statens Vattenfallsverk.

Korttidslagring av värme i öppet bergrum. Överskottsvärme från en sopförbränningsanläggning lagras under vardagar för att användas nattetid och under veckoslut. Lagret är anslutet till fjärrvärmenätet. Speciellt intresse ägnas åt bergets mekaniska egenskaper vid värmebelastning.

Data:

- Lagervolym 15 000 m³
- Bergrummets överyta är beläget på 25 meters djup.
- Lagertemperatur 70-115°C

Referens 114. Lagret togs i drift 1982. Under de första två åren skall långtidslagring testas.

2. Lyckebo (1982-). Uppsala Kraftvärme AB.

Varmt vatten från solfångare (4300 m²) lagras under sommarhalvåret i ett vattenfyllt bergrum. Den lagrade värmen används för uppvärmning av 550 enfamiljshus via ett lokalt fjärrvärmenät. Forskningsprogrammet för detta försök omfattar energibalanser, värmeflöden, vattenkemi och bergmekanik.

Data:

- Lagervolym 100 000 m³
- Lagrets överyta är belägen 30 m under markytan
- Lagertemperatur 40-90°C
- Lagrad energimängd 5500 MWh/år

Referens 115. Lagret tas i drift under sommaren 1983.

3. Lambohov (1980-). LINKÖPING.

Värmelagret är beläget i en grop som sprängts i berg. Gropens väggar och golv består av betong. En termisk isolering har anbringats mellan cementvägg och omgivande berg. Gropen är täckt av flytande isoleringar med tjockleken 0.4 m. Värmelagret ingår i ett solenergisystem. Med användande av värmepump levereras energi till 55 enfamiljshus.

Data:

- Lagervolym 10 000 m³
- Lagret har formen av en cylinder. Diameter 32 m. Höjd 11 m.
- Lagertemperatur 5-65°C
- Lagrad energimängd 700 MWh/år
- 100 temperaturmätningpunkter

Referens 116. Värmelagret laddades för första gången under sommaren 1980.

4. Ingelstad (1979-). Växjö kommun.

Värmelagring i vattenfylld betongtank som utvändigt är isolerad med glasfiber och mineralull. Lagret ingår i ett solvärmeverk som försörjer 52 enfamiljshus.

Data:

- Lagervolym 5 000 m³
- Lagret har cylindrisk form. Diameter 28 m. Höjd 8 m.
- Lagertemperatur 40-95°C

Referens 109. Lagret har varit i drift sedan 1979. Värmeförlusterna från lagret var betydligt större än väntat. Detta beror troligen på konvektion i luftspalter mellan betongvägg och isolering.

5. Studsvik (1979-). Studsvik Energiteknik AB.

Demonstrationsanläggning för värmelagring i gropmagasin. Varmt vatten erhålls från solfångare (120 m^2) och tillförs lagret. Värmen försörjer under vinterhalvåret en kontorsbyggnad. Inga värmväxlare används i systemet.

Data:

- Lagervolym 640 m^3
- Lagertemperatur $30\text{-}70^\circ\text{C}$
- Totalt energibehov 22.5 MWh/år

Referens 117. Värmelagret har varit i drift i 4 år. Nära 100% av kontorshusets värmebehov har täckts av värme från lagret. Värmeförlusterna från lagret var något högre än väntat beroende på infiltration av regn- och smältvatten i isoleringen.

6. Laboratorieexperiment (1981-). Institutionen för geoteknik med grundläggning, Chalmers Tekniska Högskola.

Experimentet är utfört som ett tids- och längdskalat försök med värmelagring i ett blockfyllt bergrum. Lagringsgropen är utförd i betong och fyllt med en blandning av sten och vatten. Ett syfte med experimentet var att verifiera den datormodell som beskrivs i kapitel 6.2.

Data:

- Lagervolym 21 m^3
- Porositet 41%
- Lagertemperatur $10\text{-}75^\circ\text{C}$

Referens 108. Jämförelse mellan experiment och simulering visar god överensstämmelse.

7. Ljusnarsberg (1982-). Rejlers Ingenjörbyrå AB och Hagconsult AB.

Värmelagring i övergiven gruva. Temperaturen på sommarvarmt sjövatten höjs med hjälp av en värmepump och injiceras därefter i gruvan.

Data:

- Lagervolym 150 000 m³
- Lagertemperatur 5-50°C

Referens 111. Varmt vatten injekterades i gruvan under sommaren 1982.

2.1.2 Svenska förprojekterade anläggningar

1. Södertuna (1982). Södertälje Energiverk.

Ett alternativ för värmelagring vid solvärmeverket i Södertuna är en vattenfylld ståltank. Solvärmeverket levererar värme till 525 enfamilshus. Kostnadsjämförelse görs med vattenfyllt bergrum och markvärmelager (borrhål i berg). Alternativet med ståltank framstår som det billigaste alternativet.

Data:

- Lagervolym 40 000 m³
- Lagertemperatur 15-65°C
- Värmebehov 6 400 MWh/år

Referens 118.

2. Rya-verken, Göteborg (1982). Göteborgs Energiverk.

Värmelagring i blockfyllt bergrum. Lagringsvolymen består av fyra parallella bergrum. Bergrummen är fyllda av outlastad sprängsten och vatten. Avsikten är att lagra spillvärme från oljeraffinaderier på Hisingen. Den lagrade värmen används sedan i Göteborgs fjärrvärmenät.

Data:

- Total lagervolym 850 000 m³
- Avståndet mellan lagrets överyta och markytan 37 m
- Lagertemperatur 10-115°C
- Lagrad energimängd 40 GWh/år

Referens 110.

2.1.3 Utländska projekt

1. Stor varmvattenreservoar, Väst-Tyskland (1975-79). Kernforschungsanlage Jülich GmbH.

Utredning om värmelagring i stort gropmagasin avsett för fjärrvärmenät med 140 000 förbrukare.

Data:

- Lagervolym 5 000 000 m³
- Lagertemperatur 50-90°C
- Värmebehov 1 TWh/år

Referens 119.

2. Wolfsburg, Väst-Tyskland (1979-82). Stadtwerke Wolfsburg AG.

Förprojektering av värmelagring i vattenfylld grop. Lagret ingår i ett energisystem för 23 enfamiljshus. Lagrets väggar utgörs av betong.

Data:

- Lagervolym 10 000 m³
- Lagertemperatur 30-95°C
- Värmebehov 500 MWh/år

Referens 120.

3. Mannheim, Väst-Tyskland (1977-79). Stadtwerke Mannheim AG.

Förprojektering av värmelagring i vattenfylld grop. Lagret är avsett att ingå i ett fjärrvärmenät.

Data:

- Lagervolym 30 000 m³
- Lagertemperatur 50-90°C
- Lagrad energimängd 1400 MWh/år

Referens 121.

4. Chaltestown Naval Yard, USA (1982-). Argonne National Laboratory. Värmelagring i två stora underjordstankar av betong i Bostons hamnområde. Energi erhålles från plana solfångare. Den lagrade energin används för husuppvärmning.

Data:

- Total lagervolym 5 700 m³
- Lagertemperatur 45-85°C
- Värmebehov 2000 MWh/år

Referens 122. Projektets första fas har avslutats. Värmelagring kan ske om nya forskningsanslag beviljas.

5. Hjortekjaer, Danmark (1982-). Danmarks Tekniske Højskole.

Förprojektering av ett solvärmeverk med säsongslagring. Energi från plana solfångare lagras i en vattenfylld grop. Lagret är oisolerat mot omgivande mark. Solvärmeverket levererar energi till 200 enfamiljshus av partyp.

Data:

- Lagervolym 49 400 m³
- Lagertemperatur 30-56°C
- Värmebehov 2700 MWh/år

Referens 123.

2.2 Markvärmelager. Borrhål i berg, slangar i lera.

2.2.1 Svenska fältförsök

1. Sigtuna (1978-). Sunstore KB.

Denna försöksanläggning omfattar ett värmelager med borrhål i berg. Det ingår i ett värmesystem för ett enfamiljshus. Stora radiatorytor medför att temperaturen i systemet kan hållas mycket låg. Värme tillförs från enkla solfångare. Systemet arbetar utan värmepump.

Data:

- Lagervolym 7700 m³
- 42 borrhål med borrhålsradien 0.08 m. Aktivt borrhålsdjup 2-23 m.
- Lagertemperatur 24-30⁰C
- Stort antal temperaturmätningpunkter.

Referens 124.

2. Utby (1979-). Jordvärmegruppen, Chalmers Tekniska Högskola.

Värmelagret, som är beläget i vattenmättad lera, ingår i uppvärmningssystemet för ett enfamiljshus. Värme tas ur lagret under den kalla säsongen med hjälp av en värmepump. Härvid fryses en del av leran runt rören. En luftkonvektor används för återinjektering av värme under sommaren.

Data:

- Lagervolym 1300 m³
- 37 vertikala PVC-rör med en yttre diameter på 50 mm. Aktivt rördjup 0-10 m.
- Lagertemperatur 0-14⁰C
- 43 st temperaturgivare

Tre årscykler har genomförts. Referens 125.

3. Lindälvsskolan, Kungsbacka (1981-). Bengt Dahlgren AB.

Värmelager med vertikalt neddrivna plastslangar i lera. Lagret ingår i ett system för uppvärmning av en skolbyggnad med 15000 m² golvyta. Värme erhålls från solfångare som utgörs av svart takplåt. Värmepump används för uttag av energi från lagret.

Data:

- Lagervolym 80 000 m³
- 600 U-formade plaströr med ytterdiametern 16 mm. Aktivt rördjup 0.5-35 m.
- Lagertemperatur 8-20⁰C

Referens 126.

4. Alnarp (1979-80). Institutionen för lantbrukets byggnadsteknik, Sveriges Lantbruksuniversitet.

Överskott av solenergi från ett växthus lagrades i lera med hjälp av en värmepump. Lagret var beläget direkt under växthuset. Den lagrade värmen tillfördes växthuset under början av den kalla säsongen.

Data:

- Lagervolym 1500 m^3
- 1800 meter horisontella polyetylenrör med en yttre diameter på 32 mm. Tre nivåer till ett djup av 4 meter.
- Lagertemperatur $10-40^{\circ}\text{C}$
- 15 temperaturmätningpunkter

Referens 127. Värmeförlusten från lagret var mycket stor. Det mesta av den lagrade värmemängden förlorades under hösten. Metoden med horisontellt nedgrävda rör bedömdes vara olämplig för säsongslagring p.g.a. svårigheter att erhålla ett lager med stor vertikal tjocklek utan kostbar utschaktning.

5. Luleå - etapp I (1981). Institutionen för vattenbyggnad, Luleå Tekniska Högskola.

Fältförsöket avsåg värmelagring i granit. Fem cykler om vardera 24 dagar genomfördes. Lagrets dimensioner skalades så att en cykel motsvarar en period på ett år för ett oskalat system.

Data:

- Lagervolym 400 m^3
- 19 ofodrade borrhål med diametern 52 mm. Aktivt borrhålsdjup 6.5-19.5 meter.
- Lagertemperatur $20-45^{\circ}\text{C}$
- 50 temperaturmätningpunkter

Referens 20.

6. Luleå - etapp II (1983-). Institutionen för vattenbyggnad, Luleås Tekniska Högskola, Allmänna Ingenjörbyrå AB (AIB) och Luleå Energiverk AB.

Säsongslagring av spillvärme från stålverket i Luleå. Den lagrade värmen skall med användande av värmepump tillföras byggnader vid högskolan.

Lagringsmediet är granit.

Data:

- Lagervolym 115 000 m³
- 120 ofodrade borrhål med diametern 150 mm. Aktivt borrhålsdjup 5-65 m.
- Lagertemperatur 30-60°C
- Uttagen energimängd 2000 MWh/år
- Maximal uttagseffekt 580 kW

Referens 128. Systemet beskrivs vidare i avsnitt 7.1.

7. Kungälv (1982-). Institutionen för geoteknik med grundläggning, Chalmers Tekniska Högskola.

Mätstation för geotekniska studier av värmelagring i lera. Speciellt intresse ägnas åt porvattenrörelser under värmebelastning. Två mindre lager med olika typ av värmeväxlare har anlagts.

Data:

- Lagervolym 2500 m³ i båda fallen.
- I: 49 st U-formade polyamidslangor med ytterdiametern 30 mm till ett djup av 12 meter.
II: 25 st stålrör med diametern 76 mm till ett djup av 12 meter.
- 80 st mätpunkter för temperatur, 19 st för portryck, 2 st bälgslangor för mätning av sättningar, 10 st markpegelr.

Referens 129. Skjuvhållfastheten sjunker enligt vissa resultat.

2.2.2 Svenska förprojekterade anläggningar

1. Stora skuggan (1982). Sunstore KB.

Värmelager i granit för energianläggning vid motions- och rekreationscentrum. Solenergi från lågtemperatursolfångare utgör energikälla. Tre systemvarianter med olika lösningar för varmvattenberedning, topplasteffekt och värmesystem för byggnaden behandlas. I ett av dessa antas värmeförsörjningen ske utan värmepump.

Data:

- Lagervolym 50 000 - 180 000 m³
- Borrhålsdiameter 115 mm
- Byggnadens energibehov 500 MWh/år
- Lagertemperatur 8-20°C eller 24-31°C

Referens 130.

2. Södertuna. (1982). AIB.

Värmelager i granit. Energi från takintegrerade lågtemperatursolfångare (30 000 m²) lagras för att under vintern användas för uppvärmning av ett radhusområde med 525 lägenheter. Vid uttag utnyttjas värmepump.

Data:

- Lagervolym 105 000 m³
- Lagertemperatur 10-70°C
- Värmebehov 6 400 MWh/år

Referens 131.

3. Ryaverken, Göteborg (1982). Studsvik Energiteknik AB.

Sommaröverskottet från raffinaderiernas återvinningsanläggningar för spillvärme tillförs ett värmelager i granit. Lagret är av typen borrhål i berg. Dessa är borrhål från ett övre galleri av relativt stora tunnlar, vilka är belägna cirka 20 m under marknivå. Tunnlarna är vid drift fyllda med vatten och kan då användas för dygnslagring av värme.

Data:

- Lagervolym 3 000 000 m³
- 150 meter djupa borrhål med inbördes avstånd på 3.5 m.
- Lagertemperatur 50-90°C
- Uttagen energimängd 60 GWh/år

Referens 132.

2.2.3 Utländska projekt

1. Groningen, Holland (1982-85). Institute of Applied Physics TNO-TH, Delft.

Värmelagring i vattenmättad sand med inslag av lager av lera och torv. Solenergi säsonglagras för uppvärmning av 96 enfamiljshus med lågtemperaturradiatorer.

Data:

- Lagervolym 23 000 m³
- U-formade rör till ett djup av 20 m
- Lagertemperatur 25-60°C

Referens 133.

2. Vaulruz, Schweiz (1982-). Sorane SA, Lausanne.

Värmelager med horisontella plastslangar i grov sand med inslag av lera. Lagret ingår i ett solenergisystem som levererar energi till en servicebyggnad (totalt uppvärmd volym 25 000 m³). En värmepump användes vid uttag av värme från lagret.

Data:

- Lagervolym 3 500 m³
- 7 lager av polyetylenslangar med en innerdiameter på 16 mm.
Total slanglängd 8 400 m. Lagret når till 4.6 meters djup.
- Lagertemperatur 15-35°C
- Årligt värmebehov för lågtemperaturlast 200 MWh.

Referens 134.

3. Kranebitten, Österrike (1982-). Institut für Allgemeines Physik, TU-Wien.

Solenergi lagras i jord för uppvärmning av en militärförläggning. Systemet använder värmepump vid uttag av energi från lagret varvid en del av jorden fryses. Värmelagret består av två skikt med horisontella slangar.

Data:

- Lagervolym 60 000 m³
- Plastslangar med 20 mm diameter. Totallängd 12 000 m fördelade på två nivåer (3 resp. 8 m)
- Lagertemperatur -6 - +10⁰C
- Årligt värmebehov 1220 MWh/år

Referens 135.

2.3 Akvifervärmelager

2.3.1 Svenska fältförsök

1. Kvarteret Tärnan, Landskrona (1980-82). Kjessler & Mannerstråle AB. Försök med värmelagring i sprickig kalkstensakvifer. Avsikten var att utröna möjligheten att utnyttja akviferen för säsongslagring av varmt vatten, som under vinterhalvåret utgör värmekälla för värmepump. Värmebehovet ges av 9 enfamiljshus.

Data:

- Lagrad vattenvolym 1 700 m³
- Tvåbrunnssystem
- Aktivt brunnsdjup 32-82 meter.
- Försöket varade i 30 dagar.
- Injektionstemperatur 25.3⁰C. Naturlig grundvattentemperatur 11.5⁰C

Referens 21. Datorsimuleringar visar att vattenflödet i akviferen är mycket inhomogent. Flödet synes till stor del ske i sprickzoner.

2.3.2 Svenska förprojekterade anläggningar

1. Klippan (1982). VBB.

Värmelagring i isälvsavlagring. Systemet skall anslutas till ett fjärrvärmenät som betjänar 3 000 lägenheter.

Data:

- Lagrad vattenvolym 1 000 000 m³
- Akvifertjocklek 4 meter
- Lagertemperatur 5-18^oC

Referens 136. Ett inledande försök med infiltration av varmvatten har genomförts.

2. Tranås (1982). VBB.

Värmelagring i isälvsavlagring. Systemet skall ingå i ett fjärrvärmenät för 6 000 lägenheter.

Data:

- Lagrad vattenvolym 1 600 000 m³
- Akvifertjocklek 10 m
- Lagertemperatur 5-18^oC

Referens 137.

2.3.3 Utländska projekt

1. SPEOS, Schweiz (1982). Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

Värmelagring i akvifer. Vatten cirkuleras i akvifer via ett brunnsystem bestående av två skikt med horisontella dräner som sammanstrålar i en central uppsamlingsbrunn. Vattenrörelsen i lagret sker huvudsakligen vertikalt mellan dessa nivåer.

Data:

- Lagervolym 30 000 m³
- Lagrets höjd (avstånd mellan de två nivåerna) 19 m
- Lagertemperatur 25-80^oC

Referens 138.

2. Auburn, USA (1976-). Auburn University.

Värmelagring i sluten akvifer. Ett flertal fältförsök har genomförts. Injektionstemperaturen har varierats mellan de olika försöken i syfte att studera inverkan av flöden som är inducerade av densitetskillnader. Inhomogeniteter i akviferens permeabilitet har varit föremål för studier, liksom möjligheter att förbättra lagrets effektivitet med selektiv extraktion av varmt vatten ur brunnens övre del i akviferen.

Data:

- Lagrad vattenvolym 8 000 - 60 000 m³
- Akviferens tjocklek 21 m
- Lagertemperatur 20-85°C

Referens 139. Resultaten visar att igensättningsproblem vid brunnarna kan reduceras betydligt om injektions- och återledningsbrunn är belägna i samma akvifer.

3. Scarborough, Canada (1982-). Public Works Canada.

Lagring av kyla och värme i sluten artesisk akvifer. Lagret skall ingå i energisystemet för en 14-vånings kontorsbyggnad. Två två-brunnssystem används för injektion och extraktion av vatten.

Data:

- Lagrad vattenvolym 450 000 m³ per tvåbrunnssystem
- Akvifertjocklek 10 m
- Lagertemperatur 4-50°C
- Värmebehov 2 400 MWh/år, kylbehov 2 600 MWh/år

Referens 140.

4. Kina (1965-).

Värmelagring i akvifer utvecklades från försök med återinjektering av vatten i syfte att motverka marksänkning och höja grundvattennivån. Man fann under dessa försök att temperaturen på det återinjekterade vattnet i akviferen ändrades mycket långsamt. Lagring av värme och kyla har sedan införts i stor skala och omfattar nu omkring 500 brunnar. De

flesta av dessa är belägna i trakten omkring Shanghai.

Referens 22.

5. College Station, USA (1978-79). Texas A & M University.

Lagring av kallt vatten i öppen akvifer. När lufttemperaturen understeg 10°C pumpades vatten genom ett sprinklersystem till en öppen bassäng och kylde därvid till lufttemperatur. Detta vatten injekterades i akviferen och lagrades till sommaren, då det användes för luftkonditionering.

Referens 141. En stor del av det kylda vattnet förlorades under lagringen på grund av ett stort naturligt grundvattenflöde i akviferen.

6. Yamagata, Japan (1977-). University of Yamagata.

Lagring av värme och kyla i en sluten akvifer. Under sommaren tas kallt vatten ur akviferen för luftkonditionering av en affärsbyggnad samtidigt som luftvärm t vatten återinjekteras i akviferen. Det varma vattnet extraheras med omvänd cirkulationsriktning under vintern.

Data:

- Lagrad vattenvolym $9\,500\text{ m}^3$
- Akvifertjocklek 19 m
- Tvåbrunnssystem med ett avstånd på 22.4 m mellan injektions- och extraktionsbrunn.
- Injektionstemperatur 5.3°C . Naturlig grundvattentemperatur 14°C

Referens 142. Försöket visade att avståndet mellan brunnarna var för litet. Temperaturen steg kraftigt i slutet av perioden för uttag av kallt vatten. Enligt datorsimuleringar borde avståndet mellan brunnarna ökas till 40 m.

7. St. Paul, USA (1980-). University of Minnesota.

Fältförsök med värmelagring i sandstensakvifer. Lagret är beläget på stort djup. Trycket i akviferen är sådant att vatten kan lagras vid mycket höga temperaturer.

Data:

- Lagervolym 736 000 m³
- Akvifertjocklek 60 m
- Lagertemperatur 100-150°C

Ett inledande försök med injektion av 8300 m² vatten har genomförts. Vid injektion var vattentemperaturen 91°C. Speciellt intresse har ägnats åt ändringar i vattnets kemiska sammansättning. Referens 143.

8. Hörsholm, Danmark (1979-). Risø forskningslaboratorium, Roskilde.

Värmelagring i en sluten akvifer. Materialet i akviferen utgörs av sand. En centrumbrunn omges av fyra perifera brunnar på ett avstånd av 40 meter. Lagret är kopplat till en sopförbränningsanläggning vilken i sin tur ingår i fjärrvärmenätet. Förutom säsongslagring skall lagret även användas för lagring från vardagar till veckoslut då ingen sopförbränning sker.

Data:

- Lagervolym 75 000 m³
- Akviferens tjocklek 15 m
- Lagertemperatur 60-100°C
- Lagrad värmemängd 1740 MWh

Referens 144. Ett inledande försök med injektion och extraktion av varmt vatten har genomförts.

2.4 Övrigt

1. Geotermi, Lund (1982-). Lunds Energiverk. Institutionen för Geoteknologi, Lunds Tekniska Högskola.

Varmt geotermalvatten från en akvifer på 500-700 meters djup utnyttjas. Efter nedkyllning från 25°C till 5°C återinjekteras vattnet i akviferen. Värme levereras till Lunds fjärrvärmenät via en värmepump. Preliminärt planeras ett system med 10-12 brunnar.

Data:

- Effektuttag 10 MW/produktionsbrunn
- Pumpflöde per brunn 100 l/s

Två testbrunnar borrades i maj 1983. Borrningen av en första etapps fyra brunnar pågår (augusti 1984).

2. Aulnay-sous-Bois, Frankrike (1982-). Ecole des Mines de Paris.

Detta projekt avser utnyttjande av grundvattenvärme i stadsbebyggelse. Värme återladdas i akviferen under sommarhalvåret för att undvika en långsiktig nedkylning av grundvattnet. Härigenom kan även ett relativt kort avstånd mellan produktions- och återinjektionsbrunn användas. Återladdningen sker via enkla solfångare för vilka en hög effektivitet kan uppnås vid dessa låga temperaturer. Systemet används för uppvärmning av 224 lägenheter.

Data:

- Akviferen belägen på 80 meters djup.
- Grundvattentemperatur 13⁰C.

Referens 145.

3. INTRODUKTION TILL HANDBOKEN

3.1 Uppläggning och innehåll

Denna skrift har disponerats så att den skall kunna användas som en handbok. Analyserna för de olika typerna av markvärmesystem har helt särskilts i olika kapitel. En långtgående uppdelning i delproblem exempelvis för olika geometriska former har gjorts. Detta har medfört att vissa ting upprepas i olika kapitel.

Det matematiska bakgrundsmaterialet såsom partiella differentialekvationer, härledning av analytiska lösningar och numerisk teknik har ej medtagits. För detta hänvisas till referenser. I en del fall, där nya analytiska lösningar tagits fram, saknas ännu publicerade rapporter.

Vissa teoretiska resonemang, som är nödvändiga för att förstå hur processerna och problemen spaltas upp och analyseras, tas dock upp. Det viktigaste exemplet på detta är superpositionsteknik.

De olika typerna av markvärmesystemen behandlas i kapitel 6 till 11. Kapitel 6 behandlar bergsvärmelager och besläktade system, kapitel 7 markvärmelager, kapitel 8 akvifervärmelager, kapitel 9 grundvattenvärme inklusive geotermiska system, kapitel 10 bergvärmebrunnar och kapitel 11 ytjordvärme. För ytjordvärmesystem behandlas enbart värmeuttag utan frysning.

I kapitel 4 behandlas den stationära komponenten av temperaturförloppet utanför ett markvärmelager. Kapitel 5 tar upp renodlade dynamiska processer. Dessa två kapitel utgör en gemensam grund för de termiska analyserna av de olika markvärmesystemen.

Temperaturpåverkan på omgivande mark behandlas i varje kapitel för de olika typerna av markvärmesystem. I kapitel 12 tas vissa gemensamma aspekter upp.

Kapitel 13 ger en översikt över de datormodeller som använts.

3.2 Beteckningar

Följande beteckningar användes någorlunda genomgående i de följande kapitlen:

λ	värmeledningsförmåga i marken	(W/m · K)
$C = \rho c$	volymetrisk värmekapacitet i marken	(J/m ³ · K)
$a = \lambda/C$	temperaturledningstal	(m ² /s)
z	djup under marken	(m)
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	radiellt avstånd till z-axeln	(m)
t	tid	(s)
T	temperatur	(°C)
T_0	medeltemperatur i marken, årsmedeltemperatur vid markytan	(°C)
T_m	medeltemperatur på lagerytan	(°C)
$T_m(t)$	medeltemperatur i lager	(°C)
T_+, T_-	övre och undre temperaturgräns för värmelager (undantag: avsnitt 3.3)	(°C)
\hat{T}	komplexvärd temperatur	(°C)
T_R	temperatur i marken vid rör eller brunn	(°C)
T_f	temperatur i värmebärande fluid	(°C)
$u = \frac{T - T_0}{T_m - T_0}$	(t.ex.) dimensionslös temperatur	(-)

Q	värmefflöde	(W)
q	värmefflöde per ytenhet eller längdenhet	(W/m ² , W/m)
h	dimensionslös värmeförlustfaktor	(-)
E	ackumulerat värmefflöde	(J, J/m ² , J/m)
E ₊	inmatad värmemängd under lagringscykel	(J)
E ₋	uttagen värmemängd under lagringscykel	(J)
t ₀	periodtid, lagringscykelns längd	(s)
d ₀ = $\sqrt{at_0/\pi}$	inträngningsdjup för periodiskt förlopp	(m)
L	värmelagrets längd	(m)
B	värmelagrets bredd	(m)
R	värmelagrets radie	(m)
H	värmelagrets vertikala utsträckning, aktiv brunnslängd för bergvärmebrunn, akviferens höjd	(m)
D _m	djup till värmelagrets mitt	(m)
D	avstånd från markytan till lagrets överyta	(m)
V	lagrets volym	(m ³)
R ₀	brunnsradie	(m)
m _p	värmemotstånd mellan fluid och mark vid brunn eller slang räknat per meter	(K/(W/m))
q _w	grundvattenfflöde	(m/s eller m _w ³ /m ² , s)

Q_w	pumpflöde	(m^3/s)
$C_w \simeq 4.2 \cdot 10^6$	vattnets värmekapacitet	$(J/m^3 \cdot K)$

Index

m	stationär komponent (=medelvärde)
tr	komponent för transient värmeuppbyggnad
i	värmesolering
^	komplexvärd storhet

3.3 Effektivitetsmått

Några kortfattade synpunkter på problemet att välja lämpliga effektivitetsmått för markvärmelager skall här ges. En komplett beskrivning av ett givet markvärmelagers prestanda i ett givet driftsfall innebär att man ger hela tidsförloppet för värmebärarens inlopps- och utloppstemperatur samt pumpflödet både vid laddning och uttag av värme. Med hjälp av olika effektivitetsmått söker man kondensera denna information.

För att ett värmelager skall vara idealt måste samma värmemängd återfås som inlagrades. Detta är emellertid inte tillräckligt för att lagret skall vara perfekt. Man måste också få tillbaka värme med samma kvalitet dvs. vid samma temperaturnivåer som vid laddningen. Man får naturligt två effektivitetsmått.

Låt E_+ vara inlagrad värmemängd under lagringscykeln och E_- uttagen värmemängd.

Energiverkningsgraden är då

$$\eta_E = \frac{E_-}{E_+} \quad (3.3.1)$$

Medeltemperaturen hos inlagrad och uttagen värme är T_+ respektive T_- . Den exakta definitionen av dessa medelvärden ges nedan. Ostörd marktemperatur är T_0 . Ett mått på temperaturverkningsgraden ges av:

$$\eta_T = \frac{T_- - T_0}{T_+ - T_0} \quad (3.3.2)$$

Ofta anges bara energiverkningsgraden η_E . Detta kan vara missvisande eftersom man då ej ger någon information om temperaturnivåer.

Vill man ytterligare kondensera bedrivningen till ett enda effektivitetsmått bör ett mått som baserar sig på termodynamikens andra huvudsats användas (second-law efficiency). Verkningsgraden relateras till entropiproduktionen. Ett idealt lager har ingen entropiproduktion.

I referens 16 anges en förenklad form av effektivitetsmått baserade på andra huvudsatsen. Medeltemperaturerna T_+ och T_- beräknas genom en viktning där varje temperaturnivå viktas med den värmemängd som tillföres respektive uttages vid denna nivå. Produkten av η_E och η_T ger då ett sammanvägt mått på värmelagrets verkningsgrad:

$$\eta_{\text{second law}} = \eta_E \cdot \eta_T \quad (3.3.3)$$

För en härledning av detta hänvisas till referens 16.

Genom de två faktorerna i formel 3.3.3 speglas prestanda både för energimängd och för energikvalitet eller temperaturnivå.

För att få en rättvisande jämförelse måste också den totala energiomsättningen beaktas. Ett system med högre verkningsgrad men med lägre energiomsättning kan vid en totalbedömning vara det sämre alternativet.

Man kan definiera en utnyttjandefaktor (utilization factor), där t.ex. uttagen värme relateras till en referensvärmemängd, E_{ref} , vilken kan vara värmelagrets nominella lagringskapacitet:

$$\eta_U = \frac{E_-}{E_{\text{ref}}} \quad (3.3.4)$$

där t.ex.

$$E_{\text{ref}} = (\Delta T)_{\text{ref}} \cdot VC_{\text{lager}} \quad (3.3.5)$$

3.4 Partiella differentialekvationer

Temperaturförloppen i marken beskrivs matematiskt av den så kallade värmeledningsekvationen. Den får olika form i olika fall. De analyser som redovisas i denna skrift baserar sig på analytiska och numeriska lösningar av denna partiella differentialekvation med givna randvillkor och andra data. Dessa mer teoretiska ting redovisas ej i denna skrift. Som bakgrundsinformation skall dock en kortfattad redovisning av styrande ekvationer i några fall anges. Detta avsnitt är ej nödvändigt för förståelsen av det övriga stoffet.

I ett markområde utan grundvattenrörelser uppfyller temperaturen $T(x,y,z,t)$ den tredimensionella icke-stationära värmeledningsekvationen:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.4.1)$$

Här är a temperaturledningstalet. Värmeledningsförmågan λ antas för denna form vara konstant i det aktuella markområdet.

För en bergvärmebrunn eller ett cylinderformat värmelager användes cylinderkoordinaterna z (djup från markytan) och r (radiellt avstånd till z -axeln). Värmeledningsekvationen blir då

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad T = T(r,z,t) \quad (3.4.2)$$

Den rent radiella processen kring t.ex. ett inre rör i ett markvärme-lager styrs av:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad T = T(r,t) \quad (3.4.3)$$

Med hjälp av Laplaceoperatoren som definieras av

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.4.4)$$

kan den tredimensionella dynamiska värmeledningsekvationen skrivas:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.4.5)$$

I avsnitt 5.2 behandlas rent periodiska förlopp där tidsvariationen ges av sinus- och cosinusfunktioner. Periodtiden betecknas t_0 . En komplex notation användes. Se avsnitt 5.2.1. Den komplexvärda temperaturen \hat{T} uppfylles:

$$\nabla^2 \hat{T} = \left(\frac{1+i}{d_0}\right)^2 \cdot \hat{T} \quad \hat{T} = \hat{T}(x, y, z) \quad T = \hat{T} \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (3.4.6)$$

I kapitel 7 utnyttjas så-kallade steady-flux lösningar för att beskriva vissa förlopp internt runt rören vid laddning och uttag. Dessa karakteriseras av att värmeflödet i varje punkt är konstant i tiden. Temperaturen stiger med konstant hastighet i varje punkt. Temperaturökningstakten bestäms av inmatad värmemängd per volymsenhet (Q/V). Man har en temperatur av följande typ:

$$T(x, y, z, t) = \frac{Q \cdot t}{CV} + T_{sf}(x, y, z) \quad (3.4.7)$$

Temperaturen T_{sf} uppfyller ekvationen:

$$\nabla^2 T_{sf} = \frac{Q}{\lambda V} \quad (3.4.8)$$

I ett stationärt fall gäller:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (3.4.9)$$

Ekvationerna 3.4.5, 3.4.6, 3.4.8 och 3.4.9 är olika former för värmeledningsekvationer vilka kommer till användning i de olika avsnitten.

Värmeledningsekvationen får en annan form för en akvifer, där man har strömmande grundvatten. Låt $\bar{q}_w = (q_{wx}, q_{wy}, q_{wz})$ vara vattenvolymflödet

(m³ vatten per m² och sekund eller förkortat m/s). Det strömmande grundvattnet ger upphov till en konvektiv värmetransport. Ekvationen får följande allmänna tredimensionella form:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - T C_w q_{wx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - T C_w q_{wy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial T}{\partial z} - T C_w q_{wz}) \quad (3.4.10)$$

Här är C akviferens volymetriska värmekapacitet och C_w vattnets (J/m³ · K). Om \bar{q}_w är lika med noll och λ är konstant, så övergår ekvationen i (3.4.1) ($a = \lambda/C$).

Grundvattenströmningen \bar{q}_w bestäms av den naturliga regionala grundvattenrörelsen och av pumpning i olika brunnar. Infiltration kan också påverka strömbilden.

Värmeflödet \bar{q} i en punkt i marken ges av:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.4.11)$$

Randvillkoret över ett värmeisolerande skikt vid ett värmelagers yta mot mark kan få följande form:

$$(T_{\text{lager}} - T_{\text{mark}}) \cdot \frac{\lambda_i}{d_i} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\text{mark}} \quad (3.4.12)$$

Den första faktorn i vänstra ledet är temperaturdifferensen över värmeisoleringen. Denna multipliceras med isoleringens värmeledningsförmåga λ_i och divideras med dennas tjocklek d_i . Vänstra ledet ger då värmeflödet ut i marken. Detta skall vara lika med högra ledet som uttrycker värmeledningen i marken strax utanför värmeisoleringen. Här anger $\frac{\partial T}{\partial n}$ temperaturderivatan i normalriktningen.

För ett borrhål i berg får man följande typ av randvillkor. Temperaturen i värmebärande fluiden betecknas T_f , medan T_R är temperaturen i berget precis vid brunnen. Brunnradien är R_0 . Värmeflödet ut från brunnen per meter brunn blir:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_0} \cdot 2\pi R_0 \quad (W/m) \quad (3.4.13)$$

Här är $2\pi R_0$ omkretsen, medan $\frac{\partial T}{\partial r}$ anger temperaturderivatan i radiell led. Värmemotståndet mellan fluid och bergvägg räknat per meter brunn betecknas m_p (K/(W/m)). Randvillkoret vid brunnen blir då:

$$T_f - T_R = m_p \cdot (-\lambda) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_0} \cdot 2\pi R_0 \quad (3.4.14)$$

Uttryckt i ord innebär denna ekvation att temperaturdifferensen är lika med värmemotståndet gånger värmeflödet.

Vid numerisk lösning användes explicita framåtdifferenser. För stationära fall utnyttjas överrelaxation. I fall där grundvattenflöde förekommer användes en nyutvecklade teknik för att undvika så kallad numerisk dispersion.

I tvådimensionella och cylindersymmetriska fall utnyttjas normalt i storleksordningen 500 gitterceller för att representera temperaturförloppet. Normal tidsåtgång för en simulering av 25 år kan vara runt fem minuter på en UNIVAC 1100/80. I genuint tredimensionella fall används i storleksordningen 10 000 gitterceller. För ett system med bergvärmebrunnar kan 2-50 cylindersymmetriska problem lösas parallellt. Dessa har vardera något hundratal gitterceller.

De numeriska beräkningarna bedöms genomgående ge ett fel på maximalt några procent.

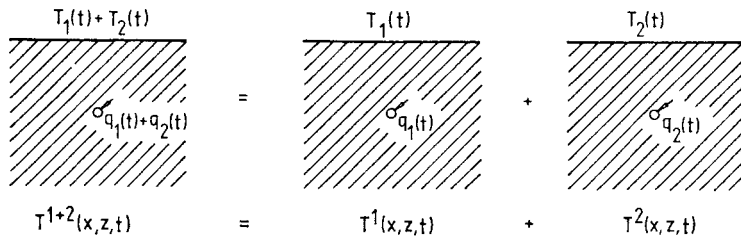
3.5 Superposition

De olika formerna av värmeledningsekvationen i föregående avsnitt är väsentligen linjära partiella differentialekvationer. Detta innebär att olika lösningar kan superponeras. Om två temperaturförlopp var för sig uppfyller värmeledningsekvationen så gäller detta även för summan av de två temperaturerna. Ett komplicerat temperaturförlopp kan på detta sätt ses som en överlagring av ett antal delkomponenter vilka var för sig kan ha en relativt enkel struktur.

Med superposition kan många komplicerade värmeeströmningsproblem lösas. Genom en sådan uppdelning i enkla grundläggande förlopp får man en bättre överblick och förståelse av vad som sker.

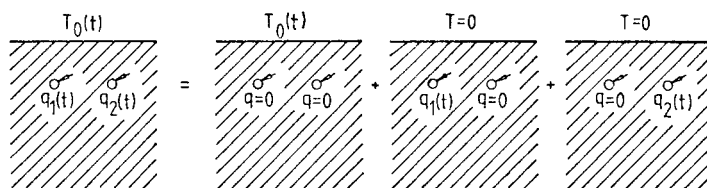
Superpositionsteknik kan ej användas i markområden där frysning sker. Den andra viktiga begränsningen för de här aktuella tillämpningarna gäller temperaturförlopp i strömmande grundvatten. Förlopp som härför sig till olika strömningsmönster för grundvattnet kan ej superponeras.

Figurerna 3.1-2 illustrerar superpositionstekniken vid analys av ytjordvärmslangar. Figur 3.1 visar ett vertikalt tvärsnitt i marken vinkelrät mot en markvärmslang. Till denna har man ett tidsvariabelt värmefflöde. Effektflödet uppdelas i två delar $q_1(t)$ och $q_2(t)$. Den ena delen kan utgöra korttidsvariationer medan den andra delen svarar för en mer långsiktig variation. På samma sätt kan temperaturvariationen vid markytan ses som en summa av två delar $T_1(t)$ och $T_2(t)$. Det totala temperaturförloppet i marken kring ytjordvärmslangen kan ses som summan av två delförlopp enligt figur 3.1. Det första delförloppet har effektuttaget $q_1(t)$ och temperaturen $T_1(t)$ vid markytan. Motsvarande storheter för den andra delprocessen är $q_2(t)$ och $T_2(t)$. Genom en lämplig uppdelning av effektuttag och temperatur vid markytan kan t.ex. korttids- och långtidseffekter separeras från varandra.



Figur 3.1. Superposition av två temperaturprocesser för en ytjordvärmslang.

I figur 3.2 visas ett tvärsnitt i marken för två parallella ytjordvärmslangar. Problemet definieras av en given temperatur $T_0(t)$ vid markytan och givna effektuttag $q_1(t)$ och $q_2(t)$ till slangarna. Processen uppdelas enligt figuren i tre mer elementära delar.



Figur 3.2. Superposition där ostörd marktemperatur och rena effektuttag för två ytjordvärmslangar separeras.

Den första delen har effektuttaget noll till båda slangarna och den föreskrivna temperaturen vid markytan. Denna del ger naturlig ostörd temperatur i marken. Den andra delen har effektuttaget $q_1(t)$ till den ena slangerna, medan den andra slangens effektuttag är noll. Den tredje delen tar hand om den andra slangens effektuttag $q_2(t)$. Temperaturen vid markytan skall för de två sista komponenterna vara noll. Adderas dessa tre processer får man den totala, mer komplicerade processen. Den andra och den tredje komponenten är ett grundfall där man har ett effektuttag med en enda slang. Problemet enligt vänster bild i 3.2 har genom denna superposition uppdelats i enklare grundfall.

Ett givet tidvariabelt effektuttag $q(t)$ kan genom superposition uppdelas i enklare typer av effektuttagsfunktioner. I avsnitt 5.3 visas hur komplicerade effektuttag kan reduceras till ett antal stegpulser. Ett enkelt exempel visas i figur 5.3.1.

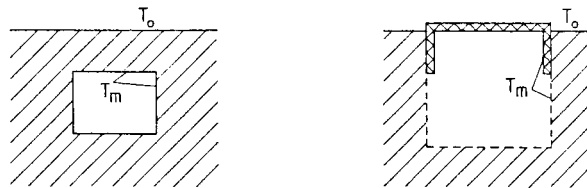
För temperaturförloppen i marken har man tre fundamentala delkomponenter. Man har en tidsberoende eller stationär del och en överlagrad periodisk variation under t.ex. en årscykel. Under en första tidsperiod sker för ett värmelager en transient uppbyggnad av en värmekudde runt lagret.

Den periodiska komponenten ger ett pulserande temperaturförlopp med en viss, relativt begränsad räckvidd runt markvärmesystemet. Man får ett pulserande värmefflöde ut i marken. Nettoutflödet under en lagringscykel blir noll.

Tiden för den transienta uppbyggnaden av en värmekudde runt ett markvärmelager kan för stora lager vara flera tiotals år. Efter hand stabi-

liserar sig förloppet. Den transienta temperaturupbyggnaden närmar sig ett stationärt sluttillstånd. Man har då en tidsberoende eller stationär temperaturfördelning i marken runt värmelagret. Härtill kommer den överlagrade periodiska variationen under lagringscykeln.

Vid beräkning av årliga värmeförluster från ett värmelager kan man bortse från den periodiska komponenten eftersom dennas nettoutflöde är noll. Värmeutflödet bestäms av medeltemperaturer under lagringscykeln. Årsvariationer vid markytan kan vara betydelsefulla för värmeförlusternas fördelning under årscykeln. De påverkar ej den årliga värmeförlusten. Vid markytan skall man använda en konstant temperatur T_0 som är lika med årsmedeltemperaturen för den aktuella orten. På värmelagrets yta mot marken har man en konstant temperatur T_m som representerar ett årsmedelvärde. Figur 3.3 visar för ett värmelager detta delproblem som bestämmer årlig värmeförlust.



Figur 3.3. Delproblem som bestämmer de årliga värmeförlusterna. Vid lagerytan ansättes årsmedelvärdet T_m .

För den transienta uppbyggnaden har man begynnelsestemperaturen T_0 i marken. Vid lagrets yta har man den konstanta temperaturen T_m . Dessa renodlade transienta årsvärmeförluster behandlas i avsnitt 5.1. Det stationära temperaturförloppet bestämmer de årliga värmeförlusterna efter insvängningsperioden. Denna mycket betydelsefulla delprocess behandlas i kapitel 4.

Den stationära temperaturfördelningen är också av intresse ur miljösynpunkt eftersom den ger maximal temperaturpåverkan från markvärmesystemet. I området närmast värmelagret tillkommer periodiska variationer under årscykeln.

Superponeringsteknik används i vissa av datorprogrammen. I datormodellen för ett system av bergvärmebrunnar (Superposition Bore-hole Model) superponeras lösningar som hänför sig till brunnarna var för sig. I modellen för rörvärmelager (Duct Storage Model) superponeras ett globalt temperaturförlopp i och utanför lagret och ett antal lokala lösningar runt värmebärarkanalerna.

3.6 Error function

Funktionen $\operatorname{erfc}(x)$ används på många ställen i de följande kapitlen. Fel-funktionen eller på engelska Error function behandlas grundligt i referens 103 B.

Error function $\operatorname{erf}(x)$ definieras som integralen:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds \quad (3.6.1)$$

Den så kallade Complementary error function ges av:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-s^2} ds \quad (3.6.2)$$

Man har följande samband för positiva och negativa argument:

$$\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x) \quad (3.6.3)$$

Några värden är:

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(0) &= 1 & \operatorname{erfc}(0.5) &\approx 0.5 & \operatorname{erfc}(1) &= 0.16 \\ \operatorname{erfc}(2) &= 0.005 \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

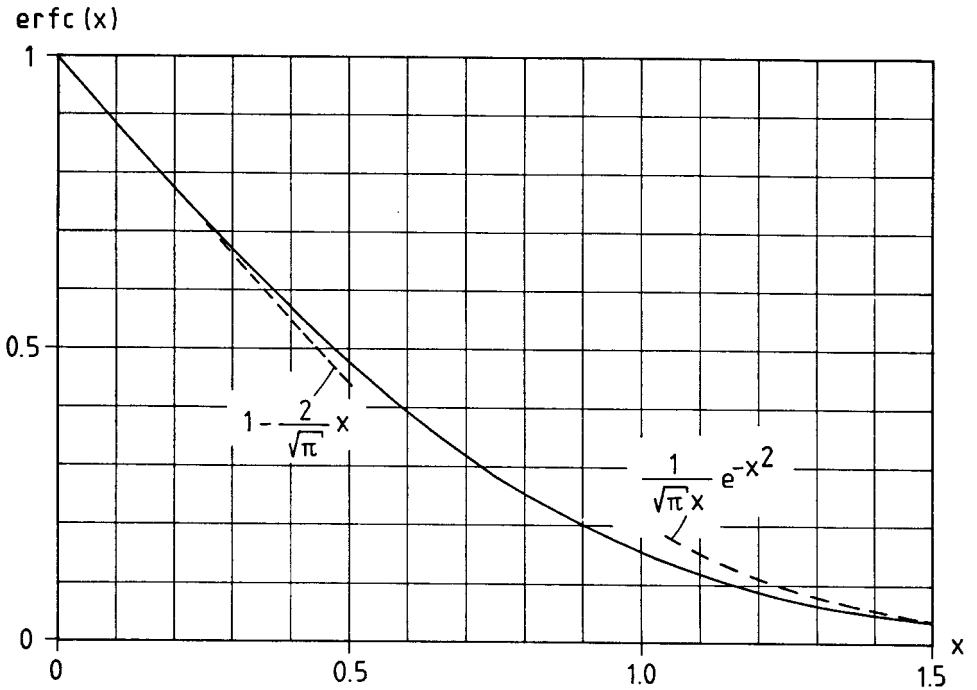
Serietutvecklingen i x är:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x^3}{3} - \dots \quad (3.6.5)$$

Asymptotiskt gäller för stora x :

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \cdot \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} \right\} \quad (x > 1.5) \quad (3.6.6)$$

Funktionen ges i tabell 3.1 och i figur 3.4. I figuren visas även approximativa uttryck för små och stora x enligt 3.6.5-6.



Figur 3.4. Funktionen $\operatorname{erfc}(x)$.

x	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\operatorname{erfc}(x)$	1	0.944	0.888	0.832	0.777	0.724	0.671

x	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65
$\operatorname{erfc}(x)$	0.621	0.572	0.525	0.480	0.437	0.396	0.358

x	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.0
$\operatorname{erfc}(x)$	0.322	0.289	0.258	0.229	0.203	0.179	0.157

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
erfc(x)	0.120	0.090	0.066	0.048	0.034	0.024	0.016	0.011	0.007	0.005

x	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
erfc(x)	0.0047	0.0019	0.00069	0.00024	0.000075	0.000022

Tabell 3.1. Funktionen erfc(x).

Följande approximation för erfc har ett maximalt fel på 1%:

$$\operatorname{erfc}(x) \simeq e^{-x^2} \cdot \frac{2+x}{2 + \left(1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)x + \sqrt{\pi} \cdot x^2} \quad (3.6.7)$$

$$(0 \leq x < \infty)$$

3.7 Värmeledningsförmågan i svensk berggrund

Detta avsnitt är skrivet av

Jacob Johnson, Sveriges Geologiska Undersökning, Uppsala,
 Jan Sundberg, Geologiska Institutionen, Jordvärmegruppen, Chalmers
 Tekniska Högskola, Göteborg,
 Bo Thunholm, Sveriges Lantbruksuniversitet, Uppsala
 i juli 1984.

Vid utvinning och lagring av värme i berggrunden är värmeledningsförmågan eller värmeledningskoefficienten λ (W/mK) av betydelse. Den energimängd som kan utvinnas ur en bergvärmearbetsanläggning är direkt proportionell mot λ -värdet i berget.

Vid Geologiska institutionen, CTH, har i samarbete med SGU närmare 4000 beräknade och uppmätta värden på olika bergarters värmeledningsförmåga sammanställts. Arbetsfördelningen har varit sådan att SGU har svarat för insamling av data och upprättande av databank medan CTH har verifierat beräkningsmetoden, utvärderat data m m. Härvid har λ -värdena klassats med

avseende på ett tjugofemtal olika bergartsgrupper. De flesta beräknade värden härrör från redovisade mineralsammansättningar i SGU:s publikationer, främst i serie Af. Uppmätta värden har erhållits bl a från CTH:s studier om värmefflöde i berg och från mätningar i svenska gruvor. Värden för sedimentära bergarter är nästan uteslutande uppmätta och härrör från en dansk undersökning.

