Några approximationer av normalfördelningsfunktionens svans

Sternby, Jan

1974

Document Version:
Förlagets slutgiltiga version

Link to publication

Citation for published version (APA):
Sternby, J. (1974). *Några approximationer av normalfördelningsfunktionens svans.* (Technical Reports TFRT-7070). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

Total number of authors:
1

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

NÅGRA APPROXIMATIONER AV NORMALFÖRDEL- NINGSFUNKTIONENS SVANS

JAN STERNBY

Rapport 7422 (C) September 1974
Inst. för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola

1. Några matematiska egenskaper.

Sätt

$$f(x) = e^{x^2/2} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

och

$$V(x) = x \cdot f(x)$$

Genom att approximera $V(x)$ får vi alltså också approximationer till normalfördelningsfunktionen. En enkel variabeltranslation ger att

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\, e^{-t^2/2}\, dt \qquad (1)$$

och

$$V(x) = x \int_0^{\infty} e^{-xt}\, e^{-t^2/2}\, dt \qquad (2)$$

Enligt övning 6.1.17 i Chung (1968) kan då (2) skrivas som

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + t^2}\, e^{-t^2/2}\, dt \qquad (3)$$

Ur (3) inses att $V(x)$ är strängt växande för $x \geq 0$ med $V(0)=0$ och

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = 1$$

(1) innebär en Laplace-transform av $e^{-t^2/2}$. Då gäller enligt sats 6.6.4 i Chung (1968) att $f(x)$ är fullständigt monoton ("completely monotonic"), dvs

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0 \qquad k \geq 0,\ x \geq 0$$

Derivera nu $f(x)$ en gång:

$$f'(x) = x \cdot f(x) - 1 = V - 1$$

Eftersom f är fullständigt monoton så följer nu att $1 - V = -f'$ är det.

Sammanfattning: $0 < 1 - V(x) \leq 1 \quad x \geq 0$ och $1 - V(x)$ är fullständigt monoton (vilket speciellt medför att alla derivator går mot noll då $x \to +\infty$).

I Abramowitz - Stegun (1964) finns en asymptotisk serieutveckling för stora x (formel 7.1.23)

$$V(x) \sim 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2m-1)}{x^{2m}}$$

2. Differentialekvationer för V(x) och dess derivator.

Genom att derivera V(x) ett antal gånger får man lätt

$$\begin{aligned} &xV'(x) - x^2(V(x)-1) - V(x) = 0 \\ &V''(x) - xV'(x) - 2(V(x)-1) = 0 \\ &V'''(x) - xV''(x) - 3V'(x) = 0 \\ &\qquad\vdots \\ &V^{(n)}(x) - xV^{(n-1)}(x) - nV^{(n-2)}(x) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

3. Approximationer av V(x).

Idén är nu att approximera V genom att sätta någon derivata av V, säg $V^{(m)}$, till noll och sedan lösa ut V med hjälp av ekvationerna (4) för lägre ordningens derivator. Tack vare att V' är fullständigt monoton blir då när m ökar varannan approximation större och varannan mindre än det rätta värdet, samtidigt som felet blir allt mindre (i varje fall för stora x).

En feluppskattning kan man få genom att sätta $V^{(m+1)} = 0$ i ekvationen för $V^{(m+1)}$.

<u>Exempel</u>: Gör en approximation genom att sätta $V''(x) = 0$
Ekvationen för V'' i (4) ger

$$2[V-1] = V'' - xV' = V'' - x^2[V-1] - (V-1) - 1$$

$$V - 1 = \frac{V'' - 1}{3 + x^2} \Rightarrow V = \frac{V'' + 2 + x^2}{3 + x^2} \leqslant \frac{2 + x^2}{3 + x^2} \text{ (ty } V'' \leqslant 0) \quad (5)$$

Relativa felet i V blir

$$\varepsilon(x) = \frac{V''}{2 + x^2} \quad (6)$$

$V''(x)$ uppskattas nu ur ekv. för V'''.

$$V''' - xV'' - 3V' = 0$$

Men

$$xV' = [x^2 + 1][V - 1] + 1$$

ger

$$xV''' - x^2V'' - 3\{(x^2+1)(V-1) + 1\} = 0 \quad (7)$$

Ur (5) får man

$$V'' - 1 = (3+x^2)(V-1) \quad (8)$$

Multiplicera därför (7) med $3+x^2$!

$$x(3+x^2)V''' - x^2(3+x^2)V'' - 3(3+x^2) - 3(x^2+1)(3+x^2)(V-1) = 0$$

vilket med (8) ger

$$x(3+x^2)V''' - x^2(3+x^2)V'' - 3(3+x^2) - 3(x^2+1)(V''-1) = 0$$

varför

$$V'' \geq \frac{-6}{x^4 + 6x^2 + 3} \qquad (V''' \geq 0)$$

insatt i (6) får vi

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{6}{(2+x^2)(x^4+6x^2+3)}$$

Relativa felet avtar alltså som x^6 när x växer. Nedan ges i stigande ordning ett antal approximationer med sina resp. relativa fel.

m	gräns för $\lvert\varepsilon(x)\rvert$	uppskattning av V	
0	$\frac{1}{x^2}$	1	$\geq V$
1	$\frac{2}{x^2(3+x^2)}$	$\frac{x^2}{1 + x^2}$	$\leq V$
2	$\frac{6}{(2+x^2)(x^4+6x^2+3)}$	$\frac{2 + x^2}{3 + x^2}$	$\geq V$
3	$\frac{24}{x^2(x^2+5)(x^4+10x^2+15)}$	$\frac{x^4 + 5x^2}{x^4 + 6x^2 + 3}$	$\leq V$
4	$\frac{120}{(x^4+9x^2+8)(x^6+15x^4+45x^2+15)}$	$\frac{x^4 + 9x^2 + 8}{x^4 + 10x^2 + 15}$	$\geq V$
5	$\frac{720}{x^2(x^4+14x^2+33)(x^6+21x^4+105x^2+105)}$	$\frac{x^6 + 14x^4 + 33x^2}{x^6 + 15x^4 + 45x^2 + 15}$	$\leq V$

Vill man i stället approximera

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = 1 - \phi(x)$$

dvs normalfördelningsfunktionens svans så gäller ju

$$1 - \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{-x^2/2} \, V(x)$$

där man då kan använda ovanstående approximationer för V. Relativa felet i V och $1 - \phi(x)$ blir då också desamma.

En annan approximation av V finns i Abramowitz - Stegun (1964) formel 7.1.13

$$\frac{2x}{x + \sqrt{x^2+4}} \leq V(x) \leq \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 + \frac{8}{\pi}}} \qquad (x \geq 0)$$

För x i närheten av noll är dessa olikheter bra, men för större x blir det bättre att använda någon av de ovan härledda.

Referenser:

Abramowitz, M. och Stegun, A. I. (1964)
Handbook of Mathematical Functions; National Bureau of Standards.

Chung, K. L. (1968)
A Course in Probability Theory; Harcourt, Brace & World Inc.