LUND UNIVERSITY

Reglerteknik -- En elementär introduktion. Kapitel 3: Processmodeller

Åström, Karl Johan

1983

Document Version:
Förlagets slutgiltiga version

Link to publication

Citation for published version (APA):
Åström, K. J. (1983). *Reglerteknik -- En elementär introduktion. Kapitel 3: Processmodeller*. (Research Reports TFRT-3169). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

Total number of authors:
1

General rights
Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.
• Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
• You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
• You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: https://creativecommons.org/licenses/

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

Download date: 17. Dec. 2025

CODEN:LUTFD2/(TFRT-3169)/1-55/(1983)

REGLERTEKNIK - EN ELEMENTÄR INTRODUKTION.
KAPITEL 3 - PROCESSMODELLER

K J ÅSTRÖM

INSTITUTIONEN FÖR REGLERTEKNIK
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA

JANUARI 1983

CODEN: LUTFD2/(TFRT-3169)/1-55/(1983)

REGLERTEKNIK – en elementär introduktion

Kapitel 3
Processmodeller

Karl Johan Åström

INSTITUTIONEN FÖR REGLERTEKNIK
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Januari 1983

LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF AUTOMATIC CONTROL
Box 725
S 220 07 Lund 7 Sweden

Document name
REPORT

Date of issue
January 1983

Document number
CODEN:LUTFD2/(TFRT-3169)/1-55/(1983)

Author(s)
K J Åström

Supervisor

Sponsoring organization
FOSAM

Title and subtitle
Reglerteknik - En elementär introduktion. Kapitel 3 - Processmodeller. (Control Engineering - An elementary introduction. Chapter 3 - The Process models).

Abstract

This is part of an elementary presentation of automatic control theory which was developed in a novel industrial exchange program (FOSAM). The series covers both practical control problems and practical approaches to automatic control in current use. This may serve a useful summary of engineering practice for theoreticians. The report may also be of use to industrialists who would like to capture the flavor of the theory of automatic control.

Key words

Classification system and/or index terms (if any)

Supplementary bibliographical information

ISSN and key title

ISBN

Language
Swedish

Number of pages
55

Recipient's notes

Security classification

DOKUMENTDATABLAD RT 3/81

Distribution: The report may be ordered from the Department of Automatic Control or borrowed through the University Library 2, Box 1010, S-221 03 Lund, Sweden, Telex: 33248 lubbis lund.

K A P I T E L 3

P R O C E S S B E S K R I V N I N G A R

För att förstå reglersystem är det nödvändigt att kunna beskriva processer och störningar. I detta kapitel presenteras olika sätt att karakterisera system. Såväl grafiska beskrivningar, som är bra för att ge en överblick, som matematiska modeller, vilka också kan ge detaljer, behandlas. Utgående från de olika beskrivningarna införs också många viktiga begrepp.

3.1 INLEDNING

Reglersystem är ofta relativt komplicerade ty de sammansätts av många olika delar. De olika delarna kan representera många olika grenar av tekniken t.ex. kemi, mekanik, elektroteknik, elektronik, pneumatik, hydraulik och bioteknik. För att arbeta med reglersystem är det mycket viktigt att ha bra sätt att beskriva systemen. Beskrivningarna skall göra det möjligt att överblicka systemens funktion och att tränga in i deras detaljer. För att detta skall vara möjligt används flera olika representationer av systemen. Detta berördes kortfattat i kapitel 2. I detta kapitel ges en mer detaljerad beskrivning av olika sätt att beskriva reglersystem.

Avsnitt 3.2 behandlar olika grafiska representationer. Dessa representationer syftar till att ge en översiktlig <u>kvalitativ</u> bild av systemets funktion. Det är väsentligen tre olika typer av grafiska representationer som användes, översiktsbilder, processchema och blockschema. Översiktsbilderna och processchema visar processens specifika komponenter, ställdon, givare och regulatorer. Blockschemat representerar informationsflödet och systemets reglertekniska funktion.

För att beskriva ett system <u>kvantitativt</u> används matamatiska modeller. Dessa beskriver funktionen hos systemets olika delar i matematisk form. En kombination av blockschema och matematiska modeller är ett effektivt sätt att ge en översiktsbild och detaljbeskrivningar av ett systems funktion. Med hjälp av processchema och översiktsbilder kan

systemfunktionerna sedan relateras till den verkliga processen.

En översikt av olika typer av matematiska modeller ges i avsnitt 3.3. Såväl interna modeller som externa modeller behandlas i detta avsnitt. De interna modellerna eller tillståndsmodellerna beskriver i detalj ett systems inre struktur. Dessa modeller diskuteras utförligt i avsnitt 3.4. De externa modellerna eller insignal-utsignal modellerna beskriver endast sambandet mellan in- och utsignalerna. I avsnitt 3.5 behandlas s.k transientsvarsmodeller som är en typ av insignal-utsignal modeller. Dessa modeller beskriver ett delsystem genom att ange dess svar på ett steg eller en puls. En alternativ beskrivning s.k. frekvenssvarsmodeller diskuteras i avsnitt 3.6. I avsnitt 3.7 anges olika metoder för att bestämma matematiska modeller för ett system. Modellerna kan erhållas genom ett direkt experiment. Detta kallas identifiering. Det är också möjligt att bestämma matematiska modeller med utgångspunkt från grundläggande fysikaliska modeller. Detta kallas fysikaliskt modellbygge. Båda metoderna liksom deras kombinationer behandlas i avsnitt 3.7. I avsnitt 3.8 behandlas olika sätt att beskriva störningar. Kapitlet avslutas med en sammanfattning.

3.2 GRAFISKA REPRESENTATIONER

Bilder har traditionellt varit viktiga hjälpmedel i ingenjörskonsten. De tidigaste läroböckerna för ingenjörer var t.ex. de bilderböcker över olika mekanismer som utarbetats av Leonardo da Vinci. Bilder och olika former av grafiska representationer används inom alla grenar av tekniken. De är utmärkta hjälpmedel för att få en kvalitativ överblick och ett förträffligt komplement till matematiska beskrivningssätt. Bilderna är också ofta till god hjälp för intuitionen. Flera olika sätt att grafiskt beskriva system har funnit användning inom reglertekniken. En kortfattad presentation av några olika beskrivningar ges nedan.

Översiktsbilder

För att få en överblick av det system som skall regleras är det ofta bra att ha en förenklad skiss av systemet. Denna skiss bör visa systemets olika komponenter. Bilderna bör göra det möjligt att i verkligheten identifiera systemets olika delar. Bilden bör också vara stiliserad så att den ej blir oöverskådlig. Det finns inga bestämda regler för hur översiktsbilder skall ritas. Bra bilder, liksom vackra tavlor, är dock lätta att känna igen. Ett exempel på översiktsbilder visas i fig. 3.1. En översiktsbild av en mer komplicerad process visas i fig. 3.2.

Kapitel 3 - Processbeskrivningar

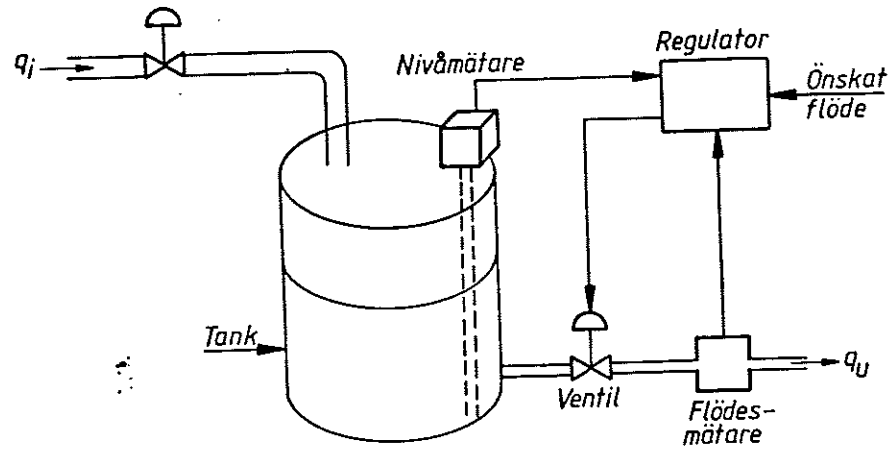


Fig. 3.1 - Översiktsbild av en enkel process.

Processchema

Inom speciella brancher förekommer endast ett begränsat antal komponenter som är mer eller midre standardiserade. I sådana fall är det möjligt att driva stiliseringen ännu längre genom att införa standardsymboler för olika komponenter. Symbolerna utarbetas ofta av olika internationella standardiseringsorgan. Det finns standardisering bl.a. för processindustrin, kraftindustrin och för VVS branschen. Ett exempel på processchema visas i fig. 3.3. I appendix A, B och C ges några ytterligare exempel på standardsymboler.

Blockschema

För en reglertekniker är informationsflödet i ett system det centrala. Det är t.ex. intressant att veta vilka styråtgärder en regulator genererar. För systemets funktion är det mindre intressant att veta om reglerfelet representeras som en mekanisk, elektrisk eller pneumatisk storhet. Man har därför inom reglertekniken utvecklat ett speciellt stiliserat bildspråk som tar fasta på att beskriva informationsflödet i ett system. En sådan beskrivning kallas blockschema. Principen för ett blockschema illustreras i fig. 3.4. Grundprincipen är att framhäva signalflödet i systemet och undertrycka systemets detaljer. I blockschemat representeras de apparater som döljs under dukarna i fig. 3.3 med rektangulära rutor. Rutorna förenas med streck som visar hur de olika apparaterna påverkar varandra. Strecken förses med pilar för att visa orsak och verkan. I anslutning till strecken införs också beteckningarna för de

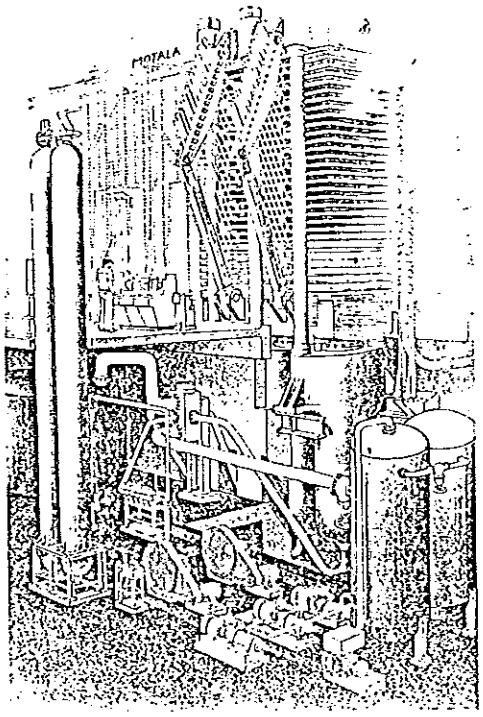


Fig. 3.2 - Översiktsbild av en process.

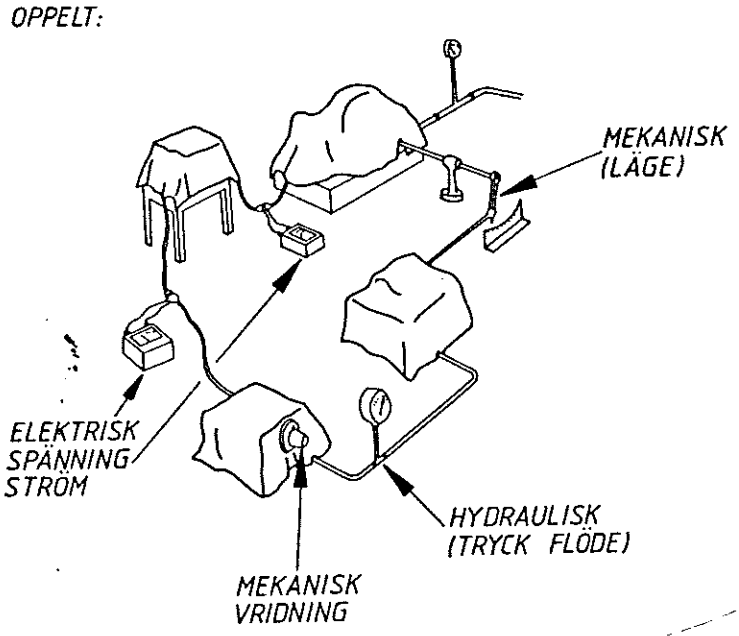


Fig. 3.3 - Illustation av principen för ett blockschema.

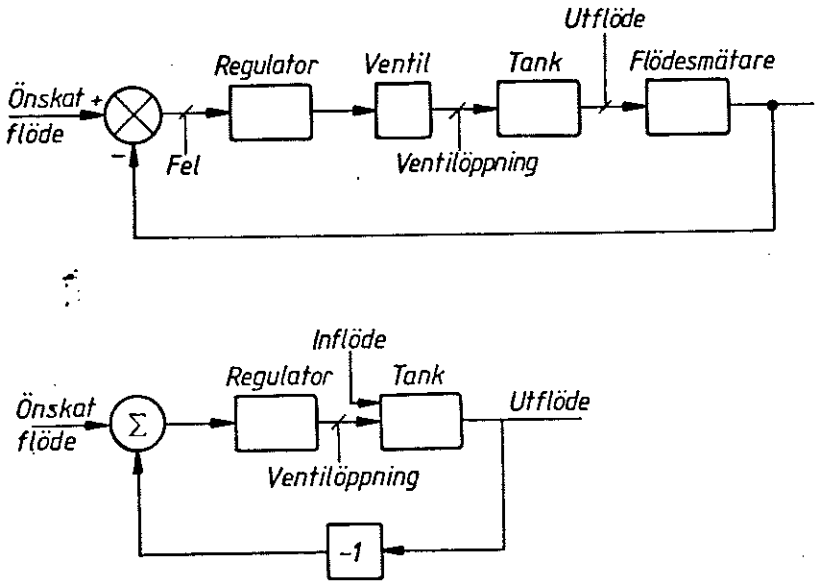


Fig. 3.4 - Blockschema för systemet i fig. 3.1.

variabler som strecken motsvarar. Oftast representerar ett streck en variabel men det går också bra att låta ett streck representera flera variabler. Det är vanligt att i rutorna som betecknar systemets delar införa en symbol som anger sambandet mellan insignal och utsignal för systemet.

I fig. 3.4 visas blockschema för systemet i fig. 3.1. I kapitel 2 såg vi att begreppet felsignal var mycket viktigt för att förstå hur ett reglersystem fungerar. Felsignalen är differensen mellan en processvariabels önskade och verkliga värden. I ett blockschema har en speciell symbol införts för att bilda felsignalen genom att subtrahera två signaler. Blockschemat är ett bra hjälpmedel för att få en överblick av ett reglersystem. För att rita ett blockschema måste systemet först uppdelas i olika delar. Detta kallas att strukturera systemet. Vid strukturering försöker man att få väl avgränsade delar med liten koppling. Observera att det vid strukturering kan vara lämpligt att ha flera apparater i samma block. Detta motsvaras i fig. 3.3 av att man lägger en duk över två apparater. I vissa fall kan det också vara ändamålsenligt att representera en apparat med fler block.

Blockschemat ger en abstrakt representation av ett system. Det framhäver de väsentliga reglertekniska egenskaperna hos systemet och undertrycker oväsentliga tekniska detaljer. Nackdelen med abstraktionen är att det krävs vana och tankearbete för att relatera den abstrakta bilden till den

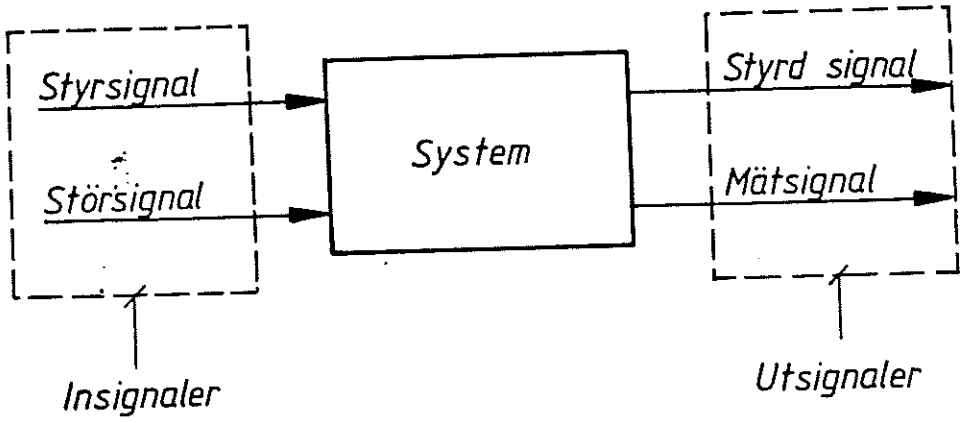


Fig. 3.5 - Blockschema för delsystem.

tekniska verkligheten. Den abstrakta representationen har dock en stor fördel. Många olika tekniska system har nämligen samma blockschema. Detta innebär att de renodlade reglertekniska problem i grunden är lika för systemen. Om reglerproblemet lösts för ett system kan man då direkt få lösningen till de andra problemen. Blockschemat är således ett exempel på reglerteknikens allmängiltighet. Jämför diskussionen i avsnitt 2.2 och 2.3.