Beräkningar på grundval av bergartsprovernans mineralsammansättning har utförts på flera sätt:

- (1) aritmetiskt medelvärde
- (2) geometriskt medelvärde
- (3) harmoniskt medelvärde
- (4) medelvärde av en undre och en övre gräns enligt Hashin, Shtrikman.

Vanligen ordnar sig de olika beräkningarna enligt (3) < (2) < (4) < (1).

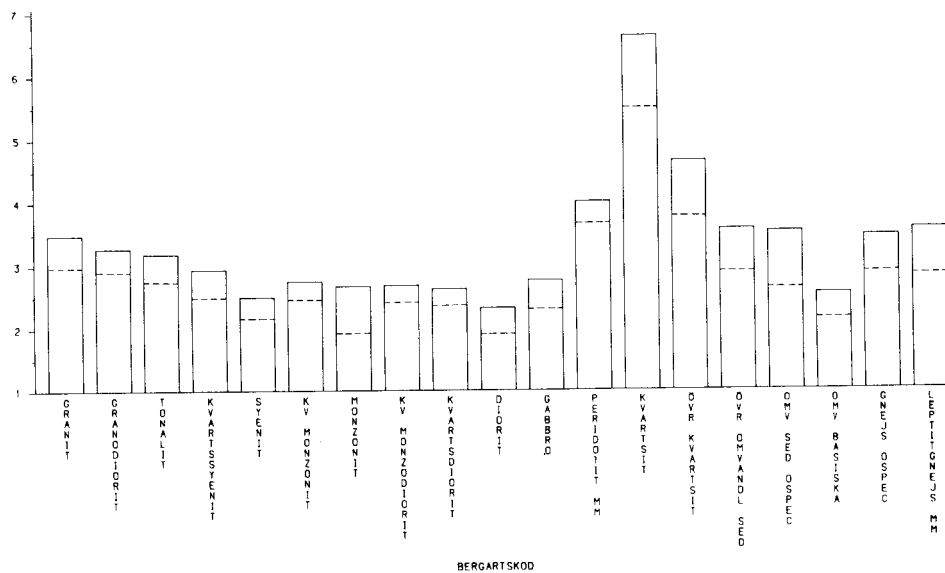
Tidigare studier samt resultat från denna undersökning visar att metod (4) överensstämmer bäst med uppmätta värden. Den största avvikelser mellan uppmätta och beräknade värden i denna undersökning härrör från prover från anisotropa bergarter.

I figur 3.5 visas medelvärden för olika kristallina bergarter för hela landet. Den streckade linjen visar vilket värde som 90% av fördelningen överskrider med konfidensgrad 95%. För ytterligare information hänvisas till Johnson, Sundberg, Thunholm, Värmeledning i svensk berggrund, Byggnadsrådet, i koncept. Den beräknas utkomma hösten 1984*. I den rapporten redovisas även bl a värmeledningens länsvis. Detta medför naturligtvis större variationer av medelvärdet men med mindre spridning. Rapporten innehåller även olika möjligheter att bestämma värmeledning för ett visst objekt på en viss plats.

En undersökning som avser värmeledning och specifik värmekapacitet för olika svenska jordarter är under utvärdering vid CTH och avses att publiceras inom kort.

* Rapporten finns nu i tryck, referens 165.

VÄRMEKONDUKTIVITET

 λ (W/mK)

Figur 3.5. Värmeledning för kristallina bergarter

4. STATIONÄRA TEMPERATURFÖRLOPP. VÄRMFÖRLUSTFORMLER

Den stationära, dvs tidsberoende, delen av det totala temperaturförloppet i marken utanför ett markvärmelager är en av de viktigaste komponenterna för de termiska analyserna. Denna del bestämmer den totala årliga värmeförlusten efter en inledande transient period. Denna transienta temperaturuppbyggnad behandlas i avsnitt 5.1. Vidare ger den stationära delen maximal temperaturstörning från värmelagret utom för områden närmast lagret där tidsvariabla processer också är av betydelse. I detta kapitel redovisas ett antal grundläggande fall vilka senare kommer att utnyttjas för de olika lagertyperna. Formler för årlig värmeförlust anges som funktion av lagerstorlek, lagerform och värmeisolering.

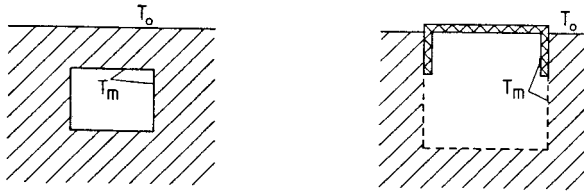
4.1 Introduktion

4.1.1 Stationär delprocess

Det totala temperaturförloppet i och utanför ett markvärmelager kan genom superposition uppdelas i enklare delprocesser. Detta diskuteras i avsnitt 3.5. Den totala processen består av en stationär del och en periodisk del. Vidare har man under de första åren en transient uppbyggnad fram till årligt periodiska förhållanden. Grundläggande periodiska och transienta förlopp behandlas i nästa kapitel.

Enligt diskussionen i avsnitt 3.5, där superpositionsprinciperna behandlas, bestäms värmeflödet till och från lagret av temperaturen på lagerytan. Denna varierar över ytan. Den varierar även med tiden. Den periodiska delen av yttemperaturen ger ett periodiskt in- och utflöde av värme. Nettoflödet under årscykeln blir noll. Bortsett från de första årens transient bestäms därför det årliga värmeflödet av medeltemperaturen på lagerytan under årscykeln. Årsmedeltemperaturen varierar normalt från punkt till punkt på lagerytan. Man har en medelnivå T_m och en överlagrad variation över ytan. Om variationen över ytan är liten eller om medelnivån väljes på lämpligt sätt blir nettovärmeflödet från den överlagrade variationen väsentligen försumbar.

Värmeförlusten bestäms då av en lämpligt vald konstant yttemperatur T_m . Delar av lagerytan kan täckas av värmeisolerande skikt. Vid markytan råder en konstant temperatur T_o . Vi får ett stationärt värmeströmningsproblem i marken utanför lagret. Detta stationära temperaturförlopp illustreras i figur 4.1.1 för ett lager under mark och för ett lager med överytan vid marknivån. I det senare fallet har man värmeisolerat översidan och en bit av den vertikala kanten.



Figur 4.1.1. Stationärt temperaturförlopp i marken utanför värmelager med konstant yttemperatur T_m .

Det stationära värmeutflödet från lagret skall betecknas Q_m (W). I en del fall skall även ett plant tvärsnitt av ett långsträckt värmelager studeras. I ett sådant fall betecknas värmeförlusten per meter i lagrets längdriktning q_m (W/m).

4.1.2 Dimensionslös form. Värmeförlustfaktor h.

Den stationära temperaturfördelningen i marken, $T(x,y,z)$, kan presenteras i dimensionslös form enligt:

$$T(x,y,z) = T_o + (T_m - T_o) \cdot u(x/L_s, y/L_s, z/L_s) \quad (4.1.1)$$

Den dimensionslösa temperaturen u är noll vid markytan och +1 vid lagrets yta. Rumskoordinaterna för u är dimensionslösa genom skalning med en längd L_s . Denna kan vara t.ex. lagrets höjd eller bredd.

Värmeförlusten Q_m är direkt proportionell mot temperaturdifferensen $T_m - T_o$ och mot värmeledningsförmågan λ i marken. Värmeförlusten kan skrivas:

$$Q_m = \lambda(T_m - T_o)L_s \cdot h \quad (W) \quad (4.1.2)$$

Faktorn h är dimensionslös. Vi skall genomgående använda denna beteckning och kalla den för värmeförlustfaktor.

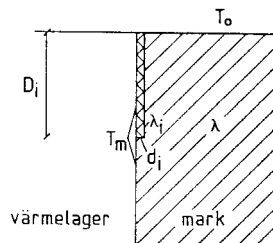
Låt L_s , L_1 , L_2 osv vara de längder som karakteriserar värmelagret. Värmeförlustfaktorn blir en funktion av skalade längder, dvs. av lagrets form och läge:

$$h = h(L_1/L_s, L_2/L_s, \dots) \quad (4.1.3)$$

Marken utanför lagret kan bestå av områden med olika värmeledningsförmågor λ , λ_1 , λ_2 osv. Värmeförlustfaktorn blir då också en funktion av relativa värmeledningsförmågor λ_1/λ osv:

$$h = h(L_1/L_s, \dots, \lambda_1/\lambda, \dots) \quad (4.1.4)$$

En speciell komplikation är skalningen för värmeisoleringen av lagret. Figur 4.1.2 visar ett exempel, där lagret har en vertikal isolering längs kanten. Isoleringens tjocklek är d_i , och dess värmeledningsförmåga är λ_i . Isolerskivan går ner en längd D_i .



Figur 4.1.2. Vertikal isolering vid kanten av ett lager.

Isoleringen ger de tre dimensionslösa parametrarna d_i/L_S , D_i/L_S och λ_i/λ . Normalt räknas isoleringen bara som ett värmemotstånd mellan lagertemperaturen T_m och marken utanför isoleringen. Vid skalning skall då isoleringens värmemotstånd d_i/λ_i skalas mot värmemotståndet L_S/λ . Isoleringen ger då två dimensionslösa parametrar för värmeförlustfaktorn

$$h = h(L_1/L_S, \dots, D_i/L_S, (d_i\lambda)/(L_S\lambda_i)) \quad (4.1.5)$$

För ett långsträckt lager betecknade q_m värmeförlusten per meter. Den dimensionslösa värmeförlusten blir för ett sådant tvådimensionellt fall

$$q_m = \lambda (T_m - T_o) \cdot h \quad (\text{W/m}) \quad (4.1.6)$$

Faktorn h blir en funktion av lagrets geometriska form.

Det är lärorikt att jämföra formlerna 4.1.2 och 4.1.6. I det tredimensionella fallet är värmeförlusten Q_m proportionell mot den linjära storleken L_S . Detta beror på att värmeförlusten är proportionell mot lagrets area gånger temperaturgradient. Den senare faktorn är proportionell mot $1/L_S$. Totalt får vi

$$Q_m \propto L_S^2 \cdot 1/L_S = L_S \quad (4.1.7)$$

I det plana fallet, där vi räknar per meter vinkelrät mot planet, har man i stället:

$$q_m \propto L_S \cdot 1/L_S = 1 \quad (4.1.8)$$

Värmeförlusten q_m beror således ej på lagrets linjära dimensioner.

4.2 Sfäriskt lager.

Vi skall i detta avsnitt studera fallet, då värmelagret har sfärisk form. Detta fall kan synas väl akademiskt, men det kommer att visa

sig vara av intresse på grund av att processen är genuint tredimensionell och att formlerna blir enkla.

Låt oss först se på ett sfäriskt värmelager som ligger så djupt ner under markytan att denna ej påverkar det stationära temperaturförloppet kring lagret. Lagrets radie är R . Det radiella avståndet från lagrets centrum betecknas r .

Temperaturen vid lagerytan är T_m . På stort avstånd från lagret är den ostörda marktemperaturen T_0 . Den stationära temperaturen utanför det sfäriska lagret blir då:

$$T = T_0 + (T_m - T_0) \cdot \frac{R}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.2.1)$$

Värmeförlusten Q_m från ett sfäriskt lager i en oändlig omgivning blir:

$$Q_m = 4\pi\lambda R(T_m - T_0) \quad (4.2.2)$$

Om vi tar $L_s = R$ för skalningen blir värmeförlustfaktorn:

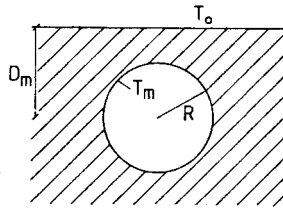
$$h = 4\pi \quad (L_s = R) \quad (4.2.3)$$

Värmeutflödet per ytenhet från sfären blir enligt formel 4.2.2:

$$\frac{Q_m}{4\pi R^2} = \frac{\lambda(T_m - T_0)}{R} \quad (4.2.4)$$

Den oändliga sfäriska omgivningen svarar således mot en "plan" tjocklek R .

Figur 4.2.1 visar ett sfäriskt lager på måttligt djup under markytan. Lagrets mittpunkt ligger på djupet D_m under markytan ($D_m > R$).

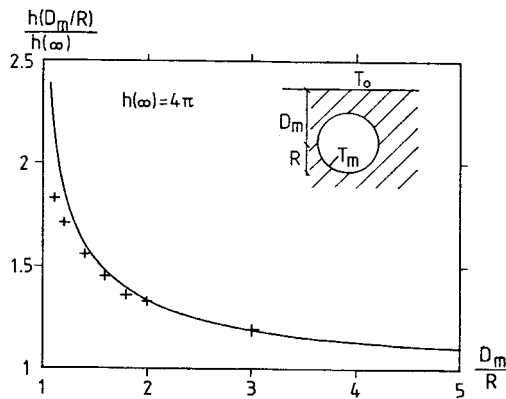


Figur 4.2.1. Sfäriskt värmelager på djupet D_m under markytan.

Värmeförlustfaktorn blir en funktion av D_m/R . Vi har med utnyttjande av formel 4.2.3:

$$Q_m = \lambda(T_m - T_o)R \cdot h(D_m/R) \quad h(\infty) = 4\pi \quad (4.2.5)$$

Figur 4.2.2 visar $h(D_m/R)$.



Figur 4.2.2. Värmeförlustfaktor för sfäriskt lager på djup D_m relativt sfär på oändligt djup. Kursen anger värden enligt den approximativa formeln 4.2.6.

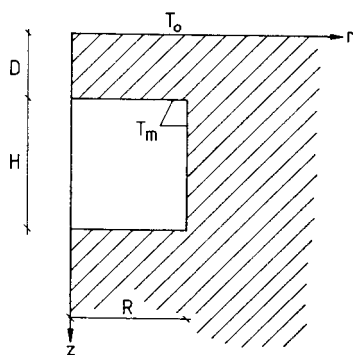
I avsnitt 4.4 anges approximativa formler för värmeförlust Q_m och för värmeförlustfaktor h för ett lager på måttligt djup, då man känner förlusten för samma lager på stort djup. Vi får med formlerna 4.4.1 och 4.2.3:

$$h(D_m/R) \approx \frac{4\pi}{1 - \frac{R}{2D_m}} \quad (D_m/R > 1.5) \quad (4.2.6)$$

Värden enligt denna formel är markerade med kryss i figur 4.2.2. Vi ser att approximationen är mycket god (fel $\leq 3\%$) då $D_m/R \geq 1.5$.

4.3 Cylinderformat värmelager under mark.

Värmelagret har formen av en cylinder med höjden H och radien R . Cylinderns rotationsaxel sammanfaller med den vertikala z -axeln. Cylinderns överyta ligger på djupet D under markytan. På cylinderytan är temperaturen T_m , och vid markytan är den T_0 . Se figur 4.3.1. Resultaten i detta avsnitt finns mer detaljerat redovisade i referens 1.

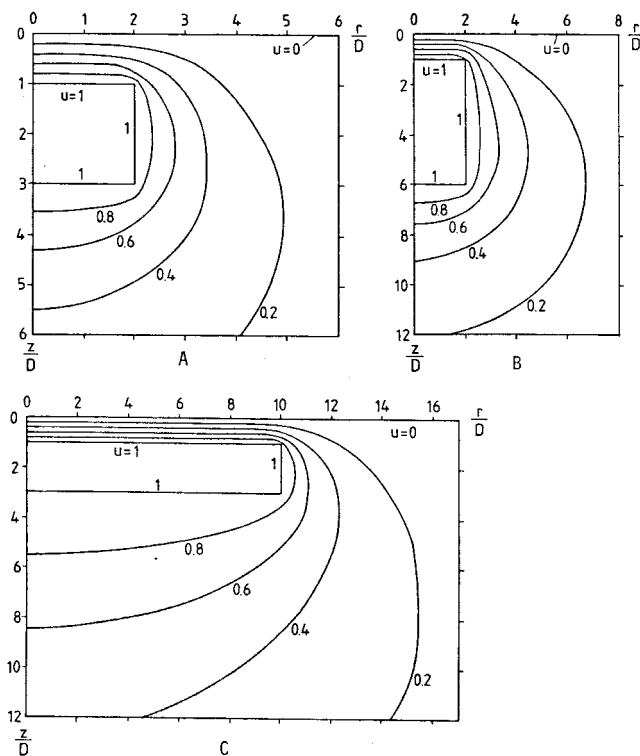


Figur 4.3.1. Stationärt temperaturförlopp utanför cylinderformat värmelager under mark.

4.3.1 Temperaturfält

Den dimensionslösa temperaturen u enligt formel 4.1.1 är +1 på cylinderytan och noll vid markytan. Vi skalar längden med D ($L_s = D$).

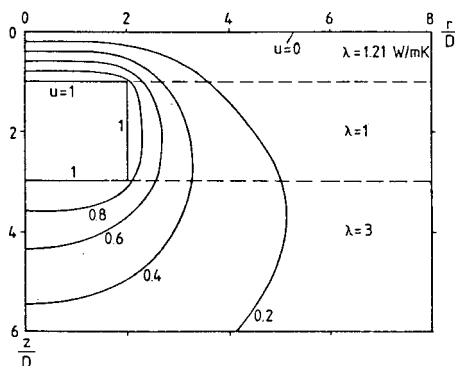
Temperaturfältet beror av de två parametrar R/D och H/D . Temperaturfältet har beräknats numeriskt för tre fall med olika geometri. Resultatet visas i figur 4.3.2 A-C. De tre figurerna ger en god bild av temperaturpåverkan från ett värmelager i mark. Vi ser att temperaturfältet har en "dipol"-karaktär. Utsträckningen av temperaturfälten bestäms av värmelagrets linjära dimensioner.



Figur 4.3.2. Dimensionslöst temperaturfält utanför cylinderformat värmelager. A: $R/D = 2, H/D = 2$. B: $R/D = 2, H/D = 5$. C: $R/D = 10, H/D = 2$.

Marken utanför värmelagret förutsätts ha en enda värmeledningsförmåga i dessa tre exempel. Figur 4.3.3 visar ett fall där marken be-

står av tre olika skikt. Värmeledningsförmågan för de tre skikten ges i figuren. Geometrin är densamma som i figur 4.3.2 A.



Figur 4.3.3. Dimensionslöst temperaturfält utanför ett cylinderformat värmelager. Marken består av tre skikt med olika värmeledningsförmåga. $R/D = 2$, $H/D = 2$.

Vi ser vid en jämförelse mellan 4.3.3 och 4.3.2 A att temperaturfälten är förhållandevis likartade. Isotermerna i det inhomogena fallet är dock mer utbredda beroende på att värmeledningsförmågan är väsentligt större i det understa skiktet än i de två övre.

4.3.2 Värmeförlust

Värmeförlusten för det cylinderformade lagret under markytan ges enligt formel 4.1.2 med D som skalningslängd:

$$Q_m = \lambda(T_m - T_o)D \cdot h(R/D, H/D) \quad (4.3.1)$$

Faktorn h har beräknats numeriskt för ett antal parametervärden. Resultatet ges i tabell 4.3.1.

$\frac{H}{D}$	20	63		230	569	1064	1716	
	15	54		213	547	1038	1686	
	10	43		194	521	1006	1649	
	5	31	57	89	171			
	4	28	53	84	165			
	2	21	44	73	150	456	923	1549
	1	17	32	66	140			
		1	2	3	5	10	15	20
		R/D						

Tabell 4.3.1. Värmeförlustfaktor h för cylinderformat lager under mark enligt formel 4.3.1 och figur 4.3.1.

Värmeförlusten från en cylinder på stort djup har också beräknats numeriskt för olika cylinderformer. I detta fall användes R som skal-längd. Värmeförlustfaktor beror då av H/R :

$$Q_m = \lambda(T_m - T_o)R \cdot h_1(H/R) \quad (4.3.2)$$

För en cylinderskiva ($H = 0$) har man det exakta resultatet $h_1(0) = 8$. Värmeförlustfaktorn h_1 ges i tabell 4.3.2.

H/R	0	1/20	1/10	1/5	1/3	1/2
$h_1(H/R)$	8	8.8	9.0	9.4	10.0	10.7

H/R	1	2	3	5	10	20
$h_1(H/R)$	11.9	14.8	17.3	21.8	31.6	48.1

Tabell 4.3.2. Värmeförlustfaktor h_1 för cylinderformatlager på stort djup för formel 4.3.2.

Tabell 4.3.1 ger värden på h för $R \geq D$ och $H \geq D$. Lagret ligger då på förhållandevis litet djup. Vid djup, som ej är alltför små, kan formel 4.4.1 användas, eftersom vi känner $h_1(H/R)$ och därmed Q_m för stort djup. Vi får från formlerna 4.4.1, 4.3.2 och 4.3.1:

$$h(R/D, H/D) \approx \frac{R}{D} \cdot \frac{h_1(H/R)}{Rh_1(H/R) - 1 - \frac{4\pi(2D+H)}{R}} \quad (D \geq R/2) \quad (4.3.3)$$

Observera att vi har skalat med D respektive R i de två fallen. Medeldjupet D_m till lagret är i detta fall $D + H/2$. Formeln bör ge hygglig noggrannhet om D är större än R/2.

Uttryckt i värmeförlust Q_m som funktion av djupet blir formel 4.3.3:

$$Q_m(D) \approx \frac{Q_m(\infty)}{Rh_1(H/R) - 1 - \frac{4\pi(2D+H)}{R}} \quad (D \geq R/2) \quad (4.3.3')$$

För att ytterligare belysa hur värmeförlusten beror av djupet, har numeriska beräkningar utförts för fallet H lika med R och D/R variabel. Resultatet ges i tabell 4.3.3.

D/R = D/H		1	2	3	5	10	20	∞
Q_m	numerisk beräkning	17.2	14.6	13.7	13.0	12.4	12.0	11.9
$\lambda(T_m - T_o)R$	enligt formel 4.3.3'	17.4	14.6	13.8	13.0	12.5	12.2	11.9

Tabell 4.3.3. Dimensionslös värmeförlust som funktion av djupet D för fallet H = R.

För oändligt djup får vi förlusten 11.9. Vid djupet $D = 3R$ är förlusten 13.7. Ökningen är relativt måttlig. Vid djupet $D = R$ är förlusten ungefär 50% större än för det oändligt djupa fallet.

Motsvarande värden enligt formel 4.3.3' ges också. Värdet $h_1(1) = 11.9$ enligt tabell 4.3.2 har utnyttjats. Vi ser att överensstämmelsen med numeriskt beräknade värden är mycket god.

Exempel 1. Ett cylindriskt värmelager har överytan 10 m under markytan. Lagrets diameter är 40 m och dess höjd 40 m. Värmeledningsförmågan i marken är 1.2 W/mK. Den årliga medel-

temperaturen över lagerytan är 60°C , medan årsmedeltemperaturen vid markytan är 9°C . Vi har då:

$$\begin{aligned} D &= 10 \text{ m} & H &= 40 \text{ m} & R &= 20 \text{ m} \\ T_m &= 60^{\circ}\text{C} & T_o &= 9^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

Den stationära värmeförlusten blir då enligt formel 4.1.2 och tabell 4.3.1:

$$\begin{aligned} h(20/10, 40/10) &= 53 \\ Q_m &= 1.2 \cdot (60 - 9) \cdot 10 \cdot 53 = 32 \text{ kW} \end{aligned}$$

Exempel 2. Vi har samma lager på mycket stort djup och på ett måttligt djup:

$$\text{i. } D = \infty \qquad \text{ii. } D = 40 \text{ m}$$

För mycket stort djup har vi enligt formel 4.3.2 och tabell 4.3.2:

$$\begin{aligned} h_1(40/20) &= 14.8 \\ Q_m &= 1.2(60-9) \cdot 20 \cdot 14.8 = 18.1 \text{ kW} \end{aligned}$$

För det måttliga djupet $D = 40 \text{ m}$ kan ej tabell 4.3.1 utnyttjas eftersom $R/D = 1/2$. Med formel 4.3.3' får vi:

$$Q_m(\infty) = 18.1 \text{ kW} \qquad h_1(40/20) = 14.8$$

$$Q_m = \frac{18.1}{1 - \frac{20 \cdot 14.8}{4\pi(80+40)}} = 23 \text{ kW}$$

Exempel 3. Vi tar åter exempel 1 men använder i stället för tabell 4.3.1 den approximativa formeln 4.3.3'. Vi har då enligt formel 4.3.3' och exempel 2:

$$Q_m = \frac{18.1}{1 - \frac{20 \cdot 14.8}{4\pi(2 \cdot 10 + 40)}} = 30 \text{ kW}$$

Felet relativt det direkt beräknade värdet $Q_m = 32$ kW enligt exempel 1 är 6%. Vi ligger precis på den angivna gränsen för tillämpbarheten av 4.3.3':

$$\frac{D}{R} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

4.3.3. Effekt av isoleringar

Vi skall i detta avsnitt med några exempel illustrera vad man tjänar genom att värmeisolera olika ytor på cylindern. Följande data användes:

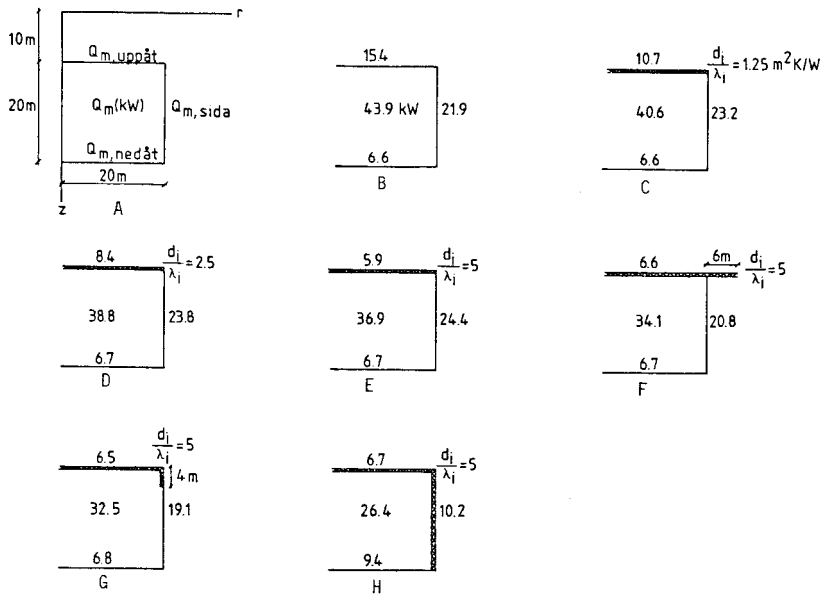
$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \text{ W/mK} & T_m - T_o &= 50 \text{ }^\circ\text{C} \\ D &= 10 \text{ m} & H &= 20 \text{ m} & R &= 20 \text{ m} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Den stationära värmeförlusten blir enligt tabell 4.3.1:

$$Q_m = 2 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 44 = 44 \text{ kW} \quad (4.3.5)$$

Värmeutflödets fördelning på överyta, sidoyta och underyta visas i figur 4.3.4 B.

I figur 4.3.4 C har överytan värmeisolerats med en isolering där d_i/λ_i är lika med $1.25 \text{ m}^2\text{K/W}$. I 4.3.4 D och E har isoleringen ökat till 2.5 respektive 5. Vi ser att isoleringen ger en relativt måttlig minskning av total värmeförlust. I figur 4.3.4 F och G har det övre hörnet isolerats ytterligare. I figur 4.3.4 H är både överyta och sidoyta värmeisolerat. Vi får då en kraftig reduktion av värmeförlusten från 44 till 26 kW.



Figur 4.3.4. Värmeförlust (kW) genom de tre delytorna av en cylinder vid olika isolering. Data enligt 4.3.4.

4.4 Värmeförlust vid måttliga kontra stora djup

Den stationära värmeförlusten från ett värmelager under mark beror på hur djupt ner lagret ligger. Låt D_m beteckna djupet från markytan till lagrets mittpunkt. Värmeförlusten Q_m för ett lager av given form och storlek blir en funktion av medeldjupet D_m : $Q_m = Q_m(D_m)$.

Värmeförlusten från samma lager på så stort djup att markytans effekt blir försumbar betecknas $Q_m(\infty)$. Genom en speglingsteknik, där man ansetter ett spegellager ovan markytan, kan följande approximativa samband mellan $Q_m(D_m)$ och $Q_m(\infty)$ härledas. Se referens 2.

$$Q_m(D_m) \approx \frac{Q_m(\infty)}{1 - \frac{Q_m(\infty)}{4\pi\lambda(T_m - T_0) \cdot 2D_m}} \quad (4.4.1)$$

Formeln gäller ej för lager som ligger alltför nära markytan.

Som ett första exempel tar vi ett sfäriskt värmelager. Detta behandlas i avsnitt 4.2. Värmeförlusten för ett lager på stort djup, dvs. i en fri omgivning, ges av formel 4.2.2:

$$Q_m(\infty) = 4\pi\lambda R(T_m - T_0) \quad (4.4.2)$$

För en sfär på ett djup D_m under markytan (figur 4.2.1) får vi då

$$\frac{Q_m(D_m)}{Q_m(\infty)} = \frac{h(D_m/R)}{h(\infty)} \approx \frac{1}{1 - \frac{R}{2D_m}} \quad (4.4.3)$$

Den exakta värmeförlustfaktorn som funktion av djupet ges i figur 4.2.2. Värdet enligt ovanstående approximation är markerade med kryss i figuren. Vi ser att approximationen är mycket god för större djup. Felet är mindre än 1%, 3% och 14% för $D_m/R > 2$, $D_m/R > 1.5$ respektive $D_m/R > 1.2$. Formeln 4.4.3 eller 4.2.5 kan således användas med god precision för $D_m/R > 1.5$. Det täckande jordskiktet vid sfärens övre punkt, $D_m - R$, är då större än halva radien på sfären.

Som ett andra exempel tar vi det cylindriska lagret under mark. Detta behandlas i avsnitt 4.3. Medeldjupet D_m blir:

$$D_m = D + H/2 \quad (4.4.4)$$

Värmeförlustfaktorn för en fri cylinder på stort djup ges i tabell 4.3.2 för olika cylinderformer. Vi har enligt formel 4.3.2:

$$Q_m(\infty) = \lambda(T_m - T_0) R h_1(H/R) \quad (4.4.5)$$

Värmeförlusten för ett lager på ändligt djup gavs av 4.3.1:

$$Q_m(D_m) = \lambda(T_m - T_o)D \cdot h(R/D, H/D) \quad (4.4.6)$$

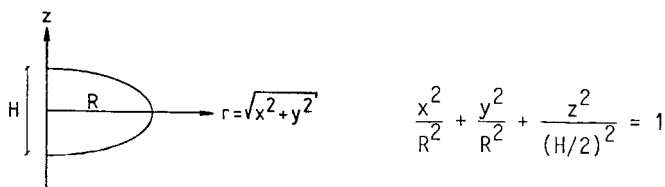
Insättning av 4.4.5-6 i formel 4.4.1 ger uttrycket 4.3.3 för värmeförlustfaktorn h . Tabell 4.3.3 ger en jämförelse med numeriskt beräknade värden. Vi ser att för dessa måttliga och stora djup stämmer formeln mycket väl.

4.5 Ellipsoidformat värmelager

En ellipsoid bestäms av de tre axlarnas längd. Dessa kan väljas oberoende av varandra för att ge lämplig längd, bredd och höjd. En stor klass av former på ett värmelager i marken kan därför approximativt beskrivas av en ellipsoid. Värmeförlustformler från ett ellipsoidformat lager på stort djup och nära markytan har därför stor användbarhet. De formler som ges i detta avsnitt härleds i referens 2.

4.5.1 Rotationsellipsoid på stort djup

Vi tänker oss ett värmelager på stort djup. Lagret har formen av en rotationsellipsoid med höjden H och radien R . Se figur 4.5.1.



Figur 4.5.1. Rotationsellipsoid med höjden H och radien R .

För $H = 0$ får vi en cirkelskiva. För $H = 2R$ har vi en sfär. Rotationsellipsoiden är oblat för $0 < H < 2R$ och prolat för $H > 2R$.

Stationär värmeförlust Q_m kan enligt 4.1.2 med R som skalningslängd skrivas:

$$Q_m = \lambda(T_m - T_0)R \cdot h_2(H/R) \quad (4.5.1)$$

Värmeförlustfaktorn h_2 ges av

$$0 \leq H/R \leq 2: \quad h_2(H/R) = \frac{4\pi f}{\arcsin(f)}$$

$$f = \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2R}\right)^2} \quad (4.5.2')$$

$$H/R \geq 2: \quad h_2(H/R) = \frac{4\pi H}{R} \cdot \frac{f}{\ln\left(\frac{1+f}{1-f}\right)}$$

$$f = \sqrt{1 - \left(\frac{2R}{H}\right)^2} \quad (4.5.2'')$$

Speciellt har vi värdena:

$$h_2(0) = 8 \quad (\text{cirkelskiva})$$

$$h_2(2) = 4\pi \quad (\text{sfär}) \quad (4.5.3)$$

Derivatan av h_2 med avseende på H/R vid $H/R = 2$ ges av:

$$h_2'(2) = \frac{2\pi}{3} \quad (4.5.4)$$

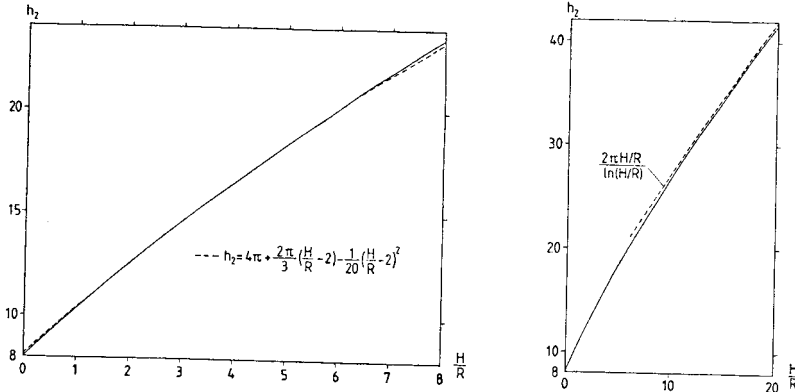
Vi har följande approximativa uttryck för f . Dessa har ett maximalt fel på 2%:

$$h_2 \approx 4\pi + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{H}{R} - 2\right) \quad 0.5 \leq \frac{H}{R} \leq 5 \quad (4.5.5)$$

$$h_2 \approx 4\pi + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{H}{R} - 2\right) - \frac{1}{20} \left(\frac{H}{R} - 2\right)^2 \quad 0 \leq \frac{H}{R} \leq 10 \quad (4.5.6)$$

$$h_2 \approx 2\pi \cdot \frac{H/R}{\ln(H/R)} \quad \frac{H}{R} \geq 10 \quad (4.5.7)$$

Värmeförlustfaktorn $h_2(H/R)$ visas i figur 4.5.2.



Figur 4.5.2. Värmeförlustfaktor för rotationsellipsoid enligt formlerna 4.5.2' och 4.5.2".

4.5.2. Jämförelse mellan cylinder och rotationsellipsoid

Det är intressant att jämföra värmeförlusten från cylinder och rotationsellipsoid. Vi ser på en cylinder på stort djup med höjden H_C och radien R_C . Värmeförlusten ges av formel 4.3.2 och tabell 4.3.2. Rotationsellipsoiden på stort djup har radien R och höjden H . Dess värmeförlust ges av 4.5.1-2.

Cylinderns radie och höjd väljes så att den får samma volym och höjdbreddförhållande som rotationsellipsoiden. Vi har då:

$$\frac{4\pi}{3} R^2 \frac{H}{2} = \pi R_C^2 H_C \quad \frac{H}{R} = \frac{H_C}{R_C} \quad (4.5.8)$$

Detta innebär:

$$R_c = R \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \quad H_c = H \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \quad (4.5.9)$$

Förhållandet mellan värmeförlusten för cylinder och motsvarande rotationsellipsoid blir enligt formlerna:

$$f = \frac{Q_{m,cyl}}{Q_{m,rot}} = \frac{R_c h_1 (H_c/R_c)}{R h_2 (H/R)} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \frac{h_1 (H/R)}{h_2 (H/R)} \quad (4.5.10)$$

För en sfär och motsvarande cylinder får vi

$$H/R = 2 \quad f = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \frac{14,8}{4\pi} = 1.03 \quad (4.5.11)$$

Cylindern har således 3% större värmeförlust. För några andra former får vi

$$\begin{aligned} \frac{H}{R} = \frac{1}{3} & \quad f = 0.99 \\ \frac{H}{R} = \frac{1}{20} & \quad f = 0.95 \\ \frac{H}{R} = 20 & \quad f = 1.01 \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Vi ser att f hela tiden ligger mycket nära 1. En måttlig ändring av lagret under bevarande av volym och form ger således ingen större förändring av värmeförlusten.

4.5.3 Allmän ellipsoid

Vi skall nu ge formler för det allmänna fallet där lagret har formen av en godtycklig ellipsoid. Vi förutsätter fortfarande att värmelagret ligger långt under markytan.

Ellipsoiden har de tre halvaxlarna A , B , L . Dessa väljes så att

$$A \leq B \leq L \quad (4.5.13)$$

Ellipsoiden definieras av

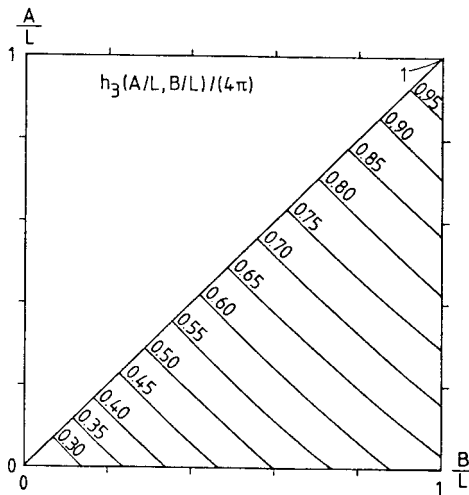
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{L^2} = 1 \quad (4.5.14)$$

Här har z-axeln lagts längs den största axeln (L).

Som skalningslängd användes L. Vi har då för värmeförlusten

$$Q_m = \lambda(T_m - T_0)L \cdot h_3(A/L, B/L) \quad (4.5.15)$$

Värmeförlustfaktorn $h_3/(4\pi)$ ges i figur 4.5.3.



Figur 4.5.3. Värmeförlustfaktor för godtycklig ellipsoid på stort djup. Halvaxlarna är A, B och L.

Vi har följande speciella värden.

$$\begin{aligned} h_3(1,1) &= 4\pi && \text{(sfär)} \\ h_3(0,1) &= 8 && \text{(cirkelskiva)} \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Då $B/L = 1$ får vi den oblata rotationsellipsoiden. Vi har med $B = L = R$, $A = H/2$:

$$h_3(H/(2R), 1) = h_2(H/R) \quad \left(\frac{H}{R} < 2\right) \quad (4.5.17)$$

Här ges h_2 av 4.5.2'. Då $A = B$ får vi den prolata rotations-ellipsoiden. Vi har med $A = B = R$, $L = H/2$:

$$h_3(2R/H, 2R/H) = \frac{2R}{H} h_2(H/R) \quad \left(\frac{H}{R} > 2\right) \quad (4.5.18)$$

Här ges h_2 av 4.5.2".

Vi ser i figur 4.5.3 att nivåkurvorna för h_3 med god approximation är räta linjer med en lutning på 45° . Vi har följande approximation:

$$h_3\left(\frac{A}{L}, \frac{B}{L}\right) \approx h_3\left(\frac{A+B}{2L}, \frac{A+B}{2L}\right) \quad (4.5.19)$$

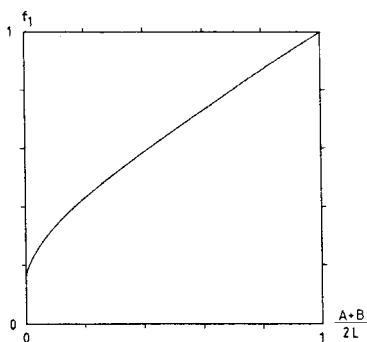
Högra ledet av 4.5.19 kan uttryckas med h_2 enligt 4.5.18. Värmeförlustfaktorn h_2 ges i sin tur av formel 4.5.2". Vi får följande approximation för h_3 :

$$h_3\left(\frac{A}{L}, \frac{B}{L}\right) \approx 4\pi \cdot f_1\left(\frac{A+B}{2L}\right)$$

$$f_1\left(\frac{A+B}{2L}\right) = \frac{2f}{\ln\left(\frac{1+f}{1-f}\right)}$$

$$f = \sqrt{1 - \left(\frac{A+B}{2L}\right)^2} \quad (4.5.20)$$

Funktionen f_1 ges i figur 4.5.4.



Figur 4.5.4. Funktion för approximationen 4.5.20.

Genom att använda approximationerna 4.5.5 och 4.5.7 får vi följande enkla formler:

$$L \cdot h_3 \left(\frac{A}{L}, \frac{B}{L} \right) \approx \frac{4\pi}{3} (A + B + L) \quad \frac{A+B}{2L} \approx 0.3$$

$$L \cdot h_3 \left(\frac{A}{L}, \frac{B}{L} \right) \approx \frac{4\pi L}{\ln \left(\frac{4L}{A+B} \right)} \quad \frac{A+B}{2L} \leq 0.3 \quad (4.5.21)$$

Uttryckt direkt i värmeförlusten Q_m får vi följande enkla formler för värmeförlusten från en ellipsoid på stort djup:

$$Q_m \approx 4\pi\lambda (T_m - T_o) \cdot \frac{A+B+L}{3} \quad \frac{A+B}{2L} \approx 0.3$$

$$Q_m \approx 4\pi\lambda (T_m - T_o) \cdot \frac{L}{\ln \left(\frac{4L}{A+B} \right)} \quad \frac{A+B}{2L} \leq 0.3 \quad (4.5.22)$$

Felen i dessa approximationer är maximalt några procent.

4.5.4 Värmeförlustens variation med formen vid fix volym

Värmeförlusten från ellipsoiden beror på form och storlek. Det är instruktivt att se hur värmeförlusten beror på formen vid given volym. Volymen V hos ellipsoiden ges av

$$V = \frac{4\pi}{3} ABL \quad (4.5.23)$$

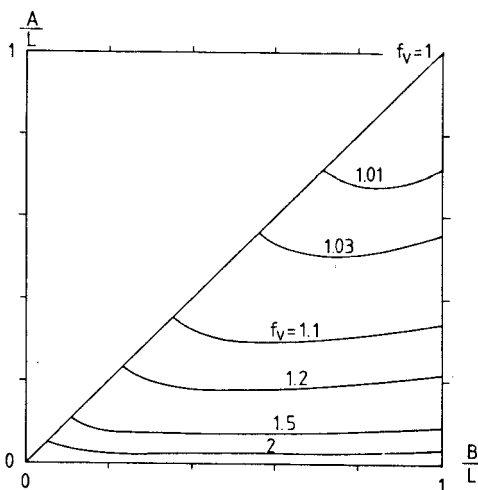
Värmeförlusten kan då enligt 4.5.15 skrivas:

$$Q_m = \lambda(T_m - T_o) \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \cdot \frac{h_3(A/L, B/L)}{\sqrt[3]{\frac{A}{L} \cdot \frac{B}{L}}} \quad (4.5.24)$$

Vi tar det sfäriska lagret som referens ($A=B=L$, $h_3 = 4\pi$):

$$f_V = \frac{Q_m}{Q_{m,\text{sfär}}} = \frac{h_3(A/L, B/L)}{4\pi\sqrt[3]{\frac{A}{L} \cdot \frac{B}{L}}} \quad (4.5.25)$$

Kvoten f_V anger den relativa värmeförlusten som funktion av formen. Den visas i figur 4.5.5.

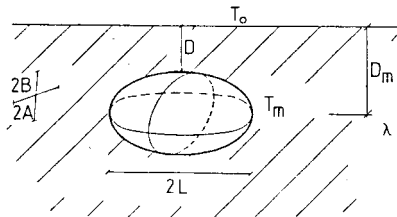


Figur 4.5.5. Värmeförlust för ett ellipsoidformat lager jämfört med ett sfäriskt lager med samma volym. Formel 4.5.25.

Vi ser att värmeförlusten är mycket okänslig för formförändringar. Om A/L och B/L är större än 0.7 är ändringen från sfären mindre än 1%. Ändringen understiger 20% om A/L och B/L är större än 0.2. Vi kan allmänt dra slutsatsen att värmeförluständringen vid en måttlig ändring av ett värmelagers form under bibehållen volym är liten.

4.5.5. Korrektion för ändligt djup.

Figur 4.5.6 visar ett ellipsoidformat lager under markytan. Djupet ner till lagrets mitt är D_m . Djupet från markytan till lagrets översta punkt betecknas D . Ellipsoidens längsta axel är $2L$ lång. De två andra axlarna har längden $2A$ och $2B$. Den längsta axeln kan ligga horisontellt som i figuren eller vertikalt. Sneda lägen är också tillåtna.



Figur 4.5.6. Ellipsoidformat lager med djupet D_m under markytan.

Med hjälp av värmeförlusten för en ellipsoid på stort djup kan enligt den approximativa formeln 4.4.1 motsvarande förlust på ett djup D_m anges. Den allmänna formeln ges av 4.4.1 och 4.5.15. Utnyttjas approximationerna 4.5.21 får vi följande enkla formler för värmeförlusten från ett ellipsoidformat lager på djupet D_m under markytan:

$$Q_m \approx 4\pi\lambda(T_m - T_0) \frac{A+B+L}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{A+B+L}{6D_m}} \quad \frac{A+B}{2L} \approx 0.3 \quad (4.5.26)$$

$$Q_m \approx 4\pi\lambda(T_m - T_0) \frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{4L}{A+B}\right)}{L} - \frac{1}{2D_m}} \quad \frac{A+B}{2L} \approx 0.3$$

$$D > \frac{1}{4} L_{\max,xy} \quad (4.5.27)$$

Kravet för att formlerna skall vara giltiga är att värmelagret ej ligger alltför nära markytan. Närmare bestämt kräver vi

$$D > \frac{1}{4} L_{\max,xy} \quad (4.5.28)$$

Här är $L_{\max,xy}$ längden av den största axeln i horisontalplanet. Om L-axeln är horisontell blir $L_{\max,xy}$ lika med $2L$, medan $L_{\max,xy}$ blir lika med $2B$ om L-axeln är vertikal.

4.6 Allmän formel för värmeförlust från lager under mark.

Vid säsongslagring av värme under markytan är lagrets värmeförluster till omgivningen av stor betydelse. Förlusterna är störst under de första lagringsperioderna då en värmekudde bygges upp runt lagret. Så småningom kan utflödet från lagret ses som summan av ett stationärt och ett periodiskt värmefflöde från lagret. Nettoutflödet under året av det periodiska värmefflödet är noll. Det stationära värmefflödet drives av differensen $T_m - T_0$ mellan lagerytans och markytans medeltemperatur under den årliga lagringsperioden.

I avsnitt 4.5.5 gavs mycket enkla formler (4.5.26-28) för det stationära värmefflödet Q_m för ett ellipsoidformat lager. Vi har sett i avsnitt 4.5.2 och 4.5.4 att värmeförlusten är relativt okänslig för måttliga förändringar av lagrets form, då dess volym bevaras.

Genom att approximera vårt värmelager med en lämplig ellipsoid kan vi fortfarande utnyttja de enkla formlerna i avsnitt 4.5.5.

Det betraktade värmelager under mark har relativt godtycklig form. Lagrets medelpunkt ligger på djupet D_m . Avståndet från lagrets högsta punkt till markytan är D . Dess volym är V . Lageret approximeras med en ellipsoid med de tre axlarna $2A$, $2B$ och $2L$. Ellipsoidens axlar väljes med samma proportioner som det ursprungliga lagrets bredd, höjd och längd. Vidare väljes axlarnas längd så att ellipsoidens volym

$$V = \frac{4\pi ABL}{3} \quad (4.6.1)$$

överensstämmer med det ursprungliga lagrets volym. Beteckningarna väljes så att L betyder den längsta halvaxeln. Axeln L kan vara horisontell eller vertikal. Se figur 4.5.6.

Nedanstående approximativa formler kan användas med god noggrannhet så länge som det ursprungliga lagrets form ej alltför mycket avviker från ellipsoidens. Den viktigaste begränsningen för formens giltighet är att lagret ej får ligga alltför nära markytan. Låt $L_{\max,xy}$ vara lagrets största utsträckning i det horisontella xy -planet. Formlerna har ett

fel på bara några procent, om $D > \frac{1}{4} L_{\max,xy}$.

$$\frac{A+B}{2L} \geq 0.3: \quad Q_m \approx 4\pi\lambda(T_m - T_o) \frac{A+B+L}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{A+B+L}{6D_m}} \quad (4.6.2)$$

$$\frac{A+B}{2L} < 0.3: \quad Q_m \approx 4\pi\lambda(T_m - T_o) \frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{4L}{A+B}\right)}{L} - \frac{1}{2D_m}} \quad (4.6.3)$$

Krav: $D > \frac{1}{4} L_{\max,xy}$

Exempel 1. Givet ett cylindriskt värmelager med radien 50 m och höjden 50 m. Lagrets övre yta befinner sig 50 m under marknivån. Lagerytans och markytans årsmedeltemperatur är 55°C respektive 5°C . Jordens värmeledningsförmåga är 3.5 W/mK .

Lagret approximeras med en ellipsoid där

$$\frac{A}{L} = \frac{1}{2} \quad \frac{B}{L} = 1$$

Vidare ger volymbevarande:

$$\frac{4\pi}{3} ABL = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{L}{2} LL = \pi 50^2 \cdot 50 \text{ m}^3$$

Vi får då

$$L = B = 57.2 \text{ m} \quad A = 28.6 \text{ m}$$

$$\frac{A+B}{2L} = 0.75 \quad D = 50 - (28.6 - 25) = 46 \text{ m}$$

$$\frac{1}{4} L_{\max,xy} = \frac{1}{2} 57.2 = 28.6 \text{ m}$$

Formel 4.6.2 ger då med $D_m = 75 \text{ m}$

$$Q_m = 154 \text{ kW}$$

Enligt avsnitt 4.3.2 blir förlusten:

$$Q_m = 3.5 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 17 = 149 \text{ kW}$$

Överensstämmelse mellan formel och direkt numerisk lösning är god.

Exempel 2. Samma lager som i exempel 1 med skillnaden att lagrets överyta ligger 10 m under marknivån. Vi har då samma ellipsoidapproximation. Villkoret 4.6.3 är ej längre uppfyllt:

$$D = 10 - (28.6 - 25) = 6.4 \text{ m}$$

$$\frac{1}{4} L_{\max,xy} = 28.6 \text{ m}$$

Används formel 4.6.2 ändå får vi med $D_m = 35 \text{ m}$

$$Q_m = 329 \text{ kW}$$

Alternativt kan vi använda de direkta formlerna enligt avsnitt 4.3.2. Formel 4.3.1 och tabell 4.3.1 ger:

$$h\left(\frac{50}{10}, \frac{50}{10}\right) = 171$$

$$Q_m = 3.5 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 171 = 299 \text{ kW}$$

Formel 4.6.2 ger således i detta fall ett fel på 10%.

Exempel 3. Givet ett bergrum med längden 200 m, höjden 90 m och bredden 30 m. Dess medelpunkt ligger 150 m under markytan. Lagrets volym blir $540 \cdot 10^3 \text{ m}^3$. Bergets värmeledningsförmåga är 3.5 W/mK . Årsmedeltemperaturen vid markytan är 5°C . Lagertemperaturen varierar under året mellan 90°C och 20°C . Vi ansätter en medeltemperatur på lagerytan:

$$T_m = \frac{90+20}{2} = 55^\circ\text{C}$$

Vi har nu:

$$T_o = 5^\circ\text{C} \quad D_m = 150 \text{ m}$$

Lagrets approximeras med en ellipsoid där

$$\frac{A}{L} = \frac{30}{200} \quad \frac{B}{L} = \frac{90}{200}$$

Volymbevarande ger

$$540 \cdot 10^3 = \frac{4\pi}{3} ABL = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{30}{200} \cdot \frac{90}{200} \cdot L^3$$

$$L = 124 \text{ m}$$

$$A = 18.6 \text{ m}$$

$$B = 55.8 \text{ m}$$

Vi har då

$$\frac{A+B}{2L} = 0.30$$

Formel 4.6.2 ger värmeförlusten

$$Q_m = 187 \text{ kW}$$

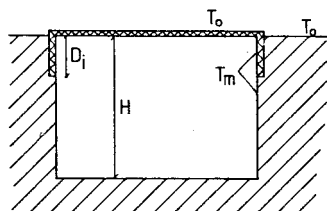
Här har det övre uttrycket använts. Det undre uttrycket ger

$$Q_m = 184 \text{ kW}$$

4.7 Värmeförlustanalys för lager med överytan vid marknivå.

Vi skall i detta avsnitt analysera de olika bidragen till värmeförlusterna för ett värmelager vars överyta ligger vid marknivån. Lagrets överyta och övre delen av den vertikala kanten mot marken är värmeisolerade. Vi skall här speciellt analysera effekten av den vertikala kantisoleringen.

Figur 4.7.1 visar den betraktade typen av värmelager. Lagret sträcker sig ner till djupet H . Kantisoleringen går ner till djupet D_i . Vid markytan är temperaturen T_0 . På värmelagrets yta mot mark och innanför isoleringen råder temperaturen T_m .



Figur 4.7.1. Värmelager med överytan och en övre del av kanten värmeisolerad.

4.7.1 Delvärmeförluster

Den stationära värmeförlusten Q_m består av tre delar. En del av värmeförlusten sker genom den övre horisontella isoleringen. En andra del av förlusten sker genom kantisoleringen. Den resterande värmeförlusten sker direkt mot omgivande mark genom den undre ytan och den oisolerade delen av den vertikala ytan.

$$Q_m = Q_{m,\text{upp}} + Q_{m,\text{kant}} + Q_{m,\text{mark}} \quad (4.7.1)$$

De två första bidragen är tämligen enkla att uppskatta. Det tredje bidraget är mer komplicerat, eftersom det kräver en beräkning av det flerdimensionella, stationära temperaturfältet i marken. En speciell komplikation är hur kantisoleringen påverkar denna tredje förlustterm.

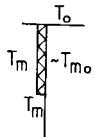
4.7.2 Värmeförlust genom övre isolering.

Den täckande horisontella värmeisoleringen har tjockleken d_i och värmeledningsförmågan λ_i . Dess area är A_i . Värmeförlusten blir då:

$$Q_{m,\text{upp}} = (T_m - T_o) \frac{\lambda_i}{d_i} A_i \quad (4.7.2)$$

4.7.3 Värmeförlust genom kantisolering

Låt lagrets horisontella omkrets vara L_i . Kantisoleringens totala area blir då $D_i L_i$. I marken strax utanför isoleringen råder en i djupled varierande temperatur. Uppe vid markytan är temperaturen T_0 och vid isoleringens nederdel T_m . Låt T_{mo} vara medeltemperaturen över isoler-
djupet. Värmeförlusten genom kantisoleringen blir då:



$$Q_{m,kant} = (T_m - T_{mo}) \cdot \frac{\lambda_i}{d_i} D_i L_i \quad (4.7.3)$$

Ett rimligt värde på T_{mo} är

$$T_{mo} \approx \frac{T_m + T_0}{2} \quad (4.7.4)$$

Detta bör ge en god uppskattning eftersom vi har T_0 vid överkanten och T_m vid underkanten. En uppskattning av värmeflödet genom kantisoleringen blir då:

$$Q_{m,kant} \approx (T_m - T_0) \frac{\lambda_i}{d_i} \cdot \frac{D_i}{2} \cdot L_i \quad (4.7.5)$$

Total värmeförlust genom horisontell och vertikal isolering blir nu enligt 4.7.2 och 4.7.5:

$$Q_{m,isolering} = Q_{m,upp} + Q_{m,kant} \approx \frac{\lambda_i (T_m - T_0)}{d_i} \cdot (A_i + \frac{1}{2} L_i D_i) \quad (4.7.6)$$

Genom medelvärdet 4.7.4 kan vi säga att kantisoleringen verkar mellan T_m och T_0 med halverad area.

4.7.4 Värmeförlust direkt mot mark

4.7.4.1 Allmänna samband

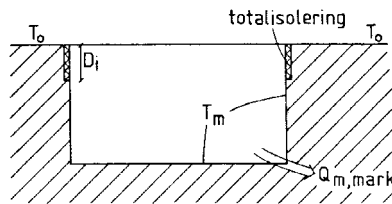
Värmeförlusten direkt mot marken, $Q_{m,mark}$ i formel 4.7.1, beror på lagrets geometri, värmeledningsförmågan i marken och på den vertikala kantisoleringen. Se figur 4.7.1. Den kommer allmänt sett att bero på isoleringsdjupet D_i och isoleringens värmemotstånd d_i/λ_i .

Man kan här normalt göra följande förenkling. Marken strax utanför kantisoleringen representerar ett värmemotstånd i storleksordningen $0.5D_i/\lambda$. Normalt är värmemotståndet för isoleringen mycket större än $0.5D_i/\lambda$. T.ex. kan vi ha:

$$\begin{array}{l} D_i = 2 \text{ m} \\ \lambda = 2 \text{ W/mK} \end{array} \quad \frac{0.5D_i}{\lambda} = 0.5 \quad \begin{array}{l} d_i = 0.2 \text{ m} \\ \lambda_i = 0.04 \text{ W/mK} \end{array} \quad \frac{d_i}{\lambda_i} = 5 \quad (4.7.7)$$

Processen för värmeflödet direkt ut mot marken blir då i stort sett densamma om man betraktar den vertikala värmeisoleringen som totalisolerande. Vi slipper då en parameter. Denna approximation göres i det följande.

Figur 4.7.2 visar det aktuella problemet för värmeförlusten mot marken under kantisoleringen.



Figur 4.7.2. Värmeförlust direkt mot mark med approximationen att kantisoleringen ger totalisolering.

Enligt formel 4.1.2 har vi med L_S som skalningslängd:

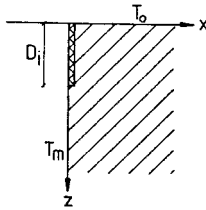
$$Q_{m,mark} = \lambda(T_m - T_o) L_S \cdot h \quad (4.7.8)$$

Värmeförlustfaktorn beror av lagrets form och av relativa värmelednings-tal i enlighet med 4.1.4. Vidare beror h av isoleringen via parametern D_i/L_S .

Värmeförlustfaktorn h för cylinderformat och parallelepipedformat lager ges i avsnitt 4.8 och 4.9. I de två följande avsnitten nedan ges en formel för hur värmeförlusten mot mark varierar med isolerdjupet D_i .

4.7.4.2. Formel för små isolerdjup.

Figur 4.7.3 visar ett plant, vertikalt tvärsnitt av området kring den vertikala kantisoleringen. Vi förutsätter att lagerdjupet H är stort jämfört med isolerdjupet D_i .



Figur 4.7.3. Plant, vertikalt tvärsnitt kring kantisoleringen, då dennas djup är litet relativt lagerdjupet.

Vi kan vid analys av den lokala temperaturprocessen i hörnet kring kantisoleringen tänka oss lagerväggen utsträckt långt nedåt i z -led. Det plana problemet enligt figur 4.7.3 kan lösas analytiskt.

Vi är intresserade av värmeflödet $q_x(z)$ (W/m^2) genom lagerväggen ($x = 0$, $z > D_i$). Det ges av

$$q_x(z) = \lambda(T_m - T_0) \cdot \frac{2}{\pi \sqrt{z^2 - D_i^2}} \quad (4.7.9)$$

Integreras detta i z-led får vi värmeflödet per meter räknat vinkelrät mot (x,z)-planet. Integralen divergerar dock om vi integrerar mot oändligheten nedåt i z-led.

Låt oss nu betrakta två fall med olika isolerdjup D_i och D_i^0 . De är för övrigt lika. Skillnaden i värmeflöde ges av två termer av typ 4.7.9. Denna skillnad konvergerar då integrationen går mot oändligheten. Vi får

$$q_m(D_i) - q_m(D_i^0) = \lambda(T_m - T_o) \cdot \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{D_i^0}{D_i} \right) \quad (D_i, D_i^0 < \frac{H}{2}) \quad (4.7.10)$$

Här är $q_m(D_i)$ värmeförlusten per meter för isolerdjupet D_i . Vi förutsätter här att D_i^0 och D_i är små relativt lagerdjupet H . Det visar sig räkna att D_i och D_i^0 är mindre än $H/2$.

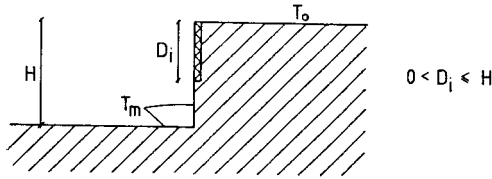
Värmeförlusten mot mark för två olika isolerdjup är således relaterade till varandra enligt följande formel:

$$Q_{m,mark}(D_i) = Q_{m,mark}(D_i^0) + \lambda(T_m - T_o) L_i \cdot \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{D_i^0}{D_i} \right) \quad (D_i, D_i^0 < H/2) \quad (4.7.11)$$

Här är L_i den totala längden av kantisoleringen i horisontalplanet. Formel 4.7.10-11 innebär att vi bara behöver räkna numeriskt för ett enda isolerdjup.

4.7.4.3 Formel för godtyckligt isolerdjup.

Formel 4.7.10 kan generaliseras till ett godtyckligt isolerdjup: $0 < D_i \leq H$. Figur 4.7.4 visar värmeledningsproblemet för det vertikala tvärsnittet.



Figur 4.7.4. Värmeledningsproblem för vertikalt tvärsnitt kring kant-isolering.

Skillnaden i värmeförlust för två olika relativa isolerdjup D_i/H och D_i^0/H blir nu:

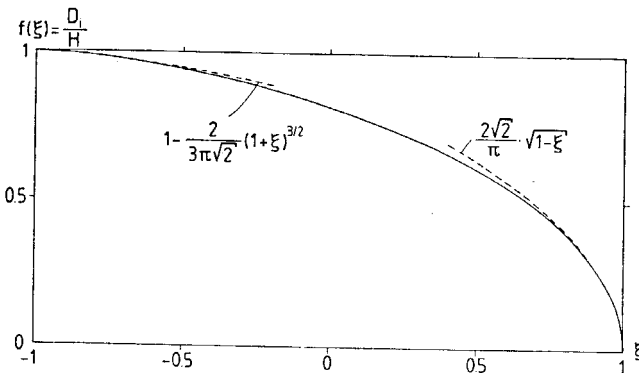
$$q_m(D_i/H) - q_m(D_i^0/H) = \lambda(T_m - T_o) \cdot \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1 - \xi_i^0}{1 - \xi_i} \right) \quad (4.7.12)$$

Här ges ξ_i och ξ_i^0 av ekvationerna:

$$\frac{D_i}{H} = f(\xi_i) \quad \frac{D_i^0}{H} = f(\xi_i^0) \quad (4.7.13)$$

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \sqrt{1 - \xi^2} + \operatorname{arccot} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \right\} \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (4.7.14)$$

Funktionen $f(\xi)$ visas i figur 4.7.5. Approximationer för vissa ξ -värden är också angivna. Då D_i/H och D_i^0/H är mindre än 0.5 övergår 4.7.12 i 4.7.10.



Figur 4.7.5. Funktionen f enligt formel 4.7.14.

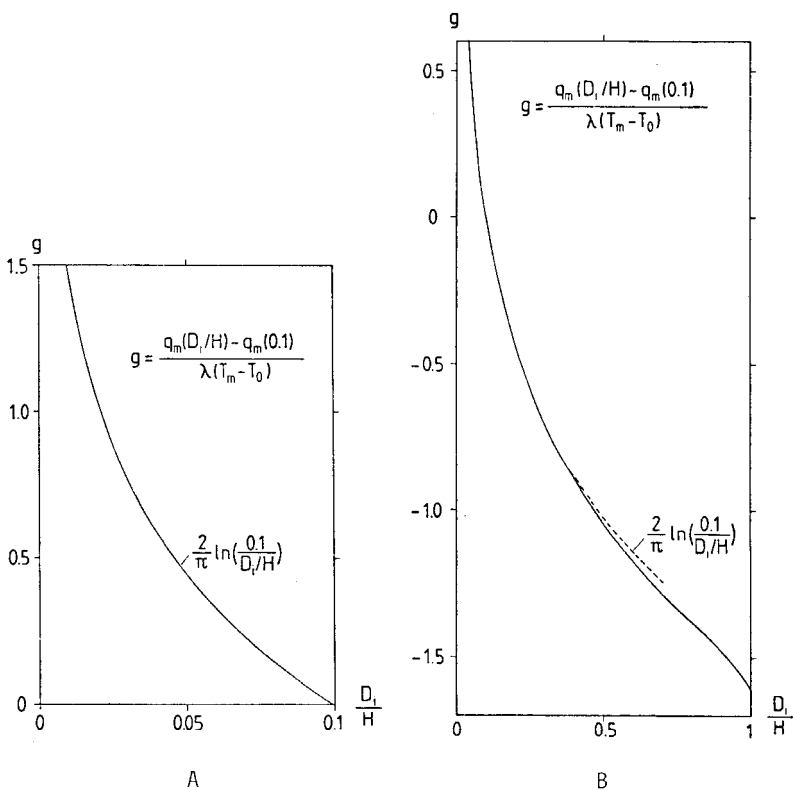
Vi skall i det kommande ofta ta isolerdjupet till $H/10$. Vi får då

$$\frac{D_i^0}{H} = 0.1 \quad \xi_i^0 = 0.988 \quad (4.7.15')$$

För detta fall får vi

$$q_m(D_i/H) = q_m(0.1) + \lambda(T_m - T_0) \cdot g(D_i/H) \quad (4.7.15'')$$

Funktionen g är given i figur 4.7.6.



Figur 4.7.6. Funktionen $g(D_i/H)$ som ger kantvärmeförlust relativt isolerdjupet $D_i^0/H = 0.1$. Formel 4.7.17.

För värmeförlusten mot mark har vi nu:

$$Q_{m,\text{mark}}(D_i/H) = Q_{m,\text{mark}}(D_i^0/H) + \lambda(T_m - T_0) L_i \cdot \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1 - \xi_i^0}{1 - \xi_i}\right) \quad (4.7.16)$$

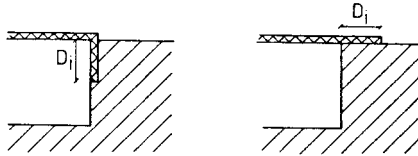
, där ε_i^0 och ε_i ges av 4.7.13-14. Speciellt har vi

$$Q_{m,\text{mark}}(D_i/H) = Q_{m,\text{mark}}(0.1) + \lambda(T_m - T_o) L_i \cdot g(D_i/H) \quad (4.7.17)$$

Funktion g ges i figur 4.7.6.

4.7.5 Vertikal kontra horisontell kantisolering

Värmeisoleringen vid lagrets övre kant har här antagits vara vertikal. Ett annat alternativ är att lägga isoleringen horisontellt utåt från lagerkanten. De två alternativen visas i figur 4.7.7.



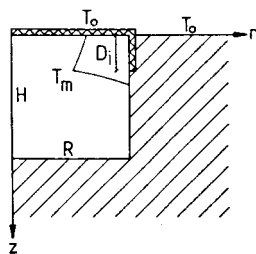
Figur 4.7.7. Vertikal kontra horisontell isolering vid kanten.

Vi antar i båda fallen att kantisoleringen har djupet respektive bredden D_i . Ovanstående analys kan upprepas för det horisontella fallet. Värme-flödet genom kantisoleringen blir samma som tidigare om man gör samma typ av uppskattning. Formlerna 4.7.3-5 gäller då fortfarande. Analysen i avsnitt 4.7.4.2 kan också upprepas. Vi skall växla x - och z -axlar i figur 4.7.3. Integralen av värme-flödet blir detsamma. Formel 4.7.10 gäller fortfarande.

Resultatet av den skisserade jämförelsen är att det ur värmeförlustsynpunkt inte spelar någon roll om kantisoleringen placeras vertikalt eller horisontellt.

4.8 Cylinderformat värmelager med överytan vid marknivå

Värmelagret har formen av en cylinder med höjden H och radien R . Dess axel är vertikal. Överytan ligger vid marknivån. Denna cirkelyta är värmeisolerad. Vidare finns vertikalt vid kanten värmeisolering ner till djupet D_i . Värmeisoleringens tjocklek är d_i , och dess värmeledningsförmåga är λ_i . Temperaturen vid cylinderytan direkt mot mark och innanför värmeisoleringen är T_m , medan temperaturen vid markytan är T_0 . Temperaturskillnaden över den horisontella värmeisoleringen är således $T_m - T_0$. Figur 4.8.1 visar ett vertikaltvårsnitt genom det cylinderformade värmelagret.



Figur 4.8.1. Cylinderformat värmelager med överytan vid marknivå. Överyta och en övre del av den vertikala kanten är värmeisolerade.

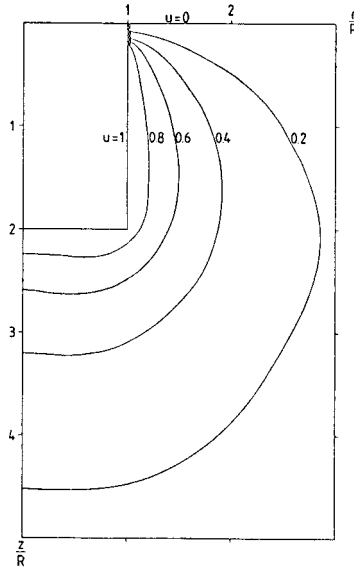
4.8.1 Temperaturfält

Den dimensionslösa stationära temperaturen u i marken ges av formel 4.1.1.

Temperaturfunktionen u är lika med 0 vid markytan och +1 vid den cylinderformade lagerytan. Som skalningslängd skall vi använda radien: $L_s = R$. Dimensionslösa koordinater blir då r/R och z/R . Vi har då för temperaturfältet i marken utanför cylindern:

$$u(r/R, z/R) = \frac{T(r, z) - T_0}{T_m - T_0} \quad (4.8.1)$$

Figur 4.8.1 visar numeriskt beräknade isotermer för fallet då cylindern har samma längd och diameter, dvs. $H/R = 2$.



Figur 4.8.2. Isotermer för dimensionslös temperatur u för fallet $H/R = 2$.

4.8.2 Total värmeförlust

Den stationära värmeförlusten Q_m från cylindern består enligt avsnitt 4.7.1 av tre komponenter. Vi har ett bidrag från den övre horisontella isoleringen och ett från den vertikala kantisoleringen ner till djupet D_i . Det tredje bidraget kommer från värmeflödet direkt mot mark under nivån $z = D_i$.

Arean A_i av den övre isoleringen och längden L_i av kantisoleringen blir:

$$A_i = \pi R^2 \qquad L_i = 2\pi R \qquad (4.8.2)$$

Värmeförlusten genom den värmeisolerade övre delen blir då enligt formel 4.7.6:

$$Q_{m,isolering} \simeq \frac{\lambda_i(T_m - T_o)}{d_i} \cdot (\pi R^2 + \pi R D_i) \quad (4.8.3)$$

Den totala värmeförlusten Q_m är

$$Q_m = Q_{m,isolering} + Q_{m,mark} \quad (4.8.4)$$

Värmeförlusten direkt mot marken behandlas i nästa avsnitt.

4.8.3 Värmeförlust direkt mot mark.

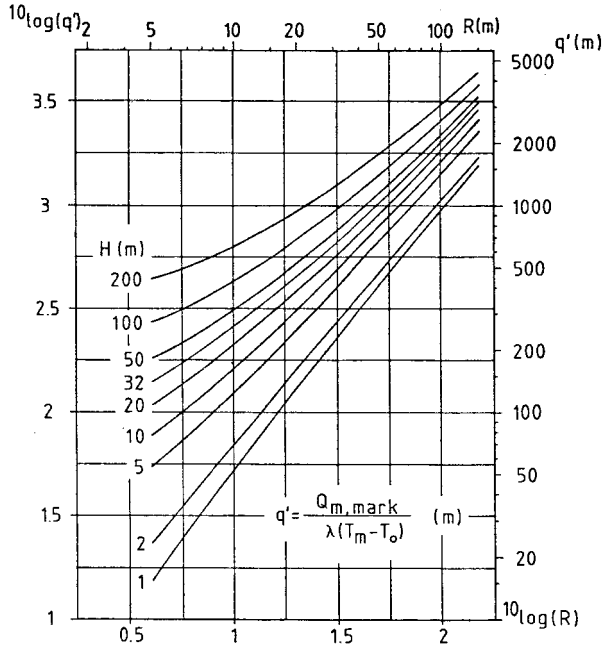
Allmänna samband för värmeförlusten direkt mot mark diskuteras i avsnitt 4.7.4.1. Värmeförlusten erhålles genom en numerisk beräkning av det stationära temperaturfältet. Den vertikala kantisoleringen antas här vara totalisolerande. Vi har då tre längdparametrar R , H och D_i . Med R som skallängd får vi enligt formel 4.7.8:

$$Q_{m,mark} = \lambda(T_m - T_o) R \cdot h(H/R, D_i/H) \quad (4.8.5)$$

Värmeförlustfaktorn h blir en funktion av H/R och D_i/R eller av H/R och D_i/H .

4.8.3.1 Vertikalt isolerdjup $D_i = 2$ m

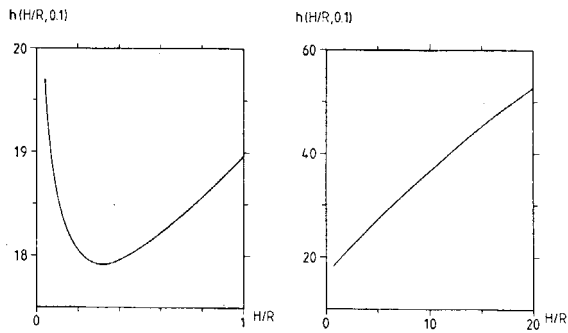
Ett rimligt djup för den vertikala isoleringen är två meter. Vi skall därför här direkt ge värmeförlusten mot mark som en funktion av R och H då $D_i = 2$ m. Figur 4.8.3 visar $Q_{m,mark}/(\lambda(T_m - T_o))$.



Figur 4.8.3. Värmeförlust mot mark som funktion av radie och höjd på cylindern vid två meters vertikal kantisolering ($D_i = 2$ m).

4.8.3.2 Vertikalt isolerdjup $D_i = H/10$

Värmeförlustfaktorn h i formel 4.8.5 visas i figur 4.8.4 som funktion av cylinderformen H/R för fallet $D_i/H = 0.1$. Den ges också i tabell 4.8.1.



Figur 4.8.4. Värmeförlustfaktor i formel 4.8.5 för cylinder då $D_i/H = 0.1$.

H/R	.04	.06	.08	0.1	0.2	0.4
h(H/R, 0.1)	19.7	19.1	18.7	18.6	18.1	18.0

H/R	0.6	0.8	1.0	2	4	6
h(H/R, 0.1)	18.2	18.6	19.0	21.2	25.4	29.2

H/R	8	10	15	20
h(H/R, 0.1)	33.0	36.6	45.3	52.5

Tabell 4.8.1. Värmeförlustfaktor i formel 4.8.5 för cylinder då $D_i/H = 0.1$.

4.8.3.4 Godtyckligt vertikalt isolerdjup

När vi känner värmeförlustfaktorn för ett isolerdjup kan vi med formlerna i avsnitten 4.7.4.2-3 ge värmeförlusten för andra isolerdjup.

För fallet $D_i < H/2$ får vi enligt 4.7.11 och 4.8.5:

$$Q_{m,mark} = \lambda(T_m - T_o) R \cdot \left\{ h(H/R, 0.1) + 4 \cdot \ln(0.1 H/D_i) \right\}$$

$$(0 < D_i < H/2) \quad (4.8.6)$$

Vi har här utnyttjat att längden av kantisoleringen, L_i , är lika med $2\pi R$.

För större isolerdjup har vi formel 4.7.17:

$$Q_{m,mark} = \lambda(T_m - T_o) R \left\{ h(H/R, 0.1) + 2\pi g(D_i/H) \right\}$$

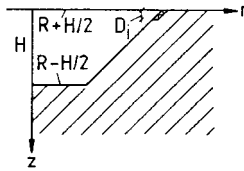
$$(0 < D_i/H \leq 1) \quad (4.8.7)$$

Här ges funktionen g av figur 4.7.6.

4.8.4 Värmelager med formen av en stympad kon

Värmelagret har formen av en stympad kon med vertikal axel. Se figur

4.8.5. Lutningsvinkel för konen är 45° . Höjden är H och medelradien R . Vid markytan är då radien $R + H/2$. Vid bottenytan är den $R - H/2$. Kantisoleringen går ner vertikalt ett djup D_i . Dess bredd blir således $D_i \sqrt{2}$.



Figur 4.8.5. Värmelager med formen av en stympad kon. Lutningsvinkeln är 45° .

Värmeförlustfaktorn har beräknats för några former för isolerdjupet $D_i = 0.1 H$. Se tabell 4.8.2.

H/R	0.2	0.4	1	2
$\frac{Q_{m,mark}}{\lambda(T_m - T_o)R}$	14.0	14.3	16.2	19.8

$$\frac{D_i}{H} = 0.1$$

Tabell 4.8.2. Värmeförlustfaktor för värmelager med formen av en stympad kon.

Det är intressant att jämföra värmeförlusten för den stympade konen med motsvarande cylinder. Vi jämför för samma H och R . Vidare har vi $D_i/H = 0.1$ i båda fallen. Värmeförlusten ges direkt av värmeförlustfaktorerna enligt tabell 4.8.2 för stympad kon och tabell 4.8.1 för cylindern. Vi får

H/R	0.2	0.4	1	2
$\frac{Q_{m,kon}}{Q_{m,cyl}}$.77	.79	.85	.93

Tabell 4.8.3. Värmeförlustkvot för värmelager med formen av en stympad kon och ett cylindriskt värmelager.

Tabellen visar hur den sneda kanten reducerar värmeförlusten från lagret till marken.

4.8.5 Några numeriska exempel.

Exempel 1. Ett cylinderformat lager med höjden 25 meter och diametern 50 meter har anlagts i mark med värmeledningsförmågan 2 W/mK. Lagrets överyta och de översta 5 meterna på lagrets sidoyta har täckts med en 25 centimeter tjock isolering. Årsmedeltemperaturen på lagrets yta är 30 °C. Vid markytan är medeltemperaturen 5 °C.

Vi har följande data:

$$\begin{array}{lll}
 H = 25 \text{ m} & R = 25 \text{ m} & \lambda = 2 \text{ W/mK} \\
 D_i = 5 \text{ m} & d_i = 0.25 \text{ m} & \lambda_i = 0.05 \text{ W/mK} \\
 T_m = 30 \text{ }^\circ\text{C} & T_o = 5 \text{ }^\circ\text{C} &
 \end{array}$$

Den totala stationära värmeförlusten ges av formel 4.7.1. Värmeförlusten genom isoleringen ges av formel 4.8.3.

$$Q_{m,isolering} = 11.8 \text{ kW}$$

Eftersom $D_i < H/2$ kan formel 4.8.6 användas för att beräkna värmeförlusten till mark. Funktionsvärdet $h(1,0.1) = 19.0$ hämtas ur tabell 4.8.1.

$$Q_{m,mark} = 20.3 \text{ kW}$$

Den totala värmeförlusten är

$$Q_m = Q_{m,isolering} + Q_{m,mark} = 32.1 \text{ kW}$$

Exempel 2. Vi har ett cylindriskt lager med höjden 50 meter och diametern 100 meter. Värmeledningsförmågan i omkringliggande berg är 3.5 W/mK. Lagret har isolerats på överytan och sidoytan till ett djup av 2 meter. Isolertjockleken är 0.4 meter. Årsmedeltemperaturen på lagrets yta är 55 °C. Vid markytan är temperaturen 5 °C.

Vi tar följande data:

$$\begin{array}{lll} H = 50 \text{ m} & R = 50 \text{ m} & \lambda = 3.5 \text{ W/mK} \\ D_i = 2 \text{ m} & d_i = 0.4 \text{ m} & \lambda_i = 0.04 \text{ W/mK} \\ T_m = 55 \text{ }^\circ\text{C} & T_o = 5 \text{ }^\circ\text{C} & \end{array}$$

Värmeförlusten genom isoleringen beräknas enligt formel 4.8.3.

$$Q_{m,isolering} = 40.8 \text{ kW}$$

Värmeförlusten till omgivande mark fås ur figur 4.8.3 ($q' \approx 1150 \text{ m}$).

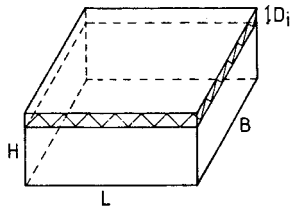
$$Q_{m,mark} = 201.3 \text{ kW}$$

Den totala värmeförlusten är

$$Q_m = 242.1 \text{ kW}$$

4.9 Parallelepipedformat värmelager

Värmelagret har formen av en parallelepiped med överytan vid marknivå. Se figur 4.9.1. Höjden är H , längden L och bredden B . Vi tar $L \geq B$. Överytan är som vanligt värmeisolerad. Den vertikala kanten ner till djupet D_i är också värmeisolerad. Temperaturen på lagerytan är T_m , och temperaturen vid markytan är T_o .



Figur 4.9.1. Parallelepipedformat värmelager med överytan vid marknivån. Kantisoleringen går ner ett djup D_i .

4.9.1 Total värmeförlust

Värmeförlusten genom de värmeisolerade ytorna ges av formel 4.7.6. Överytans area och längden av kantisoleringen blir:

$$A_i = LB \qquad L_i = 2L + 2B \qquad (4.9.1)$$

Vi har då enligt formlerna 4.7.6, 4.7.1 och 4.7.8, när vi använder H som skalningslängd:

$$Q_m = (T_m - T_o) \left\{ \lambda H \cdot h(L/H, B/H, D_i/H) + \frac{\lambda_i}{d_i} (LB + (L+B)D_i) \right\} \qquad (4.9.2)$$

4.9.2 Värmeförlust mot mark

Värmeförlusten mot marken ges av värmeförlustfaktorn. Denna ges för olika parallelepipedformer för $D_i/H = 0.1$ i tabell 4.9.1.

Den totala värmeförlusten för godtyckligt isolerdjup ges då enligt formel 4.9.2 och 4.7.17 av

$$Q_m = (T_m - T_o) \left\{ \lambda H \cdot h(L/H, B/H, 0.1) + \lambda L_i \cdot g(D_i/H) + \frac{\lambda_i}{d_i} (LB + (L+B)D_i) \right\} \qquad (4.9.3)$$

Här ges h av tabell 4.9.1, g av figur 4.7.6 och L_i av formel 4.9.1.

	10					110
	5				53.6	80.3
	2			22.2	37.0	61.5
	1		12.2	17.1	31.2	54.5
B/H	1/2	7.17	9.64	14.4	28.1	50.9
	1/5	3.99	5.54	7.92	12.5	25.8
		1/5	1/2	1	2	5
						10
						L/H

Tabell 4.9.1. Värmeförlustfaktor h (L/H , B/H , D_i/H) för parallelepipedformat lager med $D_i/H = 0.1$

Exempel. Låt oss ta ett parallelepipediskt värmelager med höjden 40 meter, bredden 20 meter och längden 80 meter. Marken har värmeledningsförmågan 2.5 W/mK. En 25 centimeter tjock isolering täcker lagrets överyta och de övre 6 meterna av lagrets sidoytor. Årsmedeltemperaturen på lagrets yta är 35 °C. Markytans årsmedeltemperatur är 10 °C.

Vi har följande data:

$$\begin{array}{lll}
 H = 40 \text{ m} & B = 20 \text{ m} & L = 80 \text{ m} \\
 D_i = 6 \text{ m} & d_i = 0.25 \text{ m} & \lambda_i = 0.05 \text{ W/mK} \\
 \lambda = 2.5 \text{ W/mK} & T_m = 35 \text{ }^\circ\text{C} & T_o = 10 \text{ }^\circ\text{C}
 \end{array}$$

Den totala värmeförlusten ges av formel 4.9.3. Vi får med hjälp av diagram 4.7.6.B och tabell 4.9.1:

$$g(0.15) = -0.26 \quad h(2, 0.5, 0.1) = 14.4$$

$$Q_m = 43.8 \text{ kW}$$

4.9.3 Jämförelse mellan cylinder och parallelepiped

Det är intressant att jämföra värmeförlusten från ett parallelepiped-format värmelager med ett motsvarande cylindriskt lager. Lagrets överyta ligger i båda fallen vid marknivån. Vi låter den vertikala kantisoleringen D_i vara lika med $H/10$.

De två lagren har samma djup H . Vidare väljer vi cylinderns radie R så att volymerna blir lika:

$$\pi R^2 H = L B H$$

$$R = \sqrt{\frac{LB}{\pi}} \quad (4.9.4)$$

Vi ser bara på värmeförlusten mot marken under kantisoleringen. Förhållandet mellan parallelepipedens och cylinderns värmeförlust betecknas f . Vi har då från formlerna 4.9.2 och 4.8.5:

$$f = \frac{Q_{m,mark,parallelepiped}}{Q_{m,mark,cylinder}} = \frac{H h^P(L/H, B/H, 0.1)}{R h^C(H/R, 0.1)} \quad (4.9.5)$$

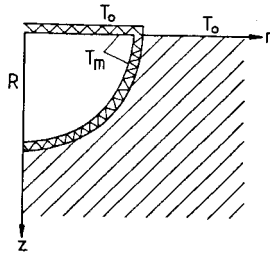
Här ges R av 4.9.4. Värmeförlustfaktorerna ges i tabell 4.9.1 (h^P) och tabell 4.8.1 (h^C). Kvoten f ges i tabell 4.9.2 för olika former på parallelepipeden.

B/H	10					1.08	
	5				1.06	1.12	
	2			1.05	1.14	1.36	
	1		1.05	1.10	1.33	1.68	
	1/2	1.05	1.08	1.24	1.64	2.18	
	1/5	1.02	1.09	1.25	1.53	2.22	3.08
		1/5	1/2	1	2	5	10
					L/H		

Tabell 4.9.2. Förhållandet f mellan värmeförlusten för parallelepiped och cylinder med samma volym och höjd. Formel 4.9.5.

4.10 Värmelager med formen av en halvsfär

I vissa fall kan värmelagret som en rimlig beskrivning approximeras av en halvsfär. Värmelagret har formen av en halvsfär med snittytan vid markytan. Radien är R . Vi skall för detta fall förutsätta att halvsfären är värmeisolerad runtom. Se figur 4.10.1.



Figur 4.10.1. Halvsfäriskt värmelager som är värmeisolerat runtom.

Temperaturen vid markytan är T_0 , medan lagertemperaturen är T_m . Isoleringen har tjockleken d_i och värmeledningsförmågan λ_i . Som skalfaktor använder vi radien R . Eftersom hela ytan är isolerad får vi i enlighet med avsnitt 4.1.2 bara en dimensionslös parameter d_i' som definierar värmeisoleringens relativa isoleringsförmåga.

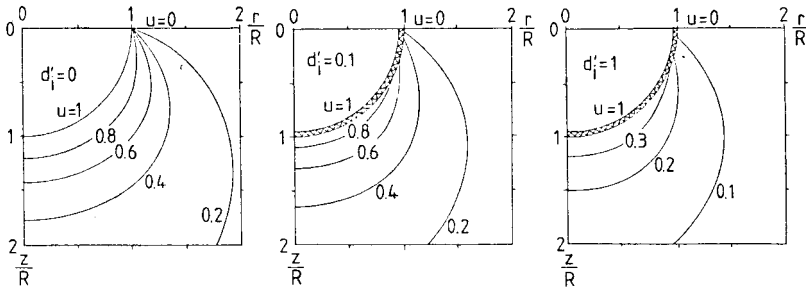
$$d_i' = \frac{d_i \lambda}{R \lambda_i} \quad (4.10.1)$$

Värdet $d_i' = 1$ innebär att värmeisoleringen har samma värmemotstånd som ett jordskikt med tjockleken R ($d_i/\lambda_i = R/\lambda$).

De i detta avsnitt redovisade resultaten härleddes och presenteras närmare i referens 3.

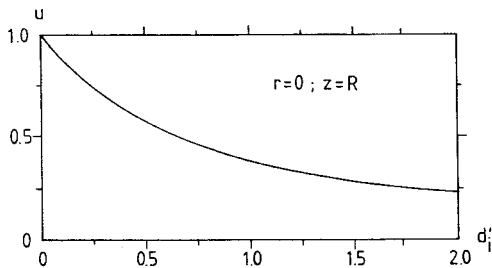
4.10.1 Temperaturfält

Den dimensionslösa temperaturen u enligt formel 4.1.1 beror av r/R och z/R . Som enda parameter har vi d_i' . Figur 4.10.2 visar temperaturfältet för tre parametervärden.



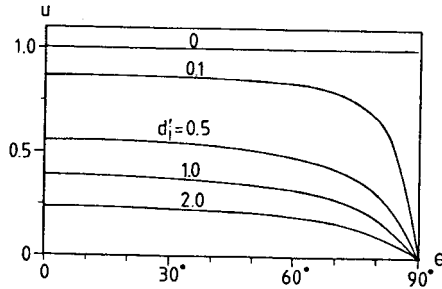
Figur 4.10.2. Dimensionslöst temperaturfält utanför halvsfäriskt lager för tre olika dimensionslösa isolertjocklekar.

Den högsta temperaturen i marken erhålls vid lagrets botten $r = 0$, $z = R$. Denna temperatur som funktion av dimensionslös värmeisolerings-tjocklek visas i figur 4.10.3.



Figur 4.10.3. Högsta markttemperatur vid lagrets botten ($r = 0$, $z = R$) som funktion av dimensionslös värmeisolerings-tjocklek.

Låt θ vara vinkeln mot z -axeln. Figur 4.10.4 visar hela profilen i marken strax utanför lagrets isolering. De olika kurvorna avser olika isolertjocklekar.



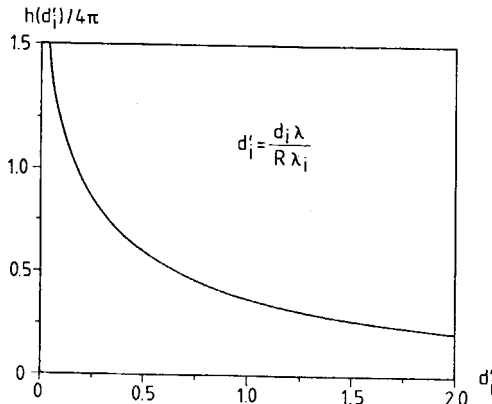
Figur 4.10.4. Temperatur i marken strax utanför värmeisoleringen som funktion av vinkeln θ mot z-axeln. De olika kurvorna avser olika dimensionslös isolertjocklek d'_i .

4.10.2 Värmeförlust

Den totala stationära värmeförlusten genom överyta och genom den halvsfäriska isoleringen mot marken blir i enlighet med avsnitt 4.1.2 och 4.7.1-2

$$Q_m = (T_m - T_o) \cdot \left\{ \frac{\lambda_i \pi R^2}{d_i} + \lambda R \cdot h(d'_i) \right\} \quad (4.10.2)$$

Värmeförlustfaktorn $h(d'_i)$ visas i figur 4.10.5. Då isolertjockleken går mot noll, går h mot oändligheten, eftersom vi då direkt vid markytan exponerar lagret med temperaturen T_m mot markytans temperatur T_o .



Figur 4.10.5. Värmeförlustfaktor för halvsfäriskt värmelager enligt figur 4.10.1.

Exempel. Vi ser på ett halvsfäriskt värmelager med en radie på 10 meter för några isolertjocklekar. Vi har följande data:

$$R = 10 \text{ m} \quad T_m - T_o = 50 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\lambda = 1.25 \text{ W/mK} \quad \lambda_i = 0.05 \text{ W/mK}$$

$$d_i = 0.05, 0.10, 0.25, 0.50 \text{ m}$$

Värmeförlusten ges av formel 4.10.2. För $d_i = 0.10 \text{ m}$ får vi

$$d_i' = 0.25 \quad h(d_i') \approx 4\pi \cdot 0.86 = 10.8$$

Detta ger

$$Q_m = 14.6 \text{ kW}$$

För de olika isolertjocklekarna fås

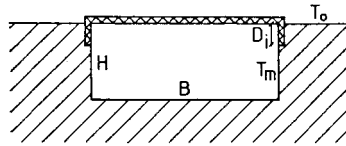
$d_i \text{ (m)}$	0.05	0.10	0.25	0.50
$Q_m \text{ (kW)}$	24.4	14.6	7.3	4.1

4.11 Värmeförlust för tvärsnitt av långsträckt lager

För långsträckta värmelager kan det räcka att studera värmeförlusten i ett vertikalt tvärsnitt vinkelrät mot lagrets längdriktning. Vi får ett tvådimensionellt värmestörningsproblem i (x,z) -planet. Värmeförlusten per meter av lagrets längd betecknas q_m (W/m). Temperaturen i lagret är som vanligt T_m . Vid markytan är temperaturen T_o .

4.11.1 Rektangulärt tvärsnitt

Värmelagrets tvärsnitt har formen av en rektangel med överytan vid markytan. Lagret har bredden B och djupet H . Det är värmeisolerat på ovasidan och vid kanterna ner till ett djup D_i ($0 < D_i \leq H$). Se figur 4.11.1.



4.11.1. Rektangulärt tvärsnitt av ett långsträckt värmelager.

Värmeförlusten q_m ges i enlighet med diskussionen i avsnitt 4.7 av

$$q_m \approx \frac{d_i}{\lambda_i} (T_m - T_0) \cdot B + \frac{d_i}{\lambda_i} (T_m - T_0) \cdot 2 \cdot \frac{D_i}{2} + \lambda (T_m - T_0) h(B/H, D_i/H) \quad (4.11.1)$$

För värmeförlustfaktorn h har höjden H använts som skalningslängd. Med hjälp av formel 4.7.15" har vi då

$$q_m \approx (T_m - T_0) \left\{ \frac{d_i}{\lambda_i} \cdot (B + D_i) + \lambda h(B/H, 0.1) + 2\lambda g(D_i/H) \right\} \quad (4.11.2)$$

Funktionen g ges i figur 4.7.6. Värmeförlustfaktorn för $D_i/H = 0.1$ har beräknats numeriskt. Resultatet ges i tabell 4.11.1.

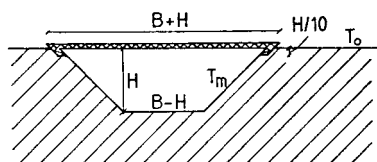
B/H	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
$h(B/H, 0.1)$	4.07	4.35	4.61	4.77	4.97	5.22	5.53

Tabell 4.11.1. Värmeförlustfaktor till formel 4.11.2.

4.11.2 Trapetsformat tvärsnitt

Värmelagrets tvärsnitt har trapetsform. Se figur 4.11.2. Överytan ligger vid marknivån. De sneda sidorna lutar 45° mot en vertikal linje. Lagrets djup är H och dess medelbredd är B . Bredden vid överytan är då $B + H$ och

vid underytan $B - H$. Överytan och den översta tiondelen av kanterna är värmeisolerade.



4.11.2. Långsträckt värmelager med trapetsformat tvärsnitt.

Kantisoleringen har bredden $0.1 H \cdot \sqrt{2}$. Värmeförlustfaktorn blir en funktion av B/H enbart eftersom kantisolerdjupet $H/10$ ej varierar fritt. Vi får i analogi med formel 4.11.2:

$$q_m \approx (T_m - T_0) \left\{ \frac{d_i}{\lambda_i} (B + H + 0.1 H \cdot \sqrt{2}) + \lambda h(B/H) \right\} \quad (4.11.3)$$

Värmeförlustfaktorn h ges i tabell 4.11.2

B/H	1	2	5	10
$h(B/H)$	3.31	3.55	3.90	4.19

Tabell 4.11.2. Värmeförlustfaktor till formel 4.11.3.

4.11.3 Jämförelse mellan vertikal och sned lagervägg

Det är intressant att jämföra värmeförluster för rektangulärt och trapetsformat tvärsnitt. Vi får härmed en uppfattning om betydelsen av lagerväggens orientering. Jämförelsen görs för samma H och B i de två fallen. Tvärsnitten får då samma area. Vi ser bara på värmeförlusten mot marken då isolerdjupet vid kanterna är $H/10$.

Låt f vara kvoten mellan värmeförlusten mot mark för trapetsformat och rektangulärt lager. Den ges direkt av värmeförlustfaktorerna i avsnitt 4.11.2 (h^2) respektive 4.11.1 (h^1) i

$$f = \frac{h^2(B/H)}{h^1(B/H, 0.1)} \quad (4.11.4)$$

Kvoten f ges i tabell 4.11.3.

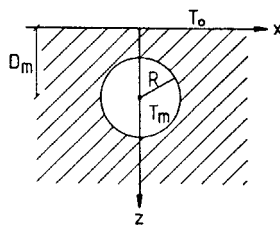
B/H	1	2	5	10
f	.69	.71	.75	.76

Tabell 4.11.3. Värmeförlustkvot för trapetsformat och rektangulärt värmelager.

Tabellen visar hur den sneda kanten reducerar värmeförlusten från lagret till marken.

4.11.4 Cirkulärt tvärsnitt under markytan

Värmelagret, som ligger helt under markytan, har ett cirkulärt tvärsnitt. Ett exempel är en tunnel. Radien är R . Medelpunkten ligger på djupet $z = D_m$ ($D_m > R$). Lagret är helt oisolerat. Se figur 4.11.3.



Figur 4.11.3. Värmelager med cirkulärt tvärsnitt.

4.11.4.1 Värmeförlust

Värmeförlusten q_m ges av

$$q_m = \lambda(T_m - T_o) \cdot \frac{2\pi}{\ln(D_m/R) + \sqrt{(D_m/R)^2 - 1}} \quad (4.11.5)$$

Några värden på värmeförlustfaktorn ges i tabell 4.11.4.

D_m/R	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.75	2	2.5
$\frac{q_m}{\lambda(T_m - T_o)}$	14.2	10.1	8.31	7.25	6.53	5.42	4.77	4.01

D_m/R	3	3.5	4	5	7.5	10	25	100
$\frac{q_m}{\lambda(T_m - T_o)}$	3.56	3.26	3.05	2.74	2.32	2.10	1.61	1.19

Tabell 4.11.4. Värmeförlustfaktor för cirkulärt tvärsnitt enligt formel 4.11.5.

4.11.4.2 Temperaturfält

Temperaturen i marken ges med koordinater enligt figur 4.11.3 av:

$$T(x, z) = \frac{q_m}{2\pi\lambda} \cdot \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 + (z+z_o)^2}{x^2 + (z-z_o)^2} \right] + T_o$$

$$z_o = \sqrt{D_m^2 - R^2} \quad (4.11.6)$$

Isotermerna blir cirklar.

På större avstånd från lagret kan temperaturfältet approximeras enligt följande:

$$T(x, z) \approx \frac{q_m}{\pi \lambda} \cdot \frac{z - z_0}{x^2 + z^2} + T_0 \quad (\sqrt{x^2 + z^2} > 3z_0) \quad (4.11.7)$$

Formeln ger en enkel uppskattning av temperaturinflansen en bit bort från värmelagret.