Några viktiga begrepp

I anslutning till blockschemat kan flera viktiga begrepp införas. fig. 3.5 visar blockschemat för ett delsystem. Systemet påverkas av två signaler, störsignalen och styrsignalen. Styrsignalen representerar den variabel vars värden kan väljas. Den kan t.ex. vara inställning av en ventil. Störsignalen representerar hur systemet påverkas av sin omgivning. Styrsignalen och störsignalen är systemets insignaler. Systemet har också två typer av utsignaler. Den ena är den styrda signalen eller den reglerade signalen, dvs. den signal som vi är intresserade att styra. Den andra signalen är mätsignalen dvs. den signal som kan registreras med hjälp av de instrument som finns installerade i processen. I vissa fall kan störsignalen också mätas. Ibland är mätsignalen lika med den styrda signalen men ofta är de olika. Mätsignalen kan t.ex. vara störd. I andra fall kan

det endast finnas indirekta samband mellan den styrda och den mätta signalen. Vid styrning av kemiska reaktorer kan det t.ex. vara av intresse att styra produktens koncentration. Då koncentration kan vara svår att mäta kan man i stället nöja sig med att mäta produktens temperatur. Härvid utnyttjar man att det finns ett indirekt samband mellan temperatur och koncentration.

3.3 MATEMATISKA REPRESENTATIONER

De grafiska beskrivningarna av ett reglersystem ger en överblick av systemet och en kvalitativ förståelse för dess funktion. För att ge en kvantitativ beskrivning fordras matematiska beskrivningar av systemet. Dessa kallas vanligen <u>matematiska modeller</u>. En matematisk modell är en abstrakt representation av ett system som gör det möjligt att beräkna systemets utsignal då dess insignal är känd. Matematiska modeller kan användas för att bestämma hur en process uppför sig i olika situationer. Det är t.ex. möjligt att med hjälp av modellen bestämma bra arbetspunkter, lämpliga regulatorinställningar, olika driftsätt etc. Modellerna kan också användas för felsökning, simulering, operatörsträning etc. De beräkningar som fordras kan utföras med penna och papper, räknare, analogimaskin eller dator. Vid arbete med matematiska modeller måste man alltid komma ihåg att modellen är en abstraktion och en approximation. Den beskriver således endast vissa av systemets egenskaper. I detta avsnitt ges en översikt av olika matematiska representationer. Mer detaljerade framställningar ges i följande avsnitt. De matematiska beskrivningarna kombineras ofta med blockschema för att både få överblick och detaljer.

<u>Statiska system</u>

Ett statiskt system är sådant att utsignalen omedelbart ställer in sig i ett jämnviktsläge då insignalen ändras. Utsignalens aktuella värde vid tiden t beror således endast av insignalens värde vid samma tid. Ett statiskt system kan då beskrivas av en funktion som anger funktionssambandet. Om insignalen är u och utsignalen y så beskrivs systemet helt enkelt som

$$y(t) = g(u(t)) \tag{3.1}$$

Jämför fig. 3.6. Systemet säges vara <u>linjärt</u> om funktionen g är linjär. Derivatan av funktionen g i en arbetspunkt kallas systemets <u>förstärkning</u>. Förstärkningen anger hur mycket utsignalen ändras vid en liten ändring av insignalen.

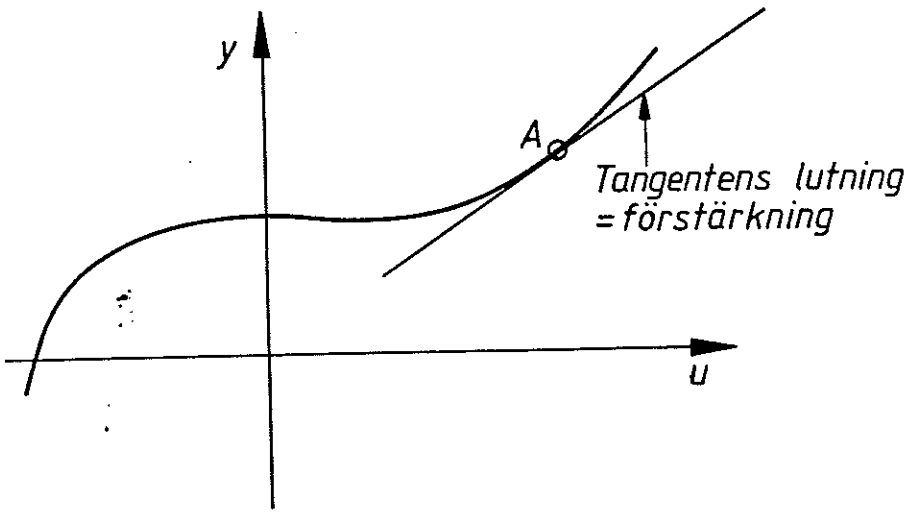


Fig. 3.6 - Insignal-utsignal samband för ett statiskt system. Tangentens riktningskoefficient är systemets förstärkning i punkten A

Dynamiska system

Ett system säges vara dynamiskt om insignalens värde vid en tidpunkt beror av insignalens värde vid tidigare tidpunkter. Det finns flera sätt att beskriva dynamiska system.

Externa beskrivningar

En möjlighet att beskriva ett system matematiskt som nära ansluter sig till blockschema-tänkandet är att betrakta ett system som en svart låda (eng. black box). Jämför fig. 3.3. Den matematiska modellen skall för varje insignal ange motsvarande utsignal. Ett sådant betraktelsesätt leder till en extern modell eller en insignal-utsignal modell. Modellen talar endast om sambandet mellan insignalen och utsignalen. Den säger ingenting om vad som händer internt i systemet.

Rent principiellt kan vi föreställa oss en extern beskrivning som en jättelik tabell av insignal-utsignal par. En sådan representation kan lätt bli mycket komplicerad. Det kan vara svårt att finna en systematisk metod att tabellera alla insignaler och tabellen kan bli mycket stor. Det finns dock flera viktiga specialfall då tabellen blir mycket enkel. För s.k. linjära tidsinvarianta system kan t.ex. utsignalen beräknas för en godtycklig insignal om ett enda insignal-utsignal par är känt. Detta behandlas utförligare i

avsnitten 3.5 och 3.6. En annan principiell svårighet är att en insignal kan ge upphov till många utsignaler.

Interna beskrivningar

Externa beskrivningar av dynamiska system har sitt ursprung i elektroteknikens sätt att betrakta system. Det finns ett annat sätt att beskriva dynamiska system som utgår från mekanikens synsätt. Från den klassiska mekaniken vet vi att rörelsen hos ett partikelsystem är entydigt bestämd om partiklarnas lägen och hastigheter vid en viss tidpunkt är kända. Förhistorien dvs. hur partiklarna uppnått sina aktuella hastigheter och lägen är alltså oväsentligt. I det allmäna fallet försöker vi alltså finna ett antal variabler som sammanfattar de karakteristika i insignalen som är nödvändiga för att prediktera systemets framtida utveckling. Dessa variabler kallas tillståndsvariabler därför att de representerar systemets aktuella tillstånd. Tillståndsvariablerna kan ofta väljas som variabler vilka representerar lagring av massa, energi och rörelsemängd. Eftersom dessa kvantiteter kan representeras på olika sätt finns ett visst godtycke i valet av tillståndsvariabler. Den matematiska modellen skall ange hur tillståndsvariablerna utvecklas i tiden liksom hur utsignalerna är relaterade till tillståndsvariablerna. De matematiska modellerna kan ofta erhållas ur grundläggande fysikaliska samband som balansekvationer för massa, energi och rörelsemängd. Tillståndsvariabler ger en detaljerad beskrivning av systemets inre struktur. De modeller som erhålls brukar därför kallas interna beskrivningar eller tillståndsmodeller. Sådana modeller behandlas utförligare i avsnitt 3.4.

Några begrepp

Vi avslutar detta kapitel med att några begrepp som är viktiga för att förstå dynamiska system. Vi säger att ett system är linjärt om linjärkombinationer av insignaler motsvaras av linjärkombinationer av utsignalerna. Detta betyder t.ex. att en dubblering av insignalen ger en dubbelt så stor utsignal. Ett system kallas tidsinvariant om det uppför sig på samma sätt vid olika tidpunkter.

Stabilitet är en viktig egenskap. I grova drag innebär stabilitet att små förändringar i systemet och små störningar leder till små förändringar i systemets signaler. Stabilitet är således ett slags kontinuitetsbegrepp. I allmänhet kan vi ej tala om stabilitet hos ett system. Vi kan endast säga att vissa lösningar är stabila. För linjära tidsinvarianta system gäller dock att om en lösning är stabil så är även varje annan lösning stabil. I detta specialfall kan vi således tala om stabila och instabila system. System som är stabila kallades självreglerande

system i tidig litteratur eftersom de motsätter sig inverkan av störningar.

Det finns flera olika begrepp som uttrycker hur lätt det är att styra och reglera ett system. Begreppet <u>regleraukoritet</u> anger hur stora styrsignalerna är i förhållande till de störningar som verkar på systemet. Betrakta t.ex. en viss processvariabel. Regleraukoriteten är kvoten mellan de ändringar i variabeln som fås vid maximal ändring i styrvariabeln och vid maximal störning. För ett servosystem i en skrivare är regleraukoriteten t.ex. kvoten mellan motorns maximalmoment och det maximala friktionsmomentet. Vid styrning av ett flygplan är regleraukoriteten kvoten mellan rodermomentet och det maximala störmoment som orsakas av vindstörningar. Vid reglering av ett flöde är regleraukoriteten kvoten mellan tryckfallet över ventilen och det totala tryckfallet i kretsen då ventilen är helt öppen.

Den tid det tar för ett reglersystem att reagera är en mycket viktig parameter. Detaljerade svar kräver en detaljerad analys av processmodellen. För stabila linjära tidsinvarianta system kan man dock ta den tid det tar innan halva jämnviktsvärdet uppnås. Vi kallar detta för <u>reaktionstid</u>. Observera att för linjära system så är denna tid oberoende av ändringens storlek. Det finns många sätt att få en uppfattning om reaktionstiden. Man kan bestämma den experimentellt. Den har också ofta uppskattats ur kvoten mellan lagrad energi och effekt eller kvoten mellan lagrad rörelsemängd och kraft i ett system.

Observera att stabilitet och reglerbarhet ofta står i motsatsförhållande till varandra. Vi belyser detta med ett citat från en artikel om styrning av båtar. "Det är väl känt att en båt som svänger lätt är svår att styra och att en båt som är lätt att styra har svårt att svänga." Om båten är stabil så är den lätt att styra ty den går rakt fram oavsett störningar från vind och vågor. Det är då också svårt att svänga med båten ty det fordras stora roderutslag för att övervinna båtens naturliga tendens att gå rakt fram.

3.4 TILLSTÅNDSEKVATIONER

Vi skall nu redogöra för matematiska modeller för system i form av tillståndsekvationer. Detta är kanske det mest naturliga sättet att beskriva system. Man ställer helt enkelt upp de ekvationer som beskriver systemet, och processdynamiken kommer så att säga på köpet.

Kapitel 3 - Processbeskrivningar

Härledning av tillståndsekvationer

Vi visar först hur tillståndsekvationer kan erhållas. De grundläggande ekvationerna är sambanden för massbalans, energibalans och rörelsemängdsbalans. Dessa ekvationer kompletteras sedan med s.k. konstitutiva ekvationer som anger samband mellan olika variabler. För att ställa upp balansekvationerna måste vi först införa variabler som beskriver hur massan, energin och rörelsemängden är lagrade. Dessa variabler kallas tillståndsvariabler. Balansekvationerna, som beskriver förändringarna i massa, energi och rörelsemängd ger differentialekvationer som anger tillståndsvariablernas ändringshastighet. Härledning av tillståndsekvationer illustreras med ett exempel.

E x e m p e l 3.1 (Tillståndsekvationer för vattentanken) Betrakta en vattentank med ett påfyllningsrör och en avtappning. En översiktsbild visas i fig. 3.7. Systemets insignal är inflödet q_i och dess utsignal är utflödet q_u.

För att beskriva systemet formulerar vi en massbalans. Den vattenmängd som samlats i tanken kan beskrivas med mängden vatten i tanken eller ekvivalent med vattennivån i tanken. Detta blir således tillståndsvariabeln. Om tankens tvärsnittsyta är A och nivån h så lyder massbalansen

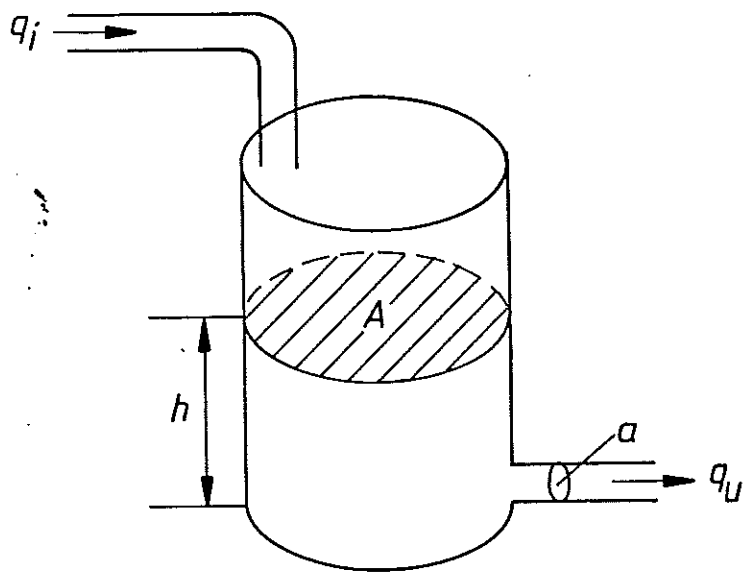


Fig. 3.7 - Översiktsbild av vattentank.

$$\frac{d}{dt}(Ah) = q_i - q_u \tag{3.2}$$

Utflödet beror av utloppsarean a och nivån h. Om a/A är liten så finner vi genom en energibalans (Bernoullis lag) att

$$q_u = a\sqrt{2gh} \tag{3.3}$$

Vi finner således att systemet kan beskrivas med ekvationerna:

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{a}{A}\sqrt{2gh} + \dfrac{q_i}{A} \\ q_u = a\sqrt{2gh} \end{cases} \tag{3.4}$$

Detta är en matematisk modell av systemet. Modellen har en insignal, inflödet q_i, en tillståndsvariabel, tanknivån h och en utsignal, utflödet q_u. Observera att nivån ges av en differentialekvation medan sambandet mellan utflöde och tanknivå är en algebraisk ekvation.

I modellen beror utsignalen på insignalens förhistoria. Tillståndsvariabeln h sammanfattar dock den egenskap hos insignalen som är väsentlig för att bestämma utflödet. Vi ser också detta direkt från ekvation (3.3) som visar att utflödet är entydigt bestämt av tanknivån h.

□

Tillståndsvariabler kan väljas på många sätt

Insignaler och utsignaler är entydiga. En svårighet med tillståndsvariabler är att de kan väljas på många olika sätt. Förenklingar kan ofta erhållas genom kloka val av variabler. Tillståndsvariablerna för vattentanken i Exempel 3.1 kan t.ex. väljas som nivån, volymen eller vattnets vikt. Transformationen mellan variablerna kan vara komplicerad om tankens tvärsnittsyta varierar med höjden.