Värmeflödet vid markytan blir:

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{q_m}{\pi} \cdot \frac{z_0}{x^2 + z_0^2} \quad (4.11.8)$$

4.12 Lager med värmeisolering över hela ytan mot mark

Vissa markvärmelager värmeisoleras över hela ytan mot omgivande mark och mot luft. För denna typ kan under vissa restriktioner värmeförlusten erhållas med en enkel formel, där marken representeras av ett ekvivalent värmemotstånd som är oberoende av isolertjockleken.

Dessa formler härrör från en teori för optimal värmeisolering av ytor mot mark. Teorin och de här redovisade formlerna och diagrammen är tagna från referens 4.

I detta avsnitt antages hela lagerytan mot mark vara värmeisolerad. Isoleringens tjocklek är d_i , och dess värmeledningsförmåga är λ_i . Innanför isoleringen i lagret är temperaturen T_m . Vid markytan är den T_0 .

4.12.1 Allmänna formler

Värmelagret kan ligga helt under mark. Alternativt ligger överytan vid marknivån eller högre. Värmeförlusten genom överytan, då denna ligger vid marknivån, ges av formel 4.7.2. Vi skall här ge formler för värmeförlusten genom marken, $Q_{m,mark}$.

Vi har följande allmänna formel:

$$Q_{m,\text{mark}} \approx A_{im} \frac{T_m - T_o}{\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{L_s u_m}{\lambda}} \quad (d_i \gtrsim 2 \cdot d_{\min}) \quad (4.12.1)$$

Här är A_{im} värmelagrets area mot marken. Skalningslängden är L_s . Storheten u_m ges nedan för olika former på värmelagret.

Precisionen i formeln beror på isolertjockleken d_i . Felet avtar då d_i ökar. Vi har en viss minimitjocklek d_{\min} som nedan anges för de olika lagerformerna. Formeln ger alltid värden under de exakta. Precisionen i formeln 4.12.1 är ungefär enligt följande:

$$\begin{aligned} \text{maximalt fel cirka } 10\% & \text{ då } d_i > d_{\min} \\ \text{maximalt fel cirka } 5\% & \text{ då } d_i > 2 d_{\min} \\ \text{maximalt fel cirka } 2\% & \text{ då } d_i > 5 d_{\min} \end{aligned} \quad (4.12.2)$$

Vi kan därför använda formeln, då d_i är större än $2 d_{\min}$. Formeln kan med viss försiktighet även användas, då d_i är större än d_{\min} .

Vi skall använda följande beteckning:

$$d'_{\min} = \frac{d_{\min} \cdot \lambda}{\lambda_i L_s} \quad (4.12.3)$$

Storheten d'_{\min} är dimensionslös. För varje lagerform skall vi nedan ange de två dimensionslösa storheterna u_m och d'_{\min} .

Formeln 4.12.1 har en enkel tolkning. Värmeflödet ges av arean gånger temperaturdifferensen dividerad med ett värmemotstånd. Den första delen av detta motstånd, d_i/λ_i , är värmemotståndet för värmeisoleringen. Den andra delen $L_s u_m/\lambda$ är värmemotståndet (per ytenhet) för ett skikt av jorden med tjockleken $L_s u_m$. Dessa två motstånd adderas. Vi kan tolka formeln så att markens värmeisolerande förmåga kan representeras av en ekvivalent tjocklek $L_s \cdot u_m$. Här är L_s en skalningsfaktor. Storheten u_m är således den dimensionslösa ekvivalenta marktjockleken.

Kravet 4.12.2 på en viss minsta isolertjocklek innebär att den värmeisolerande förmågan hos marken är av samma storleksordning eller mindre än värmeisoleringens isolerförmåga. Formlerna gäller därför för förhållandevis kraftigt isolerade värmelager. Skalfaktorn L_s ingår i nämnaren av 4.12.3. Ett större lager får därför en högre gräns för lägsta

isolertjocklek där formeln är tillämplig.

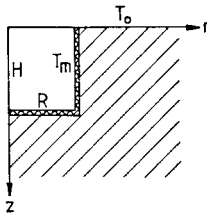
Vi skall för några fall ange värmeförlusten $q_{m,mark}$ (W/m) för ett tvärsnitt av ett långsträckt lager. I dessa fall har vi:

$$q_{m,mark} \approx L_{im} \cdot \frac{T_m - T_o}{\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{L_s u_m}{\lambda}} \quad (d_i \geq 2 d_{min}) \quad (4.12.4)$$

Här anger L_{im} isolerlängden mot mark i tvärsnittet.

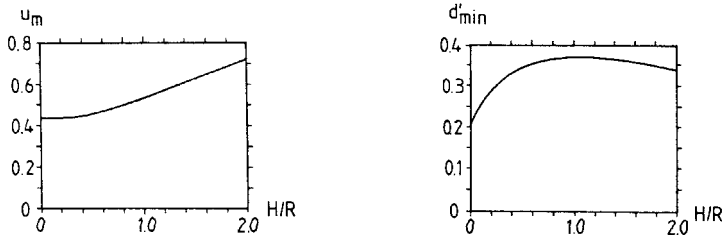
4.12.2 Cylinderformat lager

Värmelagret har formen av en cylinder med vertikal axel. Radien är R och höjden H . Cylinderns överyta ligger vid markytan. Hela cylinderytan mot mark är värmeisolerad. Se figur 4.12.1. Specialfallet $H=0$ innebär att vi har ett cylinderformat lager med värmeförlust genom bottenytan mot marken.



Figur 4.12.1. Cylinderformat värmelager.

Som skalningslängd användes radien: $L_s = R$. Den dimensionslösa ekvivalenta marktjockleken u_m ges i figur 4.12.2 som funktion av formen H/R . Den dimensionslösa undre gränsen för isolertjockleken, d'_{min} , ges också.



Figur 4.12.2. Storheterna u_m och d'_{min} för cylinderformat värmelager enligt figur 4.12.1.

Arean mot marken blir:

$$A_{im} = \pi R^2 + 2\pi RH \quad (4.12.5)$$

Exempel. Ett värmelager har cylindrisk form. Dess överyta sammanfaller med markytan. Följande data gäller:

$$R = 20 \text{ m} \quad H = 10 \text{ m} \quad \lambda = 2 \text{ W/mK}$$

$$d_i = 0.6 \text{ m} \quad \lambda_i = 0.04 \text{ W/mK}$$

$$T_m = 60^\circ\text{C} \quad T_o = 6^\circ\text{C}$$

Vi får med figur 4.12.2 och formlerna 4.12.3 och 4.12.5:

$$H/R = 0.5 \quad d'_{\min} = 0.35 \quad u_m = 0.47$$

$$L_s = R = 20 \text{ m}$$

$$2d_{\min} = 2 \cdot \frac{0.04 \cdot 20 \cdot 0.35}{2} = 0.28 \text{ m}$$

$$d_i = 0.6 > 2d_{\min}$$

$$A_{im} = 2510 \text{ m}^2$$

Värmeförlusten till mark blir då enligt formel 4.12.1:

$$Q_{m,mark} \approx 2510 \cdot \frac{60-6}{\frac{0.6}{0.04} + \frac{20 \cdot 0.47}{2}} = 6.9 \text{ kW}$$

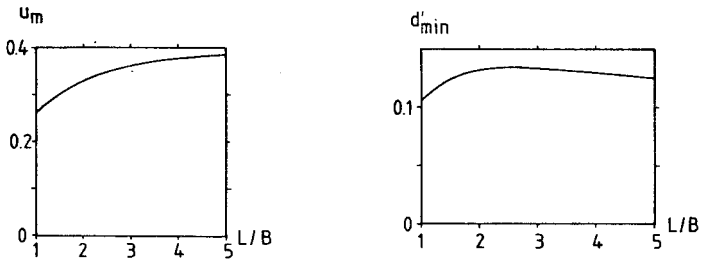
4.12.3 Parallelepipedformat lager

Värmelagret har formen av en parallelepiped med bredden B och längden L. L väljes större än eller lika med B. Avståndet mellan markytan och lagrets botten är H. Lagrets överyta ligger över markytan eller sammanfaller med denna. Hela kontaktytan mot mark är värmeisolerad. Som skalningslängd användes bredden: $L_s=B$.

Vi börjar med specialfallet $H=0$. Lagrets kontaktyta mot marken utgöres då av en rektangel på markytan. Arean mot mark ges av:

$$A_{im} = LB \quad (4.12.6)$$

Storheterna u_m och d'_{min} ges i figur 4.12.3.



Figur 4.12.3. Storheterna u_m och d'_{min} för parallelepipedformat lager med bottenytan vid marknivån.

I det allmänna fallet $H > 0$ ges arean mot mark av:

$$A_{im} = LB + 2(L+B)H \quad (4.12.7)$$

Storheterna u_m och d'_{min} blir funktioner av formen, dvs. av L/B och H/B . De ges i tabell 4.12.1 för några värden på L/B , då H/B är lika med 0.2.

L/B	1	2	5
u_m	0.24	0.33	0.40
d'_{min}	0.20	0.22	0.23

$H/B = 0.2$

Tabell 4.12.1. Storheterna u_m och d'_{min} för parallelepipedformat lager med överytan vid marknivån eller ovanför denna.

Exempel. Ett värmelager har formen av en parallelepiped. Dess överyta sammanfaller med markytan. Följande data gäller för lagret och marken:

$$L = 20 \text{ m} \quad B = 10 \text{ m} \quad H = 2 \text{ m}$$

$$d_i = 0.5 \text{ m} \quad \lambda_i = 0.05 \text{ W/mK}$$

$$T_m = 80^\circ\text{C} \quad T_o = 5^\circ\text{C} \quad \lambda = 2.5 \text{ W/mK}$$

Vi får med tabell 4.12.1 och formlerna 4.12.3 och 4.12.7:

$$L/B = 2, \quad H/B = 0.2 : \quad d_{\min}' = 0.22 \quad u_m = 0.33$$

$$L_s = B = 10 \text{ m}$$

$$2d_{\min} = 2 \cdot \frac{0.05 \cdot 10 \cdot 0.22}{2.5} = 0.09 \text{ m}$$

$$d_i = 0.5 \text{ m} > 2d_{\min}$$

$$A_{\text{im}} = 320 \text{ m}^2$$

Värmeförlusten blir då enligt formel 4.12.1:

$$Q_{\text{m,mark}} \approx 320 \cdot \frac{80 - 5}{\frac{0.5}{2.5} + \frac{10 \cdot 0.33}{2.5}} = 2.1 \text{ kW}$$

4.12.4 Jämförelse mellan cylinder och parallelepiped

Det är intressant att jämföra det stationära värmeflödet mot mark för cylinderformat och parallelepipedformat värmelager. Jämförelsen göres för lager med samma volym, höjd och isolertjocklek. Isolertjockleken väljes för varje lagervolym så att $d_i = 2d_{\min}$ för parallelepipedlagret.

Jämförelsen har gjorts dels för lager som står på markytan, dvs. $H=0$, dels för lager där överytan ligger i nivå med markytan.

$\frac{L/B}{H/B}$	1	2	5
.0	1.0	1.07	1.17
.2	1.07	1.09	1.27

 $Q_{m,parallelepiped}$
 $Q_{m,cylinder}$

Tabell 4.12.2. Kvot mellan värmeförluster från ett parallelepipedformat lager och ett lika stort cylinderformat lager med samma höjd.

Kvoten mellan förlusten från det parallelepipedformade lagret och det cylindriska ges i tabell 4.12.2. Kvoterna har något för låga värden (cirka 10%) på grund av att de tredimensionella beräkningarna är behäftade med ett större numeriskt fel än de tvådimensionella, cylindriska. (Övriga i denna uppsats redovisade tredimensionella beräkningar har ej detta relativt stora fel.)

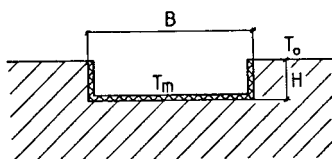
Tabellen visar att parallelepipedformen med gott resultat kan approximeras av en cylinder med samma volym och höjd om kvoten L/B ej har för högt värde.

4.12.5 Plana tvärsnitt

Runt de centrala delarna av ett långsträckt värmelager kan värmeflödet approximativt beskrivas som tvådimensionellt. Värmeförlustberäkningar för ett tvärsnitt genom lagret ger värmeförlust per längdenhet av lagret.

4.12.5.1 Rektangulärt tvärsnitt

Värmelagrets form i ett vertikalt tvärsnitt är en rektangel, vars överyta ligger i nivå med markytan. Lagrets höjd och bredd är H respektive B . Hela kontaktytan mot marken är värmeisolerad. Se figur 4.12.4.

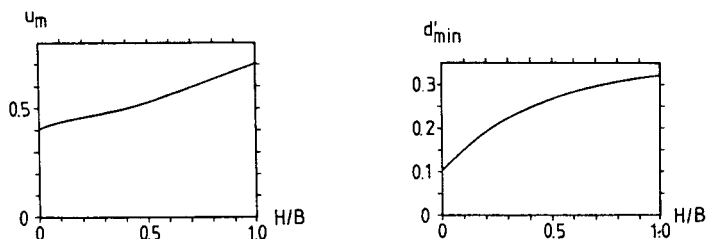


Figur 4.12.4. Rektangulärt tvärsnitt genom ett långsträckt lager.

Lagrets bredd användes som skalningslängd: $L_s = B$. Tvärsnittets isolerlängd mot mark L_{im} är:

$$L_{im} = B + 2H \quad (4.12.8)$$

Storheterna u_m och d'_{min} ges i figur 4.12.5.



Figur 4.12.5. Storheterna u_m och d'_{min} för ett långsträckt lager med rektangulärt tvärsnitt enligt figur 4.12.4.

Exempel. Ett långsträckt värmelager har ett rektangulärt tvärsnitt. Dess överyta sammanfaller med markytan. Följande data gäller för lagret och marken:

$$B = 12 \text{ m} \quad H = 6 \text{ m} \quad \lambda = 1.5 \text{ W/mK}$$

$$d_i = 0.4 \text{ m} \quad \lambda_i = 0.05 \text{ W/mK}$$

$$T_m = 40^\circ\text{C} \quad T_o = 7^\circ\text{C}$$

Vi får med figur 4.12.5 och formlerna 4.12.3 och 4.12.8:

$$H/B = 0.5 \quad d'_{min} = 0.27 \quad u_m = 0.53$$

$$L_s = B = 12 \text{ m}$$

$$2d_{\min} = 2 \cdot \frac{0.05 \cdot 12 \cdot 0.27}{1.5} = 0.22 \text{ m}$$

$$d_i = 0.4 \text{ m} > 2d_{\min}$$

$$L_{\text{im}} = 24 \text{ m}$$

Värmeförlusten blir då enligt formel 4.12.4

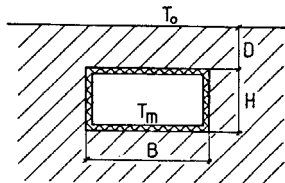
$$q_{\text{m,mark}} = 24 \cdot \frac{40 - 7}{\frac{0.4}{0.05} + \frac{12 \cdot 0.53}{1.5}} = 65 \text{ W/m}$$

4.12.5.2 Rektangulärt tvärsnitt under mark

Värmelagrets form i ett vertikalt tvärsnitt är en rektangel. Avståndet mellan dennas överyta och markytan är D . Lagrets höjd är H och dess bredd är B . Hela kontaktytan mot marken är värmeisolerad. Se figur 4.12.6.

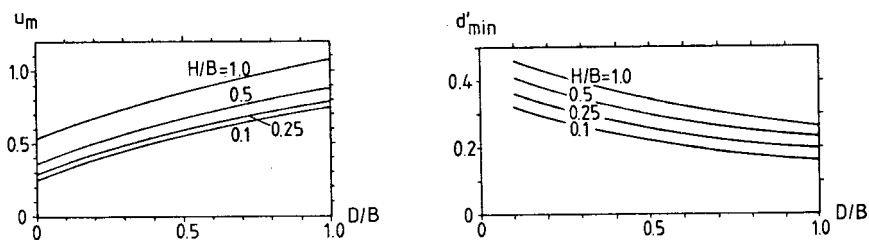
Lagrets bredd användes som skalningslängd: $L_s = B$. Tvärsnittets isolerlängd mot marken är:

$$L_{\text{im}} = 2(B+H) \quad (4.12.9)$$



Figur 4.12.6. Rektangulärt tvärsnitt genom ett långsträckt lager under mark.

Storheterna u_m och $d_{\min}^!$ ges i figur 4.12.7.



Figur 4.12.7. Storheterna u_m och d'_{\min} för ett tvärsnitt genom ett långsträckt lager enligt figur 4.12.6.

Exempel. Ett långsträckt värmelager under mark har rektangulärt tvärsnitt. Följande data gäller för lagret och marken:

$$B = 12 \text{ m} \quad H = 6 \text{ m} \quad D = 12 \text{ m}$$

$$d_i = 0.4 \text{ m} \quad \lambda_i = 0.05 \text{ W/mK} \quad \lambda = 3.5 \text{ W/mK}$$

$$T_m = 40^\circ\text{C} \quad T_o = 7^\circ\text{C}$$

Vi får med figur 4.12.7 och formlerna 4.12.3 och 4.12.9:

$$H/B = 0.5 \quad d'_{\min} = 0.24 \quad u_m = 0.88$$

$$L_s = B = 12 \text{ m}$$

$$2d'_{\min} = 2 \cdot \frac{0.05 \cdot 12 \cdot 0.24}{3.5} = 0.08 \text{ m}$$

$$d_i = 0.4 \text{ m} > 2d'_{\min}$$

$$L_{im} = 36 \text{ m}$$

Värmeförlusten till marken blir då enligt formel 4.12.4:

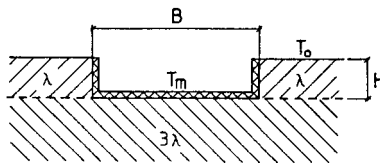
$$q_{m,\text{mark}} = 36 \cdot \frac{40 - 7}{\frac{0.4}{0.05} + \frac{12 \cdot 0.88}{3.5}} = 110 \text{ W/m}$$

4.12.6 Två skikt - morän, granit

I föregående avsnitt har markens värmeledningsförmåga haft ett värde i hela området utanför lagervolymen. Effekten av olika värmeledningsförmåga på olika djup skall här belysas med några exempel.

4.12.6.1 Rektangulärt tvärsnitt

Figur 4.12.8 visar ett vertikalt tvärsnitt genom ett långsträckt värmelager. Lagrets överyta ligger i nivå med markytan. Lagrets bredd är B och dess höjd är H . Lagrets botten gränsar mot granit. Mellan markytan och graniten ligger ett skikt morän. Värmeledningsförmågan för granit antages vara 3 gånger värdet för morän.



Figur 4.12.8. Rektangulärt tvärsnitt genom ett långsträckt värmelager. Marken består av ett moränsskikt över granit.

Lagrets bredd användes som skalningslängd: $L_s = B$. Tvärsnittets isolerlängd mot marken är

$$L_{im} = B + 2H \quad (4.12.10)$$

För en lagerform där H/B är lika med 0.5 blir värdet på storheterna u_m och d'_{min} :

$$u_m = 0.29$$

$$d'_{min} = 0.06$$

Motsvarande värden för lagret, om värmeledningsförmågan har samma värde i hela markvolymen, blir enligt figur 4.12.5:

$$u_m = 0.53$$

$$d'_{\min} = 0.27$$

Låt oss ta ett fall där B är 10 m och H är 5 m. Värmeledningsförmågan för morän och granit är 1.2 respektive 3.6 W/mK.

Det ekvivalenta värmemotståndet mellan lagret och markytan, $L_s u_m / \lambda$, blir:

$$\text{ren morän:} \quad \frac{10 \cdot 0.53}{1.2} = 4.4 \text{ m}^2\text{K/W}$$

$$\text{ren granit:} \quad \frac{10 \cdot 0.53}{3.6} = 1.5 \text{ m}^2\text{K/W}$$

$$\text{granit + morän:} \quad \frac{10 \cdot 0.29}{1.2} = 2.4 \text{ m}^2\text{K/W}$$

4.12.6.2 Cylinder

Värmelagret har cylindrisk form. Dess överyta sammanfaller med markytan. Radien är R och höjden är H. Förutsättningarna för marken är desamma som ovan i 4.12.6.1.

Lagrets radie väljes som skalningslängd: $L_s = R$

Lagrets kontaktyta mot marken är

$$A_{\text{im}} = \pi R^2 + 2\pi RH \quad (4.12.11)$$

Storheterna u_m och d'_{\min} ges i tabell 4.12.3.

H/R	0.4	1
u_m	0.22	0.33
d'_{\min}	0.079	0.03

Tabell 4.12.3. Storheterna u_m och d'_{\min} för ett cylindriskt värmelager. Marken består av ett moränlager med höjden H ovanpå granit.

Exempel. Ett värmelager har cylindrisk form. Dess överyta sammanfaller med markytan. Värmeförlusterna från lagret skall bestämmas för tre typer av omgivande mark. Följande data är gemensamma för de olika fallen.

$$R = 10 \text{ m} \quad H = 4 \text{ m}$$

$$d_i = 0.3 \text{ m} \quad \lambda_i = 0.04 \text{ W/mK}$$

$$T_m = 75^\circ\text{C} \quad T_o = 5^\circ\text{C}$$

Fall 1. Marken består av ren morän, vars värmeledningsförmåga är:

$$\lambda_{\text{morän}} = 1.2 \text{ W/mK}$$

Figur 4.12.2 samt formlerna 4.12.3 och 4.12.5 ger

$$L_s = R = 10 \text{ m} \quad H/R = 0.4$$

$$d'_{\min} = 0.36 \quad u_m = 0.45$$

$$2d_{\min} = 2 \cdot \frac{0.04 \cdot 10 \cdot 0.36}{1.2} = 0.24 \text{ m}$$

$$d_i = 0.3 \text{ m} > 2d_{\min}$$

$$A_{\text{im}} = 565 \text{ m}^2$$

Värmeförlusten till mark blir då enligt formel 4.12.1

$$Q_{\text{m,mark}} \approx 565 \cdot \frac{75 - 5}{\frac{0.3}{0.04} + \frac{10 \cdot 0.45}{1.2}} = 3.5 \text{ kW}$$

Fall 2. Marken består av ren granit, vars värmeledningsförmåga är

$$\lambda_{\text{granit}} = 3.6 \text{ W/mK}$$

På samma sätt som i fall 1 erhålles

$$L_s = R = 10 \text{ m} \quad H/R = 0.4$$

$$d'_{\min} = 0.36 \quad u_m = 0.45$$

$$2d_{\min} = 2 \cdot \frac{0.04 \cdot 10 \cdot 0.36}{3.6} = 0.08 \text{ m}$$

$$d_j = 0.3 \text{ m} > 2d_{\min}$$

$$A_{\text{im}} = 565 \text{ m}^2$$

$$Q_{\text{m,mark}} \approx 565 \cdot \frac{75 - 5}{\frac{0.3}{0.04} + \frac{10 \cdot 0.45}{3.6}} = 4.5 \text{ kW}$$

Fall 3. Marken består av granit, som är täckt av ett 4 meter tjockt lager av morän. Värmeledningsförmågan för granit och morän är

$$\lambda_{\text{granit}} = 3.6 \text{ W/mK}$$

$$\lambda_{\text{morän}} = 1.2 \text{ W/mK}$$

Eftersom $\lambda_{\text{granit}}/\lambda_{\text{morän}}$ är lika med 3 och H/R är lika med 0.4 kan tabell 4.12.3 användas för bestämning av d'_{\min} och u_m .

På samma sätt som i fall 1 erhålles

$$L_s = R = 10 \text{ m}$$

$$d'_{\min} = 0.079 \quad u_m = 0.22$$

$$2d_{\min} = 2 \cdot \frac{0.04 \cdot 10 \cdot 0.079}{1.2} = 0.05 \text{ m}$$

$$d_j = 0.3 \text{ m} > 2d_{\min}$$

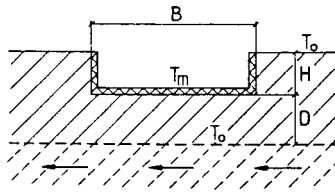
$$A_{\text{im}} = 565 \text{ m}^2$$

$$Q_{\text{m,mark}} \approx 565 \cdot \frac{75 - 5}{\frac{0.3}{0.04} + \frac{10 \cdot 0.22}{1.2}} = 4.2 \text{ kW}$$

4.12.7 Effekt av grundvattenström

Figur 4.12.9 visar ett vertikalt tvärsnitt genom ett långsträckt värmelager. Lagrets höjd är H och dess bredd är B . Grundvattenytan ligger på djupet D under lagrets bottenyta.

Vattenflödet är så starkt att temperaturen under lagret vid grundvattenytan kan sättas till den ostörda grundvattentemperaturen långt från lagret.



Figur 4.12.9. Rektangulärt tvärsnitt genom ett långsträckt lager med ett kraftigt grundvattenflöde under djupet $H+D$.

Lagrets bredd väljes som skalningslängd: $L_s = B$.

Storheterna u_m och d'_{min} ges i tabell 4.12.4 för ett lager där kvoten H/B är 0.2.

Lagrets isolerlängd mot markytan är

$$L_{im} = B + 2H \quad (4.12.12)$$

D/B	0.2	0.3	0.6	∞
u_m	.15	.21	.31	.45
d'_{min}	.04	.07	.13	.20

$H/B = 0.2$

Tabell 4.12.4. Storheterna u_m och d'_{min} för ett värmelager enligt figur 4.12.9.

4.13 Tidsskala för stationär värmeförlust

Den stationära värmeförlusten under en tid t ges av $Q_m \cdot t$. Under en värmelagringscykel utnyttjas ett temperatursving $T_+ - T_-$ i lagret. Motsvarande värmemängd blir $(T_+ - T_-) \cdot C_S V$. Här är C_S (storage) värmekapaciteten per volymenhet i värmelagret och V lagrets volym. Värmeförlust under en tid t dividerad med lagrets värmelagringskapacitet blir då

$$\frac{Q_m \cdot t}{(T_+ - T_-) C_S V} = \frac{T_m - T_0}{T_+ - T_-} \cdot \frac{\lambda L_S h t}{C_S V} \quad (4.13.1)$$

Vi har här utnyttjat formel 4.1.2 för Q_m . Den första faktorn, temperaturkvoten, i 4.13.1 är normalt i storleksordningen 1. Den andra faktorn är då ett mått på värmeförlust under en tid t relativt lagringskapacitet. Vi definierar en tid t_m för vilken denna faktor blir lika med ett:

$$t_m = \frac{C_S V}{\lambda L_S h} \quad (4.13.2)$$

Tiden t_m ger en tidsskala för den stationära värmeförlusten.

För lagringscykler som är korta relativt t_m blir värmeförlusten liten, medan värmeförlusten blir stor om tiden för lagringscykeln är stor jämfört med t_m .

Tiden t_m kan också tolkas som en tidsskala för en temperaturavklingning hos värmelagret. Låt $T_m(t)$ beteckna en lagermedeltemperatur. Värmeförlusten är av storleksordningen $\lambda(T_m(t) - T_0)L_S h$. En energibalans ger då:

$$\frac{d}{dt} [(T_m(t) - T_0) C_S V] \simeq -\lambda(T_m(t) - T_0) L_S h$$

eller

$$\frac{d}{dt} (T_m(t) - T_0) = -\frac{1}{t_m} (T_m(t) - T_0) \quad (4.13.3)$$

Detta ger en exponentiell avklingning med tidsskalan t_m :

$$T_m(t) - T_0 = (T_m(0) - T_0) e^{-t/t_m} \quad (4.13.4)$$

Värmeförlusttidsskalan t_m är enligt 4.13.2 proportionell mot V/L_S , dvs. mot lagrets linjära dimensioner i kvadrat. Detta innebär att om de linjära dimensionerna fördubblas så fyrdubblas tidsskalan.

För värmeförlusten q_m från ett tvärsnitt av ett långsträckt värmelager ersättes Q_m av q_m och volym V med lagrets tvärsnittsarea A . Tidsskalan t_m blir då med utnyttjande av formel 4.1.7:

$$t_m = \frac{C_S A}{\lambda h} \quad (4.13.5)$$

Tidsskalan beror fortfarande kvadratisk på lagrets linjära dimensioner.

Exempel 1. För ett sfäriskt lager på stort djup har vi med hjälp av 4.2.3:

$$h = 4\pi \quad L_S = R \quad V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$t_m = \frac{C_S R^2}{3\lambda}$$

Numeriskt kan vi ta

$$C_S = 4.2 \text{ MJ/m}^3\text{K} \quad \lambda = 2 \text{ W/mK}$$

$$R = 3 \text{ m} \quad t_m = 0.2 \text{ år}$$

$$R = 10 \text{ m} \quad t_m = 2.2 \text{ år}$$

$$R = 50 \text{ m} \quad t_m = 55 \text{ år}$$

Exempel 2. Vi har ett cylinderformat lager med överytan vid marknivå. Radien är R och höjden H . Överytan och kanten ner till två meters djup ($D_i = 2 \text{ m}$) är mycket kraftigt isolerade så att denna värmeförlust kan försummas.

Tidsskalan t_m för detta fall ges av

$$Q_m \cdot t_m = \pi R^2 H \cdot C \cdot (T_m - T_0)$$

Värmeflödet $Q_m = Q_{m,\text{mark}}$ ges i figur 4.8.3. Då gäller:

$$t_m = \frac{R^2 HC}{\lambda q'}$$

Vi har följande termiska data:

$$C = 2 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K} \quad \lambda = 2 \text{ W/mK}$$

Då gäller approximativt:

$$t_m = \frac{R^2 H}{q'} \cdot \frac{1}{10} \text{ år}$$

Här ges q' av figur 4.8.3.

T.ex. har vi:

$$\begin{array}{lll} R = 10 \text{ m} & & \\ H = 10 \text{ m} & q' = 160 \text{ m} & t_m = 0.6 \text{ år} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} R = 32 \text{ m} & & \\ H = 32 \text{ m} & q' = 660 \text{ m} & t_m = 5 \text{ år} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} R = 100 \text{ m} & & \\ H = 100 \text{ m} & q' = 2500 \text{ m} & t_m = 40 \text{ år} \end{array}$$

4.14 Översikt över värmeförlustformler

I detta avsnitt ges en översikt över de formler, diagram och tabeller för stationära värmeförluster som har presenterats i de föregående avsnitten.

Figur 4.1.1 illustrerar det stationära värmeströmningsproblemet. Värmelagrets yta har en övertemperatur $T_m - T_o$ relativt markytan och ostörd mark. Det stationära värmeflödet från värmelagret betecknas Q_m (W). För ett värmelager med en dynamisk lagringscykel är T_m ett lämpligt valt medelvärde av lagerytans temperatur under lagringscykeln t_o . En uppskattning av total värmeförlust per cykel är $Q_m \cdot t_o$. En längd L_s används för skalning. Värmeförlusten Q_m ges enligt formel 4.1.2 av

$$Q_m = \lambda(T_m - T_o)L_s \cdot h \quad (4.14.1)$$

Här är h en dimensionslös värmeförlustfaktor som beror av problemets skalade längder (L_1/L_S osv.). Tabell 4.14.1 ger en sammanställning av värmeförlustformlerna för de tredimensionella fallen från avsnitten 4.2-10.

<u>Typ, form</u>	<u>Avsnitt</u>	<u>Formler</u>
Sfär på stort djup	4.2	4.2.2
Sfär på djup D_m	4.2	4.1.5, figur 4.2.2
Cylinderformat värmelager under mark	4.3.2	4.3.1, tabell 4.3.1
Cylinderformat värmelager på stort djup	4.3.2	4.3.2, tabell 4.3.2
Allmänt samband mellan måttligt och stort djup	4.4	4.4.1
Rotationsellipsoid på stort djup	4.5.1	4.5.1-2, 4.5.5-7, figur 4.5.2
Allmän ellipsoid på stort djup	4.5.3	4.5.15, figur 4.5.3, 4.5.21; 4.5.22
Allmän ellipsoid på måttligt djup	4.5.5	4.5.26-27
Allmän formel för lager under mark	4.6	4.6.1-3
Värmeförlust genom värmeisolering i marknivån	4.7.2	4.7.2
Värmeförlust genom kantisolering	4.7.3	4.7.5
Värmeförlust mot mark för olika kantisolerdjup D_i	4.7.4.2-3	4.7.10-11, 4.7.15, 4.7.17, figur 4.7.6
Cylinderformat värmelager med överytan vid marknivån	4.8.2-3	4.8.2-6, figur 4.8.3-4, tabell 4.8.1
Stympad kon	4.8.4	tabell 4.8.2
Parallelepipedformat värmelager med överytan vid marknivån	4.9	4.9.2-3, tabell 4.9.1
Halvsfär	4.10.2	4.10.2, figur 4.10.5

Tabell 4.14.1. Översikt över värmeförlustformler för tredimensionella stationära fall.

Värmeförlusten i ett tvådimensionellt tvärsnitt av ett längsträckt värmelager betecknas q_m . Den räknas per meter i lagrets längdriktning (W/m). Motsvarigheten till formel 4.14.1 blir:

$$q_m = \lambda(T_m - T_o) \cdot h \quad (\text{W/m}) \quad (4.14.2)$$

Tabell 4.14.2 ger en sammanställning av värmeförlustformlerna för de tvådimensionella fallen från avsnitt 4.11.

<u>Typ, form</u>	<u>Avsnitt</u>	<u>Formler</u>
Rektangulärt tvärsnitt	4.11.1	4.11.1-2, tabell 4.11.1
Trapetsformat tvärsnitt	4.11.2	4.11.3, tabell 4.11.2
Cirkulärt tvärsnitt under markytan	4.11.4	4.11.5, tabell 4.11.4

Tabell 4.14.2. Översikt över värmeförlustformler för tvådimensionella stationära fall.

Vissa markvärmelager värmeisolerar över hela ytan. För dessa kan speciella formler för värmeförlusten anges. Marken representeras av en ekvivalent marktjocklek. Tabell 4.14.3 ger en sammanställning av formlerna för dessa fall.

<u>Typ, form</u>	<u>Avsnitt</u>	<u>Formler</u>
Allmänna formler	4.12.1	4.12.1-4
Cylinderformat lager	4.12.2	figur 4.12.2
Parallelepipedformat lager	4.12.3	figur 4.12.3; tabell 4.12.1
Rektangulärt tvärsnitt	4.12.5.1	figur 4.12.5
Rektangulärt tvärsnitt under mark	4.12.5.2	figur 4.12.7
Två skikt - morän, granit	4.12.6	
rektangulärt tvärsnitt	4.12.6.1	
cylinder	4.12.6.2	
Grundvattenström under rektangulärt tvärsnitt	4.12.7	

Tabell 4.14.3. Översikt över värmeförlustformler för värmelager som är isolerade över hela ytan.

5. GRUNDLÄGGANDE DYNAMISKA TEMPERATURFÖRLOPP

5.1 Transient process vid konstant yttemperatur

Vi skall i detta avsnitt behandla transienta temperaturprocesser i mark, då man vid en starttid gör en stegändring av yttemperaturen. I det betraktade markområdet är temperaturen konstant vid startögonblicket: $T|_{t=0} = T_0$. Vid markytan har man hela tiden temperaturen T_0 . På lagerytan råder från starten $t = 0$ temperaturen T_m . Vi får då i marken ett transient insvängningsförlopp mot det stationära temperaturfältet, vilket har behandlats i föregående kapitel.

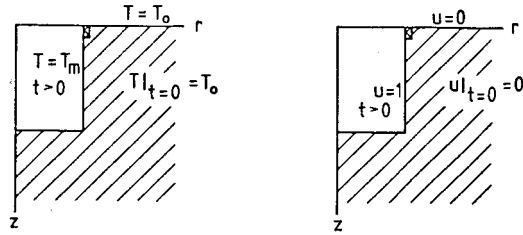
Detta är en av de fundamentala delprocesserna för ett markvärmelager. Under de första åren utbildas en värmekudde kring markvärmesystemet. Överlagrat har man sedan ett årligt periodiskt förlopp. Uppbyggnaden av värmekudden kräver ett extra värmetillskott vilket efter hand minskar i storlek. Detta värmetillskott ges väsentligen av det transienta värme-flöde som man får vid en stegökning av yttemperaturen till T_m vid $t = 0$.

Vi behöver också känna till det transienta värme-flödet vid en stegändring av yttemperaturen för analyser av olika delprocesser. Ett exempel är responsen kring ett rör eller ett borrhål.

I detta avsnitt skall vi sammanställa formler för det transienta värme-flödet genom ytan där man har gjort en stegändring av temperaturen.

5.1.1 Transient temperaturfält

Figur 5.1.1 illustrerar den aktuella transienta processen för ett cylinder-format värmelager med överytan vid marknivån. Temperaturen i marken är T_0 vid starten $t = 0$. På lagerytan höjes då temperaturen till T_m . Vid markytan råder hela tiden temperaturen T_0 .



Figur 5.1.1. Transient temperaturprocess för cylinderformat värmelager vars yta ges temperaturen T_m vid $t = 0$. Till höger visas villkoren för den dimensionslösa temperaturen.

Den dimensionslösa temperaturen u definieras av

$$u = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \quad (5.1.1)$$

Denna blir då +1 vid lagerytan och 0 vid markytan. Vid starten $t = 0$ är u noll i marken. Villkoren för u illustreras av den högra bilden i figur 5.1.1.

Temperaturen u är en funktion av rumskoordinaterna och tiden. I en dimensionslös formulering användes en längd L_s för skalning av rumskoordinaterna. Denna längd kan vara lagrets höjd eller dylikt. Den dimensionslösa tiden ges av at/L_s^2 . Här är a (m^2/s) markens temperaturledningstal. Den dimensionslösa temperaturen som funktion av dimensionslösa variabler blir:

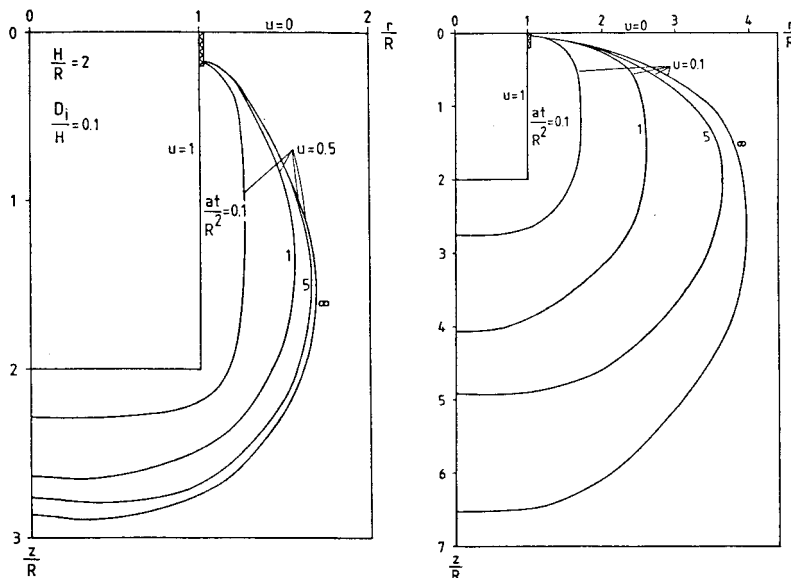
$$u = u \left(\frac{x}{L_s}, \frac{y}{L_s}, \frac{z}{L_s}, \frac{at}{L_s^2} \right) \quad (5.1.2)$$

Som parametrar får vi dimensionslösa storheter för lagrets form m.m. ($L_1/L_s, \dots, \lambda_1/\lambda, \dots, d_i \lambda / (L_s \lambda_i), \dots, a_1/a, \dots$ osv). Se avsnitt 4.1.2.

5.1.1.1 Cylinderformat värmelager med överytan vid marknivå.

Figur 5.1.2 visar det transienta förloppet i marken utanför ett cylinderformat värmelager vars höjd H är lika med diametern $2R$. Den vertikala

kantisoleringen går ner ett djup $D_i = 0.1 H$. Isoleringen antages här vara total. Kantisoleringen har bara betydelse för dess närmaste omgivning. Den påverkar ej temperaturförloppet i stort.



Figur 5.1.2. Transient temperaturförlopp utanför cylinderformat värme-lager. A: isotermer $u = 0.5$. B: isotermer $u = 0.1$.

Som skalningslängd användes R . Dimensionslös temperatur blir då en funktion av r/R , z/R och at/R^2 . Figur 5.1.2 A visar isotermer $u = 0.5$ vid olika tidpunkter, medan 5.1.2 B visar $u = 0.1$.

Vi ser att 0.5-isotermer närmar sig det stationära värdet betydligt snabbare än 0.1-isotermer.

Som en illustration tar vi följande fall med tre lagerstorlekar:

$$a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

- i. $R = 10 \text{ m}$ ($H = 20 \text{ m}$)
- ii. $R = 20 \text{ m}$ ($H = 40 \text{ m}$)
- iii. $R = 50 \text{ m}$ ($H = 100 \text{ m}$)

(5.1.3)

Detta ger tidsskalorna:

$$\begin{aligned}
 & \text{i. } R^2/a = 10^8 \text{ s} = 3.2 \text{ år} \\
 & \text{ii. } R^2/a = 13 \text{ år} \\
 & \text{iii. } R^2/a = 79 \text{ år}
 \end{aligned}
 \quad \left(\frac{at}{R^2} = \frac{t}{R^2/a} \right)
 \quad (5.1.4)$$

Vi ser att det minsta lagret ger en tidsskala på 3 år för den transienta processen. Det största lagret med linjära dimensioner på 100 m får en tidsskala på nästan hundra år för den transienta temperaturupbyggnaden kring värmelagret.

Vi ser från figur 5.1.2 att 0.5-isotermen hamnar på en knapp radias avstånd från lagret, medan 0.1-isotermen hamnar på ett avstånd 2-5 R efter lång tid.

5.1.1.2 Cylinderformat värmelager under mark

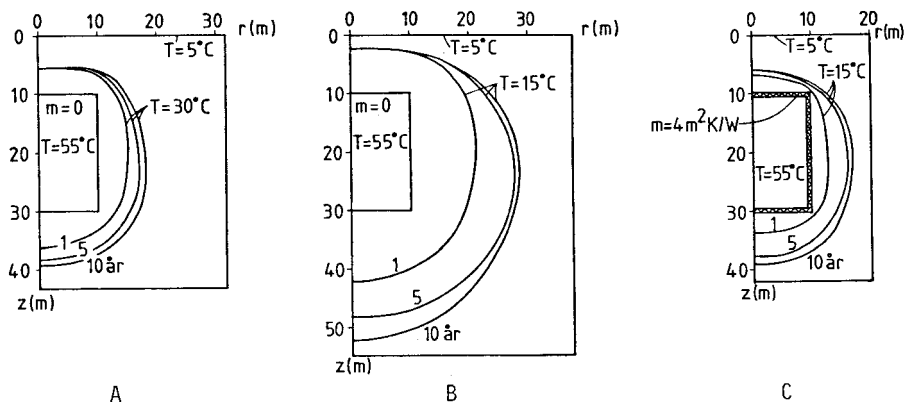
Som ytterligare ett exempel på den transienta temperaturupbyggnaden skall vi se på ett cylinderformat berggrum. Exemplet härrör från referens 5.

Lagret är 20 meter högt, och radien är 10 m. Lagrets överyta ligger 10 m under marknivån. Lagerytan är antingen oisolerad eller täckt med en isolering med värmemotståndet m . Följande data har använts:

$$\begin{aligned}
 a &= 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & \lambda &= 3.6 \text{ W/mK} & m &= 0 \text{ resp. } 4 \text{ m}^2\text{K/W} \\
 T_o &= 5 \text{ }^\circ\text{C} & T_m &= 55 \text{ }^\circ\text{C}
 \end{aligned}
 \quad (5.1.5)$$

I detta fall ges förloppet direkt utan skalning. Se figur 5.1.3 A-C.

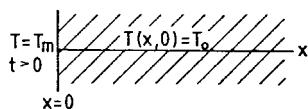
Figur 5.1.3 A visar isotermen för 30 °C efter 1, 5 och 10 år, medan 5.1.3. B och C visar isotermen för 15 °C. I A och B är berggrummet oisolerat, medan det i C har en isolering med värmemotståndet 4 m²K/W. Vi ser vid jämförelse mellan B och C att att isoleringen ger en relativt kraftig minskning av det uppvärmda områdets utsträckning.



Figur 5.1.3. Transient temperaturuppbyggnad utanför cylinderformat berggrum. A: $T = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$, $m = 0$. B: $T = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$, $m = 0$. C: $T = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$, $m = 4\text{ m}^2\text{K/W}$.

5.1.1.3 Plant, endimensionellt fall

En viktig elementarprocess är det plana, endimensionella, halvoändliga fallet $0 < x < \infty$. Se figur 5.1.4. Denna typ av transient process får man i början vid en stegändring av yttemperaturen. Efter hand kan flerdimensionella effekter och en yttre begränsning börja störa den rena processen.



Figur 5.1.4. Plant, endimensionellt fall.

Den dimensionslösa temperaturen från formel 5.1.1 blir

$$u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right) \quad (5.1.6)$$

Här är $\operatorname{erfc}(s)$ den komplementära felfunktionen. Den behandlas i avsnitt 3.6. Temperaturstörningen u ges direkt av $\operatorname{erfc}(s)$, där argumentet ges av $x/\sqrt{4at}$. Kurvformen är således densamma vid alla tider. Längdkoordinaten

skalas med den tidsberoende längden $\sqrt{4at}$.

Låt $x_{0.5}$ vara x-kordinaten för 50% temperaturstörning ($u = 0.5$) vid tiden t . Vi har då, eftersom $\operatorname{erfc}(\frac{1}{2}) = 0.480 \approx 0.5$:

$$x_{0.5} = \sqrt{at} \quad (5.1.7)$$

Formel 5.1.7 ger ett enkelt direkt uttryck för hur isotermer $u = 0.5$ rör sig utåt.

Som ett exempel kan vi ta:

$$a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Vi får då följande värden

t	1 timme	1 dygn	1 vecka	2 mån	1 år	10 år	100 år
$x_{0.5}$ (m)	0.06	0.30	0.78	2.3	5.6	18	56

Några andra isotermer rör sig utåt enligt följande:

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(1.16) &= 0.1 & x_{0.1} &= 2.3 \cdot \sqrt{at} \\ \operatorname{erfc}(1.8) &= 0.01 & x_{0.01} &= 3.6 \cdot \sqrt{at} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

5.1.1.4 Transient förlopp utanför sfär

Ett annat instruktivt elementarfall är den transienta processen i en fri rymd utanför en sfär. Sfärens radie är R . Det radiella avståndet till sfärens centrum är r . Den dimensionslösa temperaturen $u(r,t)$ skall uppfylla:

$$u(r,0) = 0 \quad r > R \quad u(R,t) = 1 \quad t > 0 \quad (5.1.9)$$

Lösningen är:

$$u(r,t) = \frac{R}{r} \operatorname{erfc} \left(\frac{r-R}{\sqrt{4at}} \right) \quad \begin{array}{l} r > R \\ t > 0 \end{array}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.1.10)$$

Här är erfc den komplementära felfunktionen, vilken behandlas i avsnitt 3.6.

Den stationära slutlösningen för $t = \infty$ ges av R/r . Insvängningen till det stationära slutvärdet ges av erfc -faktorn i formel 5.1.10. Denna har exakt samma form som i det plana fallet enligt föregående avsnitt om vi sätter $x = r - R$.

Låt $r_{0.5}$ beteckna radien för vilken 50% av det stationära slutvärdet har uppnåtts vid en viss tid:

$$u(r_{0.5}, t) = \frac{1}{2} \cdot u(r_{0.5}, \infty) \quad (5.1.11)$$

Vi har då eftersom $\operatorname{erfc}(\frac{1}{2}) \approx 0.5$:

$$r_{0.5} = R + \sqrt{at} \quad (5.1.12)$$

Denna formel är analog med formel 5.1.7 för det plana fallet.

5.1.2 Transient värmeförlust

Vi skall i detta avsnitt med formler och diagram ange det transienta värme-flödet för olika fall, där lagerytan ges en temperaturhöjning $T_m - T_0$ vid $t = 0$. I tredimensionella fall betecknas det transienta värme-flödet genom ytan med $Q_{tr}(t)$ (W). Med index tr skall vi genomgående avse den aktuella typen av transient process. För ett plant tvärsnitt betecknar $q_{tr}(t)$ värme-flödet per längdenhet vinkelrät mot planet. Vi skall också använda $q_{tr}(t)$ för att beteckna värme-flödet per längdenhet från en cylinder eller ett rör. I plana, endimensionella fall är $q_{tr}(t)$ värme-flödet per ytenhet. Sorten för $q_{tr}(t)$ är således W/m eller W/m^2 .

Det ackumulerade värmeflödet betecknas $E_{tr}(t)$:

$$E_{tr}(t) = \int_0^t Q_{tr}(t') dt' \quad (\text{J})$$

$$E_{tr}(t) = \int_0^t q_{tr}(t') dt' \quad (\text{J/m, J/m}^2) \quad (5.1.13)$$

Då tiden går mot oändligheten, går de transienta värmeflödena mot de stationära värdena. Vi har i enlighet med kapitel 4:

$$Q_{tr}(t) \rightarrow Q_m \quad t \rightarrow \infty$$

$$q_{tr}(t) \rightarrow q_m \quad t \rightarrow \infty \quad (5.1.14)$$

5.1.2.1 Dimensionslös form

Den transienta värmeförlusten är direkt proportionell mot markens värmeledningsförmåga λ och mot temperaturdifferensen $T_m - T_o$. På samma sätt som i det stationära fallet enligt avsnitt 4.1.2 blir Q_{tr} också proportionell mot skalningslängden L_s . Värmeförlusten blir en funktion av dimensionslös tid at/L_s^2 och av skalade parametrar såsom L_1/L_s osv.

Vi har

$$Q_{tr}(t) = \lambda(T_m - T_o) L_s \cdot h_{tr}(at/L_s^2, \dots) \quad (\text{W}) \quad (5.1.15)$$

Här är h_{tr} det dimensionslösa, transienta värmeledningsfaktorn. Den blir en funktion av dimensionslös tid och av skalade parametrar för form o.dyl. Då tiden går mot oändligheten närmar sig h_{tr} den stationära värmeförlustfaktorn h vilken behandlas i kapitel 4.

I ett plant tvärsnitt får vi i stället:

$$q_{tr}(t) = \lambda(T_m - T_o) \cdot h_{tr}(at/L_s^2; \dots) \quad (\text{W/m}) \quad (5.1.16)$$

För ett endimensionellt fall får vi:

$$q_{tr}(t) = \frac{\lambda(T_m - T_0)}{L_s} \cdot h_{tr}(at/L_s^2; \dots) \quad (\text{W/m}^2) \quad (5.1.17)$$

Den ackumulerade värmeförlusten E_{tr} blir i dimensionslös form:

$$E_{tr} = C(T_m - T_0) L_s^3 \cdot e_{tr}(at/L_s^2; \dots) \quad (\text{J}) \quad (5.1.18)$$

Här betecknar e_{tr} den dimensionslösa ackumulerade värmeförlusten. Markens värmekapacitet per volymsenhet är C ($a = \lambda/C$). I ett tvådimensionellt fall får vi

$$E_{tr} = C(T_m - T_0) L_s^2 \cdot e_{tr}(at/L_s^2; \dots) \quad (\text{J/m}) \quad (5.1.19)$$

I ett plant, endimensionellt fall har vi slutligen:

$$E_{tr} = C(T_m - T_0) L_s \cdot e_{tr}(at/L_s^2; \dots) \quad (\text{J/m}^2) \quad (5.1.20)$$

Sambandet mellan e_{tr} och h_{tr} blir:

$$e_{tr} = \int_0^{at/L_s^2} h_{tr}(t'; \dots) dt' \quad (5.1.21)$$

Värmeflödet går mot konstant värde då tiden går mot oändligheten enligt formel 5.1.14. Den ackumulerade förlusten ökar då som $Q_m \cdot t$ eller $q_m \cdot t$. Den dimensionslösa ackumulerade förlusten ökar då också linjärt med dimensionslös tid.

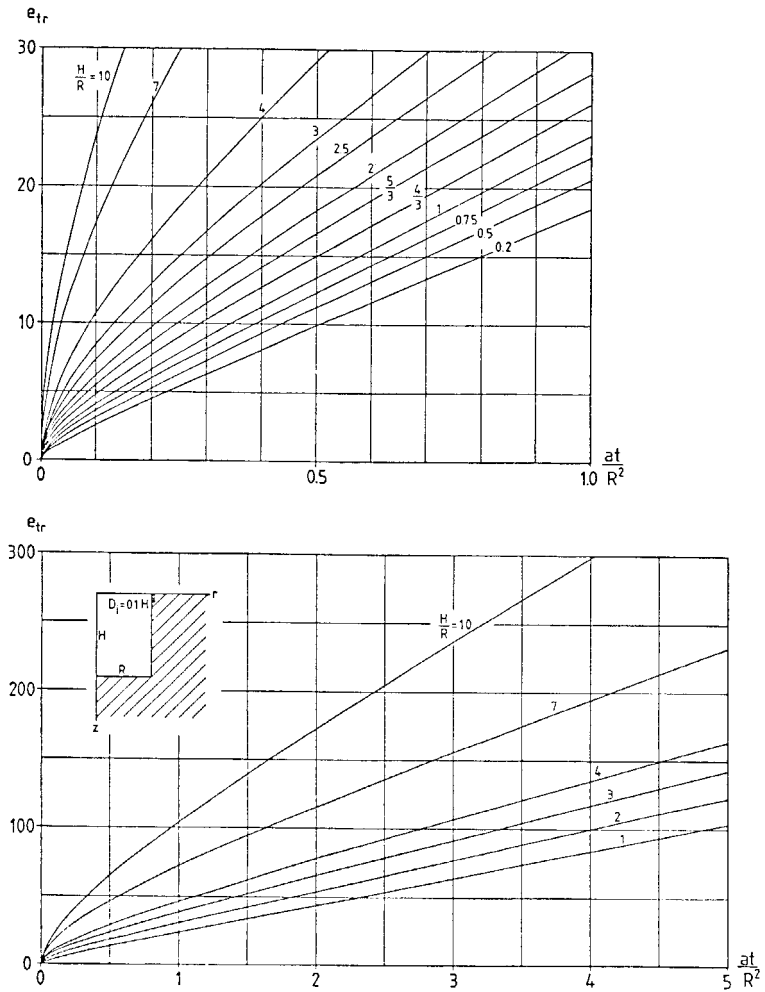
5.1.2.2 Cylinderformat lager med överytan vid marknivån

Det aktuella värmelagret har formen av en cylinder med överytan vid marknivån. Cylinderns höjd är H , och dess radie är R . Den vertikala kanten är värmeisolerad ner till ett djup D_i . Vi skall enbart behandla fallet $D_i = 0.1H$. Värmeisoleringen antages vara total.

Som skalningslängd L_s användes radien R . Det ackumulerade, dimensionslösa värmeflödet e_{tr} blir en funktion av dimensionslös tid at/R^2 . Den enda parametern är cylinderformen H/R , eftersom isoleringen är total och isolerdjupet D_i är proportionellt mot höjden. Vi har med formel 5.1.18:

$$E_{tr} = C(T_m - T_o) R^3 \cdot e_{tr} \left(\frac{at}{R^2}, \frac{H}{R} \right) \quad (5.1.22)$$

Numeriskt beräknade värden för e_{tr} visas i figur 5.1.5. Ökningen med tiden blir efter en viss tid linjär. Förloppet är då väsentligen stationärt.



Figur 5.1.5. Transient, ackumulerad värmeförlust för cylinder med överytan vid marknivå. Formel 5.1.22.

Exempel. Låt oss ta ett lager med 20 meters radie och höjd. Det är omgivet av granit. Vi har följande data:

$$R = 20 \text{ m} \quad H = 20 \text{ m} \quad D_i = 2 \text{ m}$$

$$\lambda = 3.5 \text{ W/mK} \quad a = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$T_m - T_o = 40 \text{ }^\circ\text{C}$$

Vi har då

$$R^2/a = 7.9 \text{ år} \quad H/R = 1$$

$$C(T_m - T_o) R^3 = 7.0 \cdot 10^{11} \text{ J} = 194 \text{ MWh}$$

Diagram 5.1.5 A och B ger då

t(år)	e_{tr}	E_{tr} (MWh)
0.5	3.0	580
1	4.8	930
2	7.9	1530
3	10.8	2100
4	13.5	2620
5	16.1	3120

Värmeförlusten per år blir:

år 1:	930 MWh
år 2:	600 MWh
år 5:	500 MWh
år 25:	480 MWh

Den stationära värmeförlusten per år blir enligt formel 4.8.5 $3.5 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 18.9 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \text{ J} = 464 \text{ MWh}$. Vi ser att värmeförlusten per år är dubbelt så stor som den stationära under första året. Redan under det femte året råder väsentligen stationär värmeförlust.

De givna diagrammen och exemplet gäller för isolerdjupet $D_i = 0.1 H$. Resultaten kan dock väsentligen även användas för andra isolerdjup på följande sätt. Det stationära värmeflödet Q_m varierar med isolerdjup enligt formler i avsnitt 4.7. Skillnaden mellan Q_{tr} och Q_m blir i stort oberoende

av D_i , eftersom isolerdjupet bara påverkar ett mindre lokalt område kring kanten.

Vi kan för värmelager med överytan vid marknivå, vilka har en kantisolering ner till ett djup D_i använda approximationen:

$$(Q_{tr} - Q_m) \Big|_{D_i} \approx (Q_{tr} - Q_m) \Big|_{D_i=0.1H} \quad (5.1.23)$$

Om vi utnyttjar formel 4.7.17 får vi

$$Q_{tr} \Big|_{D_i} \approx Q_{tr} \Big|_{D_i=0.1H} + \lambda(T_m - T_o) L_i \cdot g(D_i/H) \quad (5.1.24)$$

Vi behöver således bara studera fallet där kantisoleringen är $0.1 H$. Detta gäller förstås även för andra lager med kantisolering. Faktorn g_i ges av figur 4.7.6, medan L_i är kantisoleringens längd runt lagret.

5.1.2.3 Plant endimensionellt fall

Det plana, endimensionella fallet för ett halvoändligt område illustreras i figur 5.1.4. Temperaturresponser vid en stegändring av randtemperaturen behandlas i avsnitt 5.1.1.3. Värmeflödet vid $x = 0$ erhålles genom derivering av formel 5.1.6. Vi får

$$q_{tr}(t) = \frac{\lambda(T_m - T_o)}{\sqrt{\pi at}} \quad (W/m^2) \quad (5.1.25)$$

Värmeutflödet från en area A blir

$$Q_{tr}(t) = \frac{\lambda(T_m - T_o)A}{\sqrt{\pi at}} \quad (W) \quad (5.1.26)$$

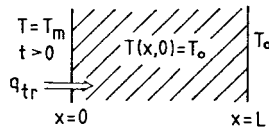
Formlerna 5.1.25-26 är mycket grundläggande eftersom temperaturförloppet i många fall är väsentligen plant, halvoändligt under en första tid. Värme-flödet ges av $\lambda(T_m - T_o)$ dividerat med längden $\sqrt{\pi at}$.

Det ackumulerade värmefflödet blir:

$$E_{tr}(t) = C(T_m - T_o) \sqrt{\frac{4at}{\pi}} \quad (J/m^2) \quad (5.1.27)$$

5.1.2.4 Skiva

Det endimensionella transienta temperaturförloppet för en skiva med tjockleken L illustreras i figur 5.1.6. Denna situation kan vi t.ex. få i ett täckande jordskikt ovanför ett värmelager.



Figur 5.1.6 Transient värmefflöde för en skiva

Värmefflödet per ytenhet av skivan blir då L användes som skalningslängd:

$$q_{tr} = \frac{\lambda(T_m - T_0)}{L} \cdot h_{tr} \left(\frac{at}{L^2} \right) \quad (\text{W/m}^2) \quad (5.1.28)$$

Följande uttryck gäller för h_{tr} med mycket god precision:

$$h_{tr}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \cdot (1 + 2e^{-1/\tau}) & \tau \leq \frac{1}{\pi} \\ 1 + 2e^{-\pi^2\tau} & \tau \geq \frac{1}{\pi} \end{cases} \quad (\tau = at/L^2) \quad (5.1.29)$$

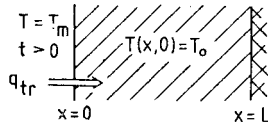
En ännu enklare approximation ges av första termen i de två uttrycken 5.1.29. De svarar emot det halvoändliga fallet enligt föregående avsnitt och det stationära fallet. Brytpunkten mellan de två fallen ges av $\tau = 1/\pi$. Vi har de två approximationerna:

$$q_{tr} \approx \frac{\lambda(T_m - T_0)}{\sqrt{\pi at}} \quad \left(\frac{at}{L^2} < \frac{1}{\pi}, \text{ halvoändlig approximation} \right) \quad (5.1.30)$$

$$q_{tr} \approx \frac{\lambda(T_m - T_0)}{L} \quad \left(\frac{at}{L^2} > \frac{1}{\pi}, \text{ stationär approximation} \right) \quad (5.1.31)$$

Det maximala felet för dessa approximationer är 8.6%.

Det transienta förloppet då skivan är totalisolerad vid den andra sidan $x = L$ är också av intresse. Detta fall illustreras i figur 5.1.7. Denna situation kan vi ha mellan rader av plana plattvärmväxlare i mark.



Figur 5.1.7. Transient värmefflöde för en skiva då den motstående sidan $x = L$ är totalt värmeisolerad.

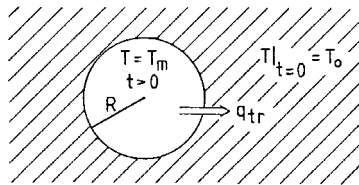
Värmefflödet per ytenhet ges av formel 5.1.28, där nu h_{tr} ges av

$$h_{tr}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} (1 - 2e^{-1/\tau}) & \tau \approx \frac{1}{\pi} \\ 2e^{-\pi^2\tau/4} & \tau \approx \frac{1}{\pi} \end{cases} \quad (5.1.32)$$

Maximalt fel i dessa formler är två promille.

5.1.2.5 Cylinder eller rör

Ett viktigt transient elementarfall är förloppet utanför en cylinder eller ett rör. Radien är R . Processen sker i ett plant tvärsnitt vinkelrät mot cylinderaxeln. Den omgivande marken är oändlig. Det aktuella fallet visas i figur 5.1.8. Detta fall behandlas i referens 102 A.

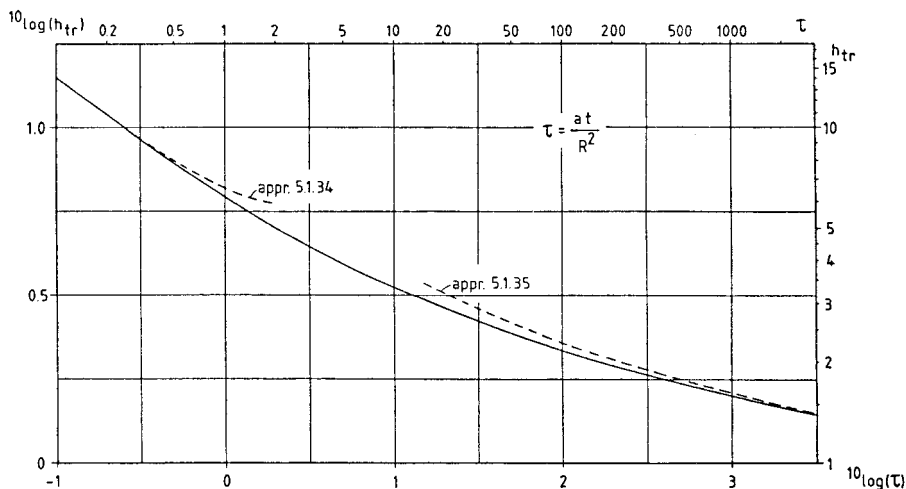


Figur 5.1.8. Transient värmefflöde från cylinder eller rör med radien R .

Värmeflödet per längdenhet längs cylinderaxeln ges av

$$q_{tr} = \lambda(T_m - T_o) \cdot h_{tr}(at/R^2) \quad (\text{W/m}) \quad (5.1.33)$$

Faktorn h_{tr} ges av nedanstående tabell och figur 5.1.9.



Figur 5.1.9. Transient värmeförlustfaktor för cylinder i oändlig omgivning enligt figur 5.1.8. Formel 5.1.33.

För små tider har vi approximationen

$$h_{tr}(\tau) \approx 2\pi \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{\tau}{8} \right\} \quad (5.1.34)$$

$$\left(\tau = \frac{at}{R^2} < 0.5 \right)$$

I det angivna området är felet maximalt 2%.

τ	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	
$h_{tr}(\tau)$	38.51	28.10	18.83	14.13	10.78	7.75	6.18	5.03	3.95	
τ	10	20	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
$h_{tr}(\tau)$	3.35	2.90	2.44	2.17	1.96	1.72	1.58	1.45	1.32	1.23

Tabell. Transient värmeförlustfaktor för cylinder i oändlig omgivning enligt figur 5.1.8. Formel 5.1.33.

För stora tider har vi approximationen:

$$h_{tr}(\tau) \approx \frac{4\pi (\ln \tau - 0.345)}{(\ln \tau + 0.232)^2} \quad \left(\tau = \frac{at}{R^2} > 1500 \right) \quad (5.1.35)$$

Det maximala felet i det givna intervallet är 2.5%.

5.1.2.6. Sfär

Det transienta temperaturförloppet utanför en sfär i en oändlig omgivning behandlas i avsnitt 5.1.4. Det transienta värmeflödet erhålles genom derivation av 5.1.10. Vi har följande formel för det transienta värmeflödet från sfären:

$$Q_{tr} = \lambda(T_m - T_o) \cdot \left\{ 4\pi R + \frac{4\pi R^2}{\sqrt{\pi at}} \right\} \quad (5.1.36)$$

Formeln är instruktiv. Vid oändlig tid ger den första termen det stationära värmeflödet från en sfär enligt formel 4.2.2. Den andra termen i parenteserna är ett uttryck av typen 5.1.26, där arean A sättes till sfärens yta $4\pi R^2$. Vi kan säga att den transienta förlusten från en sfär är lika med stationär förlust plus ett transient bidrag som svarar mot ett plant fall med en area som är lika med sfärens. De två bidragen är lika stora vid tiden

$$\frac{at}{R^2} = \frac{1}{\pi} \quad (5.1.37)$$

Skriven enligt vår dimensionsanalys blir formel 5.1.36:

$$Q_{tr} = \lambda(T_m - T_o) R \cdot 4\pi \left(1 + \frac{R}{\sqrt{\pi at}} \right) \quad (5.1.38)$$

Akkumulerat värmeflöde blir:

$$E_{tr} = \lambda(T_m - T_o) R \cdot 4\pi t \left(1 + \frac{2R}{\sqrt{\pi at}} \right) \quad (5.1.39)$$

Den transienta förlusten under n år är:

$$E_{tr,n} = E_{tr}(nt_y) - E_{tr}((n-1)t_y) \quad (t_y = 1 \text{ år}) \quad (5.1.40)$$

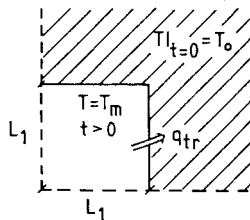
Formlerna 5.1.40 och 5.1.39 ger då:

$$E_{tr,n} = 4\pi\lambda R(T_m - T_o) t_y \cdot \left(1 + \frac{R}{\sqrt{\pi\alpha t_y}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right) \quad (5.1.41)$$

($n = 1, 2, \dots$)

5.1.2.7. Extra värmeförlust vid hörn

Figur 5.1.10 visar den transienta processen utanför ett hörn. Vi ser på ett plant tvärsnitt vinkelrät mot hörnlinjen. Randen ut till ett avstånd L_1 från hörnet betraktas.



Figur 5.1.10. Transient process i ett plant tvärsnitt utanför ett hörn.

Kring hörnet är temperaturprocessen tvådimensionell, medan den väsentligen är endimensionell vinkelrät ut mot randen längre bort från hörnet. Området kring hörnet, där vi har en tvådimensionell process, växer efter hand. Den endimensionella processen vinkelrät mot en rand behandlas i avsnitt 5.1.2.3. Det transienta, endimensionella värmeflödet genom randen (W/m^2) ges av formel 5.1.25.

Det totala transienta värmeflödet från hörnet kan skrivas:

$$q_{tr} = \lambda(T_m - T_o) \cdot \left(\frac{2L_1}{\sqrt{\pi\alpha t}} + \alpha_e\right) \quad (5.1.42)$$

Den första termen i parentesen ger det endimensionella, transienta värme-flödet. Längden på randen är $2L_1$. Termen α_e (edge) ger den extra värmeförlusten beroende på hörnet.

I referens 6, där den transienta processen kring ett hörn analyseras, visas att α_e är konstant för små tider, då störningen från hörnet ej har nått ut sträckan L_1 längs randen. Vi har då

$$\alpha_e = \frac{16}{9\sqrt{3}} - \frac{4}{3\pi} \approx 0.602 \quad (5.1.43)$$

Som krav för att 5.1.43 skall gälla med god precision har vi

$$\frac{\sqrt{at}}{L_1} < \frac{1}{2} \quad (5.1.44)$$

Vid gränsen $\sqrt{at} = L_1/2$ är det endimensionella bidraget till 5.1.42 fyra gånger större än bidraget från hörnet. Vi kan därför utsträcka giltigheten av formel 5.1.42-43 till att gälla då $\sqrt{at} < L_1$.

Låt oss nu se på värmeförlusten från en yta som innehåller en kantlinje. Ytan ges av två plana delar som möter varandra under rät vinkel. De plana ytornas totala area är A och kantlinjens längd L_e .

Den transienta värmeförlusten under en första tid blir då:

$$Q_{tr} = \lambda(T_m - T_0) \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{\pi at}} + 0.6 L_e \right) \quad (5.1.45')$$

För formelns giltighet har vi kravet:

$$\frac{\sqrt{at}}{L_1} < 1 \quad (5.1.45'')$$

Längden L_1 definieras i enlighet med figur 5.1.10.

5.1.2.8. Värmelager på stort djup

Vi skall i detta avsnitt behandla den transienta värmeförlusten från ett värmelager, som ligger så djupt ner att effekten av markytan kan försummas.

Vi skall först behandla processen för små tider. Formel 5.1.45 som tar hänsyn till den extra värmeförlusten vid kanter kan då användas.

För ett parallelepipedformat lager med kantlängderna L , B och H blir arean A och kantlängden L_e :

$$\begin{aligned} A &= 2(LB + LH + BH) \\ L_e &= 4(L + B + H) \end{aligned} \quad (5.1.46)$$

Det transienta värmeflödet ges av formel 5.1.45. Formels gäller vid tider som uppfyller:

$$\frac{\sqrt{at}}{L_1} < \frac{1}{2} \quad L_1 = \frac{1}{2} \min(L, B, H) \quad (5.1.47)$$

Vårt nästa fall är ett cylinderformat värmelager med höjden H och radien R . Vi har två plana cirkulära ytor med en area A . Mellan dessa och mantelytan har vi två cirkulära kantlinjer med längden L_e :

$$A = 2 \cdot \pi R^2 \quad L_e = 2 \cdot 2\pi R \quad (5.1.48)$$

För dessa delar kan vi använda formel 5.1.45. Värmeflödet ut från mantelytan ges av formel 5.1.33. Det skall multipliceras med höjden H . Under en första tid får vi följande transienta flöde från cylindern:

$$Q_{tr} = \lambda(T_m - T_o) \cdot \left\{ \frac{A}{\sqrt{\pi at}} + 0.6L_e + H h_{tr}^{cyl}(at/R^2) \right\} \quad (5.1.49)$$

Här ges A och L_e av formel 5.1.48 och h_{tr}^{cyl} av figur 5.1.9 och formel 5.1.34.

Det transienta värmeflödet från en sfär med radien R ges av formel 5.1.38:

$$Q_{tr} = \lambda(T_m - T_o) 4\pi R \left(1 + \frac{R}{\sqrt{\pi at}} \right) \quad (5.1.50)$$

Denna formel gäller både i början och för längre tider så länge som effekten av markytan kan försummas.

För större tider kan det vara rimligt att approximera värmelagret med en sfär. Låt V vara lagrets volym. Vi förutsätter att lagrets form ej avviker starkt från en sfär. Radien R_V för en sfär med samma volym blir:

$$R_V = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \quad (5.1.51)$$

Det transienta värmeflödet från värmelagret blir då approximativt vid större tider:

$$Q_{tr} \approx \lambda(T_m - T_o) 4\pi R_V(1 + R_V/\sqrt{\pi a t}) \quad (5.1.52)$$

För ett parallelepipedformat lager har vi

$$R_V = \sqrt[3]{\frac{3LBH}{4\pi}} \quad (5.1.53)$$

För ett cylinderformat lager gäller:

$$R_V = \sqrt[3]{\frac{3HR^2}{4}} \quad (5.1.54)$$

För att kunna approximera cylinder och parallelepiped med en sfär får formen ej vara extrem. Det är rimligt att kräva att $2R/H$, B/L och H/L alla ligger mellan $1/5$ och 5 .

Sammanfattningsvis har vi följande uttryck för den transienta värmeförlusten för ett värmelager som är ostört av markytan.

Parallelepiped:	Formlerna 5.1.46 och 5.1.45	(små tider)	(5.1.55)
	Formlerna 5.1.52-53	(stora tider)	

Cylinder:	Formlerna 5.1.48-49	(små tider)	(5.1.56)
	Formlerna 5.1.52,54	(stora tider)	

Sfär:	Formel 5.1.50	(5.1.57)
-------	---------------	----------

Värmelager av annan form:	Formlerna 5.1.51-52	(stora tider)	(5.1.58)
---------------------------	---------------------	---------------	----------

För cylinder och parallelepiped ges två uttryck. Vid en viss tidpunkt blir dessa lika. Formlerna för små tider väljes före denna tid, medan formlerna för stora tider sedan tages. Av de två alternativen tar man då hela tiden det som ger störst värmefflöde.

Exempel 1. Låt oss se på den transienta förlusten från en kub med kantlängden L . Formlerna 5.1.45-46 ger för små tider:

$$Q_{tr}^1 = \lambda(T_m - T_o) \left(\frac{6L^2}{\sqrt{\pi at}} + 12L \cdot 0.6 \right)$$

Approximeras kuben med en sfär med samma volym har vi

$$L^3 = \frac{4\pi}{3} R_V^3$$

Värmeförlusten Q_{tr}^2 ges av formel 5.1.52.

Kvoten mellan dessa två approximationer blir:

$$f = \frac{Q_{tr}^1}{Q_{tr}^2} = \frac{0.924 \sqrt{at/L} + 0.434}{\sqrt{at/L} + 0.350}$$

Vi får nedanstående tabell

$\sqrt{at/L}$	0	0.25	0.75	1.0	1.5	2	5	∞
f	1.24	1.11	1.02	1.01	0.98	0.97	0.94	0.924

Vi ser att kvoten hela tiden ligger relativt nära 1. För kuben får vi bryttiden $\sqrt{at/L} \approx 1$.

Den transienta förlusten ges av Q_{tr}^1 då $\sqrt{at/L} < 1$ och av Q_{tr}^2 då $\sqrt{at/L} > 1$.

Exempel 2. Vi tar en cylinder med 10 meters radie och 20 meters höjd. Vi tar följande data

$$R = 10 \text{ m} \quad H = 20 \text{ m}$$

$$\lambda(T_m - T_o) = 50 \text{ W/m} \quad a = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Formlerna 5.1.48-49 ger den transienta förlusten för små tider, medan den ges av 5.1.52,54 för stora tider.

Formel 5.1.48-49 ger:

$$at/R^2 = t/t_1 \quad t_1 = R^2/a = 3.17 \text{ år}$$

$$Q_{tr} \approx 50 \left\{ \frac{2\pi \cdot 10}{\sqrt{\pi t/t_1}} + 0.6 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot 10 + 20h_{tr}^{cy}(t/t_1) \right\}$$

Detta kan skrivas:

$$Q_{tr} \approx \frac{1.77}{\sqrt{t/t_1}} + 3.77 + h_{tr}^{cy}(t/t_1) \quad (\text{kW})$$

Här ges h_{tr}^{cy} av figur 5.1.9. Vi får följande värden:

t/t_1	0.01	0.05	0.1	0.5	0.6	0.7	0.8
$Q_{tr}(\text{kW})$	60.0	30.5	23.5	14.0	13.4	12.8	12.4
t/t_1	1.0	1.2					
$Q_{tr}(\text{kW})$	11.7	11.2					

Formlerna 5.1.52,54 där cylindern approximeras av en sfär ger

$$R_V = 11.45 \text{ m}$$

$$Q_{tr} \approx 50 \cdot 4\pi \cdot 11.45 \left(1 + \frac{1.145}{\sqrt{\pi t/t_1}} \right) \quad \text{W}$$

eller

$$Q_{tr} \approx 7.2 \left(1 + \frac{0.646}{\sqrt{t/t_1}} \right) \quad \text{kW}$$

Detta ger följande värden

t/t_1	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.2	1.5
$Q_{tr}(\text{kW})$	13.8	13.2	12.8	12.4	11.9	11.4	11.0
t/t_1	1.8	2.0	2.5	5	10	25	∞
$Q_{tr}(\text{kW})$	10.7	10.5	10.1	9.3	8.7	8.1	7.2

Värdena enligt denna tabell är större än enligt den tidigare då $t/t_1 > 0.8$.

Vi får bryttiden

$$t = 0.8 t_1 = 2.5 \text{ år}$$

Före denna tid gäller den första approximationen enligt formlerna 5.1.48-49. Efter denna tid gäller approximationen med en sfär enligt formlerna 5.1.52,54.

5.1.2.9 Värmelager på måttligt djup

Den transienta värmeförlusten från ett lager på måttligt djup kan uppskattas på följande sätt. Lagrets mittpunkt ligger på djupet D_m . Vi förutsätter att lagrets översta punkt ej ligger alltför nära markytan.

För korta tider påverkar markytan ej det transienta värmeflödet. Formlerna enligt föregående avsnitt 5.1.2.8 kan användas. Låt $Q_{tr}(D_m = \infty)$ vara denna transienta förlust. För korta tider har vi approximationen:

$$Q_{tr} \approx Q_{tr}(D_m = \infty) \quad (t \text{ litet}) \quad (5.1.59)$$

Efter lång tid blir den transienta värmeförlusten lika med den stationära, Q_m . Denna behandlas i kapitel 4. Vi har då approximationen:

$$Q_{tr} \approx Q_m \quad (t \text{ stort}) \quad (5.1.60)$$

Vid en viss bryttid t_b blir uttrycken 5.1.59 och 5.1.60 lika. Före denna tid väljes 5.1.59 och efter denna 5.1.60. Vi tar då hela tiden det större av de två uttrycken. Vi har således för ett värmelager på måttligt djup:

$$Q_{tr} \approx \max \left\{ Q_{tr}(D_m = \infty), Q_m \right\} \quad (5.1.61)$$

5.1.2.10 Sfär på måttligt djup

Det sfäriska värmelagret har radien R . Dess mittpunkt ligger på djupet D_m . Se figur 4.2.1.

Den transienta värmeförlusten ges av approximationerna 5.1.59 och 5.1.60. Formeln för oändligt djup ($D_m = \infty$) ges av 5.1.38. Den stationära värmeförlusten Q_m för en sfär på djupet D_m ges av formel 4.2.5. Dessa är lika vid en bryttid t_b :

$$1 + \frac{R}{\sqrt{\pi a t_b}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{2D_m}} \quad (5.1.62)$$

eller

$$t_b = \frac{(2D_m - R)^2}{\pi a}$$

För den transienta värmeförlusten från en sfär på djupet D_m har vi då följande approximativa uttryck:

$$Q_{tr} \approx \lambda(T_m - T_0) 4\pi R \left(1 + \frac{R}{\sqrt{\pi a t}}\right) \quad 0 < t < t_b \quad (5.1.63)$$

$$Q_{tr} \approx \lambda(T_m - T_0) \frac{4\pi R}{1 - \frac{R}{2D_m}} \quad t > t_b$$

Exempel. Låt oss ta en sfär med radien 10 m. Mittpunkten ligger på 20 meters djup. Vi tar följande data:

$$R = 10 \text{ m} \quad D_m = 20 \text{ m} \quad T_m - T_0 = 25^\circ\text{C}$$

$$a = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \lambda = 2.0 \text{ W/mK}$$

Bryttiden t_b enligt formel 5.1.62 blir:

$$t_b = \frac{(2 \cdot 20 - 10)^2}{\pi \cdot 10^{-6}} \text{ s} = 9.1 \text{ år}$$

Formel 5.1.63 ger:

$$0 < t < 9.1 \text{ år: } Q_{tr} \approx 6.3 \left(1 + \sqrt{t_1/t}\right) \text{ kW}$$

$$t_1 = R^2/(\pi a) = 1.0 \text{ år}$$

$$t > 9.1 \text{ år: } Q_{tr} \approx 8.4 \text{ kW}$$

5.1.2.11 Cylinderformat värmelager under marknivå

Det cylinderformade värmelagret har radien R och höjden H . Dess övre yta ligger på djupet D under markytan. Se figur 4.2.1.

Den transienta värmeförlusten ges av approximationerna 5.1.59 och 5.1.60. För oändligt djup ($D_m = D + H/2 = \infty$) har vi de två alternativen enligt formel 5.1.56. Den stationära värmeförlusten Q_m ges av formel 4.3.1 och tabell 4.3.1. Bryttiden t_b definieras av att de två approximationerna ges samma värde.

Före tiden t_b ges då den transienta värmeförlusten från cylindern av formel 5.1.56. Efter denna tid gäller approximativt formel 4.3.1.

Exempel. Låt oss ta ett cylinderformat värmelager med radien 10 m och höjden 20 m. Dess överyta ligger 10 m under marknivån.

Vi har följande data:

$$R = 10 \text{ m} \quad H = 20 \text{ m} \quad D = 10 \text{ m}$$

$$\lambda(T_m - T_o) = 50 \text{ W/m} \quad a = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Samma cylinder på stort djup har behandlats i exempel 2 i avsnitt 5.1.2.8.

Före en bryttid t_b gäller formel 5.1.56, dvs. 5.1.48-49 vid korta tider och 5.1.52,54 vid längre tider. Resultatet i exempel 2 i avsnitt 5.1.2.8 gäller direkt.

Efter bryttiden har vi den stationära värmeförlusten enligt formel 4.3.1 och tabell 4.3.1. Vi får:

$$h(10/10, 20/10) = 21$$

$$Q_{tr} \approx Q_m = 50 \cdot 10 \cdot 21 = 10.5 \text{ kW}$$

Enligt den andra tabellen i exempel 2 i avsnitt 5.1.2.8 får vi bryttiden vid $t/t_1 = 2.0$. Vi har således:

$$t_b = 2 t_1 = 6.3 \text{ år}$$

Sammanfattningsvis har vi

$0 \leq t \leq 2.5$ år: Q_{tr} enligt första tabellen i exempel 2 i avsnitt 5.1.2.8.

$2.5 \leq t \leq 6.3$ år: Q_{tr} enligt andra tabellen i exempel 2 i avsnitt 5.1.2.8.

$t \geq 6.3$ år: $Q_{tr} \approx Q_m = 10.5 \text{ kW}$

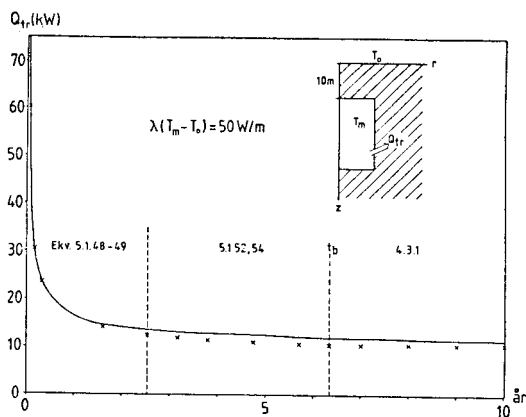
Några värden ges i nedanstående tabell ($t_1 = 3.17$ år).

t/t_1	0.01	0.05	0.1	0.5	0.8	
$Q_{tr}(\text{kW})$	60.0	30.5	23.5	14.0	12.4	
t/t_1	1.0	1.2	1.5	2	2.5	5
$Q_{tr}(\text{kW})$	11.9	11.4	11.0	10.5	10.5	10.5

Problemet har även lösts direkt med en numerisk metod. Denna beräkning gav följande resultat:

t/t_1	0.01	0.05	0.1	0.5	0.8	
$Q_{tr}(\text{kW})$	59.0	30.3	23.6	14.8	13.5	
t/t_1	1.0	1.2	1.5	2	2.5	5
$Q_{tr}(\text{kW})$	13.1	12.8	12.5	12.0	11.8	11.4

I figur 5.1.11 kan resultaten från de två beräkningsmetoderna jämföras.



Figur 5.1.11. Den transienta värmeförlusten Q_{tr} för cylinder på måttligt djup. Jämförelse mellan numerisk lösning (heldragen linje) och approximativa formler (kryss). De streckade linjerna avgränsar de intervall inom vilka de olika formlerna är giltiga.

Överensstämmelsen mellan de olika metoderna är tillfredsställande. Det maximala felet är 14% vid $t/t_1 = 2.0$.

5.1.2.12 Parallelepipedformat värmelager under marknivå.

Det parallelepipedformade värmelagret har kantlängderna L , B och H . Dess mittpunkt ligger på djupet D_m .

Den transienta värmeförlusten ges av approximationerna 5.1.59 och 5.1.60. Vid en bryttid t_b är dessa lika. Den första approximationen gäller då $t \leq t_b$ och den andra då $t \geq t_b$.

Approximationen enligt 5.1.59 ges av formlerna 5.1.55, dvs. av 5.1.45-46 för små tider och av 5.1.52-53 för större tider.

Approximationen 5.1.60 efter bryttiden innebär att det transienta värme-flödet approximeras med det stationära värdet Q_m . Formler för detta ges i avsnitt 4.6

5.1.3 Översikt över transienta värmeförlustformler

I detta avsnitt ges en översikt över de formler, diagram och tabeller för transienta värmeförluster som har givits i avsnitt 5.1.2.

Figur 5.1.1 illustrerar förutsättningarna för det renodlade transienta värmeströmningsproblemet. Värmelagrets yta ges vid tiden $t=0$ en övertemperatur $T_m - T_o$ relativt markytan och den ostörda marken. Det transienta värmeflödet från lagret betecknas $Q_{tr}(t)$ (W). Yttemperaturen T_m är ett lämpligt valt medelvärde av lagerytans temperatur under lagringscykeln.

I tvådimensionella och endimensionella fall betecknas värmeflödet $q_{tr}(t)$ (W/m, W/m²). Integrerad transient värmeförlust betecknas $E_{tr}(t)$.

Översikten över transienta värmeförlustformler ges av tabell 5.1.3.1.

<u>Typ, form</u>	<u>Avsnitt</u>	<u>Formler</u>
Plan yta	5.1.2.3	5.1.26
Skiva. $T=T_o$ vid $x=L$	5.1.2.4	5.1.28-31
Skiva. Isolerad vid $x=L$	5.1.2.4	5.1.28, 5.1.32
Cylinder eller rör	5.1.2.5	5.1.33, figur 5.19
Sfär	5.1.2.6	5.1.36
Cylinderformat lager med överytan vid marknivån	5.1.2.2	5.1.22, figur 5.1.5, 5.1.24
Extra värmeförlust vid kant	5.1.2.7	5.1.45
Cylinderformat lager på stort djup	5.1.2.8	5.1.56
Parallelepipedformat lager på stort djup	5.1.2.8	5.1.55
Sfärisk approximation av lager på stort djup	5.1.2.8	5.1.51-52
Formler för värmelager på måttligt djup	5.1.2.9	5.1.61
Sfär på måttligt djup	5.1.2.10	5.1.63
Cylinderformat värmelager under marknivån	5.1.2.11	
Parallelepipedformat värmelager under marknivån	5.1.2.12	

Tabell 5.1.3.1. Översikt över formler för renodlad transient värmeförlust.

5.2 Periodiska temperaturförlopp

Genom superposition kan det totala temperaturförloppet uppdelas i enklare delprocesser. Se avsnittet om superposition i kapitel 3. En av de grundläggande delprocesserna är periodiska förlopp. I detta avsnitt behandlas olika grundfall. De givna formelerna kommer att utnyttjas i de följande kapitlen.

Det aktuella delförloppet är en rent periodisk process med periodtiden t_0 . Temperaturen i varje inre punkt och vid ränderna varierar med denna periodtid. Genom en Fourierutveckling kan det periodiska förloppet uppdelas i rent harmoniska förlopp, dvs. cosinus- och sinusvariation i tiden. Dessa komponenter i Fourierutvecklingen har periodtiderna $t_0/1$, $t_0/2$, $t_0/3$ osv. Det räcker därför att behandla ett rent harmoniskt förlopp med en given periodtid t_0 . Övertoner kan sedan överlagras enligt samma formler med periodtider t_0/n .

Temperaturfältet för några grundläggande fall ges i avsnitt 5.2.2. I det följande avsnittet ges samband mellan temperatur och värmeflöde vid randen.

5.2.1 Komplexa temperaturer

Det är praktiskt att använda en komplex notation vid analys av periodiska förlopp. Temperaturer och värmeflöden är då komplexvärda storheter. Reellvärda lösningar ges av den komplexa lösningens realdel och imaginärdel.

I ett allmänt tredimensionellt fall har vi det komplexvärda temperaturfältet:

$$T(x,y,z,t) = \hat{T}(x,y,z)e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.1.1)$$

Här är $i = \sqrt{-1}$ den imaginära enheten. Tidsfaktorn innehåller både cosinus- och sinusvariation i tiden:

$$e^{2\pi it/t_0} = \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \quad (5.2.1.2)$$

Rumsvariationen ges av den komplexvärda storheten $\hat{T}(x,y,z)$. Tecknet $\hat{}$ används för att markera att en storhet är komplexvärd. Storheten \hat{T} har beloppet $|\hat{T}|$ och fasen eller argumentet $\arg(\hat{T})$:

$$\hat{T} = |\hat{T}| \cdot e^{i \cdot \arg(\hat{T})} \quad (5.2.1.3)$$

Realdelen av ekvation 5.2.1.1 ger en periodisk lösning som varierar med cosinus i tiden:

$$\text{Re}(T) = |\hat{T}| \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \arg(\hat{T})\right) \quad (5.2.1.4)$$

Imaginärdelen ger en sinusvariation:

$$\text{Im}(T) = |\hat{T}| \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \arg(\hat{T})\right) \quad (5.2.1.5)$$

De reella lösningar som utnyttjas ges av 5.2.1.4 eller 5.2.1.5. Vi kan även ta en kombination av dem.

Det komplexvärda värmeflödet ges av

$$-\lambda \text{ grad}(\hat{T}) e^{2\pi i t/t_0} \quad (5.2.1.6)$$

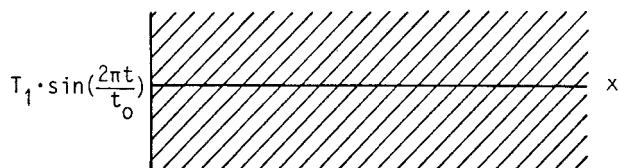
Reella värmeflöden erhålles av realdel och imaginärdel.

I komplex notation ges tidsfaktorn alltid av $e^{2\pi i t/t_0}$. För att förenkla formlierna är denna faktor ofta ej medtagen i det följande. Även temperaturen \hat{T} anges utan denna tidsfaktor.

5.2.2 Temperaturfält

5.2.2.1 Plant, halvoändligt fall. Inträngningsdjup d_0 .

Det enklaste periodiska förloppet ges av det endimensionella, halvoändliga fallet. Vid randen $x = 0$ varierar temperaturen sinusformat. Se figur 5.2.1.



Figur 5.2.1. Endimensionellt, halvoändligt fall.

Detta fall får man utanför en plan yta vars temperatur varierar sinusformat i tiden, om marken sträcker sig tillräckligt långt ut i normalriktningen utan störningar.

Temperaturen ges enligt referens 102 C av:

$$T(x,t) = T_1 \cdot e^{-x/d_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} - \frac{x}{d_0}\right) \quad (5.2.2.1)$$

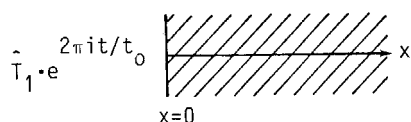
Längden d_0 är

$$d_0 = \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} \quad (5.2.2.2)$$

Vi skall också ange lösningen i komplexvärd form. Den komplexa temperaturen vid randen $x = 0$ är:

$$T(0,t) = \hat{T}_1 \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.2.3)$$

Här är \hat{T}_1 ett godtyckligt komplext tal. Detta komplexa fall illustreras i figur 5.2.2.



Figur 5.2.2. Endimensionellt, halvoändligt fall med komplex randtemperatur enligt ekvation 5.2.2.3.

Den komplexvärda lösningen är enligt referens 102 C:

$$T(x,t) = \hat{T}_1 \cdot e^{-(1+i)x/d_0} \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.2.4)$$

De reella lösningarna ges av real- och imaginärdel. Den tidigare lösningen 5.2.2.1 erhålles om vi väljer $\hat{T}_1 = T_1$ och tar imaginärdelen:

$$T(x,t) = \text{Im} \left\{ T_1 e^{-x/d_0} \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - x/d_0)} \right\} \quad (5.2.2.5)$$

Beloppet av temperaturen 5.2.2.4 blir:

$$|T| = |\hat{T}_1| \cdot e^{-x/d_0} \quad (5.2.2.6)$$

Den periodiskt varierande temperaturen dämpas således med exponentialfaktorn e^{-x/d_0} . Vid randen $x = 0$ är amplituden $|\hat{T}_1|$. Dämpningen sker med längdskalan d_0 . Denna längd blir ett mått på hur den periodiska svängningen vid ytan dämpas inåt. Vi skall kalla d_0 inträngningsdjupet för det periodiska förloppet. Dämpningsfaktorn för olika djup x blir:

$x = 0 : e^{-0} = 1$	$x = d_0/2 : e^{-1/2} = 0.61$
$x = d_0 : e^{-1} = 0.37$	$x = 2d_0 : e^{-2} = 0.14$
$x = 3d_0 : e^{-3} = 0.05$	$x = 4d_0 : e^{-4} = 0.02$
$x = 5d_0 : e^{-5} = 0.007$	

På djupet $x = d_0$ har således amplituden minskat till $0.37 \cdot |\hat{T}_1|$. Vid $x = 3d_0$ återstår 5% av randens amplitud.

Temperatursvängningens fas ges av faktorn

$$e^{i(2\pi t/t_0 + \arg(\hat{T}_1) - x/d_0)} \quad (5.2.2.7)$$

Termen $-x/d_0$ ger en ökande fASFÖRDRÖJNING inåt. Vid $x/d_0 = \pi$ ligger svängningen i motfas relativt yttemperaturen. Amplituden är här kraftigt dämpad: $e^{-\pi} = 0.05$.

Inträngningsdjupet d_0 beror på t_0 och a . Temperaturledningstalet a ligger för olika jord- och bergarter runt värdet $a = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Tabell 5.2.1

anger inträngningsdjupet d_0 för detta värde på a samt för ett högt och ett lågt värde. Tabellen ger d_0 för periodtider från en sekund till fem år.

		1 sek	1 min	1 tim	1 dygn	1 vecka	1 mån	1 år	5 år
a (m ² /s)	$1.6 \cdot 10^{-6}$	0.0007	0.006	0.043	0.21	0.55	1.16	4.0	9.0
	$1.0 \cdot 10^{-6}$	0.0006	0.004	0.034	0.17	0.44	0.91	3.2	7.1
	$0.4 \cdot 10^{-6}$	0.0004	0.003	0.021	0.10	0.28	0.58	2.0	4.5

Tabell 5.2.1. Inträngningsdjup $d_0 = \sqrt{at_0/\pi}$ (m) för olika periodtider t_0 .

5.2.2.2 Periodiskt förlopp utanför rör eller cylinderyta

Röret eller cylindern har radien R . För en plastslang i mark är radien R cirka 2 cm. För ett cylinderformat värmelager i mark är radier R upp till 50 m aktuella. Vid randen $r = R$ råder en periodisk temperaturvariation. Här behandlas det rent radiella, periodiska temperaturförloppet $T(r,t)$ för $r \geq R$.

Vid randen $r = R$ råder med komplex notation temperaturen:

$$T(R,t) = \hat{T}_1 \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.2.8)$$

Den analytiska lösningen uttrycks med hjälp av vissa Besselfunktioner med komplext argument, s.k. Kelvinfunktioner. Se kapitel 7 i referens 9, där dessa lösningar behandlas. Lösningen är

$$T(r,t) = \hat{T}_1 \cdot \frac{N_0(r')}{N_0(R')} e^{i(2\pi t/t_0 + \phi_0(r') - \phi_0(R'))} \quad (5.2.2.9)$$

där

$$d_0 = \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} \quad r' = \frac{r\sqrt{2}}{d_0} \quad R' = \frac{R\sqrt{2}}{d_0} \quad (5.2.2.10)$$

Funktionerna N_0 och ϕ_0 är amplitud och fas för en Kelvinfunktion av nollte ordningen.

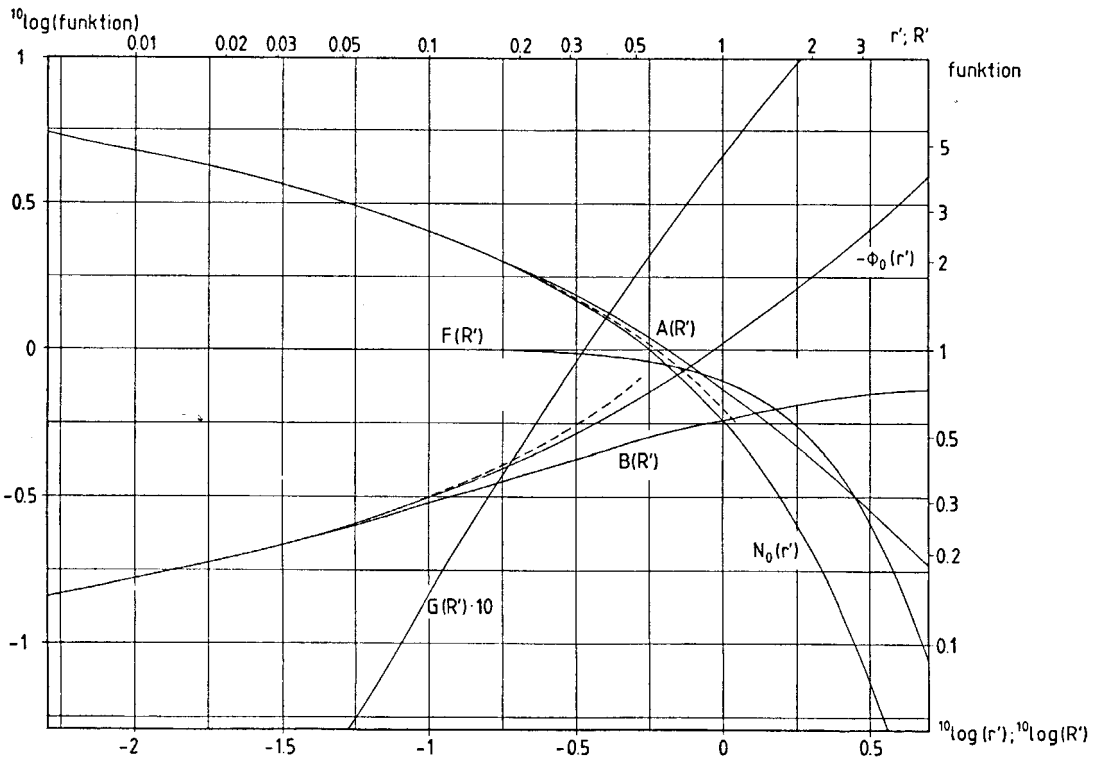
För ett reellvärt randvillkor:

$$T(R,t) = T_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \quad (5.2.2.11)$$

blir då lösningen

$$T(r,t) = T_1 \cdot \frac{N_0(r')}{N_0(R')} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \phi_0(r') - \phi_0(R')\right) \quad (5.2.2.12)$$

Funktionerna N_0 och ϕ_0 visas i figur 5.2.3. De ges också i tabell 5.2.2.