System med många tillståndsvariabler

I flertalet fall behövs många tillståndsvariabler för att beteckna hur massa, energi och rörelsemängd lagras i ett system. Antag att det räcker med ett ändligt antal variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Systemet kan också ha många styrvariabler

Kapitel 3 - Processbeskrivningar

$u_1, u_2, \ldots, u_r$. Tillståndsvariablernas aktuella värden tillsammans med styrvariablernas framtida värden bestämmer entydigt systemets framtida utveckling. Om systemet är kausalt så är tillståndsvariablernas tidsderivator funktioner av tillståndsvariablerna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ och pådragen $u_1, u_2, \ldots, u_r$. En tillståndsmodell kan då beskrivas som

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_s, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

Låt vidare $y_1, y_2, \ldots, y_p$ vara systemets utsignaler. Då gäller också

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r)$$
$$y_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r)$$
$$\vdots$$
$$y_p = g_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

Vi får enklare formler att skriva om vi inför vektorbeteckningarna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix}$$

Systemet kan då beskrivas med ekvationerna

$$\frac{dx}{dt} = f(\ x\ ,\ u\ ) \qquad (3.5)$$
$$y = g(\ x\ ,\ u\ )$$

Modellen (3.5) innebär att tillståndets ändringshastighet dx/dt är en funktion av tillståndet x och pådraget u.

I det allmänna fallet kan funktionen f och g också bero av tiden. Systemet kallas <u>tidsinvariant</u> om funktionen f och g ej beror explicit av tiden.

Linjära system

De olinjära ekvationerna (3.5) kan endast i undantagsfall analyseras. Däremot är det lätt att erhålla speciella lösningar med hjälp av numeriska metoder. För analys och uppskattningar är det nödvändigt att göra approximationer. På samma sätt som olinjära funktioner kan approximeras med linjära funktioner så kan det olinjära systemet (3.5) approximeras med ett s.k. linjärt system. Förfarandet kallas att <u>linjärisera</u> det olinjära systemet. En tillståndsmodell (3.5) kallas linjär om funktionerna f och g är linjära. Ekvationerna kan då skrivas på följande sätt

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad (3.6)$$
$$y = Cx + Du$$

där A, B, C och D är matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & & & \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pr} \end{bmatrix}$$

Modellen (3.6) säger att tillståndsvektorns ändringshatighet dx/dt är en linjär funktion av tillståndet x och pådraget u.

Det linjära systemet kallas <u>tidsinvariant</u> om matrisernas element är oberoende av tiden. Många system är linjära. Om

avvikelserna är små så kan olinjära system ofta approximeras med linjära system. Vi belyser detta med ett exempel.

E x e m p e l 3.2 (Linjärisering av tillstånds-ekvationerna för vattentanken)
För att approximera ett olinjärt system med ett linjärt måste vi utgå från att systemets variabler gör små avvikelser från en jämviktslösning. Vid jämvikt är nivån i tanken konstant. Det följer av ekvation (3.4) att

$$q_i = q_u = a\sqrt{2gh_0} = q_0$$

En taylorserieutveckling av ekvationerna (3.4) ger

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}\sqrt{2gh_0} - \frac{a}{2A}\sqrt{2g/h_0}\,(h - h_0) + q_0/A + (q_i - q_0)/A$$

$$q_u = a\sqrt{2gh_0} + \frac{a}{2}\sqrt{2g/h_0}\,(h - h_0)$$

där termer av andra och högre ordning har försummats. Inför

$$x = h - h_0$$

$$u = q_i - q_0$$

$$y = q_u - q_0$$

så erhålles följande linjära samband

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta u \qquad (3.7)$$

$$y = \gamma x$$

där

$$\alpha = \frac{a}{2A}\sqrt{2g/h_0} = \frac{a\sqrt{2gh_0}}{2Ah_0} = \frac{q_0}{2V_0}$$

$$\beta = 1/A \qquad (3.8)$$

$$\gamma = \frac{a}{2}\sqrt{2g/h_0} = \frac{a\sqrt{2gh_0}}{2h_0}$$

$$V_0 = Ah_0$$

För små avvikelser så kan tanken alltså beskrivas med ett linjärt system. Kurvorna i fig. 3.8 belyser hur väl den linjära approximationen stämmer med den verkliga modellen vid måttligt stora förändringar. Vid stora förändringar kan dock skillnaderna bli avsevärda. Se fig. 3.9 som visar vad som händer då inflödet stängs av.

System med oändligt många tillståndsvariabler

Det finns många fall då lagringen av massa, energi och rörelsemängd är kontinuerligt fördelad i rummet. I sådana fall räcker ej ett ändligt antal variabler till för att beskriva lagringen. Det är nödvändigt att införa en funktion eller en kurva för att beskriva systemets innehåll. Den interna beskrivningen blir då en partiell differentialekvation. Vi belyser med ett exempel.

E x e m p e l 3.3 (Tillståndsekvationer för värmestaven) Betrakta det dynamiska system som består av en rak homogen stång med täthet ρ, specifikt värme C och värmeledningsförmåga k. Låt systemets insignal u vara temperaturen u(t) i stavens vänstra ände. Låt $\vartheta(x,t)$ beteckna temperaturen vid tidpunkten t i en punkt på avståndet x från stavens vänstra ändpunkt samt låt

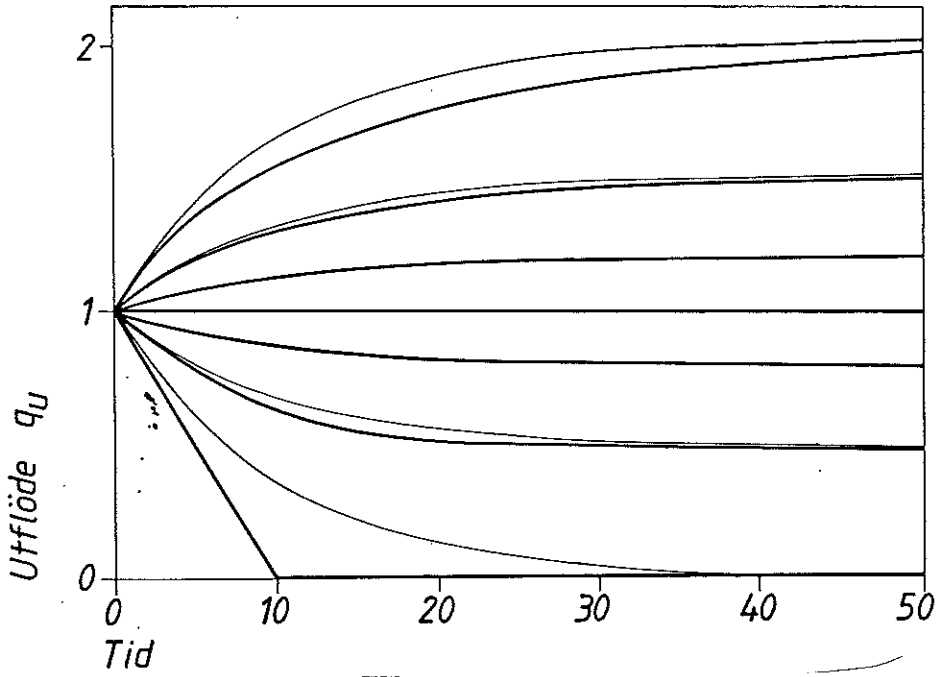


Fig. 3.8 - En jämförelse mellan den linjäriserade (tunna linjer) och den olinjära tankmodellen (tjocka linjer). Figuren visar hur utflödet varierar om inflödet vid tiden t=0 plötsligt ändras från 1 m^3/s till andra konstanta värden.

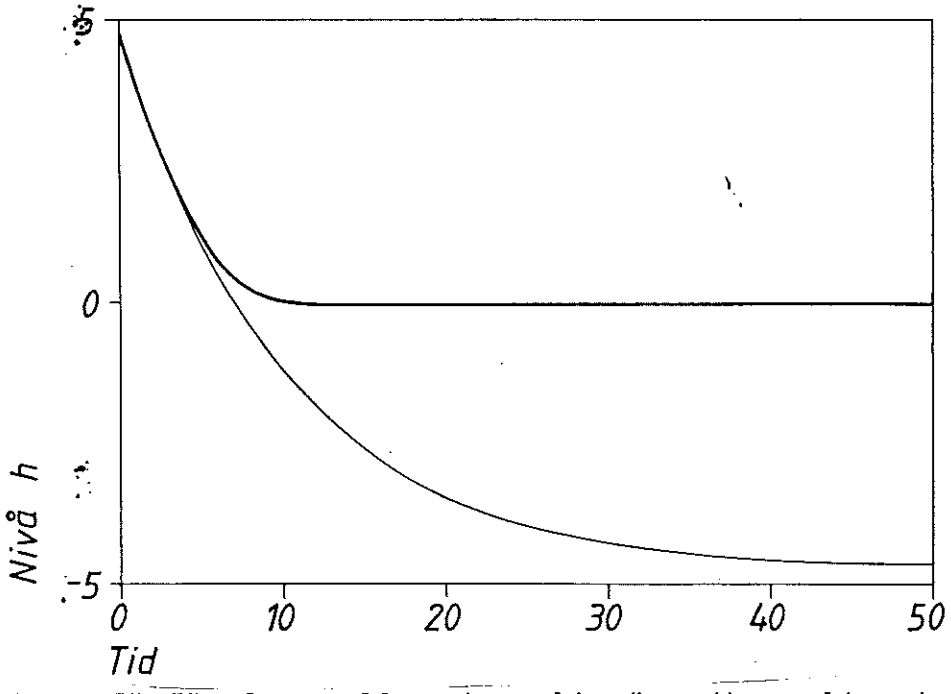


Fig. 3.9 - Jämförelse mellan den linjära (tunn linje) och den olinjära (tjock linje) tankmodellen. Figuren visar hur nivån i tanken ändras då inflödet stänges av. Observera att enligt den linjäriserade modellen så skulle nivån bli negativ.

utsignalen vara $\vartheta(x_o,t)$. Om vi antar att temperaturen är konstant i tvärsnitt vinkelräta mot stavens längdaxel gäller

$$\frac{\partial^2\vartheta(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial t} = 0, \quad a^2 = \frac{k}{\varrho C}$$

$$\vartheta(0,t) = u(t)$$

För att beskriva hur värmen lagras i staven måste temperaturfördelningen i staven anges. Funktionen $\vartheta(\cdot,t)$ är således systemets tillstånd.

□

System av första ordningen

För att få insyn i egenskaperna hos linjära tidsinvarianta system och för att bättre förstå tillståndsbeskrivningar skall specialfallet med endast en tillståndsvariabel undersökas. Tillståndsekvationen (3.6) kan då skrivas

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \qquad (3.9)$$

Vi börjar med att undersöka hur systemet uppför sig då styrsignalen u är noll. Systemet beskrivs då av

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Denna ekvation kallas det <u>fria systemets</u> ekvation ty den beskriver vad som händer om systemet lämnas för sig självt. Det fria systemet har lösningen

$$x(t) = e^{a(t-t_o)} x(t_o) \quad ,$$

Lösningen är en exponentialfunktion. Detta kan lätt inses eftersom tillståndets ändringshastighet är proportionell mot tillståndet. Detta kan formellt visas genom att derivera funktionen x(t). Vi finner

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \cdot e^{a(t-t_o)} x(t_o) = ax(t) \quad ,$$

Lösningen uppfyller således differentialekvationen. Det fria systemets lösningar illustreras i fig. 3.10.

Lösningarnas egenskaper beror av tecknet på talet a. Om a är negativt så går x(t) mot noll då t växer. Detta betyder att små avvikelser från jämviktsläget x=0 försvinner så småningom. Systemet säges därför vara stabilt om a<0. Om a=0 är lösningen konstant och om a>0 kommer lösningen att växa. I båda dessa fall kommer en liten störning att leda till bestående avvikelser från jämviktsläget. Systemet säges då vara <u>instabilt</u>. Det följer av fig. 3.10 att talet

$$T = 1/|a|$$

har en speciell tolkning. Detta tal kallas systemets tidskonstant. Det anger för stabila system hur snabbt variabeln x(t) går mot noll. Efter tiden T så har lösningen reducerats till $1/e \approx 0.37$ av sitt begynnelsevärde.

Vi skall nu undersöka hur systemets påverkas av insignalen. Ekvation (3.9) har lösningen

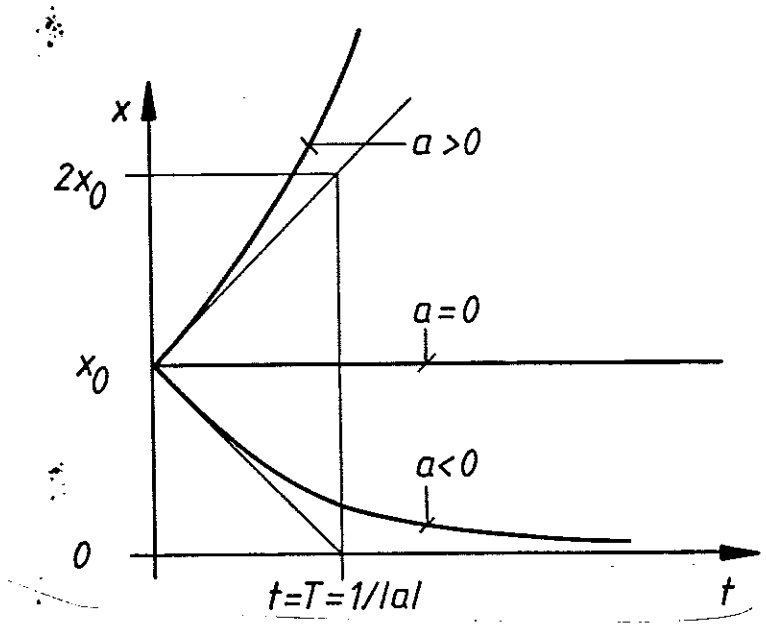


Fig. 3.10 - De fria lösningarna till ekvation (3.9) för olika värden på a.

$$x(t) = e^{a(t-t_o)} x(t_o) + b \int_{t_o}^{t} e^{a(t-s)} u(s)ds$$

$$y(t) = ce^{a(t-t_o)} x(t_o) + du(t) + bc \int_{t_o}^{t} e^{a(t-s)} u(s)ds$$

Genom att derivera funktionen x(t) kan man visa att den uppfyller (3.9). Lösningen sammansätts alltså av två delar. En del är lösningen till det fria systemet som beror av initialvillkoret $x(t_o)$. Den andra delen beror av insignalen.

Denna del kan tolkas på det sätt som visas i fig. 3.11.

Tillståndsvariabelns värde vid tiden t är ett viktat medelvärde av gamla värden på insignalen. Viktfaktorn bestäms av funktionen exp(aτ). Denna funktion kallas därför systemets viktfunktion. För stabila system avtar viktfunktionen exponentiellt med tidskonstanten T. Systemet glömmer alltså bort gamla värden av insignalen. Tidskonstanten T anger storleksordningen av systemets minne. Tidskonstanten T är alltså en viktig parameter. Den indikerar i stora drag systemets reaktionstid. Tidskonstanten uppskattas som kvoten mellan lagrad energi och effekt, eller kvoten mellan lagrad massa och massflödet.

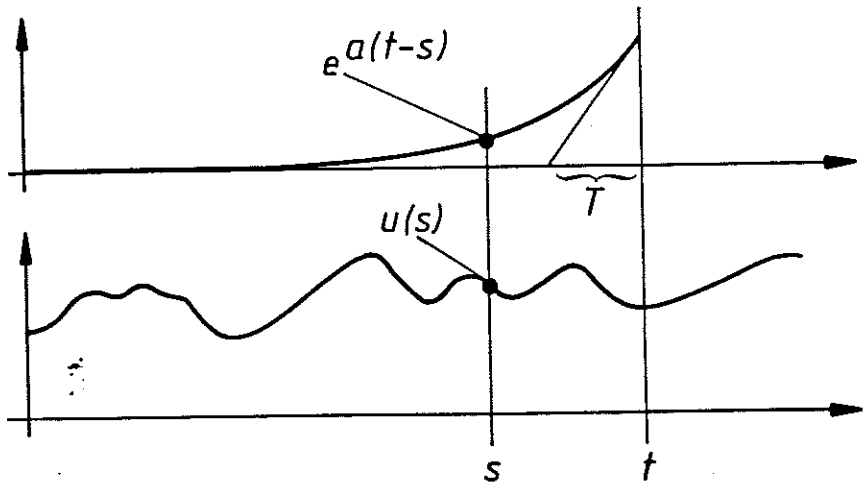


Fig. 3.11. - Illustrerar hur tillståndsvariabeln x(t) beror av gamla utsignaler. Figuren har ritats med a<0.

E x e m p e l 3.4 (Bestämning av tidskonstanten för vattentanken)
För vattentanken bestäms dynamiken av en massbalans. Tankens volym är $V_o = Ah_o$. Massflödet genom tanken är q_o. Den enkla tumregeln ger följande uppskattning av tidskonstanten

$$T \approx V_o/q_o$$

Det följer av exempel 3.2. att det korrekta värdet på tidskonstanten är

$$T = 1/\alpha = 2V_o/q_o$$

Det allmänna fallet

Systemekvationerna för linjära system kan i det allmänna fallet lösas på samma sätt som för system av första ordningen. Det behandlas utförligt i läroböcker i reglerteori. Se t.ex. Åström (1976). Vi skall här ej gå igenom detaljerna, däremot skall vi kortfattat diskutera lösningarnas karaktär.

Tillståndsekvationen för det allmänna linjära systemet ges av ekvation (3.6). Det fria systemets lösningar bestäms enbart av matrisen A. Denna matris kallas därför dynamikmatrisen. Matrisen B anger hur styrvariablerna

kopplas till tillståndsvariablerna, den kallas därför <u>pådragsmatris</u>. Matrisen C talar om hur mätsignalerna påverkas av tillståndsvariablerna. Den kallas därför <u>mätmatris</u>. Om matrisen D är skild från noll så kommer styrvariablerna att påverka utsignalerna direkt. Matrisen D kallas därför <u>direktkopplingsmatris</u>.

Det fria systemets lösningar är en summa av exponentialfunktioner exp(λt) där talen λ är matrisen A:s <u>egenvärden</u>. Dessa är lösningarna till den algebraiska ekvationen

$$\det [\lambda I - A] = 0$$

Denna ekvation kallas systemets <u>karakteristiska ekvation</u>. Antalet rötter är lika med antalet tillståndsvariabler. Reella egenvärden svarar mot den typ av lösningar som erhålls för system av första ordningen. Den karakteristiska ekvationen kan också ha komplexa rötter

$$\lambda = \sigma + i\omega$$

En sådan rot svarar mot lösningen

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t + i\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Lösningarnas kvalitativa karaktär beror av talen σ och ω. Detta har illustrerats i fig. 3.12. Det kan också inträffa att dynamikmatrisen har flera egenvärden λ som är lika. Lösningarna blir då av formen P(t) exp λt där P är ett polynom vars gradtal alltid är mindre än antalet lika rötter. I det allmänna fallet är det fria systemets lösning en summa av termer $P(t) \exp(\lambda_n t)$ där λ_n är egenvärdena till dynamikmatrisen. Varje term kallas en <u>svängningsmod</u> till det fria systemet eller kortfattat en mod.

Om samtliga egenvärden till dynamikmatrisen har negativ realdel så kommer tillståndsvektorns alla komponenter att gå mot noll efter en störning. Systemet säges då vara <u>stabilt</u>. Om dynamikmatrisen har något egenvärde vars realdel ej är negativ så kallas systemet <u>instabilt</u>.

Reglerbarhet

Tillståndsbeskrivningen av ett system är väl lämpad för att diskutera hur bra ett system kan regleras. Detta beror på det fria systemets egenskaper, hur styrvariablerna och mätvariablerna är kopplade till tillståndsvariablerna.

Om vi vill föreskriva att ett antal utsignaler skall följa föreskrivna kurvor måste vi till att börja med kräva att

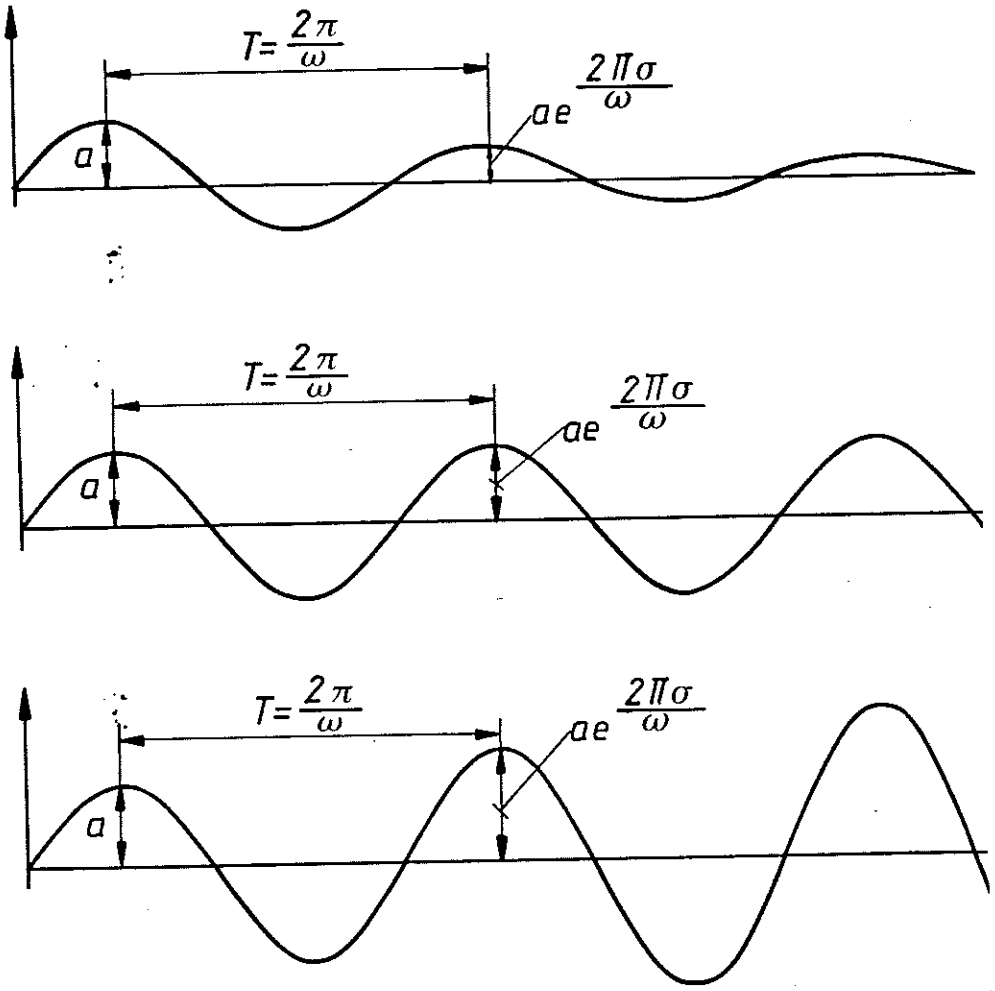


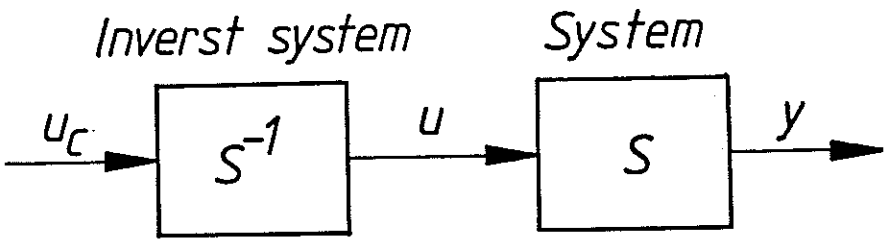
Fig. 3.12. - Karaktären hos lösningen som svarar mot komplexa egenvärden till dynamikmatrisen.

antalet styrvariabler åtminstone är lika med antalet utsignaler. Detta är ett mycket starkt krav. Det innebär t.ex. att om vi föreskriver banor för alla tillståndsvariabler så måste antalet styrvariabler vara lika med antalet tillståndsvariabler. Detta krav är dock inte tillräckligt. För att styrsignalen ej skall bli alltför oregelbunden måste man också kräva att de kurvor som skall följas är kontinuerliga och att de har kontinuerliga derivator av viss ordning. Betrakta t.ex. ett system som är en integrator. Eftersom utsignalen är insignalens tidsintegral så är det ej möjligt att få en diskontinuerlig utsignal med en begränsad insignal.

Betrakta ett givet dynamiskt system S, låt insignalen vara u och utsignalen y. Problemet att beräkna utsignalen y då systemet S och insignalen u är givna kallas <u>analysproblemet</u>. Problemet att få utsignalen att följa en given bana kan uttryckas så här: Givet systemet S och utsignalen y bestäm insignalen u. Detta problem kallas det <u>inversa problemet</u>. Lösningen kan ges i form av det s.k. <u>inversa systemet</u> S^{-1} som har y som insignal och u som utsignal. Lösningen till följeproblemet kan lätt erhållas med hjälp av det inversa systemet på det sätt som visas i fig. 3.13. Det är väsentligt att det inversa systemt är stabilt ty annars kan signalen u bli hur stor som helst.

Om man ej vill kräva att tillståndsvariablerna följer vissa kurvor kan man istället kräva att tillståndsvariablerna efter ändlig tid antar föreskrivna värden. Detta innebär således att vi ej kräver att tillståndsvariablerna följer en kurva men att de passerar ett godtyckligt antal punkter på kurvan. Hur tätt punkterna kan läggas beror på de maximalt tillgängliga styrsignalerna.

Ett system vars tillståndsvektor kan styras från en punkt i tillståndsrummet till en annan godtycklig punkt kallas på ändlig tid <u>styrbart</u>. System kan sakna styrbarhet på grund av att det finns för få styrvariabler eller genom att kopplingen mellan styrvariabler och tillståndsvariabler är olämplig. Styrbarhet kan alltså förloras genom olämplig koppling av system. Vi belyser detta med ett exempel.



<u>Fig. 3.13.</u> - Lösning till följeproblemet med hjälp av det inversa systemet.

E x e m p e l 3.5 (Förlust av styrbarhet vid parallellkoppling av identiska system)
Betrakta ett system som beskrivs av

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_2 + u$$

Systemet har alltså erhållits genom att parallellkoppla två identiska system. Systemet är inte styrbart. Detta kan inses på följande sätt: Subtraktion av ekvationerna ger

$$\frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = 0$$

Vi ser alltså att det inte finns någon möjlighet att påverka skillnaden mellan tillståndsvariablerna.

□

Typfallet för ett system som ej är styrbart illustreras i fig. 3.14. Det går att visa att alla linjära system kan bringas på denna form genom variabeltransformationer. Tillståndsvariablerna z i delsystemet S_1 är ej styrbara ty de kan ej påverkas av styrvariablen u. Man kan ej omedelbart avgöra om ett system är styrbart. Det kan vara nödvändigt att göra vissa variabeltransformationer för att få systemet på den form som visas i fig. 3.14. Detta illustreras i fig. 3.15 som visar hur ett system som ej är styrbart kan återföras på standardfallet i fig. 3.14 med hjälp av en

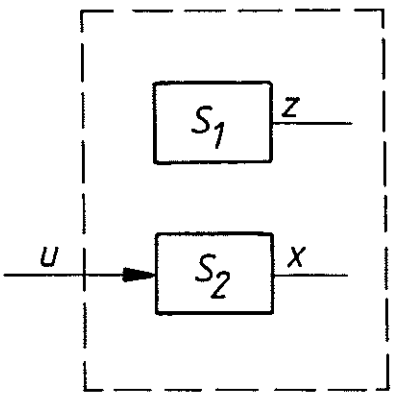


Fig. 3.14. - Typexempel på system som ej är styrbart.

enkel variabeltransformation. Det framgår av figuren på samma sätt som i exempel 3.5 att variabelkombinationen z-x ej påverkas av u.

Vid uppbyggnad av komplexa reglersystem med hjälp av enkla regulatorer kan man råka ut för parallellkoppling. Svårigheter kan då uppträda på grund av att styrbarhet förloras. Svårigheterna kan vara allvarliga om de tillstånd som ej är styrbara också är instabila. Detta kan förekomma i samband med regulatorer med integralverkan. Exempel ges i avsnitt 6.5. Ett formellt kriterium på styrbarhet för ett linjärt system ges på följande sätt. Bilda matrisen

$$W_s = [B \; AB \; \ldots A^{n-1}B \;]$$

Systemet (3.6) är styrbart om matrisen har n oberoende kolonner.

Observerbarhet

Vid planering av reglersystem är det viktigt att kunna avgöra om antalet mätinstrument är tillräckligt. Eftersom kunskap om alla tillståndsvariabler gör det möjligt att fullständigt prediktera systemets framtida utveckling så är det tillräckligt att mäta alla tillståndsvariabler. Detta kräver dock många instrument och det är viktigt att veta om det går att klara ett reglerproblem med färre mätinstrument. Om en matematisk modell för systemet är känd så skulle tillståndsvariablerna kanske kunna beräknas ur tillgängliga mätningar. Ett system kallas observerbart om detta är

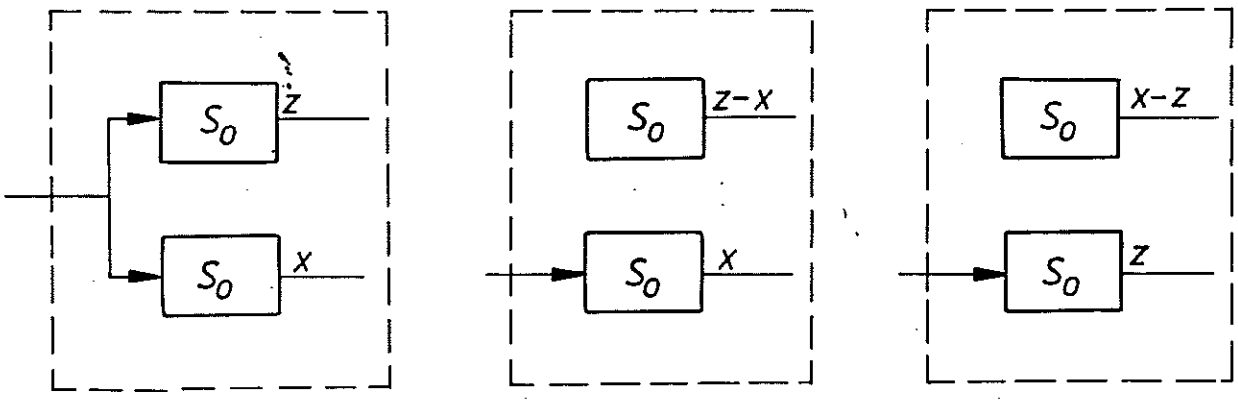


Fig. 3.15. - Exempel på system som ej är styrbara.

möjligt.

Bestämning av tillståndet från mätsignalen är i princip en baklängesräkning utgående från systemekvationerna. I kapitel 9 visar vi i detalj hur det går till. Ett typfall på ett system som ej är observerbart visas i fig. 3.16. Det går att visa att alla linjära system kan bringas på denna form genom variabeltransformation. Tillståndsvariablerna z i delsystemet S_1 är tysta eller ej observerbara eftersom de överhuvudtaget ej påverkar utsignalen y. Man kan sällan avgöra direkt om ett system har tysta tillstånd. Det är ofta nödvändigt att göra variabeltransformationer för att få systemet på den form som visas i fig. 3.16. Ett exempel på transformation till standardfallet visas i fig. 3.17. Det framgår av figuren att tillståndet x-z är tyst. För linjära tidsinvarianta system (3.6) går det att finna enkla kriterier för observerbarhet. Man bildar matrisen

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Systemet är observerbart om matrisen har n rader som är linjärt oberoende.

Kalmans uppdelning

Genom att kombinera fig. 3.14 och fig. 3.16 kan man visa att varje linjärt system kan delas upp i fyra delsystem på det sätt som visas i fig. 3.18. Delsystemet S_1 är styrbart men

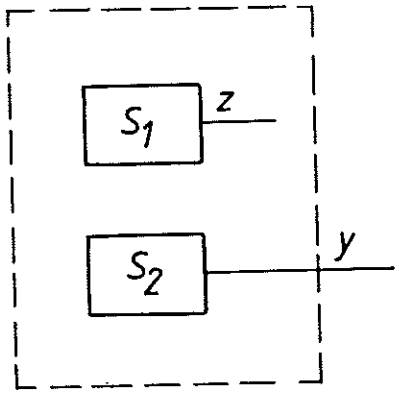


Fig. 3.16. - Typexempel på system med tysta (icke observerbara) tillstånd.