Figur 5.2.3. Funktioner för periodiskt förlopp utanför rör eller cylinderyta. De streckade linjerna ger approximationer enligt 5.2.2.13.

$r'; R'$	$N_0(r')$	$-\phi_0(r')$	$F(R')$	$G(R')$	$A(R')$	$B(R')$	$1/A(R')$
0.001	7.067	0.111	1	0	7.067	0.111	0.142
0.002	6.379	0.123	1	0	6.379	0.123	0.157
0.003	5.977	0.132	1	0	5.977	0.132	0.167
0.004	5.692	0.138	1	0	5.692	0.138	0.176
0.005	5.471	0.144	1	0	5.471	0.144	0.183
0.006	5.291	0.149	1	0	5.291	0.149	0.189
0.007	5.138	0.153	1	0	5.138	0.153	0.195
0.008	5.006	0.158	1	0	5.006	0.158	0.200
0.009	4.890	0.161	1	0	4.890	0.161	0.204
0.01	4.786	0.165	1	0.000	4.786	0.165	0.209
0.02	4.104	0.193	1	0.001	4.104	0.192	0.244
0.03	3.707	0.214	1.000	0.002	3.707	0.212	0.270
0.04	3.426	0.231	0.999	0.003	3.429	0.228	0.292
0.05	3.209	0.247	0.999	0.005	3.212	0.242	0.311
0.06	3.033	0.261	0.999	0.006	3.036	0.255	0.329
0.07	2.884	0.276	0.998	0.008	2.890	0.268	0.346
0.08	2.756	0.289	0.998	0.010	2.762	0.279	0.362
0.09	2.643	0.302	0.997	0.012	2.651	0.290	0.377
0.1	2.542	0.311	0.996	0.015	2.552	0.296	0.392
0.2	1.892	0.412	0.986	0.045	1.919	0.367	0.521
0.3	1.525	0.501	0.971	0.086	1.571	0.415	0.637
0.4	1.275	0.585	0.949	0.131	1.344	0.454	0.744
0.5	1.088	0.665	0.925	0.181	1.176	0.484	0.850
0.6	0.942	0.744	0.899	0.235	1.048	0.509	0.954
0.7	0.823	0.820	0.870	0.291	0.946	0.529	1.057
0.8	0.725	0.896	0.840	0.349	0.863	0.547	1.16'
0.9	0.643	0.971	0.810	0.408	0.794	0.563	1.26
1	0.572	1.046	0.779	0.469	0.734	0.577	1.36
2	0.207	1.774	0.489	1.119	0.423	0.655	2.36
3	0.084	2.490	0.284	1.800	0.296	0.690	3.38
4	0.036	3.202	0.158	2.492	0.228	0.710	4.39
5	0.0161	3.913	0.086	3.189	0.187	0.724	5.35
10	0.00034	7.463	0.0035	6.712	0.0965	0.751	10.36
20	0.00000	14.53	0.0000	13.77	0.0491	0.768	20.35
50	0.00000	35.74	0.0000	34.97	0.0199	0.778	50.35

Tabell 5.2.2. Funktioner för periodiskt förlopp utanför rör eller cylinderyta.

För små argument gäller följande approximativa uttryck:

$$\begin{aligned}
 N_0(r') &\approx \sqrt{(\ln(2/r') - \gamma)^2 + \pi^2/16} \\
 \phi_0(r') &\approx -\arctan\left(\frac{\pi/4}{\ln(2/r') - \gamma}\right)
 \end{aligned}
 \quad \begin{array}{l} (r' < 0.1) \\ \gamma = 0.5772 \end{array}
 \quad (5.2.2.13)$$

Felet för $r' < 0.1$ är mindre än 1%. Dessa approximationer ges av de streckade kurvorna i figur 5.2.3. För stora argument gäller:

$$N_0(r') \approx \sqrt{\frac{\pi}{2r'}} \cdot e^{-r'/\sqrt{2}}$$

$$\phi_0(r') \approx -\left(\frac{r'}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (r' > 7) \quad (5.2.2.14)$$

Felet för $r' > 7$ är mindre än 1%.

Temperatursvängningens amplitud dämpas med ökande radie r enligt faktorn:

$$\frac{N_0(r')}{N_0(R')} \quad (5.2.2.15)$$

För små r' och R' kan approximationerna 5.2.2.13 användas. Dämpningen får en relativt komplicerad form. Detta fall uppträder för rör och brunnar, där radien R blir liten jämfört med inträngningsdjupet d_0 . För cylindriska lager däremot är radien R normalt stor jämfört med penetrationsdjupet d_0 . Approximationen 5.2.2.14 kan då användas. Temperaturen enligt 5.2.2.9 blir då:

$$T(r,t) \approx \hat{T}_1 \cdot \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{-(r-R)/d_0} \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - (r-R)/d_0)} \quad (R \geq 5d_0) \quad (5.2.2.16)$$

Maximalt fel för $r \geq R \geq 5d_0$ är 1%. Formeln ovan har samma form som det plana fallet med $x = r - R$. Enda skillnaden är att faktorn $\sqrt{R/r}$ tillkommit.

Amplituddämpningen enligt formel 5.2.2.15 är:

$$\frac{N_0(r')}{N_0(R')} \approx \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{-(r-R)/d_0} \quad (R > d_0) \quad (5.2.2.17)$$

Det visar sig att denna formel ger god noggrannhet i ett större intervall. Maximalt fel för $r \geq R > d_0$ är bara 4%.

5.2.2.3 Periodiskt förlopp utanför sfär

Givet en sfär med radien $r = R$. I området utanför den sfäriska ytan, $r \geq R$, råder ett rent radiellt, periodiskt temperaturförlopp. Vid randen $r = R$ är den komplexvärda temperaturen föreskriven:

$$T(R,t) = \hat{T}_1 \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.2.18)$$

Lösningen till detta problem är

$$T(r,t) = \hat{T}_1 \cdot \frac{R}{r} e^{-(1+i)(r-R)/d_0} \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.2.19)$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq R)$$

I reell form med randvillkoret

$$T(R,t) = T_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \quad (5.2.2.20)$$

blir lösningen

$$T(r,t) = T_1 \cdot \frac{R}{r} e^{-(r-R)/d_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} - \frac{r-R}{d_0}\right) \quad (5.2.2.21)$$

$$(r \geq R)$$

Temperaturamplituden dämpas med ökande radie r enligt

$$\frac{R}{r} e^{-(r-R)/d_0} \quad (r \geq R) \quad (5.2.2.22)$$

Fasfördröjningen ges av $(r-R)/d_0$.

5.2.2.4 Jämförelse mellan plan, cylindrisk och sfärisk yta.

Det är intressant att jämföra de periodiska temperaturförloppen utanför plan, cylindrisk och sfärisk yta. Den komplexa temperaturen kan i de tre fallen skrivas

$$T(s,t) = \hat{T}(s) \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.2.23)$$

I det plana fallet ger formel 5.2.2.4:

$$\hat{T}(x) = \hat{T}_1 \cdot e^{-(1+i)x/d_0}, \quad x \geq 0 \quad (5.2.2.24)$$

I det sfäriska fallet ger formel 5.2.2.19:

$$\hat{T}(r) = \hat{T}_1 \cdot \frac{R}{r} e^{-(1+i)(r-R)/d_0}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq R \quad (5.2.2.25)$$

Det cylindriska fallet är mer komplicerat. Den allmänna lösningen ges av 5.2.2.12. I fall då R/d_0 ej är litet gäller en enkel approximation enligt 5.2.2.16:

$$\hat{T}(r) \approx \hat{T}_1 \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-(1+i)(r-R)/d_0} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq R \quad (5.2.2.26)$$

$$(R > 5d_0, \quad R > d_0)$$

Maximalt fel för approximationen är 1% för $R > 5d_0$. Formeln kan dock användas ända ner till $R > d_0$. Felet i amplitud är då maximalt 4%.

De tre uttrycken 5.2.2.24-26 innehåller samma exponentiella dämpningsfaktor e^{-s/d_0} , där s är avståndet till ytan och d_0 inträngningsdjupet. I det cylindriska fallet tillkommer faktorn $\sqrt{R/r}$ och i det sfäriska faktorn R/r . Fäsfördröjningen ges i alla tre fallen av s/d_0 .

5.2.3 Samband mellan temperatur och värmeflöde vid randen

I detta avsnitt används genomgående komplex notation. Den komplexvärda randtemperaturen är

$$\hat{T}_1 \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (5.2.3.1)$$

Beloppet av \hat{T}_1 ger temperatursvängningens amplitud. Fasen kan väljas godtyckligt. För det komplexvärda värmeflödet vid randen utnyttjas beteckningen \hat{q}_1 (W/m^2 , W/m) och för den ackumulerade värmemängden \hat{e}_1 (J/m^2 , J/m):

$$\hat{q}_1 \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad \hat{e}_1 \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (5.2.3.2)$$

Motsvarande beteckningar för tredimensionellt fall är \hat{Q}_1 (W) och \hat{E}_1 (J). Alla formler i detta avsnitt ges i första hand i komplex form. Ur realdel och imaginär del erhålles reella samband mellan temperatur och värme flöde.

Tidsderivatan av ackumulerad värmemängd skall ge värme flödet vid randen. Detta ger:

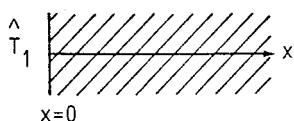
$$\hat{e}_1 = \frac{t_0}{2\pi i} \hat{q}_1 \quad \hat{E}_1 = \frac{t_0}{2\pi i} \hat{Q}_1 \quad (5.2.3.3)$$

Man bör observera att den totala värmemängden som pulserar genom randen ges av dubbla amplituden:

$$2|\hat{e}_1| = \frac{t_0}{\pi} |\hat{q}_1| \quad 2|\hat{E}_1| = \frac{t_0}{\pi} |\hat{Q}_1| \quad (5.2.3.4)$$

5.2.3.1 Plant, halvoändligt fall

Det plana, haloändliga fallet har behandlats i avsnitt 5.2.2.1. Vid randen råder temperaturen \hat{T}_1 . Se figur 5.2.4. Lösningen ges av formel 5.2.2.4.



Figur 5.2.4. Plant, halvoändligt fall.

Värme flödet vid randen blir enligt denna formel:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -\lambda \cdot \hat{T}_1 \cdot (-) \frac{1+i}{d_0} \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (5.2.3.5)$$

Detta ger det komplexa randflödet

$$\hat{q}_1 = \frac{\lambda(1+i)}{d_0} \hat{T}_1 \quad (\text{W/m}^2) \quad (5.2.3.6)$$

Sambandet mellan effekt- och temperaturamplitud blir då:

$$|\hat{q}_1| = \frac{\lambda \sqrt{2}}{d_0} |\hat{T}_1| \quad (5.2.3.7)$$

Argumentet av $1 + i$ är $\pi/4$. Effekten ligger därför $\pi/4$ före temperaturen i fas. Detta svarar mot en åttondels period. Temperaturmaximum inträffar tiden $t_0/8$ efter effektmaximum.

Den ackumulerade värmemängden blir enligt formlerna 5.2.3.4 och 5.2.3.6:

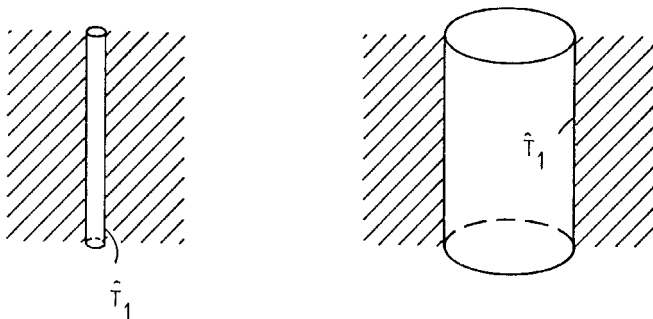
$$\hat{e}_1 = \frac{c d_0}{1 + i} \hat{T}_1 \quad \text{J/m}^2$$

I reellvärd form fås exempelvis:

$$\begin{aligned} \text{Randtemperatur} & T_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \\ \text{Randflöde} & T_1 \frac{\lambda \sqrt{2}}{d_0} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{Ackumulerad värme} & T_1 \frac{c d_0}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (5.2.3.8)$$

5.2.3.2 Rör eller cylinder

Det periodiska förloppet utanför ett rör eller en cylinder med radien R har behandlats i avsnitt 5.2.2.2. Vid randen $r = R$ är temperaturen \hat{T}_1 . Se figur 5.2.5.



Figur 5.2.5. Periodiskt temperaturförlopp utanför rör eller cylinder.

Lösningen ges av formel 5.2.2.9. Derivation med avseende på r ger värmeflödet. Vi skall ange värmeflödet per meter rör. För cylinder innebär detta att värmeflödet anges per meter i höjddled.

Det komplexa sambandet mellan temperatur och värmeflöde vid randen $r = R$ blir enligt referens 9 (formel 7.10):

$$\hat{T}_1 = \frac{\hat{q}_1}{2\pi\lambda} \cdot \frac{N_0(R')}{F(R')} e^{i(\phi_0(R') + G(R'))} \quad R' = \frac{R\sqrt{2}}{d_0} \quad (5.2.3.9)$$

Funktionerna N_0 , ϕ_0 , F och G ges i figur 5.2.3 och tabell 5.2.2. Införes $A = N_0/F$ och $B = -\phi_0 - G$ erhålles:

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{2\pi\lambda} A(R') e^{-iB(R')} \cdot \hat{q}_1 \quad (5.2.3.10)$$

Funktionerna A och B ges i figur 5.2.3 och tabell 5.2.2. Observera att \hat{q}_1 har dimensionen W/m.

För små värden på R' ligger F nära 1 och G nära 0. Detta innebär att A sammanfaller med N_0 och $-B$ med ϕ_0 . Approximationerna enligt formel 5.2.2.13 gäller:

$$\begin{aligned} A(R') &\approx \sqrt{(\ln(2/R') - \gamma)^2 + \pi^2/16} & (R' < 0.1) \\ B(R') &\approx \arctan\left(\frac{\pi/4}{\ln(2/R') - \gamma}\right) & \gamma = 0.5772 \end{aligned} \quad (5.2.3.11)$$

Dessa approximationer visas med streckade linjer i figur 5.2.3.

För stora R' kan följande approximation härledas genom serieutveckling:

$$\frac{1}{A \cdot e^{iB}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} R' + \frac{1}{2} - \frac{1+i}{8\sqrt{2}R'} \quad (R' \geq 1) \quad (5.2.3.12)$$

Den sista termen kan med acceptabel precision försummas. Vi får följande approximation:

$$\hat{T}_1 \cdot 2\pi\lambda R \left(\frac{1+i}{d_0} + \frac{1}{2R} \right) \approx \hat{q}_1 \quad (R > d_0) \quad (5.2.3.13)$$

Det maximala felet för beloppet är någon procent. Maximalt fel i fas är något större.

I reellvärd form fås exempelvis:

$$\begin{aligned} \text{Randtemperatur} & T_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \\ \text{Randflöde} & T_1 \cdot \frac{2\pi\lambda}{A(R')} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} + B(R')\right) \end{aligned} \quad (5.2.3.14)$$

Exempel. Vi tar följande två exempel.

$$\hat{T}_1 = 10 \text{ } ^\circ\text{C} \quad t_0 = 1 \text{ år}$$

$$a = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \lambda = 3.5 \text{ W/m K}$$

Inträngningsdjupet blir

$$d_0 = \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} = 4.01 \text{ m}$$

$$i. \quad \underline{R} = \underline{0.05 \text{ m}}$$

$$R' = 0.0176$$

Approximationerna 5.2.3.11 kan användas:

$$A = 4.23 \quad B = 0.187$$

Värmeflödet blir enligt 5.2.3.10

$$\hat{q}_1 = 10 \cdot \frac{2\pi \cdot 3.5}{4.23} \cdot e^{i \cdot 0.187} = 60.0 \cdot e^{i \cdot 0.187} \text{ W/m}$$

Effektens amplitud blir således 60 W/m.

Fasen är $0.187 = 2\pi \cdot 0.030$.

Detta motsvarar $0.030 \cdot 365 = 11$ dagar.

$$\text{ii. } R = 10 \text{ m}$$

$$R' = 3.53$$

Approximationen 5.2.3.13 kan användas:

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= 2 \pi 10 \cdot 3.5 \left(\frac{1+i}{4.01} + \frac{1}{2 \cdot 10} \right) \cdot 10 = \\ &= 2200 \left(\frac{1}{4.01} + \frac{1}{20} + i \frac{1}{4.01} \right) = \\ &= 2200 \cdot (0.30 + i 0.25) = 2200 \cdot 0.39 \cdot e^{i \cdot 0.69} \\ &= 860 \cdot e^{i 0.69} \text{ W/m} \end{aligned}$$

Effektens amplitud är 860 W/m.

Per ytenhet blir då flödet:

$$\frac{860}{2\pi R} = 14 \text{ W/m}^2$$

$$\text{Fasen är } 0.69 = 2\pi \cdot 0.11$$

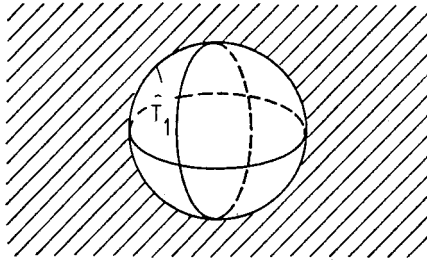
Detta motsvarar 40 dagar.

5.2.3.3 Sfär

Det periodiska förloppet utanför en sfär med radien R har behandlats i avsnitt 5.2.2.3. Vid randen $r = R$ skall temperaturen vara \hat{T}_1 . Se figur 5.2.6.

Temperaturen ges av formel 5.2.2.19. Värmeflödet ges av derivatan med avseende på r . Det totala flödet genom sfärens yta betecknas \hat{Q}_1 (W). Detta blir

$$\hat{Q}_1 = \hat{T}_1 \cdot \lambda 4\pi R^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1+i}{d_0} \right) \quad (\text{W}) \quad (5.2.3.15)$$



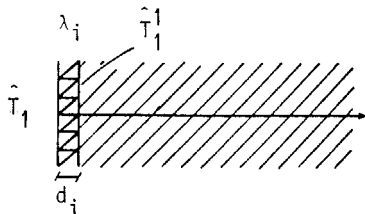
Figur 5.2.6 Periodiskt temperaturförlopp utanför en sfär.

Det är intressant att jämföra formlerna i plant, cylindriskt och sfäriskt fall. För värmeflödet per ytenhet ger formlerna 5.2.3.6, 13 och 15:

Plant	$\hat{q}_1 = \hat{T}_1 \cdot \lambda \frac{1+i}{d_o}$	
Cylindriskt ($R > d_o$)	$\frac{\hat{q}_1}{2\pi R} \approx \hat{T}_1 \cdot \lambda \left(\frac{1+i}{d_o} + \frac{1}{2R} \right)$	(5.2.3.16)
Sfäriskt	$\frac{\hat{Q}_1}{4\pi R^2} = \hat{T}_1 \cdot \lambda \left(\frac{1+i}{d_o} + \frac{1}{R} \right)$	

5.2.3.4 Effekt av ytmotstånd

Ett värmelager i mark kan skyddas av värmeisoleringar. Innanför isolerskiktet är en periodisk temperatur \hat{T}_1 given. Isolerskiktet har tjockleken d_i och värmeledningsförmågan λ_i . Låt \hat{T}_1^1 vara den periodiska temperaturen i marken strax utanför isoleringen. Se figur 5.2.7.



Figur 5.2.7. Periodiskt förlopp i mark där ytan täcks av en värmeisolering.

Låt \hat{q}_1 (W/m^2) vara värmeflödet genom isoleringen. Då gäller följande komplexa samband

$$\frac{(\hat{T}_1 - \hat{T}_1^1) \lambda_i}{d_i} = \hat{q}_1 \quad (5.2.3.17)$$

Mellan \hat{T}_1^1 och \hat{q}_1 råder de ovan givna sambanden.

I det plana fallet gäller således:

$$\hat{T}_1 = \hat{T}_1^1 + \frac{d_i}{\lambda_i} \hat{q}_1 \quad \hat{T}_1^1 = \frac{d_o}{\lambda(1+i)} \hat{q}_1 \quad (5.2.3.18)$$

Detta ger sambandet

$$\hat{T}_1 = \left(\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{d_o}{\lambda(1+i)} \right) \hat{q}_1 \quad (5.2.3.19)$$

I det cylindriska fallet gäller då \hat{q}_1 avser värmeflödet över hela omkretsen:

$$(\hat{T}_1 - \hat{T}_1^1) \frac{\lambda_i}{d_i} \cdot 2\pi R = \hat{q}_1 \quad (5.2.3.20)$$

Formel 5.2.3.10 ger då:

$$\hat{T}_1 = \left(\frac{d_i}{2\pi R \lambda_i} + \frac{A(R')}{2\pi \lambda} e^{-iB(R')} \right) \hat{q}_1 \quad (5.2.3.21)$$

För det sfäriska fallet gäller analogt:

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \left(\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda \left(\frac{1+i}{d_o} + \frac{1}{R} \right)} \right) \hat{Q}_1 \quad (5.2.3.22)$$

Exempel. Vi tar följande plana fall.

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= 10^\circ\text{C} & t_o &= 1 \text{ år} \\ a &= 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & \lambda &= 3.5 \text{ W/m}\cdot\text{K} \\ d_i &= 0.20 \text{ m} & \lambda_i &= 0.05 \text{ W/m}\cdot\text{K} \end{aligned}$$

Detta ger

$$d_o = 4.01 \text{ m}$$

Formel 5.2.3.19 ger:

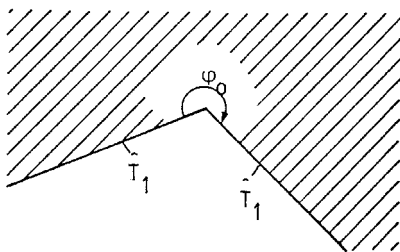
$$10 = \left(\frac{0.20}{0.05} + \frac{4.01}{3.5(1+i)} \right) \cdot \hat{q}_1 = 4.61 \cdot e^{-0.125i} \cdot \hat{q}_1$$

$$\hat{q}_1 = 2.17 \cdot e^{0.125i} \text{ W/m}^2$$

5.2.3.5 Kanter

Värmelagren i mark begränsas ofta av plana och cylindriska ytor. Det periodiska värmeflödet genom dessa kan beräknas med ovan angivna formler. De plana ytorna skär varandra längs kantlinjer. Detta ger en störning av de rena, endimensionella fallen. I detta avsnitt anges en mycket enkel formel för dessa kanteffekter.

Låt oss nu se på två plana randytor till värmelagret, vilka möts längs en kant. Vinkeln mellan ytorna är φ_0 räknad från marksidan. På ytorna råder en periodisk temperatur \hat{T}_1 . Figur 5.2.8 visar det aktuella fallet i ett tvärsnitt vinkelrät mot kantlinjen.



Figur 5.2.8. Periodiskt förlopp utanför två plana ytor som möts längs en kantlinje.

I planet vinkelrät mot kantlinjen råder ett tvådimensionellt temperaturförlopp. Förloppet övergår i det endimensionella då kantpåverkan blir försumbara. Detta sker på avstånd 2 till 3 d_0 från kanten.

Nära hörn där olika kantlinjer möts erhålls ett genuint tredimensionellt förlopp. Det visar sig emellertid att dessa tredimensionella hörneffekter är försumbara jämfört med de tvådimensionella kanteffekterna.

Temperaturförloppet nära kanten blir mycket komplicerat. Vi är här intresserade enbart av det integrerade värmeflödet över de två ytorna. För detta flöde får man märkvärdigt enkla samband.

Låt A vara de två plana ytornas area. Det totala värmeflödet genom de två ytorna, som har en gemensam kantlinje med längden L_e (edge), betecknas $\hat{Q}_1 \cdot e^{2\pi i t/t_0}$. Värmeflödet \hat{Q}_1 (W) har ett bidrag från den plana lösningen. Formel 5.2.3.6 ger:

$$\hat{Q}_1^{\text{plan}} = A \cdot \frac{\lambda(1+i)}{d_0} \hat{T}_1 \quad (5.2.3.21)$$

Effekten av kanten ges av $\hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^{\text{plan}}$. Vi bortser i denna diskussion från andra kanter till de två plana ytorna. Kanteffekten är proportionell mot \hat{T}_1 , λ och kantlängd L_e . En relativt intrikat dimensionsanalys visar att kantbidraget frånsett dessa faktorer enbart är en funktion av vinkeln φ_0 . Se referens 6. Följande samband gäller:

$$\hat{Q}_1 = \hat{T}_1 \cdot \lambda \left(A \frac{1+i}{d_0} + L_e \cdot \alpha_e(\varphi_0) \right) \quad (5.2.3.22)$$

Kantkonstanten α_e ges för $0 < \varphi_0 < 2\pi$ i referens 6. Speciellt gäller

$$\alpha_e\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi}$$

$$\alpha_e(\pi) = 0 \quad (5.2.3.22')$$

$$\alpha_e\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{16}{9\sqrt{3}} - \frac{4}{3\pi} \approx 0.60$$

Fallet $\varphi_0 = \pi$ innebär att kant saknas, så α_e blir då noll. Normalt har vi vid en kant vinkeln $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$. Kantkonstanten α_e är då 0.6. Konstanten α_e är positiv, då φ_0 är större än π , eftersom exponeringen är större. Den blir negativ då φ_0 är mindre än π .

5.2.3.6 Parallelepipedformat värmelager under mark

Givet ett parallelepipedformat värmelager under mark. Lagret har längden L , bredden B och höjden H . På dess rand råder den periodiska temperaturen \hat{T}_1 . Lagerytan består av sex plana ytor vilka möts längs tolv kantlinjer.

Den totala ytan A blir

$$A = 2(LB + LH + BH) \quad (5.2.3.23)$$

Total kantlängd blir

$$L_e = 4(L+H+B) \quad (5.2.3.24)$$

Vinkeln φ_0 mellan planen är överallt $3\pi/2$. Kantkonstanten α_e är då 0.6. Det totala komplexa värmeflödet ges av formel 5.2.3.22:

$$\hat{Q}_1 = \hat{T}_1 \lambda \left(A \cdot \frac{1+i}{d_0} + L_e \cdot 0.6 \right) \quad (5.2.3.25)$$

Här ges A och L_e av 5.2.3.23-24.

Kravet för att detta skall gälla är att kantlängderna ej är små relativt inträngningsdjupet d_0 . Låt D vara avståndet från lagrets överyta till markytan. Vi tar kravet:

$$D, L, H, B > 2d_0 \quad (5.2.3.26)$$

Exempel. Vi tar följande data

$$d_0 = 3 \text{ m} \quad \lambda = 2 \text{ W/m}\cdot\text{K} \quad \hat{T}_1 = 25^\circ\text{C}$$

$$L = B = H = 20 \text{ m} \quad t_0 = 1 \text{ år}$$

Då gäller:

$$A = 6 \cdot L^2 = 2400 \text{ m}^2$$

$$L_e = 12L = 240 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= 25 \cdot 2 \cdot \left(2400 \cdot \frac{1+i}{3} + 240 \cdot 0.6 \right) = 50 \cdot \{ 800(1+i) + 144 \} \\ &= 62000 \cdot e^{i \cdot 0.70} \text{ (W)} \end{aligned}$$

Effektens amplitud blir således 62 kW. Fasen är $0.70 = 2\pi \cdot 0.11$.
Effektmaximum sker således $0.11 \cdot 365 = 41$ dagar före temperatur-
maximum.

Det kan vara intressant att jämföra en kub med en sfär. Vi väljer dem så
att de får samma area. För en kub med kantlängden L är sambandet mellan
värmeflöde och temperatur vid randen enligt formel 5.2.3.25

$$\dot{Q}_1^{\text{kub}} = \hat{T}_1 \lambda (6L^2 \cdot \frac{1+i}{d_0} + 12L \cdot 0.6) \quad (5.2.3.27)$$

För en sfär med radien R enligt formel 5.2.3.15:

$$\dot{Q}_1^{\text{sfär}} = \hat{T}_1 \lambda 4\pi R^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1+i}{d_0} \right) \quad (5.2.3.28)$$

Lika areor ger

$$4\pi R^2 = 6L^2 \quad \frac{R}{L} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \quad (5.2.3.29)$$

Ur 5.2.3.27-29 fås:

$$\frac{\dot{Q}_1^{\text{kub}}}{\dot{Q}_1^{\text{sfär}}} = \frac{1+i+1.2 \cdot \frac{d_0}{R} \cdot \frac{R}{L}}{1+i+\frac{d_0}{R}} = \frac{1+i+0.83 d_0/R}{1+i+d_0/R}$$

Nedanstående tabell ger några värden:

d_0/R	0.1	0.5	1
$\dot{Q}_1^{\text{kub}}/\dot{Q}_1^{\text{sfär}}$	$0.99 \cdot e^i \cdot 0.008$	$0.96 \cdot e^i \cdot 0.027$	$0.93 \cdot e^i \cdot 0.036$

5.2.3.7 Cylinderformat värmelager under mark.

Givet ett cylinderformat värmelager under mark. Lagret har höjden H och
radien R . Avståndet från överytan till markytan är D . För formlerna i
detta avsnitt förutsätts att dessa längder ej är små relativt inträngnings-
djupet d_0 :

$$2R, H, D > 2d_0 \quad (5.2.3.30)$$

På cylinderns randyta råder den periodiska temperaturen \hat{T}_1 .

Cylinderns yta består av två plana delar med arean $A = 2 \cdot \pi R^2$. Mantelytan har höjden H . Mellan dessa ytor är kantlängden $L_e = 2 \cdot 2\pi R$. Vi försummar att kantlinjen är cirkulär. Felet härvid torde vara försumbart.

Det totala periodiska värmeflödet blir med formlerna 5.2.3.22 och 5.2.3.10

$$\hat{Q}_1 = \hat{T}_1 \cdot \lambda \left(2\pi R^2 \frac{1+i}{d_0} + 4\pi R \cdot 0.6 + H \cdot \frac{2\pi}{A(R')} e^{iB(R')} \right) \quad (5.2.3.31)$$

Formel 5.2.3.13 kan användas i stället för 5.2.3.10 eftersom vi förutsatt att $R > d_0$. Ovanstående formel blir då:

$$\hat{Q}_1 = \hat{T}_1 \cdot \lambda 2\pi R \left((1+i) \frac{R+H}{d_0} + 1.2 + \frac{H}{2R} \right) \quad (5.2.3.32)$$

Exempel. Vi tar följande data:

$$\begin{array}{lll} \hat{T}_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C} & \lambda = 2 \text{ W/m} \cdot \text{K} & d_0 = 3 \text{ m} \\ R = 10 \text{ m} & H = 20 \text{ m} & t_0 = 1 \text{ år} \end{array}$$

Värmeflödet blir då enligt 5.2.3.32:

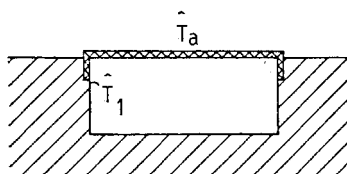
$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= 25 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot \left((1+i) \frac{10+20}{3} + 1.2 + \frac{20}{20} \right) \\ &= 3140 \cdot (10(1+i) + 1.2 + 1) = \\ &= 3140 \cdot 15.8 \cdot e^{i \cdot 0.69} \\ &= 50000 \cdot e^{i \cdot 0.69} \end{aligned}$$

Effektamplituden blir 50 kW. Fasen är $0.69 = 0.11 \cdot 2\pi$. I tid blir detta $0.11 \cdot 365 = 40$ dagar.

5.2.3.8 Värmelager med överytan vid marknivå

Ett värmelager med överytan vid marknivån bör skyddas av värmeisolerande skikt mot den kalla temperaturen vid markytan. Isoleringen har tjockleken d_i och värmeledningsförmågan λ_i . Den antas täcka lagrets överytan vid markytan. Isoleringen täcker också de vertikala sidoytorna till ett djup D_i .

I lagret, dvs på dess rand mot mark och på värmeisoleringens insida, råder den periodiska temperaturen \hat{T}_1 . Vid markytan ovanför isoleringen råder den periodiska temperaturen \hat{T}_a , eller om vi även skriver ut tidsfaktorn $\hat{T}_a \cdot e^{2\pi it/t_0}$. Se figur 5.2.9. Normalt är vi intresserade av årsperioden. Beloppet $|\hat{T}_a|$ är amplituden för lufttemperaturens årsvariation. I allmänhet har \hat{T}_1 och \hat{T}_a olika fas. Till exempel innebär en fasdifferens π , $\hat{T}_a = \hat{T}_1 \cdot e^{i\pi}$, att lagret är varmest vid lägsta utetemperatur.



Figur 5.2.9. Periodisk delprocess för värmelager med överytan vid marknivån.

Det periodiska värmeflödet \hat{Q}_1 genom lagrets randyta består av en del genom värmeisoleringen och en del mot marken:

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_{1,\text{isolering}} + \hat{Q}_{1,\text{mark}} \quad (5.2.3.33)$$

Temperaturdifferensen över värmeisoleringen är $\hat{T}_1 - \hat{T}_a$. Arealen av den värmeisolerade ytan är A_i . Det periodiska värmeflödet över isoleringen blir då:

$$\hat{Q}_{1,\text{isolering}} = A_i \cdot (\hat{T}_1 - \hat{T}_a) \frac{\lambda_i}{d_i} \quad (5.2.3.34)$$

Den vertikala isoleringen mot mark har på grund av den skyddande jorden utanför isoleringen en något mindre temperaturdifferens. Detta kan dock försummas om D_i bara är någon meter och värmeisoleringen någorlunda kraftig. Markens värmemotstånd vid kantisoleringen är då litet relativt värmeisoleringens. Formel 5.2.3.34 kan därför normalt användas för hela isolerytan inklusive den vertikala kantdelen. Areal A_i är då lika med överytans och kantisoleringens totala area.

För värmeflödet mot mark kan de olika formlerna i föregående avsnitt användas. Areal mot mark betecknas A_m .

För ett parallelepipedformat värmelager med längden L , bredden B och höjden H blir isolerarean och arean mot mark:

$$A_i = LB + 2(B+L)D_i \quad (5.2.3.35)$$

$$A_m = LB + 2(B+L)(H-D_i)$$

Det totala periodiska värmeflödet blir då med formlerna 5.2.3.34 och 25:

$$\bar{Q}_1 = (\hat{T}_1 - \hat{T}_a) \frac{A_i \lambda_i}{d_i} + \hat{T}_1 \cdot \lambda (A_m \frac{1+i}{d_0} + L_e \cdot 0.6) \quad (5.2.3.36)$$

Kantlängden L_e blir

$$L_e = 2L + 2B + 4(H-D_i) \quad (5.2.3.37)$$

För ett cylinderformat lager med radien R och höjden H fås:

$$A_i = \pi R^2 + 2\pi R D_i$$

$$A_m = \pi R^2 + 2\pi R (H-D_i) \quad (5.2.3.38)$$

$$L_e = 2\pi R$$

Det totala periodiska värmeflödet blir med formel 5.2.3.34 och med en modifikation av 5.2.3.31:

$$\hat{Q}_1 = (\hat{T}_1 - \hat{T}_a) \frac{A_i \lambda_i}{d_i} + \hat{T}_1 \lambda \left(\pi R^2 \cdot \frac{1+i}{d_0} + 2\pi R \cdot 0.6 \right) + (H - D_i) \frac{2\pi}{A(R^1)} e^{iB(R^1)} \quad (5.2.3.39)$$

Den första termen ger värmeflödet genom isoleringen. Den andra termen ger flöde genom bottenytan med arean πR^2 . Den tredje termen ger kantbidraget från cylinderns undre cirkel, medan den sista termen ger bidraget från cylinderytan med höjden $H - D_i$.

Exempel. Vi tar ett parallelepipedformat lager med följande data:

$$\begin{aligned} d_0 &= 3 \text{ m} & t_0 &= 1 \text{ år} & \lambda &= 2 \text{ W/m} \cdot \text{K} \\ L &= 40 \text{ m} & B &= 30 \text{ m} & H &= 20 \text{ m} \\ D_i &= 2 \text{ m} & d_i &= 0.4 \text{ m} & \lambda_i &= 0.04 \text{ W/m} \cdot \text{K} \\ \hat{T}_1 &= 10 \text{ }^\circ\text{C} & \hat{T}_a &= 10 \cdot e^{i\varphi_a} \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Vi antar att lagret ligger ett kvarts år efter luften i fas:

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2} : \quad \hat{T}_a = i 10 \text{ }^\circ\text{C}$$

Areorna enligt formel 5.2.3.35 blir:

$$A_i = 1480 \text{ m}^2$$

$$A_m = 3720 \text{ m}^2$$

Kantlängden enligt formel 5.2.3.37 blir:

$$L_e = 212 \text{ m}$$

Formel 5.2.3.36 ger det komplexa värmeflödet:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= (10 - 10i) \frac{1480 \cdot 0.04}{0.4} + 10 \cdot 2 \cdot (3720 \cdot \frac{1+i}{3} + 212 \cdot 0.6) \\ &= 1480 (1-i) + 24800 (1+i) + 2544 \end{aligned}$$

Den första termen ger värmeflödet genom isoleringen, den andra det endimensionella bidraget mot mark och den tredje kanteffekten. Vi ser att flödet mot mark dominerar. Kanteffekt och isolering ger bidrag i samma storleksordning.

$$\hat{Q}_1 = 37000 \cdot e^i \cdot 0.68$$

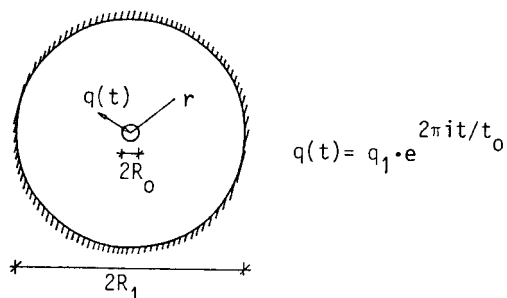
Amplituden för det totala flödet blir 37 kW.

5.2.4 Isolerad cylinderregion

För markvärmelager av typ borrhål i berg och slangar i lera sker värmeförmedling och värmeuttag via rör, slangar och borrhål. Samma sak gäller för ett system av bergvärmebrunnar, vilka återladdas sommartid. Värmebärande fluidens kanaler ligger i ett regelbundet mönster. Radiellt i området runt ett rör får man en pulserande process.

Markvolymen kan uppdelas så att en lämplig del runt ett rör tillskrives detta. Vi förutsätter här att denna region kan approximeras med en cirkel med radien R_1 . Detta förutsätter i sin tur att rören ligger i ett någorlunda regelbundet mönster utan alltför kraftiga variationer i röravstånd. Röret eller slangens radie är R_0 . För en slang avses ytterradien. Cirkeln $r = R_0$ ger markens rand mot röret.

Via röret sker en periodisk in- och utmatning av värme till den cirkulära regionen $R_0 \leq r \leq R_1$. Effekten, som räknas per meter rör, har amplituden q_1 (W/m). Periodtiden är t_0 . För det studerade radiella periodiska förloppet sättes värmeledningen till noll vid den yttre randen $r = R_1$. Se figur 5.2.10.



Figur 5.2.10. Periodisk injektion-extraktion av värme via ett centrumsör i en isolerad cylinderregion.

5.2.4.1 Rörtemperatur

Vi är framför allt intresserade av marktemperaturen vid röret. Följande beteckningar skall användas:

$$T_R(t) = T(R_0, t) = \hat{T}_R \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (5.2.4.1)$$

Här är \hat{T}_R den komplexa temperatur vid röret som måste upprätthållas för att det specificerade periodiska värmeflödet skall erhållas. Dessutom används följande beteckningar:

$$d_0 = \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} \quad r_0 = \frac{R_0 \sqrt{2}}{d_0} \quad r_1 = \frac{R_1 \sqrt{2}}{d_0} \quad (5.2.4.2)$$

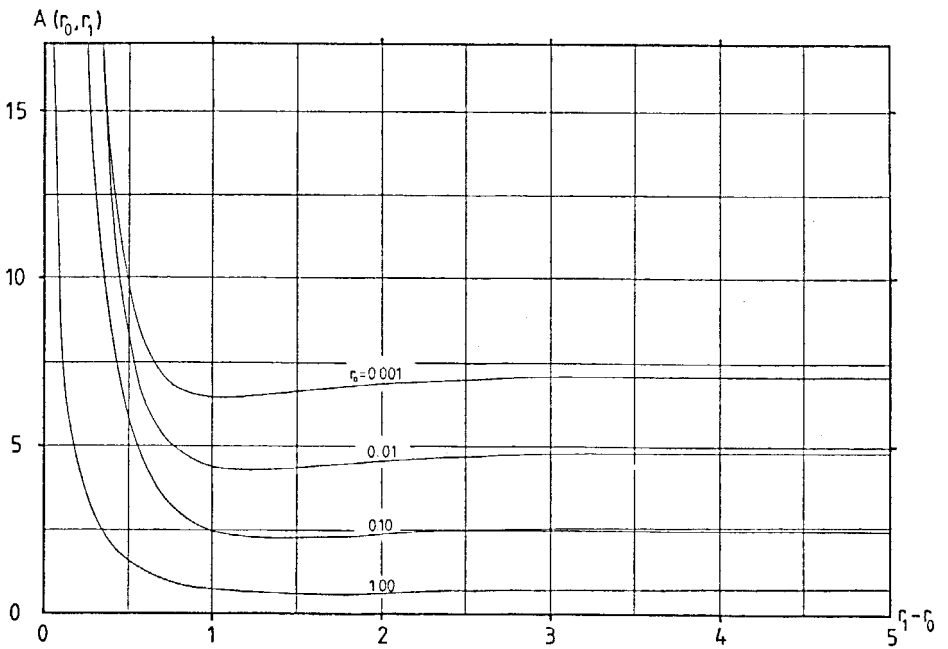
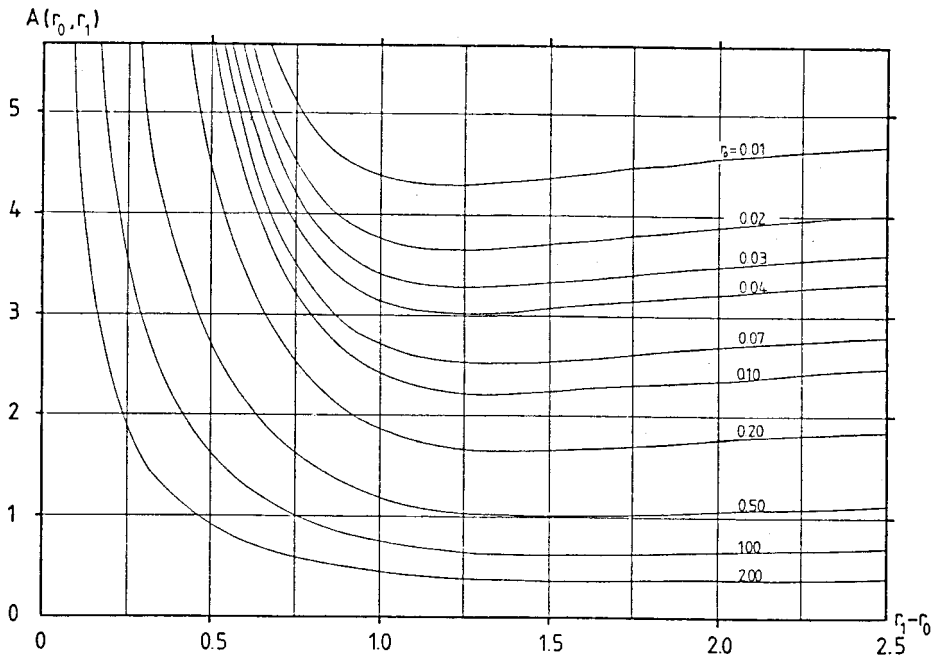
Det periodiska förloppet i en oändlig omgivning har behandlats i avsnitt 5.2.2.2 och 5.2.3.2. Detta fall är ett specialfall av vårt nuvarande. Det erhålles för

$$r_0 = R' \quad r_1 = +\infty \quad (5.2.4.3)$$

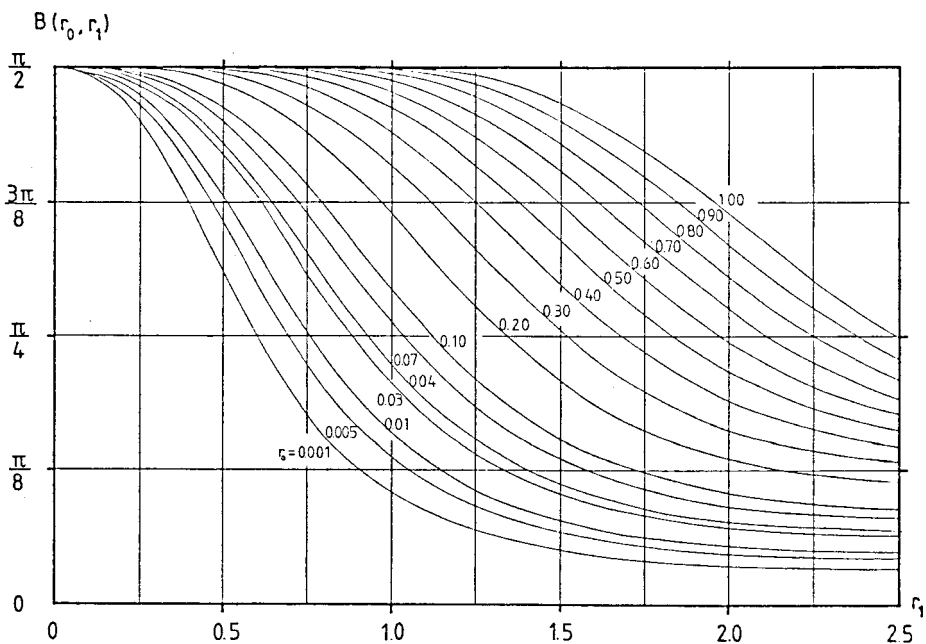
Den analytiska lösningen för detta periodiska förlopp härledes och diskuteras i detalj i referens 10. Randtemperaturen blir:

$$\hat{T}_R = \frac{A}{2\pi\lambda} e^{-iB} \cdot q_1 \quad (5.2.4.4)$$

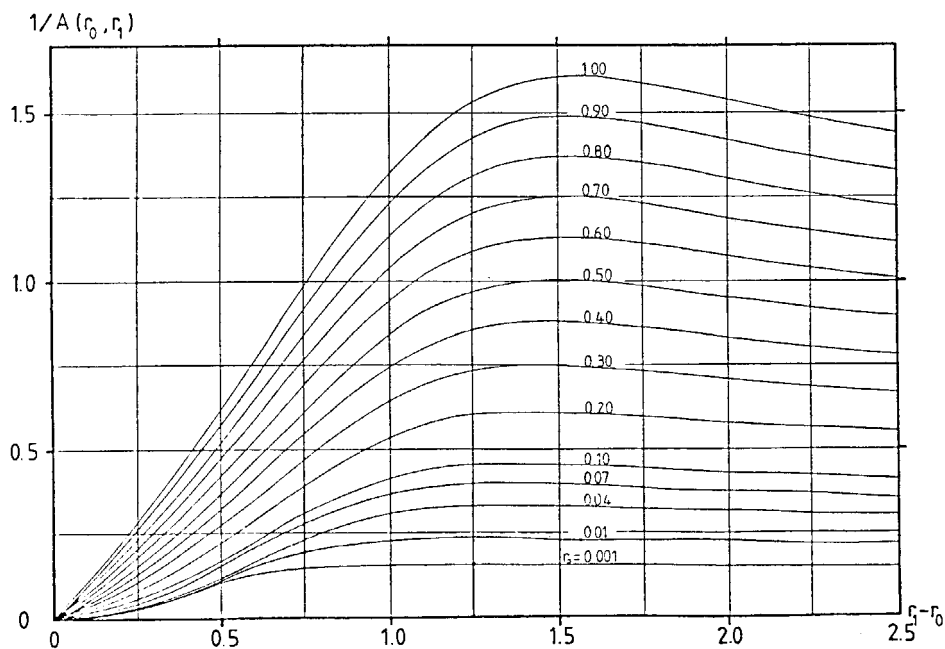
Amplitud- och fasfunktionerna A och B är funktionerna av r_0 och r_1 . De visas i figur 5.2.11-13.



Figur 5.2.11. Amplitudfunktion A för rörtemperatur; formel 5.2.4.4.



Figur 5.2.12. Fasfunktion B för rörtemperatur; formel 5.2.4.4.



Figur 5.2.13. Amplitudfunktion $1/A$ för värmefflöde vid röret; formel 5.2.4.5.

Formel 5.2.4.4 ger rörtemperatur då flödet är givet. Omvänt gäller om rörtemperaturen är given:

$$T_R(t) = T_1 \cdot e^{2\pi it/t_0}$$

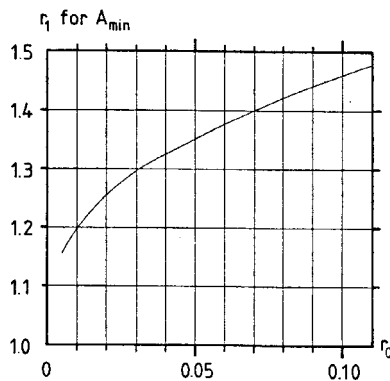
$$q_1(t) = 2\pi\lambda T_1 \cdot \frac{1}{A} e^{iB} \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.4.5)$$

Faktorn $1/A$ ger effektamplituden vid given temperaturamplitud T_1 . Funktionen $1/A$ visas i figur 5.2.13.