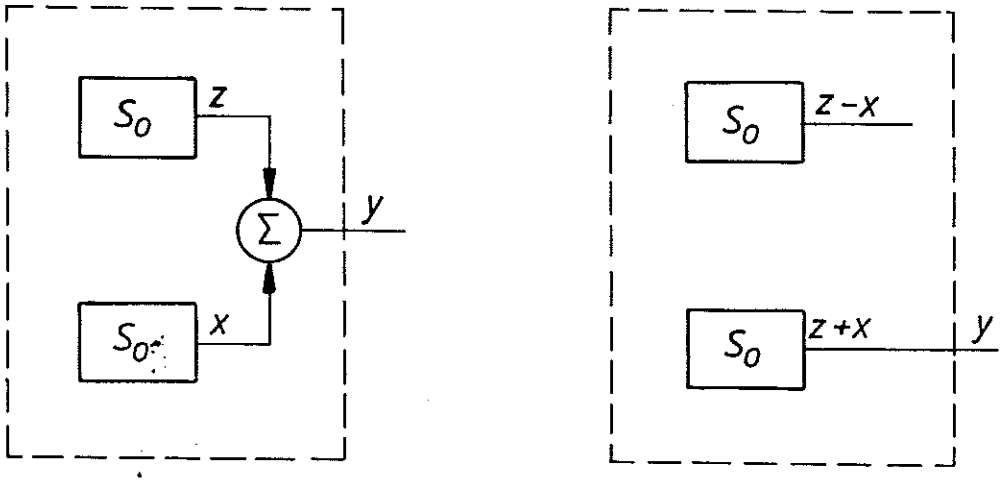


Fig. 3.17. - Exempel på system med tysta tillstånd.

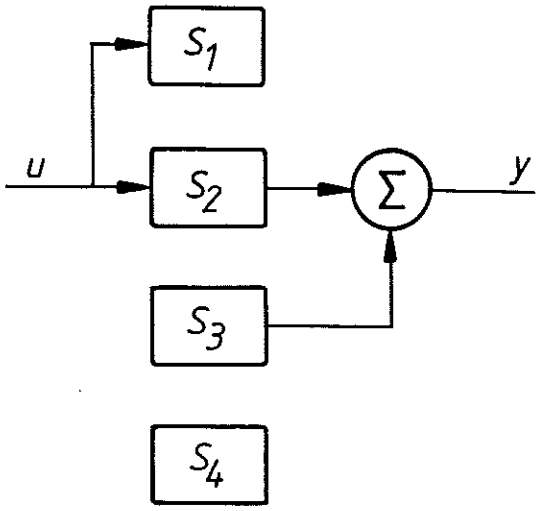


Fig. 3.18. - Kalmans uppdelning av ett linjärt system.

ej observerbart, systemet S_2 är styrbart och observerbart, S_3 är ej styrbart men observerbart och S_4 är vare sig styrbart eller observerbart. Uppdelningen kallas Kalmans uppdelning.

Det är naturligtvis önskvärt att delsystemen S_1, S_3 och S_4 ej finns med. Speciellt allvarligt är det om systemet S_4 har instabila moder. Ett exempel på Kalmans uppdelning illustreras i fig. 3.19.

3.5 TRANSIENTSVAR

I detta avsnitt skall vi redogöra för ett annat sätt att beskriva en speciell klass av dynamiska system. Vi skall presentera en s.k. extern beskrivning. Jämför den allmänna diskussionen i avsnitt 3.3. Externa beskrivningar är på sätt och vis mer abstrakta än tillståndsbeskrivningarna. En tillståndsrepresentation utgår ju från de inre mekanismer som beskriver system. Processdynamiken erhålls sedan automatiskt från beskrivningen av processmekanismerna. De externa beskrivningarna ger enbart sambandet mellan systemets in- och utsignaler. De bortser helt från vad som händer inuti systemet. I den allmänna diskussionen i avsnitt 3.3 påstods att en insignal- utsignal beskrivning kunde uppfattas som en tabell över alla par av in- och utsignaler.

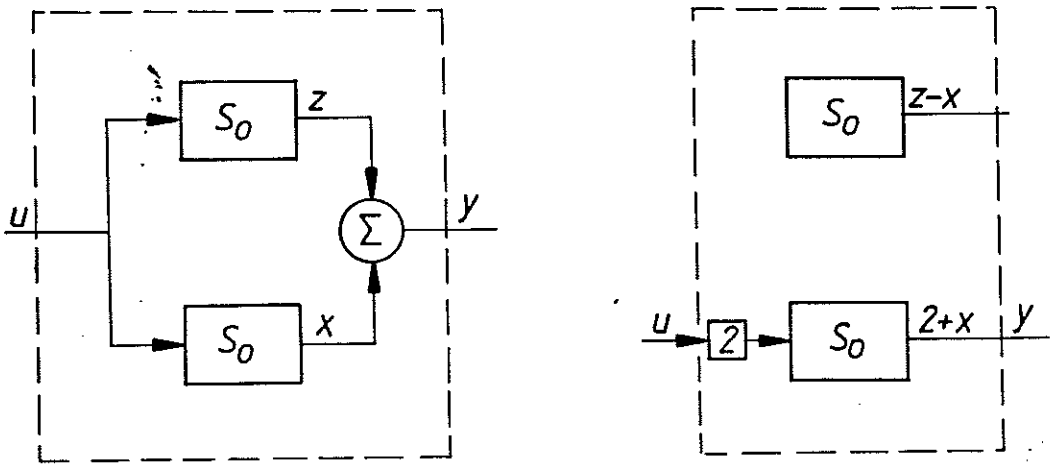


Fig. 3.19 - Exempel på Kalmans uppdelning av ett system

Kapitel 3 - Processbeskrivningar

De system som studeras i detta avsnitt är sådana att det räcker med att känna ett signalpar för att hela tabellen skall kunna konstrueras.

Linjära tidsinvarianta system

Linjära tidsinvarianta dynamiska system är mycket vanliga. De används som approximationer till många system på samma sätt som den räta linjen används för att approximera olinjära funktioner. Linjära system har den mycket trevliga egenskapen att de kan karakteriseras fullständigt med ett enda insignal-utsignal par. Den tabell som diskuterades inledningsvis kan alltså förenklas drastiskt. Innan vi kan beskriva hur det går till skall vi uttrycka oss med något större precision.

Betrakta ett system med insignal u och utsignal y. Låt (u_1, y_1) och (u_2, y_2) vara två insignal - utsignal par. Ett system är linjärt om insignalen $au_1 + bu_2$ motsvarar utsignalen $ay_1 + by_2$. Denna egenskap kan uttryckas på följande sätt. Om utsignalerna är kända för ett antal insignaler så kan den utsignal som svarar mot en linjärkombination av insignalerna erhållas som motsvarande linjärkombination av utsignalerna. Detta kallas även superpositionsprincipen.

Genom att göra gränsövergångar så går det att visa att det följer av superpositionsprincipen att om (u,y) är ett insignal-utsignal par så är även (u_1, y_1) och (u_2, y_2) insignal-utsignal par om:

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^{t} a(s)\, u(s)\, ds$$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} a(s)\, y(s)\, ds$$

och

$$u_2(t) = a(t)\, \frac{d^n u(t)}{dt^n}$$

$$y_2(t) = a(t)\, \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Superpositionsprincipen kan alltså formuleras så att om (u,y) är ett insignal-utsignal par så är även (Lu,Ly) ett insignal-utsignal par där L är en godtycklig linjär operator.

Tidsinvarians innebär i grova drag att systemet reagerar på samma sätt på en insignal oavsett den tidpunkt då insignalen appliceras. Det kan exaktare beskrivas så här. Låt u^h beteckna en translation av signalen u med h tidsenheter. Ett linjärt system kallas <u>tidsinvariant</u> om insignal-utsignal paret (u,y) medför att (u^h, y^h) också är ett insignal-utsignal par. Detta kallas <u>translationsprincipen</u>. Den innebär att systemets svar på en signal ej beror på den tidpunkt då signalen appliceras.

Stegsvaret

Vi har nu gjort de förberedelser som krävs för att visa att ett linjärt tidsinvariant system kan beskrivas fullständigt med ett insignal-usignal par. Det finns många möjliga val av insignaler. Ett möjligt val är

$$u(t) = S(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases} .$$

Denna signal kallas ett enhetssteg. Den utsignal som erhålls kallas stegsvaret och betecknas H(t). Vi skall nu visa att alla insignal-utsignal par kan beskrivas med hjälp av stegsvaret. Betrakta först en signal som är styckvis konstant. Se fig. 3.20. Den styckvis linjära signalen kan beskrivas som en linjärkombination av stegsignaler

$$u(t) = u(t_0)\,[\,S(t-t_0) - S(t-t_1)\,]+\ldots$$
$$+\,u(t_i)\,[\,S(t-t_i) - S(t-t_{i+1})\,]+\ldots \quad .$$

Det följer av superpositions- och translationsprinciperna att systemets svar på signalen $u(t_i)\ S(t-t_i)$ är $u(t_i)$ $H(t-t_i)$.

Det följer då av superpositionsprincipen att systemets svar på signalen u(t) är

$$y(t) = u(t_0)\,[\,H(t-t_0)-H(t-t_1)\,]+\ldots+$$
$$u(t_i)\,[\,H(t-t_i)-H(t-t_{i+1})\,]+\ldots$$

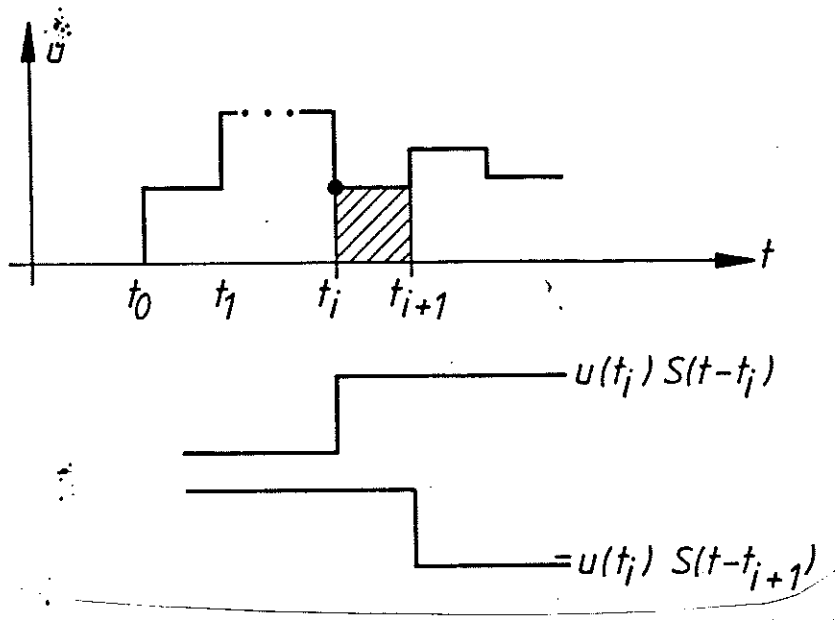


Fig. 3.20 - Illustrerar hur en styckvis konstant signal kan approximeras med en linjärkombination av enhetssteg.

godtycklig styckvis konstant insignal kan anges exakt med hjälp av stegsvaret. Eftersom en styckvis kontinuerlig signal kan approximeras med en styckvis konstant signal finner vi genom en gränsövergång följande formel

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(s)\, h(t-s)\, ds \qquad (3.11)$$

där

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt} \qquad (3.12)$$

Dessa formler visar att den utsignal y som erhålls för en godtycklig insignal u kan beräknas ur stegsvaret H.

Stegsvaret för ett system är lätt att mäta genom att ansluta en skrivare till utsignalen och göra en stegformig ändring i insignalen. Observera att systemet skall vara i vila innan insignalen ändras. Det finns flera sätt att välja och dimensionera regulatorer direkt med utgångspunkt från stegsvaret. I fig. 3.21 visas stegsvar för system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$$

$$G(s) = \frac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}, \quad \omega = 1.5, \quad \zeta = 0.2$$

$$G(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^4} = \frac{-s^3-3s^2-3s+1}{(s+1)^5}.$$

Impulssvaret

I formeln (3.11) uppträder funktionen h som är tidsderivatan av stegsvaret H. Denna funktion kallas impulssvaret. Eftersom tidsderivatan av ett steg är impulsfunktionen, eller Dirac's deltafunktion, kan impulssvaret tolkas som den

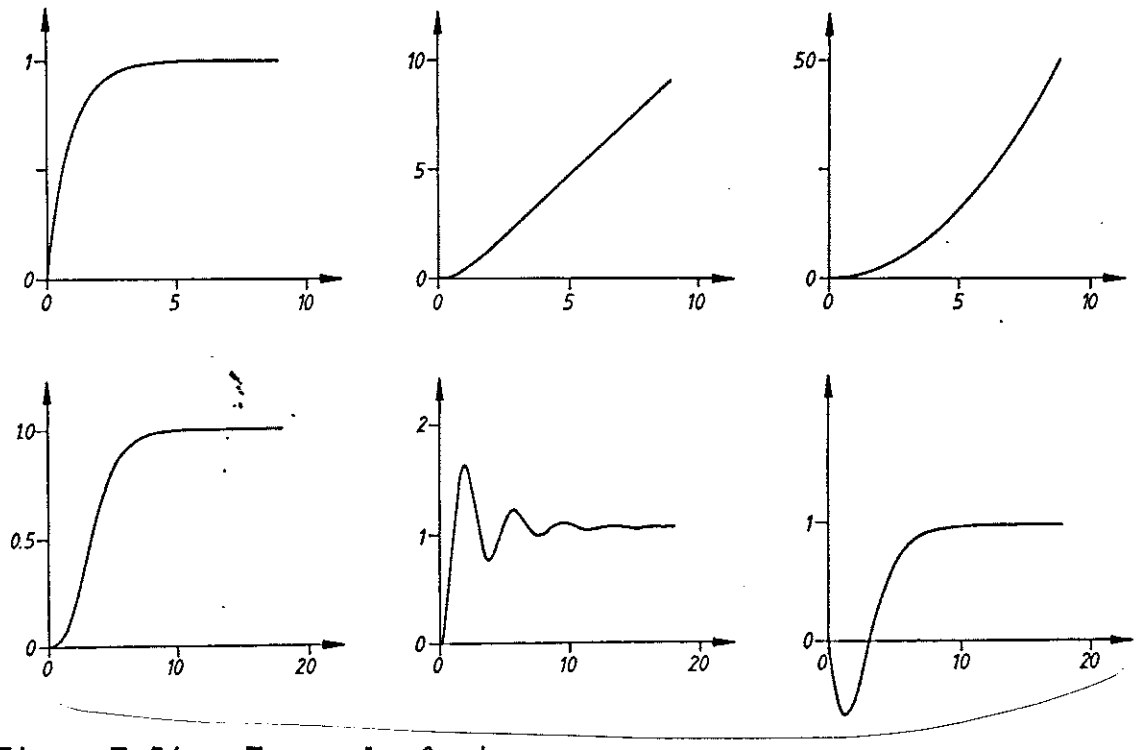


Fig. 3.21 - Exempel på stegsvar.

utsignal som erhålles då insignalen är en impuls. I fig. 3.22 visas impulssvaren som svarar mot fig. 3.21.

Rampsvaret

Förutom stegsvaret och impulssvaret brukar även s.k. rampsvar användas för att beskriva linjära tidsinvarianta system. En rampsignal visas i fig. 3.22. Den är noll till en viss tidpunkt och växer sedan linjärt. En ramp är tidsintegralen av ett steg

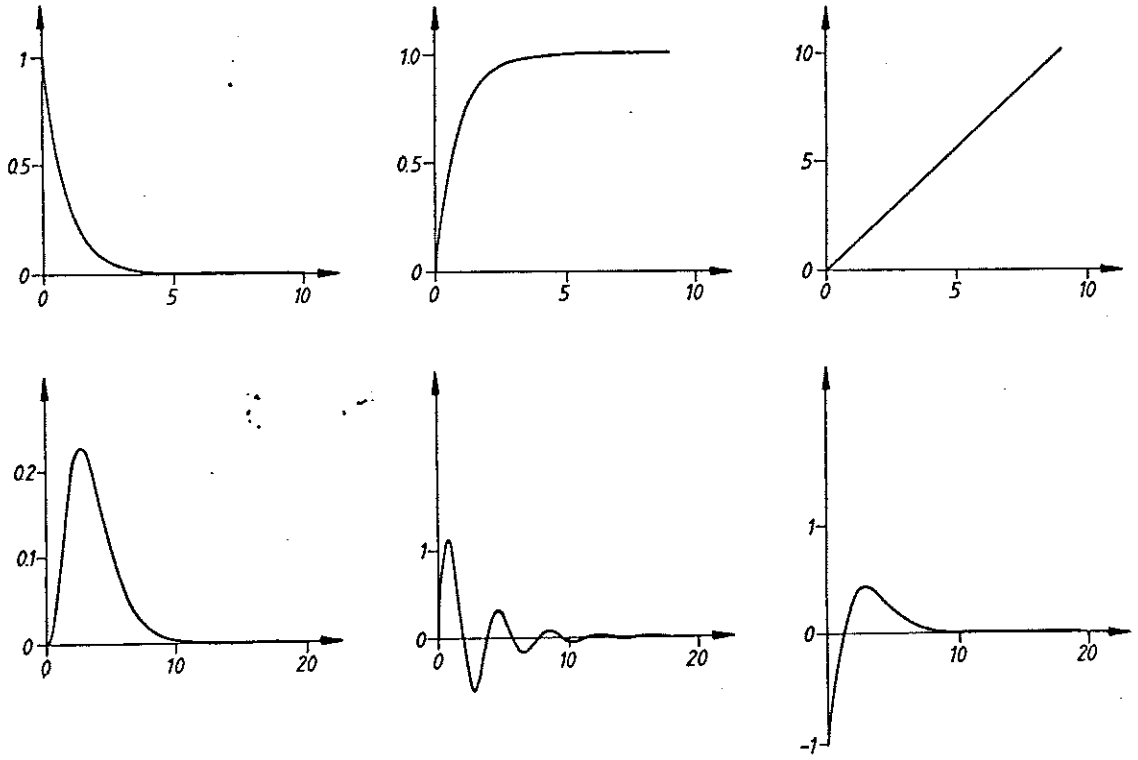


Fig. 3.22 - Exempel på impulssvar.

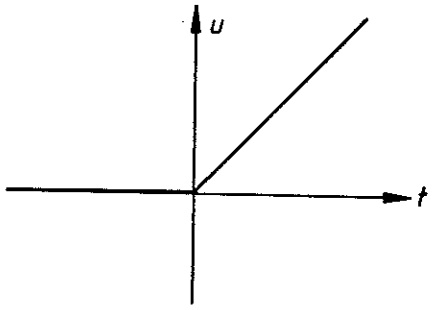


Fig. 3.23 - Rampsignal.

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} H(s)\, ds$$

På grund av superpositionsprincipen finner vi då att rampsvaret är tidsintegralen av stegsvaret.

Pulssvaret

Vid datorstyrning av processer är det vanligt att styrsignalen är styckvis konstant. Detta är naturligt ty mätsignalen samplas av datorn vid vissa tidpunkter och datorn bestämmer sedan den förändring som skall göras i styrvariabeln. Styrsignalens beräknade värde omvandlas till en analog signal. Den analoga signalens värde hålls konstant mellan samplingspunkterna. I denna situation karakteriseras processens insignal-utsignal samband lämpligen med dess pulssvar dvs. dess svar på en puls med amplituden 1 och med en pulsbredd som svarar mot avståndet mellan två närliggande samplingspunkter. Se fig. 3.24. Pulssvaret kan beräknas ur stegsvaret med följande formel

$$h_p(t) = H(t) - H(t-T) \qquad (3.13)$$

Låt $\delta_p(t)$ vara en enhetspuls med bredden T. En godtycklig styckvis konstant signal kan då skrivas som

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k\, \delta_p(t-kT)$$

Låt pulssvaret dvs. processens svar på pulsen δ_p vara h_p. Enligt superpositionsprincipen följer då att utsignalen blir

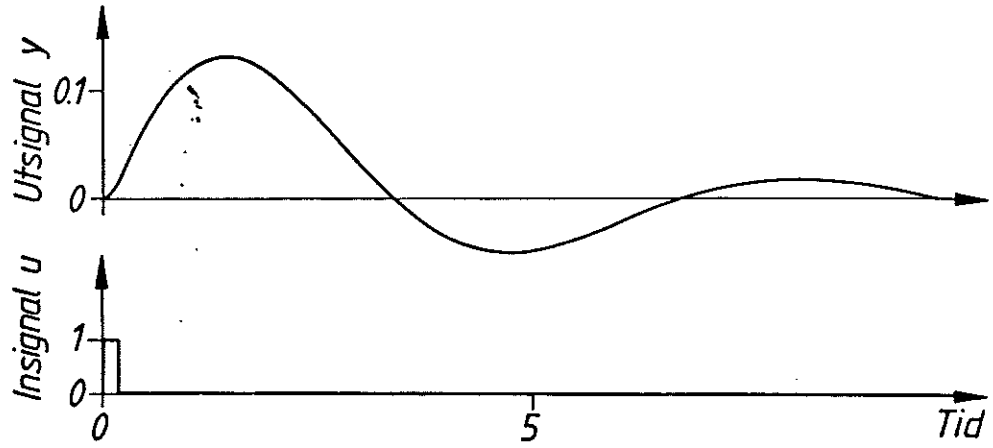


Fig. 3.24 - Illustration av pulssvaret h_p.

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{N} u_k h_p(t-kT)$$

där N det största heltal sådant att NT<t. Vi ser återigen att insignal-utsignal sambandet för alla styckvis konstanta insignaler lätt kan karakteriseras med hjälp av pulssvaret.

Några begrepp

Det finns några viktiga begrepp som kan definieras med hjälp av impuls- steg- och rampsvaren. De flesta system är sådana att en ändring av insignalen vid tiden t ej påverkar utsignalen vid tidpunkter mindre än t. System med denna egenskap kallas kausala. För ett kausalt system har impulssvaret egenskapen

$$h(t) = 0 \text{ för alla } t<0$$

Ett linjärt tidsinvariant system säges vara (insignal-utsignal) stabilt om impulssvaret h går mot noll så snabbt att

$$\int_0^\infty |h(t)|dt < \infty$$

Det följer av ekvationen (3.11) att en begränsad insignal alltid ger en begränsad utsignal om systemet är stabilt. För ett stabilt system existerar

$$k = H(\infty) = \int_0^\infty h(t)dt$$

Detta tal kallas statisk förstärkning. Det anger sambandet mellan insignal och utsignal under stationära förhållanden. Om insignalen ändras med Δu så kommer utsignalen att ha ändrats med $k\Delta u$ då jämvikt inträtt. Många industriella processer har ett stegsvar som är monotont växande av det utseende som visas i fig. 3.25. I figuren definieras stigtid T dödtid T_d och statisk förstärkning. Stigtiden erhålles genom att rita tangenten till stegsvaret i den punkt där lutningen är störst. Stigtiden och dödtiden anger kvantitativt hur lång tid det tar för ett system att reagera på en ändring i insignalen.

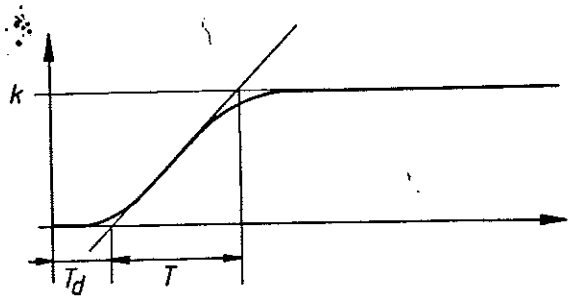


Fig. 3.25 - Ett stegsvar som är monotont växande.

3.6 FREKVENSSVAR

De matematiska beskrivningarna som behandlats har avsett delsystem. För att få en beskrivning av ett komplett delsystem måste de olika delsystemens transientsvar kombineras. Det visar sig att detta är svårt att göra. Vi skall därför införa en annan insignal-utsignal beskrivning som är sådan att en beskrivning för ett komplett system lätt kan erhållas ur delsystemens beskrivningar. Utgångspunkten för beskrivningen är Fouriers idé att beskriva signaler som en summa av sinussignaler. Om man kan beräkna den utsignal som erhålles då insignalen är en sinussignal så kan utsignalen för en godtycklig insignal bestämmas med superpositionsprincipen. Observera att beskrivningen i princip är en tabell över par av in-och utsignaler. Detta sätt att beskriva system kallas frekvensanalys.

Frekvensfunktioner

Betrakta ett linjärt tidsinvariant system som är stabilt. Om insignalen är en sinussignal så erhålles en utsignal med det principiella utseendet som visas i fig. 3.26. Efter en insvängningstid så blir utsignalen också en sinussignal med samma frekvens som insignalen. Under stationära förhållanden kan sambandet mellan in-och utsignal anges med två tal som anger kvoten a mellan sinussignalernas amplituder och fasförskjutninen φ mellan insignal och utsignal. Se fig. 3.26. För att bestämma den utsignal som svarar mot en godtycklig sinusformad insignal räcker det ej med att känna till värdena på a och φ för en enda sinusignal. Det är nödvändigt att känna värdena på a och φ för alla frekvenser ω. Funktionerna $a(\omega)$ och $\varphi(\omega)$ måste således vara kända. Det är ändamålsenligt att betrakta a och φ som belopp och vinkel för ett komplext tal

$$G(i\omega) = a(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)} \qquad (3.14)$$

Funktionen G kallas systemets <u>frekvensfunktion</u>. Funktionen $a = |G|$ kallas <u>amplitudfunktionen</u> och funktionen $\varphi = \arg G$ kallas fasfunktionen. Värdena på a och φ för speciella ω kallas <u>förstärkning</u> och <u>fasvinkel</u>. Talet $G(i\omega)$ kan

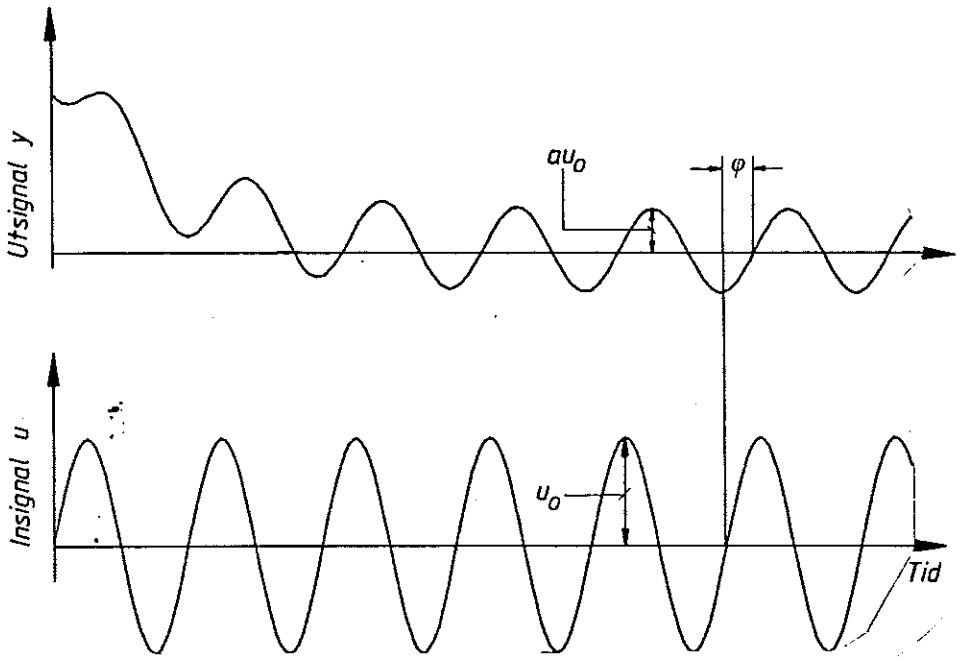


Fig. 3.26 - Insignal-utsignalpar för ett stabilt, linjärt, och tidsinvariant system som drivs av en sinussignal.

representeras som en pil med längden $a(\omega)$ som bildar vinkeln $\varphi(\omega)$ med x-axeln. Se fig. 3.27. Då ω genomlöper värdena $0 \leq \omega < \infty$ så kommer pilspetsen att beskriva en kurva i planet. Denna kurva kallas systemets frekvenskurva eller dess Nyquistdiagram.

Frekvensfunktioner för sammansatta system

För att erhålla en matematisk modell för ett helt system är det nödvändigt att bestämma matematiska modeller för kombinationer av delsystem. De grundläggande sammankopplingar som förekommer är seriekoppling, parallellkoppling och återkoppling av två system. Blockschema för dessa kopplingar visas i fig. 3.28. Med hjälp av dessa tre kopplingsformerna kan alla typer av system erhållas.

Frekvensfunktionerna för sammansatta system skall nu bestämmas. Låt frekvensfunktionerna för S_1 och S_2 vara G_1 respektive G_2. Låt vidare a_1, a_2 och φ_1, φ_2 vara motsvarande amplitud- och fasfunktioner.

Betrakta först det system som erhålls genom seriekoppling. Om insignalen u är en sinussignal så blir signalerna y_1 och

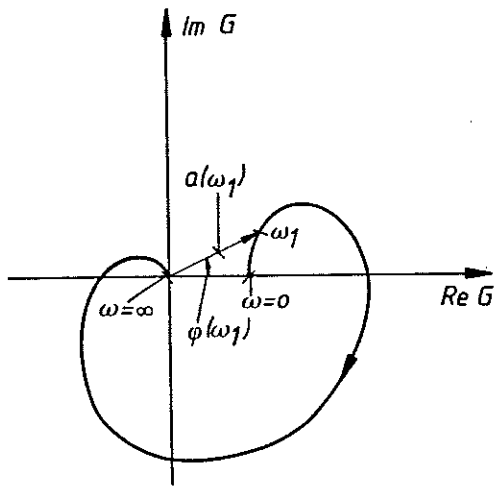


Fig. 3.27. - Frekvenskurva för ett system.

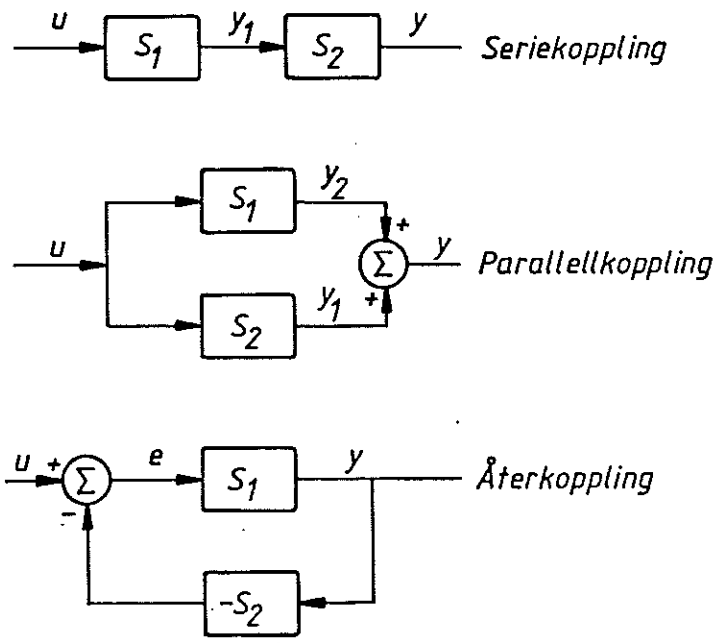


Fig. 3.28 - Olika sätt att koppla samman system.

y i stationärt tillstånd också sinussignaler med samma frekvens. Det följer av definitionerna på förstärkning och fas att signalen y_1 har amplituden $a_1 u_0$ och att den är fasförskjuten φ_1 i förhållande till u. Eftersom y_1 är insignal till systemet S_2 får utsignalen y amplituden $a_2 a_1 u_0$. Utsignalen har fasförskjutningen φ_2 i förhållande till y_1 och fasförskjutningen $\varphi_1 + \varphi_2$ i förhållande till signalen u. Vi finner alltså

$$a = a_1 a_2$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Detta innebär att

$$G_s = a_1 a_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = a_1 e^{i\varphi_1} a_2 e^{i\varphi_2} = G_1 G_2 \qquad (3.15)$$

Vid seriekoppling av två system multipliceras motsvarande frekvensfunktioner. På likadant sätt erhålles vid parallellkoppling

$$G_p = G_1 + G_2. \qquad (3.16)$$

Vid återkoppling ges det sammansatta systemets frekvensfunktion av

$$G_å = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} \qquad (3.17)$$

Sammanfattningsvis finner vi att frekvensfunktionen för ett sammansatt system erhålles ur delarnas frekvensfunktioner genom enkla algebraiska räkningar.

Nyquists stabilitetssats

Stabilitet innebär väsentligen att små förändringar i ett system också medför små ändringar i systemets signaler. Vi fann att för linjära tidsinvarianta system kunde man avgöra stabilitet genom att studera systemets impulssvar. Vi skall nu visa att systemets stabilitet också kan avgöras med hjälp av systemets frekvenskurvor.