Formel 5.2.4.4 är helt analog med formel 5.2.3.10 för cylinder i fri omgivning. Funktionerna A och B är här en direkt utvidgning av det tidigare fallet ($A(R') \rightarrow A(r_0, \infty)$, $B(R') \rightarrow B(r_0, \infty)$).

5.2.4.2 Optimalt röravstånd

Det är intressant att notera att kurvorna för A i figur 5.2.11 har ett minimum vid ett visst $r_1 - r_0$. I figur 5.2.13 ger detta ett maximum för $1/A$ vid ett visst $r_1 - r_0$. Amplituden $1/A$ har således för givna R_0 och d_0 ett maximum vid ett visst R_1 . Denna radie representerar i vissa fall ett optimum, eftersom detta enligt formel 5.2.4.5 ger maximalt värmefflöde vid given temperaturamplitud. Figur 5.2.14 visar sambandet mellan r_1 och r_0 för detta optimum.



Figur 5.2.14. Samband mellan r_1 och r_0 vid minimum för A som funktion av r_1 .

5.2.4.3 Approximativa formler

Rörradien R_0 är i många tillämpningar mycket mindre än inträngningsdjupet d_0 . Den dimensionslösa radien r_0 blir då mycket mindre än ett.

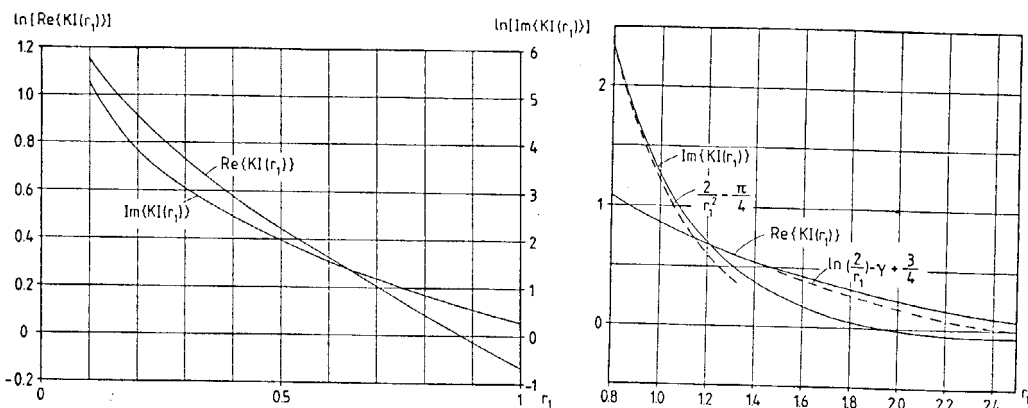
För små r_0 gäller följande approximation:

$$A \cdot e^{-iB} \cong \ln\left(\frac{2}{r_0}\right) - \gamma - i \frac{\pi}{4} - KI(r_1) \quad \gamma = 0.5772 \quad (5.2.4.6)$$

Felet för $r_0 < 0.3$ är högst någon procent. Funktionen $KI(r_1)$ visas i figur 5.2.15. Den ges även i tabell 5.2.3.

r_1	$\text{Re}\{KI(r_1)\}$	$\text{Im}\{KI(r_1)\}$	r_1	$\text{Re}\{KI(r_1)\}$	$\text{Im}\{KI(r_1)\}$	r_1	$\text{Re}\{KI(r_1)\}$	$\text{Im}\{KI(r_1)\}$
0.1	3.17	199.	1.8	0.32	$5.9 \cdot 10^{-2}$	5.0	$-1.9 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$
0.2	2.48	49.2	1.9	0.28	$2.0 \cdot 10^{-2}$	5.2	$-8.6 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
0.3	2.07	21.4	2.0	0.23	$-9.8 \cdot 10^{-3}$	5.4	$-2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$
0.4	1.78	11.7	2.2	0.17	$-4.7 \cdot 10^{-2}$	5.6	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
0.5	1.56	7.23	2.4	0.11	$-6.3 \cdot 10^{-2}$	5.8	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-4}$
0.6	1.38	4.80	2.6	$6.8 \cdot 10^{-2}$	$-6.6 \cdot 10^{-2}$	6.0	$4.7 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$
0.7	1.22	3.33	2.8	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$-6.0 \cdot 10^{-2}$	6.2	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-4}$
0.8	1.09	2.39	3.0	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$-5.0 \cdot 10^{-2}$	6.4	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$
0.9	0.97	1.74	3.2	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$-3.9 \cdot 10^{-2}$	6.6	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$
1.0	0.87	1.29	3.4	$-7.4 \cdot 10^{-3}$	$-2.9 \cdot 10^{-2}$	6.8	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$-6.0 \cdot 10^{-5}$
1.1	0.78	0.96	3.6	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	$-1.9 \cdot 10^{-2}$	7.0	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$-8.9 \cdot 10^{-5}$
1.2	0.69	0.71	3.8	$-1.2 \cdot 10^{-2}$	$-1.2 \cdot 10^{-2}$	7.5	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$-7.9 \cdot 10^{-5}$
1.3	0.62	0.52	4.0	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	$-5.9 \cdot 10^{-3}$	8.0	$-1.5 \cdot 10^{-5}$	$-3.8 \cdot 10^{-5}$
1.4	0.55	0.38	4.2	$-9.1 \cdot 10^{-3}$	$-2.0 \cdot 10^{-3}$	8.5	$-1.8 \cdot 10^{-5}$	$-9.3 \cdot 10^{-6}$
1.5	0.48	0.27	4.4	$-7.0 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	9.0	$-9.6 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$
1.6	0.42	0.18	4.6	$-5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	9.5	$-2.9 \cdot 10^{-6}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$
1.7	0.37	0.11	4.8	$-3.2 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	10.0	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$

Tabell 5.2.3. Funktionen $KI(r_1)$ i formel 5.2.4.6.



Figur 5.2.15. Funktionen $KI(r_1)$ i formel 5.2.4.6.

För små värden på r_1 gäller approximationen

$$KI(r_1) = \ln\left(\frac{2}{r_1}\right) - \gamma + \frac{3}{4} + i\left(\frac{2}{r_1^2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (r_1 < 1) \quad (5.2.4.7)$$

Felet är maximalt några procent för $r_1 < 1$. Approximationen visas av de streckade linjerna i figur 5.2.15.

För stora värden på r_1 gäller approximationen

$$KI(r_1) = \pi e^{-\sqrt{2} r_1(1+i)} \cdot \left(1 + \frac{3}{4\sqrt{2} r_1} (1+i)\right) \quad (r_1 > 3) \quad (5.2.4.8)$$

Felet är maximalt några procent för $r_1 > 3$.

Approximationerna 5.2.4.6,7 ger tillsammans det enkla uttrycket

$$A \cdot e^{-iB} \approx \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) - \frac{3}{4} + \frac{2}{i r_1^2} \quad (r_0 < 0.3, r_1 < 1) \quad (5.2.4.9)$$

Akkumulerad värmemängd i cylinderregionen ges av dennas medeltemperatur $T_m(t)$. Medeltemperaturen kan för $R_0 \ll R_1$ skrivas:

$$T_m(t) = \frac{q_1}{2\pi\lambda} \cdot \frac{2}{i r_1^2} \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.4.10)$$

Formlerna 5.2.4.9, 4, 1 och 10 ger

$$T_R(t) - T_m(t) = \frac{q_1}{2\pi\lambda} \left\{ \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) - \frac{3}{4} \right\} e^{2\pi it/t_0} \quad (5.2.4.11)$$

$(r_0 < 0.3, r_1 < 1)$

Vi har ett enkelt samband mellan värmeflöde och den drivande temperaturdifferensen $T_R(t) - T_m(t)$.

5.2.4.4 Rörmotstånd m_p

Våra formler har relaterat värmeflödet till temperaturen T_R , dvs temperaturen i marken vid röret. Värmebärande fluiden har temperaturen $T_f(t)$.

Låt m_p (K/(W/m)) vara värmemotståndet mellan fluid och mark räknat per meter rör. Då gäller:

$$T_f(t) - T_R(t) = q(t) \cdot m_p \quad (5.2.4.12)$$

Mellan fluidtemperatur och värmeflöde får vi då enligt formlerna

5.2.4.12,4 följande samband

$$T_f(t) = \frac{q_1}{2\pi\lambda} \cdot \left\{ A \cdot e^{-iB} + 2\pi\lambda m_p \right\} \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (5.2.4.13)$$

5.2.4.5 Två exempel

För att illustrera dessa formler skall vi ta ett exempel med granit och ett med lera. Periodtiden är ett år. Vi har följande data:

$$t_0 = 1 \text{ år}$$

$$\text{Granit: } a = 1.62 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \lambda = 3.5 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

(5.2.4.14)

$$\text{Lera: } a = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \lambda = 1.0 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

Inträngningsdjupet d_0 blir

$$\text{Granit: } d_0 = 4.03 \text{ m}$$

$$\text{Lera: } d_0 = 2.00 \text{ m}$$

Vi tar följande dimensionslösa radier:

$$r_0 = 0.01 \quad r_1 = 1$$

Då gäller enligt figurerna 5.2.11-12:

$$A = 4.41 \quad B = 0.498$$

Rörtemperaturen blir då:

$$T_R(t) = \frac{q_1}{2\pi\lambda} \cdot 4.41 e^{i(2\pi t/t_0 - 0.498)}$$

Fasfördröjningen är:

$$\frac{0.498}{2\pi} \cdot t_0 = 29 \text{ dagar}$$

För granit väljer vi

$$q_1 = 100 \text{ W/m}$$

Rörtemperaturens amplitud blir då

$$\frac{q_1}{2\pi\lambda} A = \frac{100}{2\pi \cdot 3.5} 4.41 = 20.1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Amplituden hos medeltemperaturen blir enligt formel 5.2.4.10

$$\frac{q_1}{2\pi\lambda} \cdot \frac{2}{r_1^2} = 9.1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Vi har då:

$$q(t) = 100 e^{2\pi it/t_0} \quad (\text{W/m})$$

$$T_R(t) = 20.1 e^{i(2\pi t/t_0 - 0.498)} \quad (^\circ\text{C})$$

$$T_m(t) = 9.1 \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - \pi/2)} \quad (^\circ\text{C})$$

De två radierna blir:

$$R_0 = \frac{r_0 d_0}{\sqrt{2}} = 0.028 \text{ m} \quad R_1 = \frac{r_1 d_0}{\sqrt{2}} = 2.85 \text{ m}$$

För leran väljer vi

$$q_1 = 20 \text{ W/m}$$

Rörtemperaturens amplitud blir då:

$$\frac{q_1}{2\pi\lambda} A = 14.0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Medeltemperaturens amplitud blir:

$$\frac{q_1}{2\pi\lambda} \cdot \frac{2}{r_1} = 6.4^\circ\text{C}$$

Vi har då:

$$q(t) = 20 \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (\text{W/m})$$

$$T_R(t) = 14.0 \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - 0.498)} \quad (^\circ\text{C})$$

$$T_m(t) = 6.4 \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - \pi/2)} \quad (^\circ\text{C})$$

De två radierna blir:

$$R_0 = \frac{r_0 d_0}{\sqrt{2}} = 0.014 \text{ m} \quad R_1 = \frac{r_1 d_0}{\sqrt{2}} = 1.41 \text{ m}$$

Approximativa formler kan tillämpas för detta fall. Vi har:

$$r_0 = 0.01 \quad r_1 = 1$$

Formel 5.2.4.6 och tabell 5.2.3 ger nu:

$$KI(1) = 0.87 + i \cdot 1.29$$

$$A e^{-iB} = \ln\left(\frac{2}{0.01}\right) - 0.5772 - i \frac{\pi}{4} - 0.87 - i \cdot 1.29$$

$$= 3.85 - i \cdot 2.08$$

$$= 4.38 e^{-i \cdot 0.50}$$

Detta stämmer väl med de värden som kan avläsas i figur 5.2.11-12.

För att illustrera optimaltval av R_1 tar vi fallet:

$$r_0 = 0.02$$

Enligt figur 5.2.14 erhålles optimum för

$$r_1 = 1.20$$

Detta ger i de två fallen

$$\text{Granit: } R_1 = \frac{1.10 \cdot 4.03}{\sqrt{2}} = 3.4 \text{ m}$$

$$\text{Lera: } R_1 = \frac{1.20 \cdot 2.00}{\sqrt{2}} = 1.7 \text{ m}$$

För granit får vi nu:

$$q(t) = 100 \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (\text{W/m})$$

$$T_R(t) = 19.6 \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - 0.359)} \quad (^\circ\text{C})$$

$$T_m(t) = 6.3 \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - \pi/2)} \quad (^\circ\text{C})$$

Motsvarande värden för lera är:

$$q(t) = 20 \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (\text{W/m})$$

$$T_R(t) = 13.7 \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - 0.359)} \quad (^\circ\text{C})$$

$$T_m(t) = 4.4 \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - \pi/2)} \quad (^\circ\text{C})$$

5.3 Värmeuttag via rör. Stegpulsanalys.

Många markvärmesystem utnyttjar rör, slangar eller borrhål för uttag och tillförsel av värme. Lokalt nära ett sådant rör får man ett väsentligen radiellt temperaturförlopp. Effektuttaget är en funktion av tiden: $q = q(t)$ (W per meter rör). Värdet på q blir negativt då värme matas ut i omgivande mark. Det är noll under viloperioder.

Vi skall i detta avsnitt visa hur man kan analysera det lokala temperaturförloppet och i synnerhet ange temperaturen $T_R(t)$ vid rörväggen mot omgivande mark.

5.3.1 Superposition

Givet ett effektuttag $q(t)$ (W/m) till ett rör i mark. Detta effektuttag ger upphov till en dynamisk radiell temperaturprocess kring röret. Överlagrat på detta finns sedan andra delprocesser som t.ex. härrör från andra rör eller andra delar av samma rör. Det är bara den renodlade radiella processen som behandlas här.

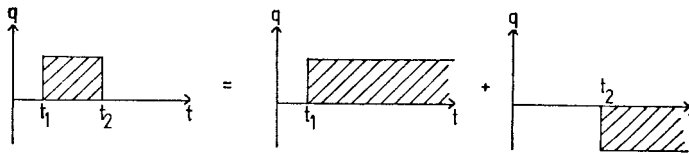
Det enklaste slaget av effektuttag är en stegpuls. Effekten $q(t)$ för en stegpuls som startar vid $t = 0$ ges av:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ q & t > 0 \end{cases} \quad (5.3.1.1)$$

Här är q konstant. För stegpulsen, som behandlas i nästa avsnitt, finns en förhållandevis enkel analytisk lösning.

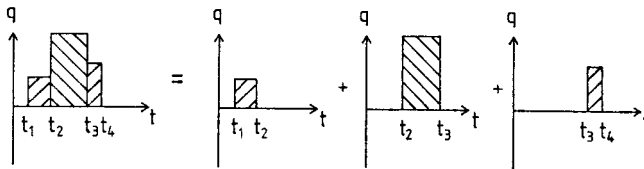
En effektpuls med storleken q_1 under en tid $t_1 \leq t \leq t_2$ kan genom superposition ses som summan av två stegpulser. Se figur 5.3.1.

Temperaturförloppet och rörtemperaturen T_R för effektpulsen ges av summan från de två stegpulserna.



Figur 5.3.1. Superponering av två stegpulser till en effektpuls.

Mer komplicerade effektuttag $q(t)$ kan byggas upp med hjälp av effektpulser. Figur 5.3.2 visar ett exempel som ger tre pulser.

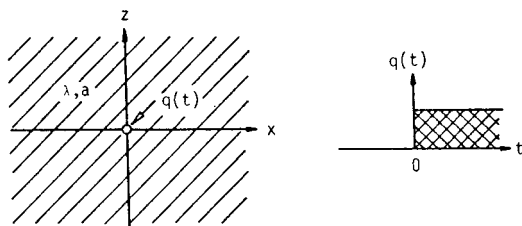


Figur 5.3.2. Exempel på superposition av effektpulser.

Det totala förloppet $q(t)$ kan således ses som en summa av ett antal stegpulser. I det kontinuerliga fallet övergår summan i en integral. Det totala temperaturförloppet för ett effektuttag $q(t)$ ges som en summa av temperaturförlopp för olika stegpulser.

5.3.2 Analytisk lösning för stegpuls.

Figur 5.3.3 visar förutsättningarna för den studerade stegpulsen. Röret ligger längs y -axeln. Den omgivande marken har värmeledningsförmågan λ och temperaturlledningstalet a . Marken tänkes oändligt utsträckt åt alla håll. Effektuttaget ges av formel 5.3.1.1. Temperaturen i marken är noll vid starten $t = 0$ då enbart effekten av uttagspulsen studeras.



Figur 5.3.3. Stegpuls.

Temperaturen i marken blir en funktion av det radiella avståndet $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ till röret och av tiden. Lösningen ges i referens 102 B.

$$T(r, t) = -\frac{q}{4\pi\lambda} \cdot E_1\left(\frac{r^2}{4at}\right) \quad (5.3.2.1)$$

Funktionen $E_1(x)$ ges av:

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{1}{s} e^{-s} ds \quad (5.3.2.2)$$

Tabeller och samband för denna funktion ges i referens 103 A.

Uttrycket 5.3.2.1 är enkelt. Temperaturen är en funktion enbart av $r^2/(at)$. Vi tar följande numeriska exempel:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1.5 \text{ W/m} \cdot \text{K} & a &= 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ q &= 10 \text{ W/m} & & \end{aligned} \quad (5.3.2.3)$$

De resulterande temperaturprofilerna vid olika tider visas i figur 5.3.4. Temperaturförloppet för olika avstånd r visas i figur 5.3.5.

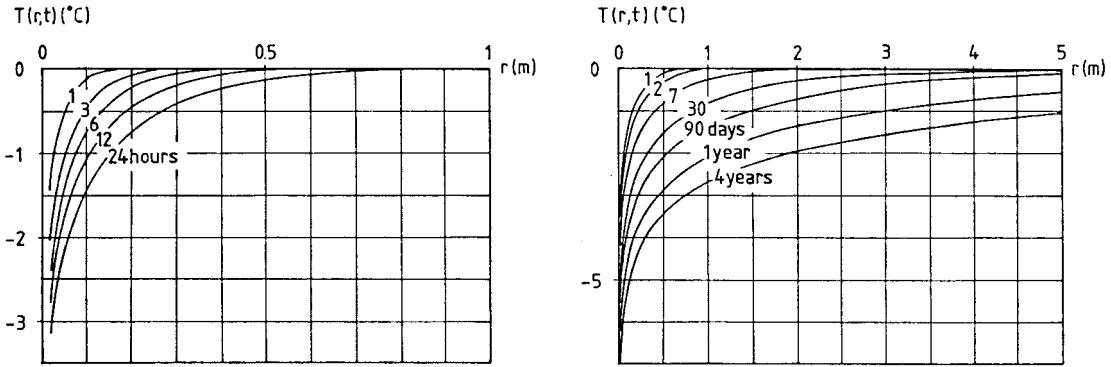
Vi är intresserade av radiell temperaturprofil och av utvecklingen i tiden på olika avstånd r . Vi inför därför två representationer av lösningen 5.3.2.1.

$$T(r, t) = \frac{q}{\lambda} \cdot E_r\left(\frac{r}{\sqrt{at}}\right) \quad (5.3.2.4)$$

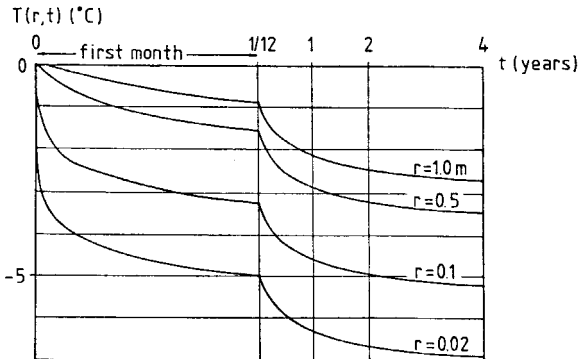
$$T(r, t) = \frac{q}{\lambda} \cdot E_t\left(\frac{at}{r^2}\right) \quad (5.3.2.5)$$

E_r och E_t ges då av:

$$E_r(s) = -\frac{1}{4\pi} E_1\left(\frac{s^2}{4}\right) \quad E_t(\tau) = -\frac{1}{4\pi} E_1\left(\frac{1}{4\tau}\right) \quad (5.3.2.6)$$



Figur 5.3.4. Temperaturprofiler vid olika tidpunkter för stegpulsen. Data enligt 5.3.2.3.

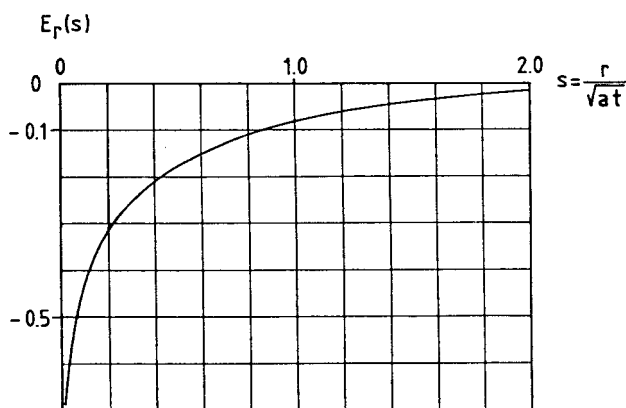


Figur 5.3.5. Temperaturutveckling på olika avstånd från röret för stegpulsen. Data enligt 5.3.2.3.

Funktionen $E_r(s)$, $s = r/\sqrt{a\tau}$, ger den radiella variationen för given tid. Den ges i tabell 5.3.1 och figur 5.3.6.

s	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1
$E_r(s)$	-1.164	-1.053	-0.908	-0.797	-0.687	-0.541	-0.431
s	0.2	0.5	1	2	5	10	
$E_r(s)$	-0.321	-0.180	-0.083	-0.018	$-2.2 \cdot 10^{-5}$	$-4.3 \cdot 10^{-14}$	

Tabell 5.3.1. Temperaturprofilfunktion $E_r(s)$, $s = r/\sqrt{at}$, för stegpulsen.



Figur 5.3.6. Temperaturprofilfunktion $E_r(s)$ för stegpulsen.

För stora s gäller asymptotiskt:

$$E_r(s) \approx -\frac{1}{\pi s} e^{-s^2/4} \quad (s > 5) \quad (5.3.2.7)$$

Temperaturen långt ut blir extremt liten på grund av exponentialfaktorn.

Temperaturen beror på r/\sqrt{at} . Längden \sqrt{at} är således ett mått på influensområdet kring röret. Temperaturpåverkan är ytterst liten i området $r/\sqrt{at} > 3$. Låt oss ta följande numeriska exempel:

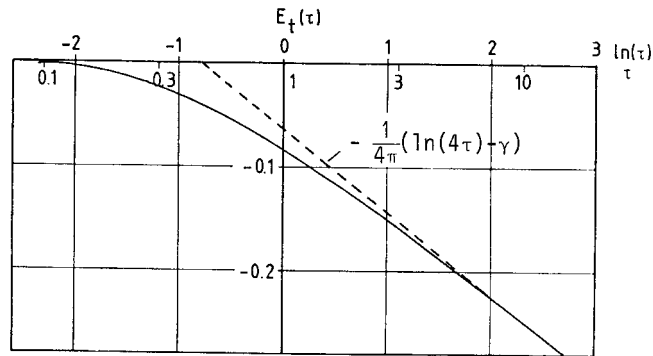
$$a = 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Influensradien \sqrt{at} blir då:

t	1 min	10 min	1 tim	1 dygn	1 vecka
\sqrt{at} (m)	0.007	0.02	0.05	0.25	0.67

t	1 månad	3 månader	1 år	3 år	10 år
\sqrt{at} (m)	1.4	2.4	4.9	8.4	15

Funktionen $E_t(\tau)$, $\tau = at/r^2$, ger temperaturförloppet i tiden för given radie. Argumentet τ är en dimensionslös tid. Funktionen ges i figur 5.3.7.



Figur 5.3.7. Funktionen $E_t(\tau)$, $\tau = at/r^2$, som ger temperaturutvecklingen för given radie enligt formel 5.3.2.5.

För stora värden på τ gäller följande formel:

$$E_t(\tau) \approx -\frac{1}{4\pi} (\ln(4\tau) - \gamma) - \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{16\tau^2} \right) \quad (5.3.2.8)$$

där $\gamma = 0.5772$ Eulers konstant ($\tau \geq 0.5$)

Maximalt fel är 1% för $\tau \geq 0.5$. Speciellt erhålles följande användbara uttryck:

$$E_t(\tau) \approx -\frac{1}{4\pi} (\ln(4\tau) - \gamma) \quad \tau \geq 5 \quad (5.3.2.9)$$

Maximalt fel är 2% för $\tau \geq 5$.

Följande exempel visar tidsskalan r^2/a för olika avstånd ($\tau = t/(r^2/a)$).

$$a = 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

r (m)	0.01	0.03	0.05	0.10	0.5	1
r^2/a	2 min	20 min	1 tim	4 tim	4 dagar	15 dagar
r (m)	2	5	10	25	100	
r^2/a	2 mån	1 år	4 år	26 år	420 år	

Denna tabell är lärorik.

Temperaturen i marken strax utanför röret eller vid brunnsväggen betecknas $T_R(t)$. Cirkeln $r=R$ ger rörets ytterrädie eller brunnsväggen. Värmebärande fluiden i röret eller brunnen har temperaturen $T_f(t)$. Det totala värmemotståndet mellan fluid och mark betecknas m_p (pipe). Det räknas per meter rör eller brunn. Dimensioner blir då $K/(W/m)$. Sambandet mellan T_f och T_R är:

$$T_f(t) = T_R(t) - m_p \cdot q(t) \quad (5.3.2.10)$$

Vår lösning för stegpulsen kan tillämpas i marken utanför röret, $r \geq R$. Vi är speciellt intresserade av rörtemperaturen T_R , dvs. temperaturen i marken strax utanför röret. Formel 5.3.2.5 ger:

$$T_R(t) = \frac{q}{\lambda} E_t\left(\frac{at}{R^2}\right) \quad (5.3.2.11)$$

Låt oss ta följande exempel:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1.5 \text{ W/m}\cdot\text{K} & a &= 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ q &= 10 \text{ W/m} & R &= 0.02 \text{ m} \end{aligned} \quad (5.3.2.12)$$

Då erhålles:

$$R^2/a = 533 \text{ s} = 9 \text{ min} \quad \frac{q}{\lambda} = 6.7^\circ\text{C}$$

Approximationen 5.3.2.9 gäller efter 45 min:

$$T_R \approx -1.44 - 0.53 \cdot \ln\left(\frac{t}{3600}\right) \quad \frac{t}{3600} > \frac{3}{4}$$

t	1 tim	5 tim	1 dygn	1 mån	1 år
T_R (°C)	-1.4	-2.3	-3.1	-5.0	-6.3

Exemplet visar att approximationen 5.3.2.9 kan användas efter ganska kort tid:

$$T_R(t) = -\frac{q}{4\pi\lambda} \left(\ln\left(\frac{4at}{R^2}\right) - \gamma \right) \quad \left(t > \frac{5R^2}{a} \right) \quad (5.3.2.13)$$

Den analytiska lösningen 5.3.2.1 för en stegpuls försummar detaljstrukturen nära röret. Strikt matematiskt erhålles stegpulsens effektuttag för $r=0$. Det visar sig vid en mer detaljerad analys att den givna lösningen är tillämpbar efter en viss begynnelsetid. Ett rimligt val av denna tid är $t = 5R^2/a$. Se referens 9 (i kap 6). Som allmän restriktion för tillämpbarheten av vår stegpulsanalys i detta avsnitt 5.3 har vi kravet:

$$t > 5 \cdot \frac{R^2}{a} \quad (5.3.2.14)$$

Detta innebär att formel 5.3.2.13 alltid kan användas. En analys för kortare tider än dessa kräver bl.a. att man tar hänsyn till värmekapacitet hos värmebäraren i rör eller brunn. Exemplet 5.3.2.12 kan gälla ett system med plastslangar i lera. Tidsgränsen för detta fall blev 45 minuter. För en bergborrad brunn kan följande data vara representativa:

$$R = 0.055 \text{ m} \quad a = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (5.3.2.15)$$

Detta ger tidsgränsen:

$$t > 5 \cdot \frac{R^2}{a} = 2.5 \text{ timmar}$$

5.3.3 Avklingning efter en effektpuls

Värmeuttaget $q(t)$ för en effektpuls som startar vid $t=0$ ges av:

$$q(t) = \begin{cases} q & 0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \text{ (och } t < 0) \end{cases} \quad (5.3.3.1)$$

Från marken erhålles en konstant effekt q (W/m) under pulstiden $0 < t < t_1$. Härefter är värmeuttaget noll. Processen för $t > t_1$ representerar avklingningen efter en effektpuls.

Effektpulsen kan genom superponering ges som summan av två stegpulser. Den första startar vid $t=0$ med effektuttaget q . Den andra startar vid $t=t_1$ med effektuttaget $-q$. Under den första perioden $0 < t < t_1$ gäller stegpulsanalysen i föregående avsnitt. Temperaturen runt röret ges av formel 5.3.2.1.

Temperaturförloppet under avklingningen blir genom superposition:

$$T(r,t) = -\frac{q}{4\pi\lambda} \left\{ E_1\left(\frac{r^2}{4at}\right) - E_1\left(\frac{r^2}{4a(t-t_1)}\right) \right\} \quad (t > t_1) \quad (5.3.3.2)$$

Speciellt ges rörtemperaturen T_R av logaritmapproximationen 5.3.2.13. Vi får följande ytterst enkla formel:

$$T_R(t) = -\frac{q}{4\pi\lambda} \ln\left(\frac{t}{t-t_1}\right) \quad \left(t > t_1 + 5 \cdot \frac{R^2}{a}\right) \quad (5.3.3.3)$$

Som exempel tar vi följande fall:

$$\begin{aligned} \lambda &= 3.0 \text{ W/m}\cdot\text{K} & a &= 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & R &= 0.055 \text{ m} \\ q &= 20 \text{ W/m} & t_1 &= 30 \text{ dagar} \end{aligned} \quad (5.3.3.4)$$

Då gäller:

$$5 \cdot \frac{R^2}{a} = 3.0 \text{ timmar} \quad \frac{q}{4\pi\lambda} = 0.53^\circ\text{C}$$

Under effektuttaget gäller då enligt formel 5.3.2.13:

$$T_R(t) = - \frac{20}{4 \cdot \pi \cdot 3} \left(\ln \left(\frac{4 \cdot 1.4 \cdot 10^{-6} \cdot t}{(0.055)^2} \right) - 0.5772 \right)$$

$$= 3.64 - 0.53 \ln(t) \quad (3 \text{ tim} < t < 30 \text{ dygn})$$

Vid avklingningen gäller enligt formel 5.3.3.3:

$$T_R(t) = -0.53 \cdot \ln \left(\frac{t}{t-t_1} \right) \quad (t > 30.1 \text{ dagar})$$

Detta ger:

t (dagar)	0.5	2	10	30	30.5	32	35
T_R ($^{\circ}\text{C}$)	-2.0	-2.8	-3.6	-4.2	-2.2	-1.5	-1.0
t (dagar)	40	60	90	120	180	365	
T_R ($^{\circ}\text{C}$)	-0.7	-0.4	-0.21	-0.15	-0.10	-0.05	

5.3.4 Superponering av effektpulser

Genom superponering kan nu fallet med ett godtyckligt antal effektpulser lösas. Effektuttaget, $q(t)$, är konstant under givna tidsintervall:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ q_1 & t_1 < t < t_2 \\ q_2 & t_2 < t < t_3 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{cases} \quad (5.3.4.1)$$

Då tiden t ligger i det n :te intervallet blir temperaturen:

$$T(r,t) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{4\pi\lambda} \left\{ E_1 \left(\frac{r^2}{4a(t-t_i)} \right) - E_1 \left(\frac{r^2}{4a(t-t_{i+1})} \right) \right\} \\ - \frac{q_n}{4\pi\lambda} E_1 \left(\frac{r^2}{4a(t-t_n)} \right) \quad (5.3.4.2)$$

$$t_n < t < t_{n+1}$$

I formeln har uttryck 5.3.3.2 omvänt för pulserna 1,2,..., n-1 och uttryck 5.3.2.1 för den pågående pulsen. En alternativ form för 5.3.4.2 är:

$$T(r,t) = - \sum_{i=1}^n \frac{q_i - q_{i-1}}{4\pi\lambda} E_1 \left(\frac{r^2}{4a(t-t_i)} \right) \quad (5.3.4.3) \\ (q_0 = 0)$$

Den första termen härrör från stegpulsen q_1 ($= q_1 - q_0$) vid $t = t_1$. Nästa term, dvs. andra termen i summan, härrör från den vid tiden $t = t_2$ överlagrade stegpulsen $q_2 - q_1$.

Rörtemperaturen T_R blir med användning av formlerna 5.3.3.3 och 5.3.2.13:

$$T_R(t) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{4\pi\lambda} \ln \left(\frac{t-t_i}{t-t_{i+1}} \right) - \\ - \frac{q_n}{4\pi\lambda} \left(\ln \left(\frac{4a(t-t_n)}{R^2} \right) - \gamma \right) \quad (5.3.4.4)$$

$$\gamma = 0.5772$$

Alternativt kan detta skrivas:

$$T_R(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{q_i - q_{i-1}}{\lambda} \cdot \frac{1}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{4a(t-t_i)}{R^2} \right) - \gamma \right) \quad (5.3.4.5) \\ (q_0 = 0)$$

Införes en referenstid t_p kan 5.3.4.5 skrivas:

$$\begin{aligned}
 T_R(t) = & -\frac{q_n}{4\pi\lambda} \left(\ln\left(\frac{4at_p}{R^2}\right) - 0.5772 \right) \\
 & - \sum_{i=1}^n \frac{q_i - q_{i-1}}{4\pi\lambda} \ln\left(\frac{t-t_i}{t_p}\right) \quad (5.3.4.6) \\
 (q_0 = 0) \quad & (t_n + 5 \cdot \frac{R^2}{a} < t < t_{n+1})
 \end{aligned}$$

Exempel. $\lambda = 3.5 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ $a = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$R = 0.055 \text{ m}$

Effektuttaget är föreskrivet för perioder om ett kvarts år. Under sommarperioden tillföres berget värme.

$$q(t) = \begin{cases} 10 \text{ (W/m)} & \text{höst 1} & (3 \text{ månader}) \\ 30 & \text{vinter 1} & " \\ 15 & \text{vår 1} & " \\ -10 & \text{sommar 1} & " \\ 10 & \text{höst 2} & " \\ \text{osv} & & \end{cases}$$

Vi får med referenstiden $t_p = 3 \text{ månader}$:

$$\frac{1}{4\pi\lambda} \left(\ln\left(\frac{4at_p}{R^2}\right) - 0.5772 \right) = 0.208$$

Temperaturen vid brunnen ges av formel 5.3.4.6. Vi tar $t_1 = 0$, $t_2 = t_p$ osv.

1. Höst 1, $0 < t < t_p$

$$T_R = -2.08 - 0.227 \cdot \ln\left(\frac{t}{t_p}\right) \quad \left(t > 5 \cdot \frac{R^2}{a}\right)$$

2. Vinter 1, $t_p < t < 2 \cdot t_p$

$$T_R = -6.24 - 0.227 \ln \left(\frac{t}{t_p} \right) - 0.454 \ln \left(\frac{t}{t_p} - 1 \right)$$

3. Vår 1, $2t_p < t < 3t_p$

$$T_R = -2.08 - 0.227 \ln \left(\frac{t}{t_p} \right) - 0.454 \ln \left(\frac{t}{t_p} - 1 \right) + 0.340 \ln \left(\frac{t}{t_p} - 2 \right)$$

4. Sommar 1, $3t_p < t < 4t_p$

$$T_R = 2.08 - 0.227 \ln \left(\frac{t}{t_p} \right) - 0.454 \ln \left(\frac{t}{t_p} - 1 \right) + 0.340 \ln \left(\frac{t}{t_p} - 2 \right) + 0.568 \ln \left(\frac{t}{t_p} - 3 \right)$$

Osv.

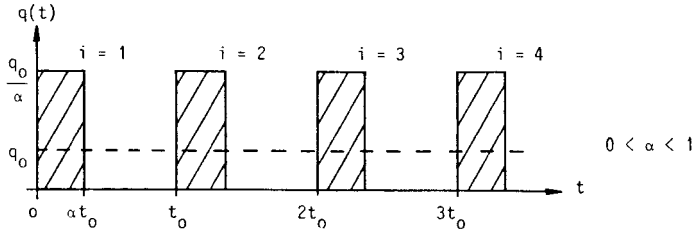
Nedanstående tabell visar några värden för T_R enligt ovanstående formler.

t/t_p	0.01	0.1	1	1.01	1.1	2
T_R ($^{\circ}\text{C}$)	-1.03	-1.56	-2.08	-4.15	-5.22	-6.40

t/t_p	2.01	2.1	3	3.01	3.1	4
T_R ($^{\circ}\text{C}$)	-3.81	-3.07	-2.64	-1.10	0.21	1.50

5.3.5 Pulståg

Ett viktigt specialfall är en sekvens av likadana pulser, ett pulståg. Periodtiden, dvs. tiden mellan två pulsers start, är t_0 . Längden av pulserna är αt_0 , $0 < \alpha < 1$. Pulstågets medeleffekt är q_0 (W/m). Effektuttaget för pulserna blir då q_0/α . Se figur 5.3.8.



Figur 5.3.8. Pulståg med medeleffektuttaget q_0 .

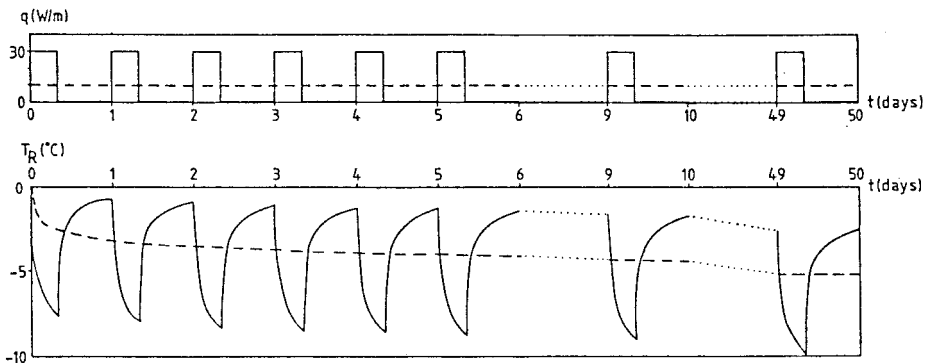
Rörtemperaturen T_R erhålles genom superposition enligt det ovan sagda.

Exempel. $t_0 = 1$ dag $q_0 = 10$ W/m $\alpha = 1/3$

(5.3.5.1)

$\lambda = 1.5$ W/m · K $a = 0.75 \cdot 10^{-6}$ m²/s R = 0.02 m

Beräknad uttagstemperatur visas i nedanstående figur. Den streckade linjen visar $T_R(t)$ för konstant effektuttag $q(t) = q_0$.



I exemplet ovan oscillerar rörtemperaturen för pulståget kring den streckade kurvan för medeleffektuttaget $q(t) = q_0$. Den transienta ändringen från puls till puls försvinner efter ett fåtal pulser. Oscillationen kring medeleffektkurvan är i stort likadan under den 5:e, 10:e och 50:e dagen.

Dessa oscillationer representerar effekten av pulsationen. Denna del skall överlagras bidraget från medeleffekten $q(t) = q_0$.

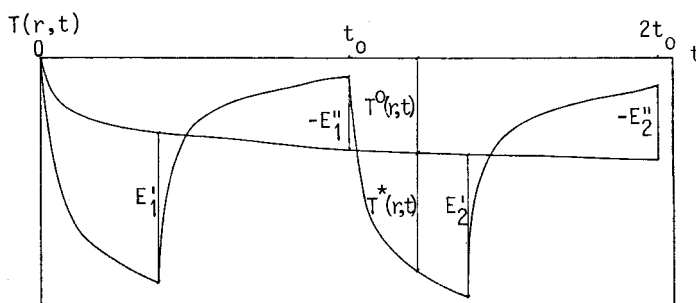
De formler som ges nedan gäller både för rörradien $r = R$ och för godtyckliga andra avstånd r . Låt $T^0(r,t)$ beteckna bidraget från konstant effektuttag q_0 . Formel 5.3.2.1 ger:

$$T^0(r,t) = -\frac{q_0}{4\pi\lambda} E_1\left(\frac{r^2}{4at}\right) \quad (5.3.5.2)$$

Den överlagrade oscillerande delen betecknas $T^*(r,t)$. Den totala temperaturen från pulståget blir då:

$$T(r,t) = T^0(r,t) + T^*(r,t) \quad (5.3.5.3)$$

Figur 5.3.9 visar de två komponenterna.



Figur 5.3.9. Temperatur $T(r,t)$ från ett pulståg. Definition av extremvärdena E_1^i och E_2^i .

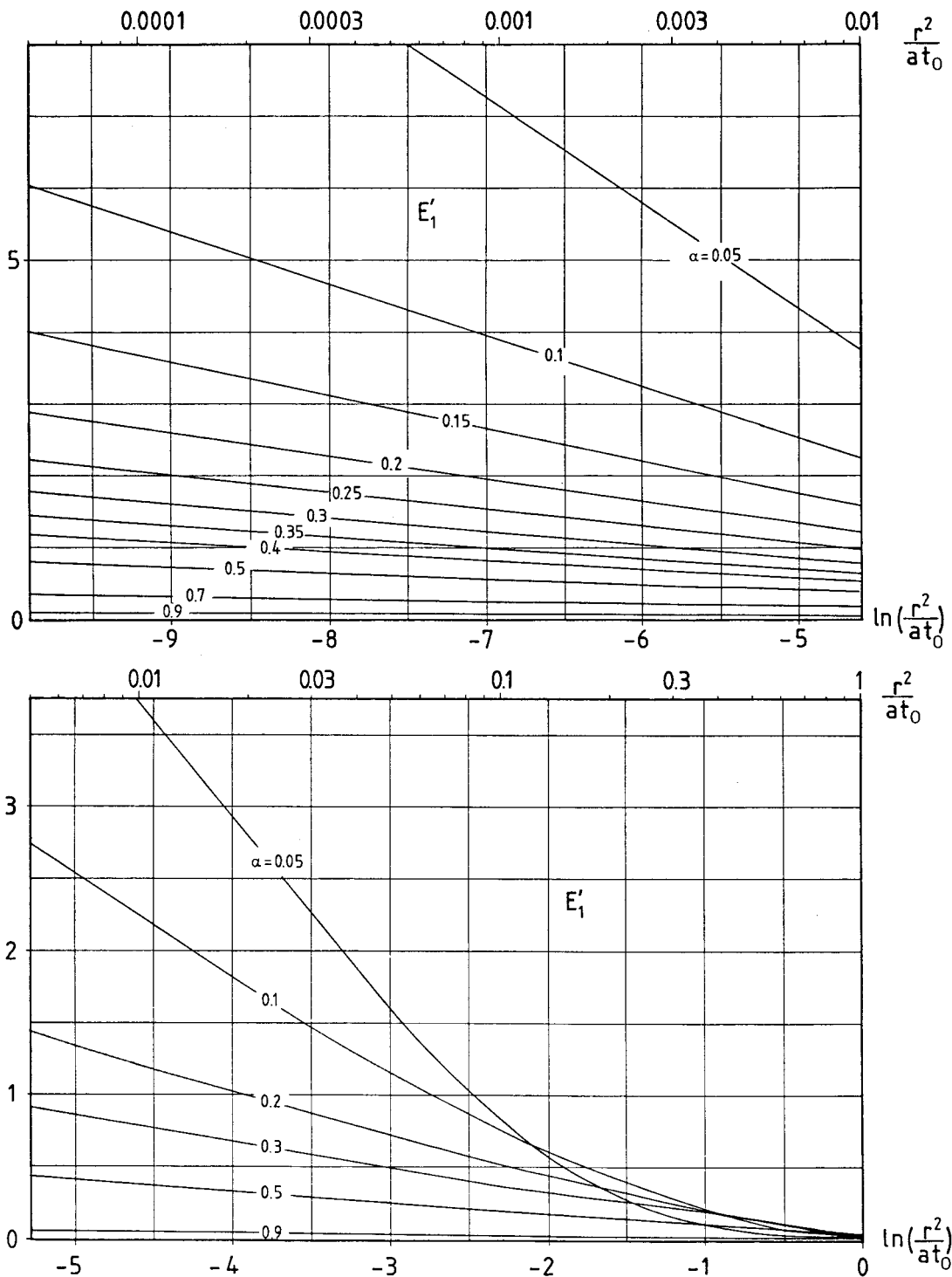
Vi är framför allt intresserade av extremvärdena för oscillationen T^* . Dessa erhålles vid slutet av varje puls (E_1^i för puls i) och i slutet av varje period strax innan nästa puls startar (E_2^i för period i). Se figur 5.3.9. En dimensionsanalys visar att E_1^i och E_2^i blir funktioner av

$r^2/(at_0)$ och α . Vi har då

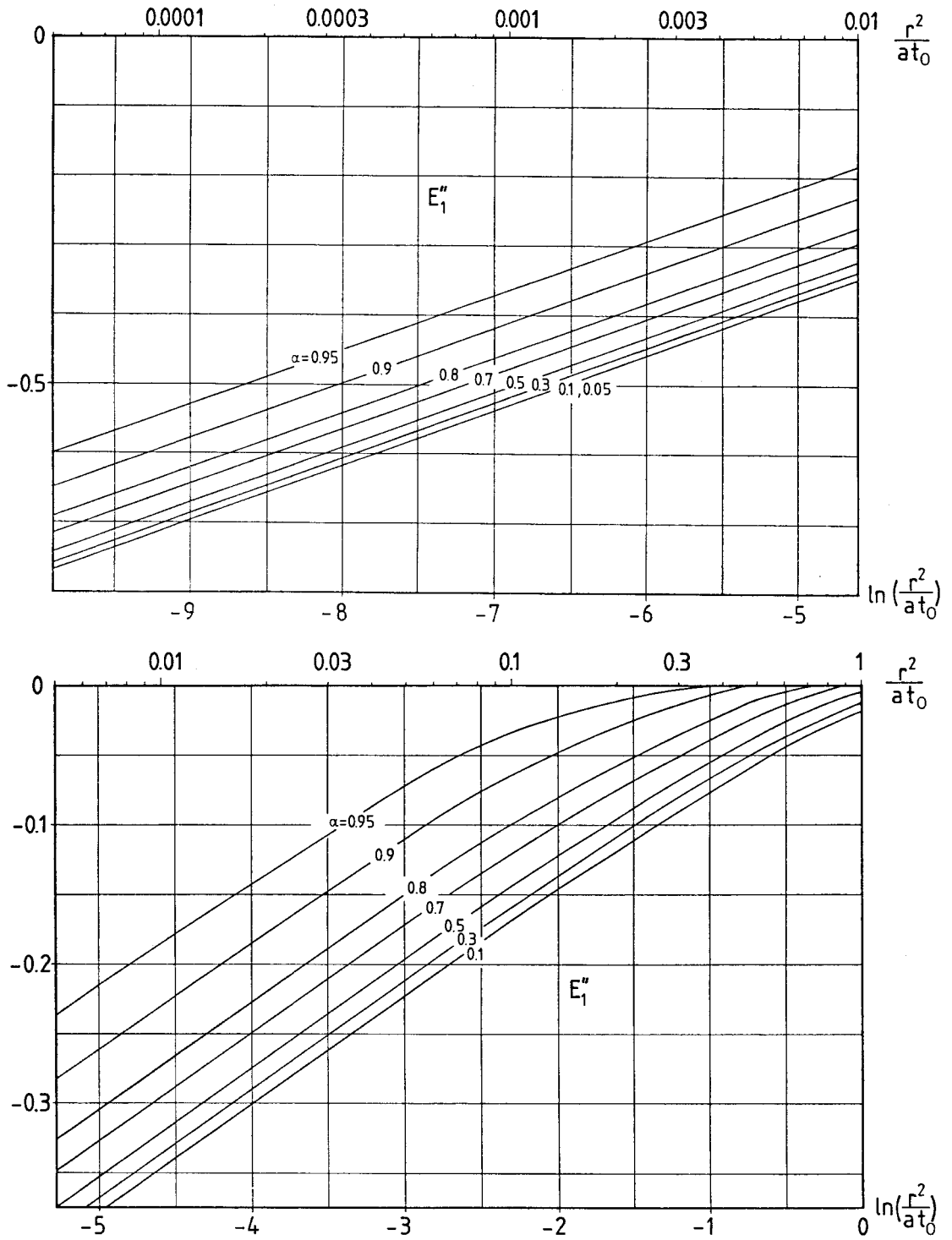
$$T^*(r, t_0(i-1) + \alpha t_0) = -\frac{q_0}{\lambda} E_i^I \left(\frac{r^2}{at_0}, \alpha \right) \quad (5.3.5.4)$$

$$T^*(r, t_0 i) = -\frac{q_0}{\lambda} E_i^{II} \left(\frac{r^2}{at_0}, \alpha \right)$$

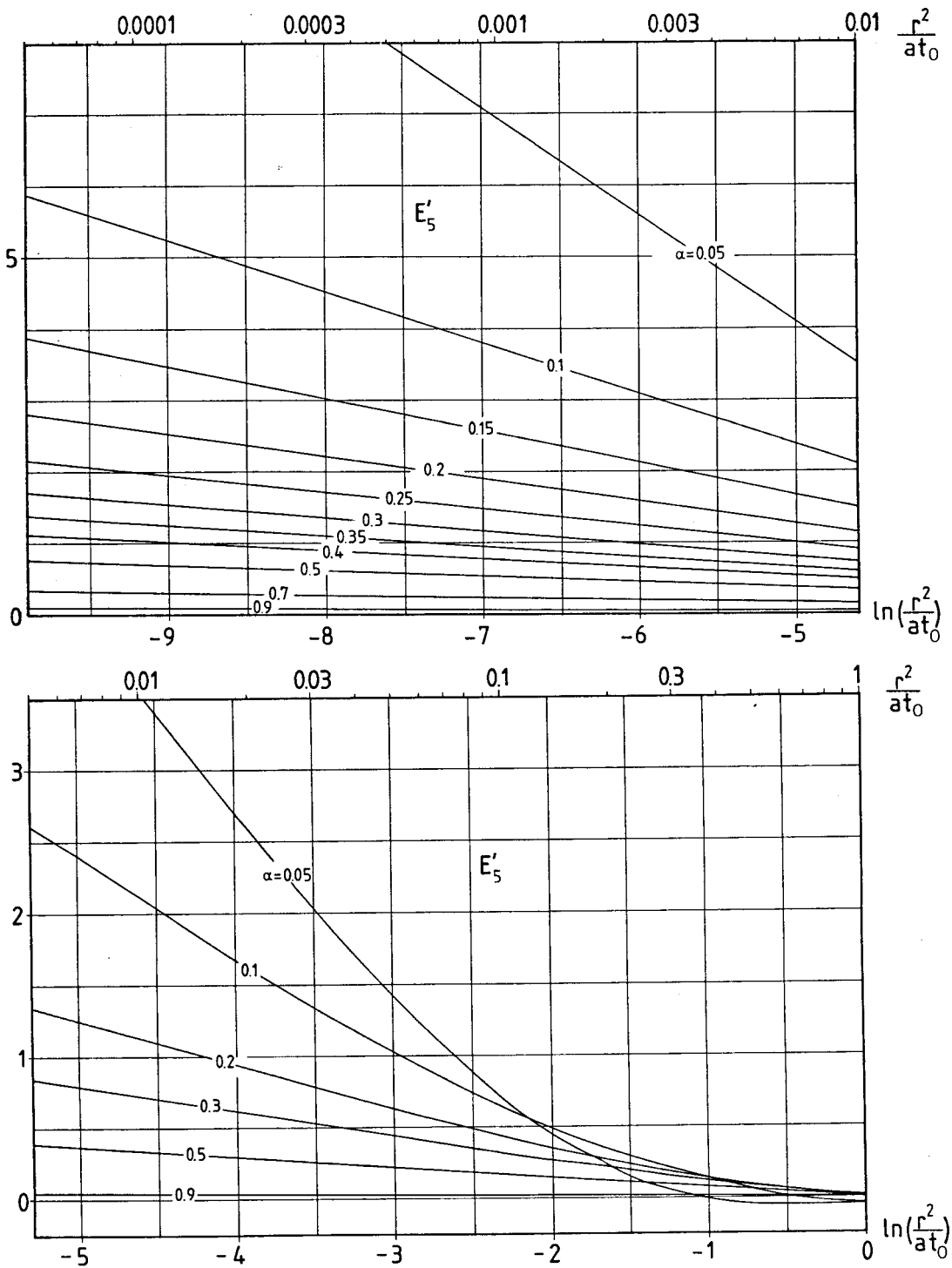
De två funktionerna E_i^I och E_i^{II} visas i figur 5.3.10-13 för $i = 1$ och $i = 5$. Normalt räcker det med dessa två i -värden eftersom variationen med i är måttlig.



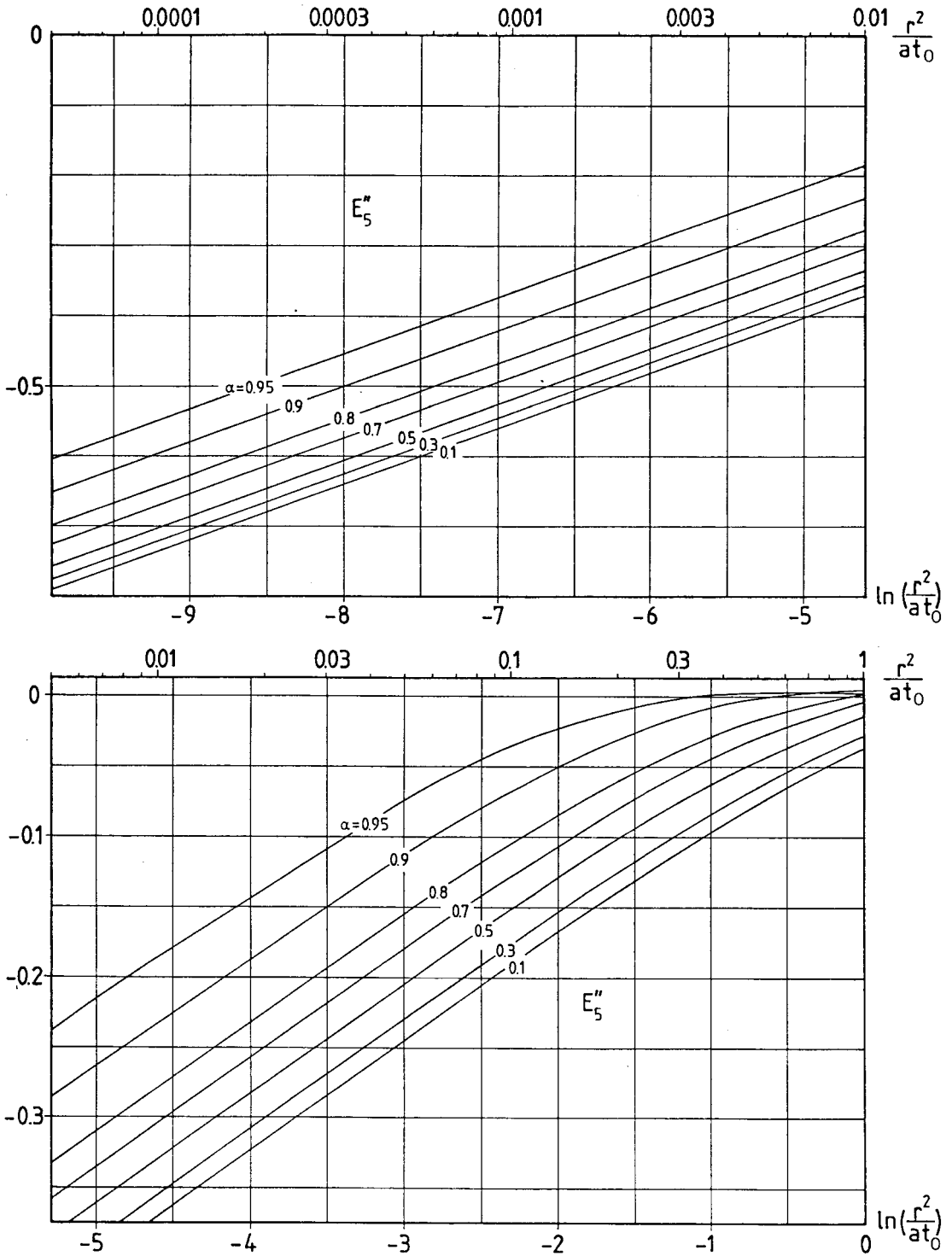
Figur 5.3.10. Pulstågsfunktion E'_1 för första cykeln. Se formel 5.3.5.4 och figur 5.3.9.



Figur 5.3.11. Pulstågsfunktion E_1'' för första cykeln. Se formel 5.3.5.4 och figur 5.3.9.



Figur 5.3.12. Pulstågsfunktion E'_5 för femte cykeln. Se formel 5.3.5.4 och figur 5.3.9.



Figur 5.3.13. Pulstågsfunktion E''_5 för femte cykeln. Se formel 5.3.5.4 och figur 5.3.9.

5.4 Temperaturavklingning av ett uppvärmt område

De transienta och periodiska förloppen utanför en lagervolym har behandlats i avsnitt 5.1-2. Temperatur eller värmefflöde är då givna på lagervolymens begränsningsyta mot omgivande mark. I detta avsnitt skall temperaturförloppet i och kring en uppvärmd markvolym studeras. Se referens 8. Frågeställningen gäller hur snabbt temperaturen i en uppvärmd zon sjunker.

Lagerzonen värms under en given laddningsperiod. Därefter lämnas lagret ostört fram till dess att värmeuttaget påbörjas. Värmeledning i och kring lagret ger en med tiden sjunkande temperatur.

Vi skall i det följande studera ett fall där lagerzonen initialt har en konstant temperatur T_1 . Omgivande mark har begynnelsestemperaturen T_0 . Vid markytan är temperaturen T_0 . Marken har homogena termiska egenskaper.

Detta enkla fall är mycket användbart. Antag att vi har ett dynamiskt temperaturförlopp i lagret och i omgivande mark. Lagret ges sedan en extra temperaturhöjning. Den totala termiska processen är en superposition av det ursprungliga förloppet och lösningen till den adderade temperaturhöjningen. Avklingningen av den adderade lösningen, dvs. av den extra temperaturhöjningen, är fullständigt oberoende av den ursprungliga termiska processen.

Denna superpositionsteknik används för att beräkna temperaturavklingningen i ett värmelager. Vi inför en dimensionslös temperatur u definierad av

$$T(x,y,z,t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot u(x,y,z,t) \quad (5.4.1)$$

Temperaturavklingning räknas från en momentan temperaturhöjning vid tiden $t = 0$. Om värme tillföres under en given laddningsperiod räknas lämpligen tiden för temperaturavklingningen från laddningsperiodens mitt.

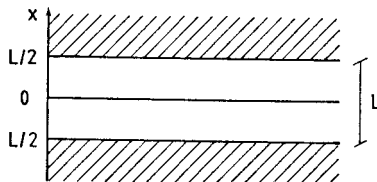
5.4.1 Lager på stort djup

Här behandlas de fall där lagret är beläget på ett stort djup. Det termiska förloppet i lagret påverkas ej av förhållanden vid markytan.

5.4.1.1 Endimensionellt plant fall

Det endimensionella plana fallet ger en fundamentallösning som används för analys av flerdimensionella problem. Detta fall kan dessutom användas för att uppskatta värmeförlusten från ett lager med stor horisontell utsträckning i förhållande till dess tjocklek i vertikalled. Värmetransporten i lagret är då huvudsakligen vertikal. Lagret har en tjocklek L och befinner sig i en oändlig omgivning $-\infty < x < \infty$. Lagrets mittpunkt befinner sig i origo. Se figur 5.4.1. Vi inför en dimensionslös tid τ och en dimensionslös längdkoordinat x' :

$$\tau = \frac{4at}{L^2} \quad x' = \frac{x}{L} \quad (5.4.2)$$



Figur 5.4.1. Endimensionellt plant fall.

Temperaturen i området ges av referens 102 D.

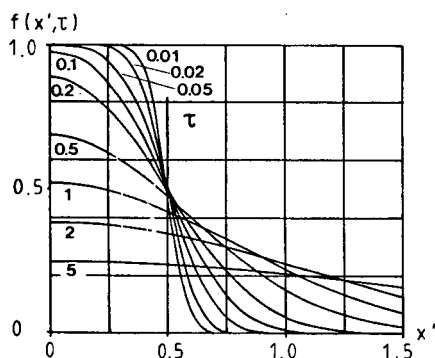
$$u(x,t) = f(x',\tau) \quad (5.4.3)$$

$$f(x',\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{0.5-x'}{\sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{0.5+x'}{\sqrt{\tau}} \right) \right\}$$

Beteckningen erf avser felfunktionen. Se referens 10.3.B eller avsnitt 3.6. Funktionen $f(x',\tau)$ ges i figur 5.4.2.

Temperaturen i lagrets mittpunkt ges av

$$u(0,t) = \operatorname{erf} \left(\frac{L}{2\sqrt{4at}} \right) \quad (5.4.4)$$



Figur 5.4.2. Temperaturavklingning för det endimensionella plana fallet.
 $x' = x/L$, $\tau = 4at/L^2$

Vid lagrets gränssyta ($x = \pm L/2$) mot omgivningen gäller

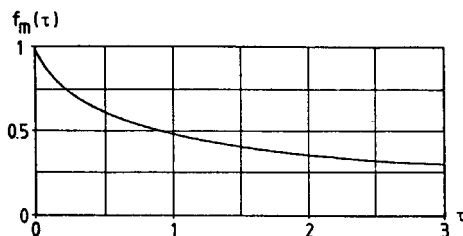
$$u(\pm L/2, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{L}{\sqrt{4at}} \right) \quad (5.4.5)$$

Energiinnehållet i lagret är direkt proportionellt mot medelövertemperaturen i lagret. Genom att integrera formel 5.4.3 erhålls medeltemperaturen:

$$u_m(t) = f_m(\tau)$$

$$f_m(\tau) = \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) - \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \right) \quad (5.4.6)$$

Funktionen $f_m(\tau)$ ges i tabell 5.4.1 och i figur 5.4.3.



Figur 5.4.3. Avklingning av medeltemperaturen för det endimensionella plana fallet.

τ	0	0.001	0.01	0.05	0.1
$f_m(\tau)$	1	0.982	0.944	0.874	0.822
τ	0.25	0.5	0.75	1	1.25
$f_m(\tau)$	0.718	0.610	0.538	0.486	0.447
τ	1.5	2	3	5	10
$f_m(\tau)$	0.415	0.369	0.308	0.244	0.175
τ	0.0003	0.031	0.196	0.91	4.8
$f_m(\tau)$	0.99	0.90	0.75	0.50	0.25

Tabell 5.4.1. Funktion $f_m(\tau)$ som ger lagrets medeltemperatur för det plana fallet.

För små och stora värden på τ gäller följande asymptotiska uttryck:

$$f_m(\tau) \approx 1 - \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \quad \tau \ll 1$$

$$f_m(\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \left(1 - \frac{1}{6\tau}\right) \quad \tau \gg 1$$
(5.4.7)

Exempel 1. Ett grundvattenskiakt med tjockleken L uppvärms till 50°C . Temperaturen i omgivande mark är 10°C . Lagringsperioden är 6 månader. Marken antas ha homogena termiska egenskaper med värmeledningsförmåga 2 W/mK och värmekapacitiveteten $2 \text{ MJ/m}^3\text{K}$.

Grunddata

$$t = 6 \text{ månader} = 15.768 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$a = \lambda/C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Vi inför en karakteristisk längd för systemet:

$$L_t = \sqrt{4at} = 7.9 \text{ m}$$

$$\tau = 4at/L^2 = (L_t/L)^2 = (7.9/L)^2$$

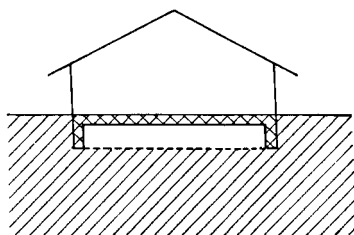
Värmeförlusten är proportionell mot medeltemperaturens avklingning för skiktet. Energiinnehållet räknas relativt den ostörda marktemperaturen. Värmeförlusten för några olika värden på tjockleken L ges i tabell 5.4.2.

L (m)	2	4	8	16	32
τ	15.6	3.90	0.98	0.24	0.061
Värmeförlust (%)	86	73	51	30	14

Tabell 5.4.2. Värmeförlust från ett grundvattensskikt med tjockleken L efter 6 månader.

Detta illustrerar storlekens betydelse för lagrets effektivitet. Det krävs i detta fall en tjocklek på 8 meter för att ungefär halva energimängden skall återstå efter 6 månader.

Exempel 2. Figur 5.4.4 visar ett lager som är beläget omedelbart under ett hus. Lagret har tjockleken D . Lagrets sidor och överyta är isolerade.



Figur 5.4.4. Lager beläget omedelbart under ett hus.

Lagret uppvärms under ett initialskede till temperaturen T_1 . Begynnelsestemperaturen i omgivande mark är T_0 . Värmeflödet är huvudsakligen endimensionellt. Antag att värmeflödet genom isoleringarna kan försummas. Värmeflödet är då noll vid $x=0$ i lösningen (formel 5.4.3) p.g.a. symmetri. Lösningen till detta exempel ges om vi sätter $L=2D$. Medeltemperaturen i lagret ges av formlerna 5.4.1. och 5.4.6:

$$T_m(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot f_m(4at/4D^2)$$

Tabell 5.4.3 ger den tid då 50% av lagrets värme har förlorats för olika tjocklekar.

$t_{1/2}$	1 dag	1 vecka	1 månad	3 månader	6 månader
D (m)	0.31	0.82	1.7	2.9	4.2

Tabell 5.4.3. Lagringstid $t_{1/2}$ vid vilken 50% av värmen har förlorats. $a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Aterigen ser vi storlekens betydelse för lagrets effektivitet.

Det bör observeras att endimensionellt vertikalt flöde har förutsatts råda för dessa exempel. Avvikelser från detta antagande, d.v.s. flerdimensionella effekter, kommer att öka förlusten från lagret.

5.4.1.2. Parallelepipediskt lager

Lagret har formen av en parallelepiped med kantlängderna L_x , L_y , och L_z . Lagret ges vid tiden $t=0$ en övertemperatur i förhållande till omgivande mark.

Den dimensionslösa temperaturen u ges som en produkt av endimensionella fundamentallösningar, formel 5.4.3, för de tre koordinatriktingarna.

$$u(x,y,z,t) = f\left(\frac{x}{L_x}, \frac{4at}{L_x^2}\right) \cdot f\left(\frac{y}{L_y}, \frac{4at}{L_y^2}\right) \cdot f\left(\frac{z}{L_z}, \frac{4at}{L_z^2}\right) \quad (5.4.8)$$

Funktionen $f(x',\tau)$ definieras av formel 5.4.3. Medeltemperaturen erhålls genom integration av formel 5.4.8:

$$u_m(t) = f_m\left(\frac{4at}{L_x^2}\right) \cdot f_m\left(\frac{4at}{L_y^2}\right) \cdot f_m\left(\frac{4at}{L_z^2}\right) \quad (5.4.9)$$

Funktionen $f_m(\tau)$ är definierad av formel 5.4.6. Den ges i figur 5.4.3 och i tabell 5.4.1. För små och stora värden på τ kan formel 5.4.7 tillämpas.

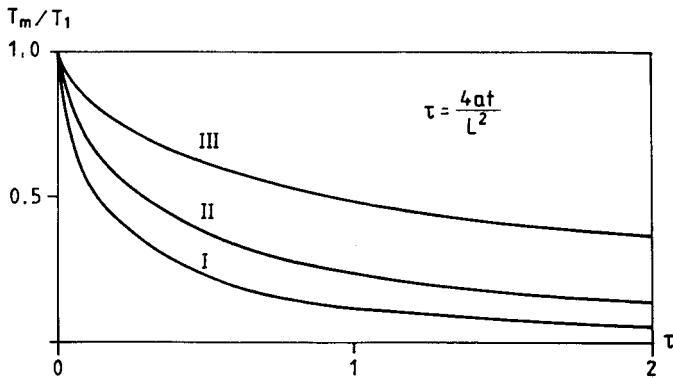
Exempel. I figur 5.4.5 jämförs temperaturavklingningen för kub, kvadrat och oändliga platta.

Vi har följande data:

I. $L_x = L_y = L_z = L$ (kub)

II. $L_x = +\infty, L_y = L_z = L$ (kvadrat)

III. $L_x = L_y = +\infty, L_z = L$ (platta)



Figur 5.4.5. Temperaturavklingning för kub (I), kvadrat (II) och oändlig platta (III).

Betrakta värmeförlusten vid den tidpunkt då hälften av värmeinnehållet förlorats i det endimensionella fallet. För kvadraten har då 3/4 av värmen förlorats, emedan kuben har förlorat 7/8. De två- och tredimensionella effekterna kan som synes vara betydande.

Här ges några numeriska exempel.

$$a = \lambda/C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad t = 6 \text{ månader} \quad \sqrt{4at} = 7.9 \text{ m}$$

L_x	L_y	L_z	$u_m(t)$
15	15	15	$0.70 \cdot 0.70 \cdot 0.70 = 0.34$
15	15	10	$0.70 \cdot 0.70 \cdot 0.57 = 0.28$
15	15	5	$0.70 \cdot 0.70 \cdot 0.33 = 0.16$
20	15	5	$0.77 \cdot 0.70 \cdot 0.33 = 0.18$
50	50	50	$0.91 \cdot 0.91 \cdot 0.91 = 0.75$
30	30	30	$0.85 \cdot 0.85 \cdot 0.85 = 0.61$

Tabell 5.4.4. Temperaturavklingning för parallelepipedisk volym med kantlängderna L_x , L_y och L_z efter 6 månader.

Det framgår av tabellen att temperaturavklingningen till största delen bestäms av den minsta kantlängden.

5.4.1.3 Endimensionellt radiellt fall

Många lagringssystem utnyttjar en volym som har formen av en cylinder med vertikal symmetriaxel. Det tredimensionella temperaturförloppet för ett sådant fall är en funktion av en radiell koordinat r och en vertikal koordinat z . I detta avsnitt behandlas det rent radiella fallet för en cylinder med stor höjd.

Låt R vara lagrets radie. Temperaturen beror av dimensionslös längd och tid:

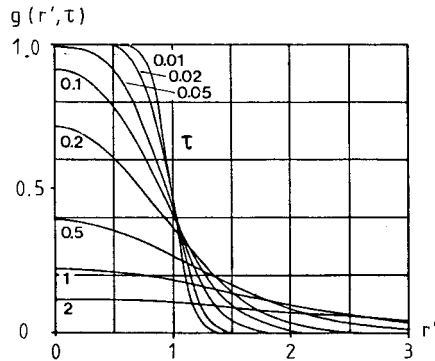
$$r' = \frac{r}{R} \quad \tau = \frac{at}{R^2} \quad (5.4.10)$$

Den dimensionslösa temperaturen kan nu skrivas som:

$$u(r,t) = g(r', \tau) \quad (5.4.11)$$

För temperaturen i cylinderns mittpunkt ($r=0$) gäller följande enkla uttryck:

$$u(0,t) = 1 - e^{-\frac{R^2}{4at}} \quad (5.4.12)$$



Figur 5.4.6. Temperaturavklingning för det endimensionella radiella fallet. $r' = r/R$, $\tau = at/R^2$.

Vårt huvudintresse avser temperaturavklingningen i lagringscylindern. Värmeinnehållet representeras av medeltemperaturen:

$$u_m(t) = g_m(\tau)$$

där

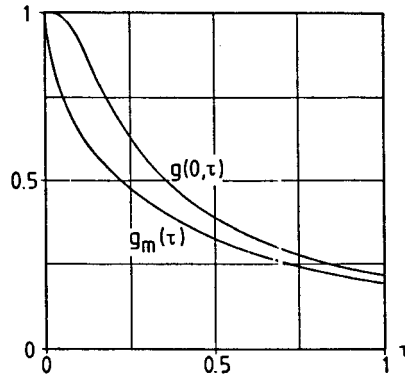
$$g_m(\tau) = 1 - e^{-\frac{1}{2\tau}} \left[I_0\left(\frac{1}{2\tau}\right) + I_1\left(\frac{1}{2\tau}\right) \right] \quad (5.4.13)$$

Här är I_0 och I_1 modifierade Besselfunktioner 103 C.

För små och stora värden på τ har vi de asymptotiska uttrycken:

$$\begin{aligned} g_m(\tau) &\approx 1 - 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} & \tau \ll 1 \\ g_m(\tau) &\approx \frac{1}{4\tau} \left(1 - \frac{1}{4\tau} \right) & \tau \gg 1 \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Temperaturen i lagrets centrum $g(0, \tau)$ och medelvärdet $g_m(\tau)$ ges i figur 5.4.7. Funktionen $g_m(\tau)$ ges även i tabell 5.4.5.



Figur 5.4.7. Avklingning av cylindervolymens medeltemperatur, $g_m(\tau)$, och av temperaturen i centrum, $g(0,\tau)$.

τ	0	0.001	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5
$g_m(\tau)$	1	0.96	0.90	0.75	0.65	0.48	0.33
τ	0.75	1	1.25	1.5	2.5	5	10
$g_m(\tau)$	0.25	0.20	0.17	0.14	0.09	0.05	0.02
τ	$8 \cdot 10^{-5}$	0.008	0.05	0.22	0.75		
$g_m(\tau)$	0.99	0.90	0.75	0.50	0.25		

Tabell 5.4.5. Funktion $g_m(\tau)$ som ger lagrets medeltemperatur för det radiella fallet.

Exempel 1. När har 50% av värmen förlorats för ett cylinderformat lager med radien R och med stor höjd?

$$a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \tau = \frac{at}{R^2} = 0.22 \text{ (tabell 5.4.5)}$$

$$t = \frac{0.22}{a} R^2 = \frac{0.22 \cdot 10^6}{3600 \cdot 24} \cdot R^2 \text{ (dygn)}$$

$$t = 2.55 R^2 \text{ dygn}$$

För några värden på radien R erhålls

$R(\text{m})$	1	2	5	10
$t(\text{dygn})$	2.6	10.2	63.8	255.0

Exempel 2. Låt oss jämföra ett cylindriskt och ett kvadratisk område med samma area:

$$\pi R^2 = L^2$$

Låt t_c och t_K beteckna den tid då 50% av värmen har förlorats i det cylindriska respektive kvadratiska fallet. Från figur 5.4.7 och figur 5.4.5 erhålls

$$\frac{at_c}{R^2} = 0.22 \qquad \frac{4at_K}{L^2} = 0.27$$

eller med samma area

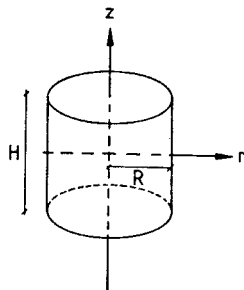
$$t_c = 0.22 \frac{R^2}{a} \qquad t_K = \frac{0.27\pi}{4} \cdot \frac{R^2}{a} = 0.21 \frac{R^2}{a}$$

Det kvadratiska området förlorar värmen något snabbare.

5.4.1.4 Cylindriskt lager

Lagervolymen har ofta formen av en cylinder med vertikal axelriktning. Cylindern har lägre värmeförlust än ett parallelepipedformat lager med samma volym och höjd. Vid injektering av varmvatten via en brunn i en akvifer får det uppvärmda området ofta naturligt formen av en cylinder.

Figur 5.4.8 visar ett cylinderformat lager i en oändlig omgivning.



Figur 5.4.8. Cylinderformat lager i en oändlig omgivning.

Cylinderns radie och höjd betecknas med R respektive H . Begynnelse-temperaturen är T_1 i cylinderregionen och T_0 i området utanför denna. Temperaturen är en funktion av r , z och t . Lösningen kan uttryckas som produkten av de lösningar som ges i kapitel 5.4.1.1 och 5.4.1.3.

$$T(r,z,t) = T_0 + (T_1 - T_0) g\left(\frac{r}{R}, \frac{at}{R^2}\right) \cdot f\left(\frac{z}{H}, \frac{4at}{H^2}\right) \quad (5.4.15)$$

Funktionerna g och f ges i figur 5.4.6 respektive 5.4.2.

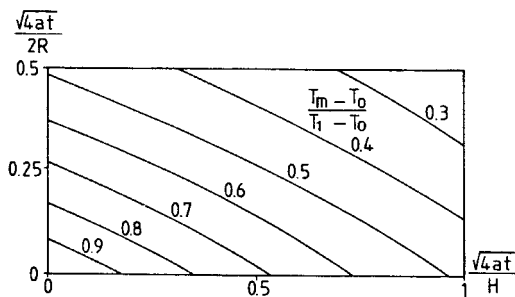
Värmeinnehållet ges av medelövertemperaturen i cylinderregionen. Medelvärdet av formel 5.4.15 erhålls ur medelvärdet av f och g . Vi har

$$T_m(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot g_m\left(\frac{at}{R^2}\right) \cdot f_m\left(\frac{4at}{H^2}\right) \quad (5.4.16)$$

Funktionen $f_m(\tau)$ ges i tabell 5.4.1 och i figur 5.4.3. För små och stora tider gäller formel 5.4.7. Funktionen $g_m(\tau)$ ges i tabell 5.4.5 och figur 5.4.7. Värderna för små och stora tider erhålls ur formel 5.4.14. Temperaturavklingningen för en cylinder ges av produkten av ett endimensionellt fall med höjden H och ett radiellt fall med en uppvärmd region $0 \leq r \leq R$.

Temperaturavklingningen beror av två parametrar at/R^2 och $4at/H^2$. Storheten $\sqrt{4at}$ är en längd. Temperaturavklingningen är en funktion av längd-förhållandena $\sqrt{4at}/(2R)$ och $\sqrt{4at}/H$. Värmeförlusten beror således på storleken av längden $\sqrt{4at}$ jämfört med höjden H och diametern $2R$ på cylindern.

Temperaturavklingningen ges i figur 5.4.9. Axlarna är längdkvoterna $\sqrt{4at}/H$ och $\sqrt{4at}/(2R)$. Varje kurvskaramotsvarar ett speciellt värde av kvoten $(T_m(t) - T_0)/(T_1 - T_0)$.



Figur 5.4.9. Temperaturavklingning för ett uppvärmt cylindriskt område.

Uttrycket 5.4.16 för medeltemperaturen kan förenklas om vi använder de asymptotiska formlerna 5.4.14 och 5.4.7. Vi erhåller då:

$$\frac{T_m(t) - T_0}{T_1 - T_0} \cong \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{4at}}{H}\right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{4at}}{2R}\right) \quad (5.4.17)$$

$$\left(\frac{\sqrt{4at}}{H} < \frac{1}{2} \text{ och } \frac{\sqrt{4at}}{2R} < \frac{1}{4}\right)$$

Felet är mindre än 1% inom angivna gränser ($\sqrt{4at} < H/2$, $R/2$). Formeln kan användas när $(T_m - T_0)/(T_1 - T_0)$ är större än 0.7.

Exempel. Vi tar följande värden

$$a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad t = 6 \text{ månader}$$

Detta ger längden

$$\sqrt{4at} = 7.9 \text{ m}$$

Nedanstående tabell ger värmeförlusten för olika H och R. Formel 5.4.16 och figur 5.4.3 och 5.4.7 har använts.

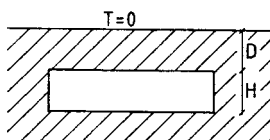
H	R	$(T_m - T_0)/(T_1 - T_0)$	Förlust (%)
5	5	0.11	89
10	5	0.16	84
5	10	0.23	77
10	10	0.32	68
10	20	0.44	56
20	20	0.60	40
20	40	0.69	31
50	50	0.83	17

Tabell 5.4.6. Medeltemperaturavklingning och värmeförlust för uppvärmt cylindriskt område med höjden H och radien R efter 6 månader. ($a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.)

Vi ser återigen att värmeförlusten från små system är mycket stor.

5.4.2. Lager nära markytan

I avsnitt 5.4.1 behandlades temperaturavklingningen för ett uppvärmt område i en oändlig omgivning. Denna analys gäller endast för lager som är belägna djupt under markytan. I detta avsnitt studeras lager på måttligt djup.



Figur 5.4.10. Temperaturavklingning för ett uppvärmt område på måttligt djup under markytan.

Lagrets överyta befinner sig på djupet D . Lagret har tjockleken H och begynnelsestemperaturen T_1 . Vid markytan är temperaturen T_0 . I marken utanför lagret är temperaturen T_0 vid begynnelsestiden $t = 0$.

5.4.2.1 Endimensionellt plant fall

Detta problem kan lösas med speglingsteknik. För det endimensionella fallet erhålls lösningen som en superposition av den egna och den speglade lösningen.

Temperaturen i marken blir nu:

$$T(z,t) = T_0 + (T_1 - T_0) \left\{ f\left(\frac{z+D+H/2}{H}, \frac{4at}{H^2}\right) - f\left(\frac{z-D-H/2}{H}, \frac{4at}{H^2}\right) \right\} \quad (5.4.18)$$

Här är $-z$ djupet från markytan. Funktionen $f(x', \tau)$ ges av formel 5.4.3. Vi inför följande beteckningar:

$$d = \frac{D}{H} \quad \tau = \frac{4at}{H^2}$$

Temperaturen är en funktion av z/H , d , och τ .

Medeltemperaturen i lagret ges av

$$T_m(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot f_m\left(\frac{D}{H}, \frac{4at}{H^2}\right) \quad (5.4.19)$$

där

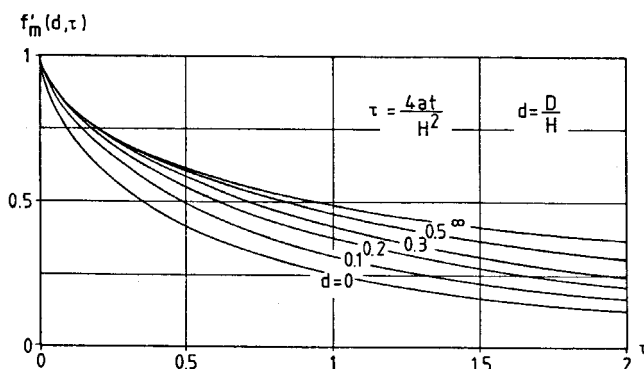
$$\begin{aligned} f'_m(d, \tau) &= f_m(\tau) + \sqrt{\tau} \operatorname{ierfc}\left(\frac{2d+1}{\sqrt{\tau}}\right) \\ &- \frac{\sqrt{\tau}}{2} \left(\operatorname{ierfc}\left(\frac{2d+2}{\sqrt{\tau}}\right) + \operatorname{ierfc}\left(\frac{2d}{\sqrt{\tau}}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Här ges funktionen $f_m(\tau)$ av formel 5.4.6. Funktionen ierfc är integralen av den komplementära felfunktionen:

$$\operatorname{ierfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x + x \cdot \operatorname{erf}(x) \quad (5.4.21)$$

Det tidigare fallet med ett lager i en oändlig omgivning ges av $d = +\infty$: $f'_m(\infty, \tau) = f_m(\tau)$. Det andra extremfallet, $d = 0$, inträffar när lagrets överyta ligger vid markytan. Överytan har då temperaturen T_0 .

Funktionen $f'_m(d, \tau)$ ges i figur 5.4.11. Kurvskaran med $d > 1/2$ sammanfaller tämligen väl för $\tau < 1$. De resultat som ges i avsnitt 5.4.1.1 kan därför användas när D är större än $H/2$. En korrektion för markytans inverkan är nödvändig endast då lagervolymer ligger så nära markytan att D är mindre än $H/2$.



Figur 5.4.11. Temperaturavklingning $f'_m(d, \tau)$ för ett skikt som befinner sig på djupet D under markytan.

Exempel. Ett lager med tjockleken H är täckt av ett skyddande markskikt med tjockleken D . Vi tar

$$a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad H = 10 \text{ m}$$

Värmeförlusten efter två månader ges i tabell 5.4.7 för några olika djup D . Den dimensionslösa tiden τ är lika med 0.21. Värdena är tagna ur figur 5.4.11.

D (m)	∞	5	3	2	1	0
$(T_m - T_0)/(T_1 - T_0)$	0.74	0.74	0.74	0.73	0.69	0.61
Förlust (%)	26	26	26	27	31	39

Tabell 5.4.7. Värmeförlust för endimensionellt plant fall med olika avstånd D till markytan. Data är givna i texten.

Värmeförlusten för $D > 4$ är 26%. Den ökar för minskande D upp till 39% för $D=0$.

5.4.2.2. Parallelepipediskt lager

Lagervolymen har formen av en parallelepiped med sidolängderna L_x , L_y , och L_z . Parallelepipedens övre horisontella yta befinner sig på djupet D under markytan. Temperaturen vid markytan är T_0 . Begynnelsetemperaturen i parallelepipedens är T_1 och utanför denna T_0 . Temperaturfältet i marken ges då av

$$T(x,y,z,t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot f\left(\frac{x}{L_x}, \frac{4at}{L_x^2}\right) \cdot f\left(\frac{y}{L_y}, \frac{4at}{L_y^2}\right) \cdot [f\left(\frac{z+D+L_z/2}{L_z}, \frac{4at}{L_z^2}\right) - f\left(\frac{z-D-L_z/2}{L_z}, \frac{4at}{L_z^2}\right)] \quad (5.4.22)$$

Funktionen $f(x', \tau)$ definieras av formel 5.4.3.

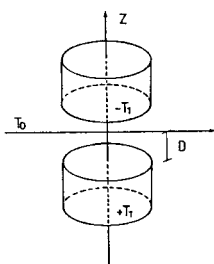
Medeltemperaturen i parallelepipeden är

$$T_m(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot f_m\left(\frac{4at}{L_x^2}\right) \cdot f_m\left(\frac{4at}{L_y^2}\right) \cdot f'_m\left(\frac{D}{L_z}, \frac{4at}{L_z^2}\right) \quad (5.4.23)$$

Funktionen $f'_m(d, \tau)$ återfinns i figur 5.4.11 och $f_m(\tau)$ i figur 5.4.3.

5.4.2.3. Cylindriskt lager

Lagret har formen av en cylinder med vertikal axelriktning. Cylindern har höjden H och radien R . Dess överyta är belägen på djupet D under markytan. Figur 5.4.12 visar den cylindriska lagervolymen med ett medeldjup $z = -D-H/2$. Ett speglat lager med negativ begynnelsestemperatur ligger på medelhöjden $z = D+H/2$.



Figur 5.4.12. Cylindrisk lagervolym på djupet D under markytan. Ett speglat lager med begynnelsestemperaturen $-T_1$ är beläget ovanför markytan.

Temperaturfältet är en superposition av lösningarna från de två cylinderregionerna. Båda lösningarna är av den typ som ges av formel 5.4.15. Den radiella funktionen $g\left(\frac{r}{R}, \frac{at}{R^2}\right)$ är densamma för de två lösningarna. Temperaturen ges av:

$$T(r, z, t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot g\left(\frac{r}{R}, \frac{at}{R^2}\right) \cdot \left\{ f\left(\frac{z+D+H/2}{H}, \frac{4at}{H^2}\right) - f\left(\frac{z-D-H/2}{H}, \frac{4at}{H^2}\right) \right\} \quad (5.4.24)$$

Funktionen g visas i figur 5.4.6. Funktionen f definieras av formel 5.4.3.

Medeltemperaturen i lagercylindern är:

$$T_m(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot g_m\left(\frac{at}{R^2}\right) \cdot f'_m\left(\frac{D}{H}, \frac{4at}{H^2}\right) \quad (5.4.25)$$

Funktion g_m visas i figur 5.4.7 och f'_m i figur 5.4.11.

Exempel. Ett lager med höjden 20 meter och radien 20 meter är belägen på djupet D under markytan. Temperaturledningstalet är $a = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Värmeförlusten efter sex månader ($t=6$ månader) ges i tabell 5.4.8 för olika djup D .

D (m)	∞	10	5	2	1	0
$(T_m - T_0)/(T_1 - T_0)$	0.60	0.60	0.60	0.57	0.55	0.52
Förlust (%)	40	40	40	43	45	48

Tabell 5.4.8. Värmeförlust efter sex månader för ett cylindriskt lager på djupet D .

Värmeförlusten ändras ej när djupet ökas från $D=5$ m. Ökningen av förlusten är tämligen måttlig då tjockleken D på det täckande skiktet minskar.

5.4.3. Cylindriskt lager omedelbart under markytan

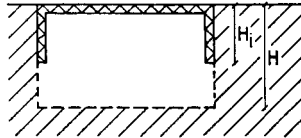
De analytiska samband som gavs i avsnitt 5.4.1-2 gäller tämligen renodlade fall. I detta avsnitt beräknas temperaturavklingningen för mer komplicerade fall numeriskt.

Lagret har formen av en cylinder med vertikal axelriktning. Lagrets höjd är H och dess radie R . Överytan sammanfaller med marknivån. En termisk isolering täcker lagrets överyta och dess sida till ett djup H_1 . Se figur 5.4.13. Begynnelsetemperaturen är T_1 i lagret och T_0 i omgivande mark. Vid markytan hålls temperaturen konstant vid T_0 .

Medeltemperaturen i lagret ges av

$$T_m(t) = T_o + (T_1 - T_o) \cdot u_m(t) \quad (5.4.26)$$

Funktionen u_m ger medeltemperaturens avklingning i dimensionslös form.



Figur 5.4.13. Värmelager med skyddande isolering på överyta och vertikal sida.

Marken har värmeledningsförmågan λ och värmekapaciteten C . Isoleringstjockleken är d_i och dess värmeledningsförmåga är λ_i .

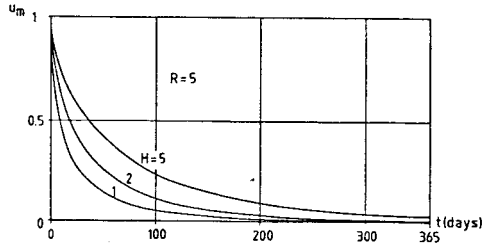
Följande data gäller:

$$\begin{aligned} T_1 &= 20^\circ\text{C} & T_o &= 0^\circ\text{C} \\ \lambda &= 2 \text{ W/mK} & C &= 2 \text{ MJ/m}^3\text{K} \\ (a &= \lambda/C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}) & & (5.4.27) \\ \lambda_i &= 0.03 \text{ W/mK} & d_i &= 0.3 \text{ m} \\ H_i &= 1 \text{ m} & & \end{aligned}$$

Låt oss som första exempel betrakta några små lager. Figur 5.4.14 visar temperaturavklingningen i ett lager med radien $R=5$ m för olika höjder:

$$R = 5 \text{ m} \quad H = 1, 2, 5 \text{ m} \quad (5.4.28)$$

Övriga data enligt 5.4.27.

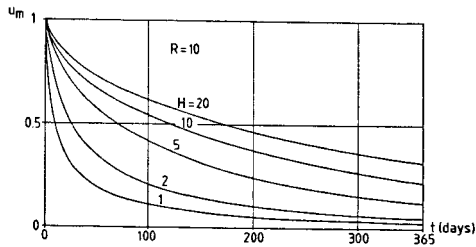


Figur 5.4.14. Dimensionslös medeltemperatur för ett cylindriskt lager. Data enligt 5.4.27 och 5.4.28.

Temperaturavklingningen är mycket snabb för dessa små system. Halva värmeinnehållet förloras på 18 dagar om lagrets höjd är 2 meter. Det är uppenbart att dessa lager ej är lämpade för säsongslagring.

Figur 5.4.15 visar temperaturavklingningen för en större radie:

$$R = 10 \text{ m} \quad H = 1, 2, 5, 10, 20 \text{ m} \quad (5.4.29)$$



Figur 5.4.15. Dimensionslös medeltemperatur för cylindriskt lager. Data enligt 5.4.27 och 5.4.29.

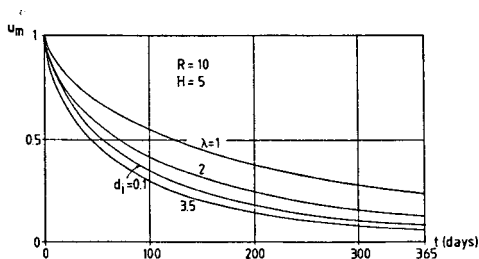
För de fall där H är 10 och 20 meter återstår ungefär 50% av det ursprungliga värmeinnehållet efter 4 respektive 6 månader.

I figur 5.4.16 illustreras effekten av ändringar av några data (5.4.27). Vi tar

$$R = 10 \text{ m} \quad H = 5 \text{ m} \quad (5.4.30)$$

Kurvan med $\lambda=2$ i figur 5.4.16 visar temperaturavklingningen med referensdata (5.4.27). Effekten av att värmeledningsförmågan ändras från $\lambda=2$ till

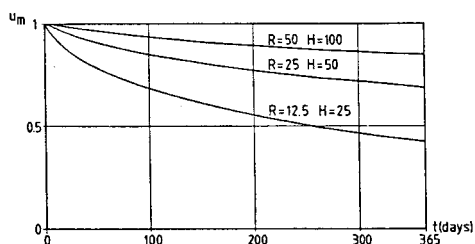
$\lambda=1$ respektive $\lambda=3.5$ ges. Den sista kurvan visar inverkan av en mindre isolertjocklek ($d_i = 0.1$ m).



Figur 5.4.16. Dimensionslös temperaturavklingning för några olika värden på markens värmeledningsförmåga λ och isoleringstjockleken d_i . Data enligt 5.4.27 och 5.4.30.

Figur 5.4.17 visar temperaturavklingningens beroende av lagrets storlek. Vi har tre fall:

$$2R = H = 25, 50, 100 \text{ m} \quad (5.4.31)$$



Figur 5.4.17. Dimensionslös temperaturavklingning för tre storlekar av ett cylindriskt lager. Data enligt 5.4.27 och 5.4.31.

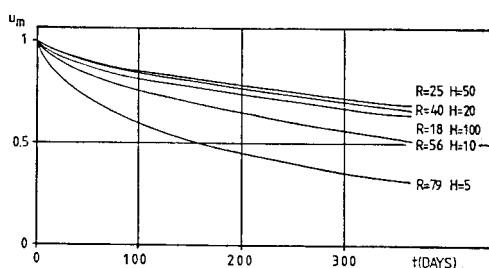
Den takt med vilken temperaturavklingningen sker är i hög grad beroende av lagrets storlek. Med $R=50$ och $H=100$ återstår 84% av det ursprungliga värmeinnehållet efter ett år.

Nästa exempel berör det cylindriska lagrets form. Volymen hålls konstant. Följande fall har studerats:

$$\begin{array}{cccccc}
 H = 5 \text{ m} & H = 10 \text{ m} & H = 20 \text{ m} & H = 50 \text{ m} & H = 100 \text{ m} & \\
 R = 79 \text{ m} & R = 56 \text{ m} & R = 40 \text{ m} & R = 25 \text{ m} & R = 18 \text{ m} &
 \end{array} \quad (5.4.32)$$

Resultaten ges i figur 5.4.18.

Värmeförlusten sker genom lagrets yta. Värmeinnehållet är däremot proportionellt mot volymen. Det är därför eftersträvansvärt att utforma lagret så att kvoten mellan yta och volym är liten. För detta fall är det optimala värdet av H/R nära 1.



Figur 5.4.18. Dimensionslös temperaturavklingning för olika former på lager-cylindern. Data enligt 5.4.27 och 5.4.32.

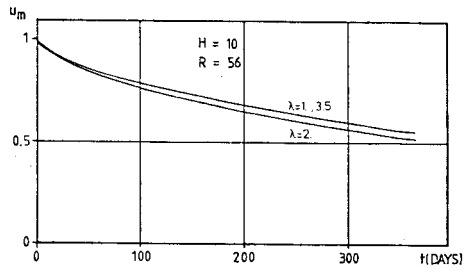
En vanlig geologisk situation i Sverige är att ett jordskikt ligger direkt ovanpå urberget. Ett värmelager som utnyttjar detta jordskikt tenderar att bli tämligen platt, d.v.s. H blir litet jämfört med R . Kurvorna med $H=5$ och $H=10$ i figur 5.4.18 kan kanske representera ett sådant system. I dessa fall var dock värmeledningsförmågan densamma i hela marken. Låt oss antaga att värmeledningsförmågan i det övre skiktet har en låg värmeledningsförmåga, emedan urberget har en hög värmeledningsförmåga.

$$\lambda = \begin{cases} 1 & -H < z < 0 \\ 3.5 & z < -H \end{cases} \quad (5.4.33)$$

Vi väljer ett relativt platt system:

$$H = 10 \text{ m} \quad R = 56 \text{ m} \quad (5.4.34)$$

Resultatet visas i figur 5.4.19. Fältet med $\lambda=2$ i figur 5.4.18 ges som jämförelse.



Figur 5.4.19. Dimensionslös temperaturavklingning för ett lager i ett ytligt jordskikt beläget ovanpå urberg. Data enligt 5.4.33, 5.4.34 och 5.4.27.

Denna skrift med karaktär av handbok behandlar termiska analyser för markvärmesystem. Dessa utnyttjar marken som värmekälla eller för direkt lagring av värme i jord och berg och grundvattenförande skikt eller i undermarksförlagda vattenreservoarer.

För markvärmesystem finns det en mängd problem och frågeställningar som är förknippade med de termiska processerna i lagret eller uttagssystemet och i omgivande mark. Frågorna rör värmeförluster och andra termiska prestanda, temperaturpåverkan på omgivningen, lämpliga röravstånd, brunnskonfigurationer, återladdning m m.

I skriften redovisas grundläggande teori, termiska analyser, datormodeller och simuleringsprogram. Detta omfattande material har tagits fram av en forskargrupp vid avdelningen för matematisk fysik, Lunds Tekniska Högskola, under åren 1977—1985. Arbetet har skett i samarbete med konsulter, innovatörer, forskare, byggare, geologer m fl specialister. Skriften riktar sig till dessa specialistgrupper samt den högre undervisningen. Den ger både en teoretisk bakgrund och en praktisk handledning vid ingenjörsmässiga beräkningar.

DEL I: ALLMÄN DEL (T16:1985)

1. Markvärmesystem
2. Fältförsök
3. Introduktion till handboken
4. Stationära temperaturförlopp. Värmeförlustformler
5. Grundläggande dynamiska temperaturförlopp

DEL II: VÄRMELAGER (T17:1985)

6. Värmelagring i vatten. Bergrum, grop m m
7. Markvärmelager. Borrhål i berg, slangar i lera
8. Akvifervärmelager

DEL III: NATURVÄRMEKÄLLOR (T18:1985)

9. Grundvattenvärme, geotermi
 10. Bergvärme
 11. Ytjordvärme
 12. Temperaturförändringar i omgivande mark
 13. Översikt av datorprogram
- Referenser

Omslagets färgbild gäller ett beräkningsfall för borrhålslager i berg vid projektet LULEVÄRME. Temperaturfördelningen i ett horisontellt tvärsnitt på halva borrhålsdjupet visas. Bilden anger temperaturen i slutet av uppvärmningsperioden under tredje året.

Mörkrött	>	70°C
Gult/grönt	=	50°C
Mörkblått	<	5°C