Betrakta blockschemat för standard konfigurationen av ett enkelt återkopplat system som visas i fig. 3.29. Jämför avsnitt 2.3. Låt systemet S_0 ha frekvensfunktionen G_0. Om frekvensfunktionen är sådan att det finns en frekvens ω_c så att

$$G_0(i\omega_c) = -1$$

så kan systemet svänga sinusformigt med frekvensen ω_c. Man kan intuitivt förstå detta på följande sätt. Skär upp systemet efter summatorn såsom visas i fig. 3.29. Om en sinusformad signal med frekvensen ω_c injiceras i punkten A så kommer i stationärt tillstånd signalen i punkten B vara lika med den injicerade signalen. Punkterna A och B skulle då kunna kopplas ihop och en sinusformad svängning skulle kunna upprätthållas. Om $|G(i\omega_c)|$ vore mindre än ett så skulle signalen i punkten B ha lägre amplitud än den injicerade signalen. Intuitivt skulle man då kunna tro att signalernas amplitud skulle avta om A och B kopplades ihop. På samma sätt kan man förmoda att signalerna växer om $|G(i\omega_c)|>1$.

Detta intuitiva resonemang är nästan korrekt. Den svenskättade amerikanska forskaren Nyquist visade att man måste ta hänsyn till hela frekvenskurvans utseende för att avgöra stabiliteten för systemet i fig. 3.29. Nyquist angav följande metod att avgöra stabiliteten. Rita frekvenskurvan

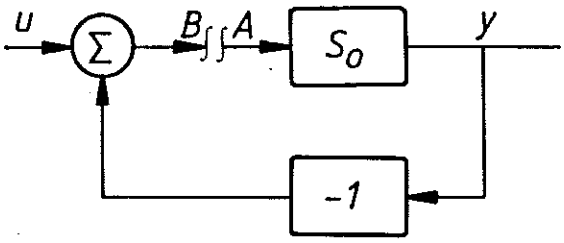


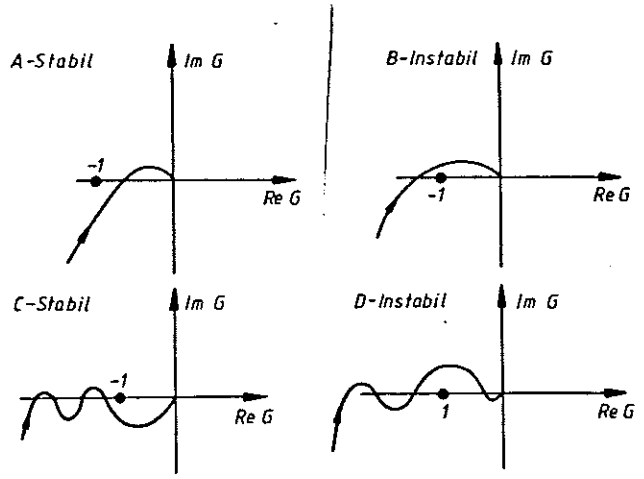
Fig. 3.29 Blockschema för enkelt återkopplat system.

för systemet S_o. Om överföringsfunktionen ej har några singulariteter i högra halvplanet och om punkten -1 ligger på frekvenskurvans vänstra sida då frekvenskurvan genomlöpes för växande frekvenser så är det återkopplade systemet stabilt.

Nyquists stabilitetssats är mycket användbar. Den ger dels ett kriterium för stabilitet och dels visar den vad som behöver göras för att stabilisera ett instabilt system. Det gäller att införa en kompensering som knycklar till frekvenskurvan så att punkten -1 undvikes.

För att kvantitativt ange hur nära stabilitetsgränsen ett system ligger har två tal <u>amplitudmarginalen</u> A_m och <u>fasmarginalen</u> φ_m införts. Amplitudmarginalen anger hur många gånger förstärkningen hos S_o kan öka innan det slutna systemet blir instabilt. Fasmarginalen anger hur mycket extra fasförskjutning som kan införas innan systemet blir instabilt. Förstärkningsmarginal och fasmarginal kan lätt utläsas ur frekvenskurvan. Se fig. 3.31.

Den frekvens ω_c där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln kallas <u>skärningsfrekvensen</u>. Värdet på skärningsfrekvensen ger värdefull information om den slutna kretsens egenskaper. Kretsförstärkningen är större än ett för $\omega < \omega_c$ och lägre än ett för $\omega > \omega_c$. En hög kretsförstärkning ger låg känslighet för fel och parametervariationer. Som en grov uppskattning



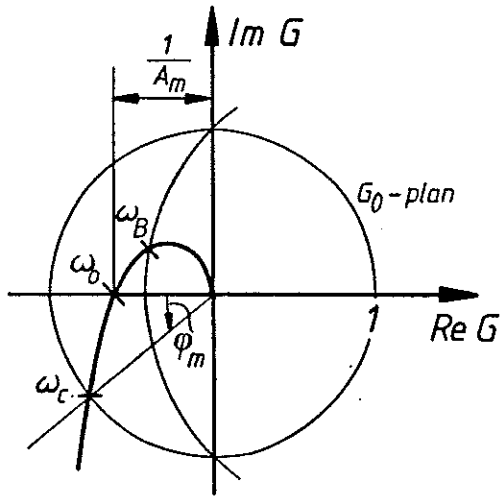


Fig. 3.31. - Visar hur amplitudmarginal, fasmarginal, skärningsfrekvens och bandbredd kan läsas ut av en Nyquistkurva.

kan man alltså säga att systemet förmår att eliminera störningar som har lägre frekvens än ω_c. Gränsfrekvensen anger också ungefärligen gränsen för de kommandosignaler som systemet kan följa.

Bandbredden ω_B är den frekvens där

$$\left| \frac{G_o}{1 + G_o} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Detta villkor motsvarar en cirkel med radien $\sqrt{2}$ genom punkten (1,0) i G_o - planet. Bandbredden kan således också lätt läsas ut ur Nyquistkurvan. Se fig. 3.31. Den kan tolkas på ungefär samma sätt som skärningsfrekvensen.

Bode - diagram

Det är arbetsamt att rita Nyqvistkurvor. Man har därför infört en annan representation av frekvenskurvor som är lättare att rita. I det s.k. Bode - diagrammet ritas amplitudkurvan och faskurvan var för sig i logaritmiska skalor. Se fig. 3.32. Den logaritmiska skalan medför att ett

stort frekvensområde kan täckas. Vidare visar det sig att amplitudkurvor ofta får rätlinjiga asymptoter vilket förenklar uppritandet. Fasmarginalen, amplitudmarginalen och skärningsfrekvensen kan lätt utläsas ur Bode - diagrammet. Se fig. 3.32.

Samband mellan frekvenser och transientsvar

Frekvensfunktionen och impulssvaret är två olika sätt att representera ett linjärt tidsinvariant system. Det måste då naturligtvis finnas ett samband mellan representationerna. Detta samband skall nu påvisas. Detta kräver lite mer matematik än vad vi hittills behövt utnyttja.

Vi skall först införa begreppet överföringsfunktion. Vi utgår då från frekvensfunktionen $G(i\omega)$, som definieras av ekvationen (3.15). Det är bekvämt att uppfatta $i\omega$ som imaginära delen av en komplex variabel s. Funktionen G som hittills bara definierats på imaginära axeln i s - planet kan utvidgas till hela s - planet. Vi får då en funktion G som kan uppfattas som en komplex funktion av en komplex

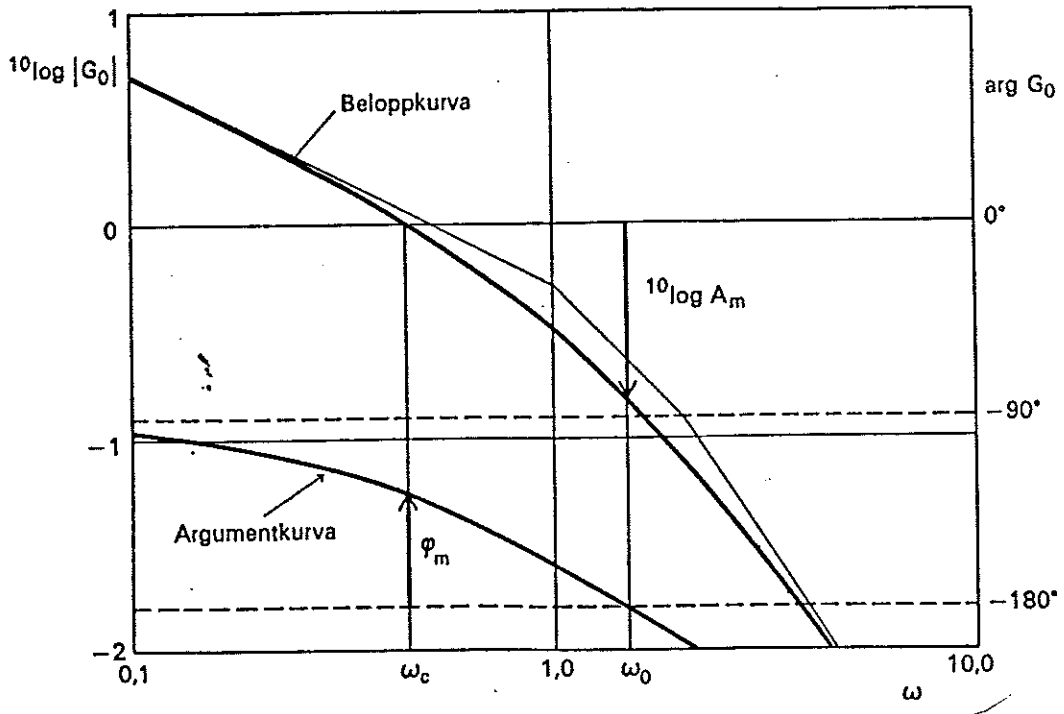


Fig. 3.32 - Exempel på Bode - diagram.

variabel dvs $G:C \to C$. Denna funktion kallas systemets <u>överföringsfunktion</u>.

Man kan visa att överföringsfunktionen kan beräknas ur impulssvaret med formeln

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt. \tag{3.18}$$

Vidare gäller omvändningen

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} G(s) ds. \tag{3.19}$$

Överföringsfunktionen är impulssvarets Laplacetransform. Laplacetransformation av formeln (3.11) ger

$$Y(s) = G(s)\, U(s) \tag{3.20}$$

där

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$$

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt$$

Formeln (3.20) är viktig ty den visar att utsignalens Laplacetransform är produkten av systemets överföringsfunktion och insignalens Laplacetransform. Genom att övergå till Laplacetransformer kan utsignalens Laplacetransform beräknas med enkel algebra. Detta är i själva verket grunden till den algebraiska systemteorin.

I ett blockschema för ett linjärt tidsinvariant system är det vanligt att delsystemen beskrivs genom att skriva deras överföringsfunktioner i de rutor som representerar systemen.

<u>Operatorräkning</u>

Det finns ofta behov av att erhålla sambandet mellan olika signaler i ett system. Operatorräkning är mycket bekvämt att använda för detta ändamål. Vi illustrerar hur det går till med ett exempel.

E x e m p e l 3.6 (Beräkning av insignal-utsignal samband.)
Betrakta ett system av första ordningen, som beskrivs av tillståndsekvationen (3.9) dvs

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu$$
$$y = cx + du$$

Antag att vi vill bestämma sambandet mellan insignalen u och utsignalen y. Vi skall alltså eliminera variabeln x i ekvationen. Detta kan bekvämt göras med operatorräkning. Inför deriveringsoperatorn p=d/dt. En multiplikation av en tidsfunktion med p svarar således mot att derivera funktionen. Systemekvationerna kan då skrivas

$$\begin{cases} (p-a)x = bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

Om den första av dessa ekvationer multipliceras med c och den andra med (p-a) så finner vi

$$(p-a)y = c(p-a)x + d(p-a)u = cbu + d(p-a)u$$

eller

$$py - ay = dpu + (cb-ad)u$$

Om vi åter inför tidsderivator finner vi

$$\frac{dy}{dt} - a\,y = d\,\frac{du}{dt} + (bc-ad)u \qquad (3.21)$$

Dvs vi har fått ett direkt samband mellan insignal och utsignal.

□

Vi finner således att problemet att finna ett samband mellan signaler i ett linjärt system kan reduceras till ett rent algebraiskt problem genom att införa deriveringsoperatorn. För ett linjärt system av n:te ordningen med en insignal och en utsignal finner vi på samma sätt

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)y = (b_o p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_n)u$$

Detta innebär att sambandet mellan in och utsignalen ges av

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_o \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n u \qquad (3.22)$$

Operatorräkning skiljer sig från vanlig algebra genom att man inte kan dividera med operatorer. Sambandet

$$py = pu$$

betyder att

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}$$

dvs

$$y = u + \text{konstant}.$$

Observera att detta inte är samma sak som att $y = u$ vilket skulle vara det resultat som erhålls om vi kunde dividera med p i ekvationen.

Samband mellan operatorräkning och Laplacetransformering

Det finns ett nära samband mellan operatorräkning och Laplacetransformering. Räknereglerna är snarlika. Vid räkning med Laplacetransformer får man dock dividera på vanligt sätt. Det gäller nämligen att

$$\frac{s}{s} = 1 ,$$

ty vid Laplacetransformering är ju s en vanlig komplex variabel. Detta innebär t.ex. att överföringsfunktionen kan erhållas ur följande recept "Ersätt alla signaler med motsvarande transformer. Ersätt operatorn p med s. Beräkna kvoten mellan utsignal och insignal."

För systemet av första ordningen finner vi t.ex. från ekvationen (3.9) att överföringsfunktionen blir

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ds+(bc-ad)}{s-a} , \qquad (3.23)$$

där det eventuellt kan finnas en gemensam faktor som kan förkortas. För systemet (3.22) blir överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_o s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} \qquad (3.24)$$

Eventuellt kan det finnas gemensamma faktorer som kan förkortas.

Operatorräkning och Laplacetransformering har således mycket stora likheter. Det faktum att räknereglerna är något olika motiverar att båda metoderna används. Eftersom räknereglerna skiljer sig är det naturligtvis viktigt att skilja på operatorn p=d/dt och det komplexa talet s. Tyvärr är man inte alltid så noga med det i litteraturen.

Det faktum att man kan förkorta bort faktorer vid räkning med överföringsfunktioner återspeglar att överföringsfunktionen G(s) endast representerar den del av systemet som är observerbar och styrbar. I fig. 3.14 representerar överföringsfunktionen således endast delsystemet S_2. För linjära tidsinvarianta system som beskrivs av ekvation (3.6) blir överföringsfunktionen en rationell funktion, dvs en kvot mellan två polynom. Nämnarpolynomet är karakteristiska polynomet för det observerbara och styrbara delsystemet. Täljarpolynomets gradtal är lika med nämnarpolynomets gradtal om det finns en direktterm dvs om D≠0. Annars så har täljaren lägre gradtal.

System med fördelade parametrar

Många system är sådana att lagring av massa, rörelsemängd och energi är utbredd i rummet. Materialflöde på ett transportband är ett typiskt exempel. För att ange hur mycket massa som är lagrad är det nödvändigt att veta hur massan är fördelad längs bandet. Termiska system är ett annat exempel. Lagringen av energi kan beskrivas med temperaturens fördelning över systemet. I många fall kan fördelningen approximeras med variablernas värden i några punkter. Detta leder till system med ändligt många tillståndsvariabler. I vissa fall är det dock nödvändigt att beskriva fördelningen. Tillståndsmodellen blir då en partiell differentialekvation. Sådana är relativt komplicerade att arbeta med. Det är intressant att notera att motsvarande överföringsfunktioner i många fall kan vara relativt enkla. En transportfördröjning kan t.ex. beskrivas med överföringsfunktionen

$$G(s) = \exp(-sT)$$

Temperaturledning ger överföringsfunktioner av typen

$$G(s) = \exp\left(-\sqrt{sT}\right)$$

eller

$$G(s) = \cosh\left(-\sqrt{sT}\right).$$

3.7 MODELLBYGGE OCH IDENTIFIERING

I detta avsnitt skall olika sätt att erhålla matematiska modeller för ett system behandlas. Ett sätt att få en matematisk modell är att utnyttja kunskaper i mekanik, fysik, kemi etc för att ställa upp de grundläggande fysikaliska ekvationer som beskriver en process. Detta kallas <u>modellbygge på fysikens grund</u>. En annan möjlighet är att bestämma en matematisk modell genom direkta experiment på processen. Detta kallas <u>identifiering</u>. I praktiken kombineras ofta de båda metoderna.

Det bör betonas att även om modellbygget bygger på vetenskapliga principer så innehåller det ofta subjektiva bedömningar. Modellbygget har således starka inslag av hantverk. Några olika metoder för modellbygge diskuteras i detta avsnitt, bl.a. modellbygge på fysikens grund. Vidare behandlas identifiering med hjälp av transientanalys och frekvensanalys.

<u>Modellbygge på fysikens grund</u>

Detta sätt att erhålla en matematisk modell har tidigare berörts i exempel 3.1. Man utgår från de grundläggande fysikaliska principer som anger konservering av massa, energi och rörelsemängd. Dessa samband kompletteras sedan med s.k. konstitutiva ekvationer. Samband mellan tryck, volym och temperatur i en gas och sambandet mellan töjning och spänning i en fjäder är typiska exempel på konstitutiva ekvationer.

För att ställa upp ekvationerna måste vi först införa variabler som entydigt beskriver lagring av massa, energi och rörelsemängd i ett system. Dessa variabler blir systemets tillståndsvariabler. Ofta kan det vara nödvändigt att dela upp systemet i delsystem för att på ett enkelt sätt kunna ställa upp balansekvationerna. Balansekvationerna är i princip enkla. En massbalans erhålles t.ex. genom att avdela ett delsystem med en gränsyta (kontrollyta). Balansekvationen har följande form:

tidsderivatan av massan innanför kontrollytan=
inströmmande massflöde - utströmmande massflöde.

De andra balansekvationerna har samma form.

Modellbygge på fysikens grund har den stora fördelen att de modeller som erhålles ofta är giltiga över ett stort område. De parametrar som ingår i modellen kan också ofta relateras till fysikaliska egenskaper. Det kan ofta vara besvärligt att avgöra hur många tillståndsvariabler som behöver införas för att tillräckligt noga beskriva hur massa, energi och rörelsemängd lagras. Svårigheterna vid modellbyggnad växer

raskt med antalet tillståndsvariabler. I vissa fall är de grundläggande fysikaliska sambanden ej tillräckligt kända. Dels kan funktionssambanden vara okända och dels kan parametrarna i modellen vara okända. Som regel kan man säga att det ofta är lätt att få en grov översiktsmodell med hjälp av fysikens grundekvationer. Sådana modeller är ofta mycket användbara för att få en översiktlig förståelse för hur ett system fungerar. De enkla modellerna får ofta kompletteras för att få modeller som är tillräckligt noggranna för dimensionering av reglersystem. Vi belyser med ett exempel:

E x e m p e l 3.7 (Modell för motor)
Betrakta en motor av typen ångmaskin, bensinmotor, dieselmotor eller elektrisk motor. Motorns funktion kan väsentligen beskrivas som lagring av rörelsemängdsmomentet. Om motoraxelns vinkelhastighet är ω och tröghetsmomentet för motor och last är J så är $J\omega$ det lagrade rörelsemängdsmomentet. Observera att om det finns en växel så måste de olika delarnas tröghetsmoment reduceras till motoraxeln. Motorns pådrag ger ett drivande moment $M(u)$ som är en funktion av pådraget u. Funktionen M kan erhållas genom att bestämma motorns bromsande moment vid olika pådrag. För enkelhets skull antas att det bromsande momentet är proportionellt mot vinkelhastigheten. Motorn beskrivs då av följande balansekvation av rörelsemängden

$$\frac{d}{dt} J\omega = M(u) - D\omega. \tag{3.25}$$

Även om denna modell kan synas enkel så var det den modell av en ångmaskin som Maxwell använde för att förklara hur en centrifugalregulator fungerar.

□

Transientanalys

Ett linjärt tidsvariant system kan beskrivas fullständigt med steg- eller impulssvaret. (Se avsnitt 2) Dessa kan enkelt bestämmas experimentellt på följande sätt. (Se fig. 3.33) En skrivare ansluts till systemets utsignal. Systemets insignal förändras sedan impulsformigt eller stegformigt. Det är viktigt att impulsen är kort i förhållande till systemets svarstid. Det är också viktigt att markera den tidpunkt då insignalen förändras. För detta ändamål är det bra att ha en skrivare med två kanaler där utsignalen registreras på den ena och insignalen på den andra kanalen.

För långsamma processer går det ofta bra att ändra insignalen manuellt, men för snabba processer kan en pulsgenerator vara att föredra. För system med

vätskeströmning kan en puls genereras helt enkelt genom att hålla något spårämne i en tank. Såväl saltlösningar som radioaktiva ämnen kan användas. I vissa fall kan det vara enklare att generera ett steg än att generera en kort puls. Transientanalys har den stora fördelen att den är lätt att utföra och att en beskrivning av systemet i form av ett impulssvar eller ett stegsvar erhålles direkt. Nackdelen med metoden är att den är känslig för störningar. Varje störning ger ju direkt ett fel i det uppmätta transientsvaret. De tidiga metoderna för injustering av regulatorer var helt och hållet baserade på stegsvaret eller systemets svarskurva som det brukade kallas. Ofta är det dock användbart att kunna erhålla en matematisk modell av stegsvaret. Om stegsvaret har den form som visas i fig. 3.34 kan det t.ex. approximeras med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT} e^{-sT_d} \tag{3.26}$$

En något bättre approximation ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)} e^{-sT_d} \tag{3.27}$$

som har två tidskonstanter T_1 och T_2.

Frekvensanalys

I avsnitt 3.5 infördes frekvensanalys som en metod för att analysera linjära tidsinvarianta system. Frekvensanalys är också en metod för direkt mätning av frekvensfunktionen $G(i\omega)$ för ett linjärt system som är stabilt. Metoden bygger på formeln (3.14) dvs

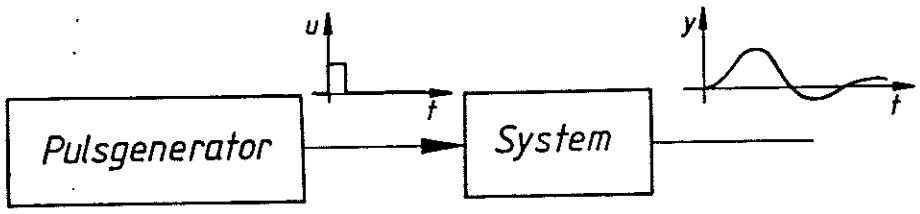


Fig. 3.33 - Visar experimentell bestämning av puls- och stegsvar.

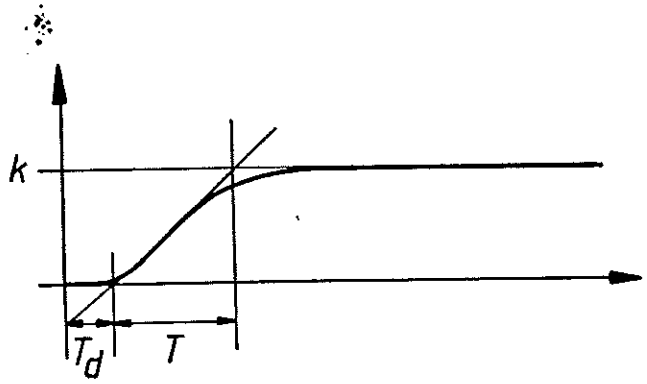


Fig. 3.34 - Bestämning av förstärkning k, tidskonstant T och tidsfördröjning T_d ur stegsvaret

$$G(i\omega) = a(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}$$

och dess tolkning enligt fig. 3.26. Experimentuppställningen framgår av fig. 3.35. Systemets insignal varieras sinusformigt med hjälp av en signalgenerator. I stationaritet blir systemets utsignal också en sinussignal eftersom systemet är stabilt. Frekvensfunktionens amplitud $a(\omega)$ ges då av förhållandet mellan utsignalens och insignalens amplitud. Fasfunktionen $\varphi(\omega)$ ges av fasförskjutningen mellan in- och utsignal. Genom att upprepa experimentet med olika frekvenser ω på insignalen kan frekvensfunktionen bestämmas i ett godtyckligt antal punkter. Frekvensanalysen har den stora fördelen att mätfel kan elimineras genom att bandpassfiltrera in- och utsignalerna kraftigt. Amplituden och fasen kan också bestämmas mycket noggrant genom att använda korrelationsteknik. Nackdelen med frekvensanalys är att experimenten kan vara tidsödande.

Parametrisk Identifiering

Både transientanalys och frekvensanalys kräver experiment med speciella insignaler. Metoderna har också nackdelen att det är svårt att utnyttja apriori kunskap. Parametrisk identifiering är en alternativ metod som undviker dessa nackdelar. Parametrisk identifiering omfattar följande moment.

- Bestämmning av modellstruktur
- Val av experimentvillkor
- Val av kriterier för jämförelse av modell med data

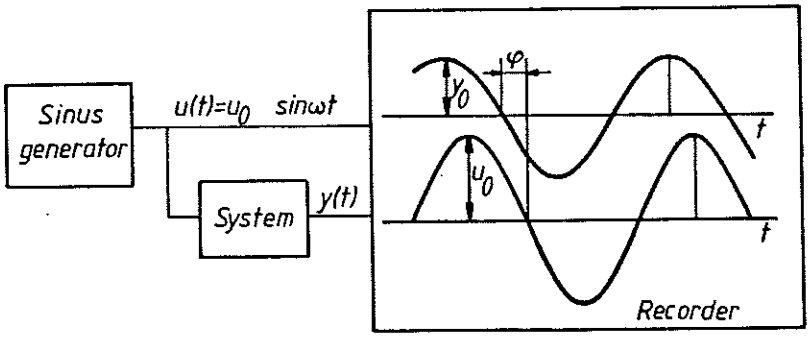


Fig. 3.35 - Experimentell uppställning för bestämning av frekvensfunktionen med frekvensanalys.

- Parameteranpassning
- Validering

Den apriori kunskap vi har om processen används för att bestämma en modell för processen. Modellen innehåller ett antal okända parametrar.

Experiment utföres på processen genom att variera processens styrvariabler. Styrvariabler och utsignaler registreras. Val av experimentvillkor består av att ange insignalens karaktär t.ex. amplitudfördelning och frekvensinnehåll. Insignalen kan också genereras genom återkoppling.

De okända parametrarna justeras sedan så att modellens utsignaler överensstämmer så bra som möjligt med mätningarna. Kriteriet anges ofta som ett optimeringskriterium. I ett sådant fall kan parameteranpassningen utföras med hjälp av optimering.

Sedan en modell erhållits är det viktigt att visa att modellen är rimlig. Detta kallas validering. Validering kan utföras genom att undersöka hur modellen stämmer för data som ej använts för parameteranpassning.

De olika momenten i ett identifieringsproblem kan väljas på många olika sätt. Det finns därför ett mycket stort antal metoder för parametrisk optimering. Principen är dock densamma för alla metoder.

3.8 MODELLER FÖR STÖRNINGAR

Att minska inverkan av störningar är ett viktigt motiv för att införa reglering. Störningarnas storlek och natur ger begränsningar av reglerprestanda. Det är därför väsentligt att ha matematiska modeller för störningar.

Störningarna kan ha olika karaktär. Det är vanligt att göra en grov uppdelning i mätbrus och belastningsvariationer. Dessa störningstyper kan beskrivas med utgångspunkt från fig. 3.5. I fig. 3.5 är mätbruset skillnaden mellan mätsignalen och den styrda signalen medan belastningsvariationen är störsignalen i figuren.

De klassiska störningsmodellerna.

Fyra typer av signaler (puls, steg, ramp och sinus) brukar allmänt användas vid enkel analys av reglersystem. Dessa signaler illustreras i fig. 3.36. Pulsen är en idealisering av en plötslig störning med kort varaktighet. Den används både för att representera belastningsvariationer och mätfel. I många fall är det bekvämt att approximera pulsen med en impuls. Steget används för att beskriva belastningsvariationer och kalibreringsfel i mätgivare.

Beskrivning av störningar som utsignaler till dynamiska system.

Det är ofta bekvämt att tänka sig att störningar genereras som utsignaler från dynamiska system. Ett steg kan t.ex. representeras som impulssvaret till

$$\frac{dy}{dt} = u$$

På samma sätt är rampen impulssvaret för dubbelintegratorn

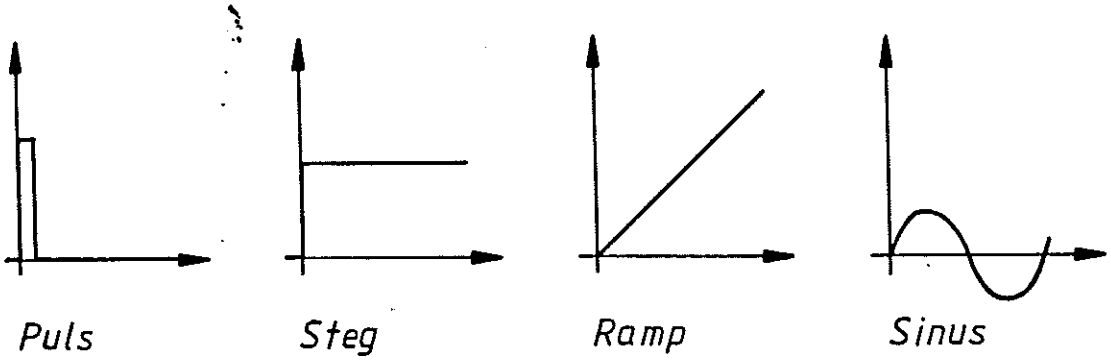


Fig. 3.36 - Idealiserade störningsmodeller.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\ 1\ \ 0\ ]\ x$$

och sinussignalen är impulssvaret för systemet

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} u$$

$$y = [\ 1\ \ 0\ ]\ u$$

Detta synsätt är bekvämt ty analysen av ett system med störningar kan då reduceras till ett enda standardproblem, att bestämma impulssvaret för ett system. Tankegången har illustrerats i fig. 3.37. Genom att använda denna idé kan alla störningar som är en summa av exponentialfunktionen genereras.

Statistiska beskrivningar.

Ibland är det fördelaktigt att beskriva störningar med statistiska termer. Även i detta sammanhang är det mycket användbart att betrakta störningar som utsignaler från dynamiska system såsom visas i fig. 3.37. Istället för att låta insignalen vara en impuls använder man s.k. vitt brus dvs en fullständigt oregelbunden statistisk signal.

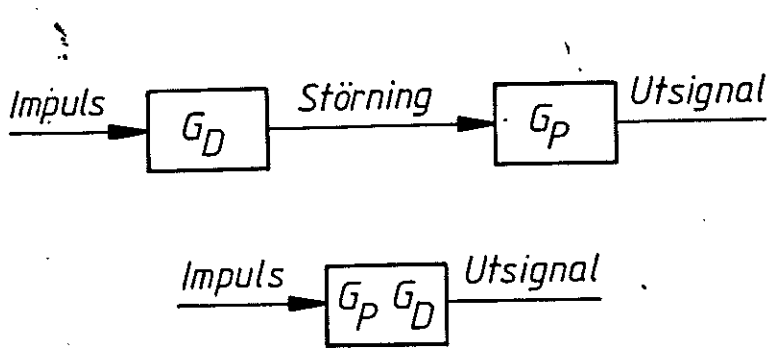


Fig. 3.37 - Visar hur analys av ett system med störningar kan reduceras till beräkning av ett impulssvar.

3.9 SAMMANFATTNING

Avsikten med detta kapitel har varit att ge en översikt av de begrepp och ideer som reglerteknik använder för att beskriva en process. Både grafiska och matematiska metoder har diskuterats. Grafiska representationer som översiktsbilder, processchema och blockschema är bra för att ge en översikt. De matematiska modellerna används för att ge detaljer.

Bland de matematiska beskrivningssätten skiljer vi på interna och externa modeller. De interna modellerna eller tillståndsmodellerna beskriver systemets inre mekanismer. Modellerna erhålles ur fysikaliska grundekvationer dvs. balansekvationer för massa, energi och rörelsemängd. De variabler som behövs för att beskriva lagringen av dessa storheter kallas tillståndsvariabler. Hur många tillståndsvariabler som behövs bestäms av hur detaljerat vi väljer att beskriva fördelningen av massa, energi och rörelsemängd. Många viktiga reglertekniska begrepp såsom reglerbarhet, styrbarhet, observerbarhet, moder och tidskonstanter har införts utgående från tillståndsekvationer.

Externa modeller eller insignal-utsignal modeller är ett annat sätt att matematiskt beskriva system. Detta beskrivningssätt innebär att systemet karakteriseras genom att endast ange sambandet mellan in- och utsignaler. Detta beskrivningsätt leder till viktiga begrepp såsom stegsvar, impulsvar, frekvenssvar och frekvenskurvor.

Modeller för störningar liksom metoder för att erhålla de olika beskrivningarna har också berörts kortfattat.