



LUND UNIVERSITY

Användning av siffermaskiner för syntes och realisering av regleringssystem

Föredrag vid NordSAM 63

Åström, Karl Johan

1963

Document Version:

Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Åström, K. J. (1963). *Användning av siffermaskiner för syntes och realisering av regleringssystem: Föredrag vid NordSAM 63*. IBM Nordic Laboratory.

Total number of authors:

1

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

ANVÄNDNING AV SIFFERMASKINER FÖR SYNTES
OCH REALISERING AV REGLERINGSSYSTEM

Föredrag vid NordSAM 63

Av Tekn. Lic. K. J. Åström
IBM Nordiska Laboratorier

ANVÄNDNING AV SIFFERMASKINER FÖR SYNTES
OCH REALISERING AV REGLERINGSSYSTEM

Föredrag vid NordSAM 63

Av Tekn. Lic. K. J. Åström
IBM Nordiska Laboratorier

Resumé

Denna rapport ger en översikt av linjär optimal stokastisk kontroll. De fundamentala problemen formuleras och de centrala resultaten gives, utan bevis men med utförliga fysikaliska tolkningar. Användandet av siffermaskiner både för syntes och implementering behandlas. Vidare diskuteras några praktiska problem förenade med det optimala systemets realisering: val av samplingstid, reelltidsberäkning eller tabelluppslagning, adaptiv eliminering av tillfälliga mätfel.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. INLEDNING
2. FORMULERING AV PROBLEMET
3. LÖSNING
4. FYSIKALISK TOLKNING AV RESULTATEN
5. STABILITET
6. IMPLEMENTERING AV LÖSNINGEN MED HJÄLP
AV EN SIFFERMASKIN; DIFFERENSEKVATIONER
7. VAL AV SAMPLINGSTID
8. TABELLUPPSLAGNING ELLER RELLTIDSBERÄK-
NING AV $L(t)$ OCH $K(t)$
ADAPTIV ELIMINERING AV TILLFÄLLIGT FEL-
AKTIGA MÄTNINGAR
9. AUTOMATISK SYNTES AV OPTIMALA SYSTEM
10. SAMMANFATTNING OCH UTBLICKAR
11. REFERENSER

1. INLEDNING

Det fundamentala regleringstekniska systemproblemet kan formuleras på följande sätt:

Givet är ett "system" som kan påverkas genom kontroll- eller insignaler. Information om systemet erhålles genom att observera dess utsignaler. Vidare antages att systemet har ett definierat syfte. Problemet är att bestämma hur den information om systemet som erhålles från utsignaler-na skall utnyttjas för att manipulera kontrollsignalerna på ett sådant sätt att systemets syfte uppnås.

Vid en praktisk lösning av ett systemproblem ställs vi omedelbart inför följande svårighet: Insignal-utsignal-relationen kan inte antas vara exakt känd. Systemet kan t. ex. vara påverkat av störningar som inte kan observeras. Systemparametrar är ej kända med tillräcklig noggrannhet. Detta faktum utgör regleringsteknikens kärna och varje realistisk problemlösning måste på ett eller annat sätt ta hänsyn till detta. Om insignal-utsignal-relationen vore exakt känd, så skulle en fullt tillfredsställande lösning vara att ange insignalen som en funktion av tiden.

De tidigaste analyserna av servosystem visade, att en kontrollstrategi av typen

$$(1.1) \quad u(t) = k_1 y(t) + k_2 \frac{dy}{dt} + k_3 \int_0^t y(s) ds$$

där $u(t)$ är kontrollsignalen och $y(t)$ är inställningsfelet, vid lämpligt val av koefficienter k_1 , k_2 och k_3 kan ge förvånansvärt bra resultat. Det var t. ex. känt redan av Maxwell (23), att mycket små inställningsfel kunde erhållas genom att välja k_3 tillräckligt stor. Det observerades även att denna egenskap hos systemet är oberoende av variationer i systemparametrarna. Denna grundidé har sedan Maxwells tid varit föremål för avsevärd utveckling. En formalisering via operator kalkyl har givit upphov till metoder med vars hjälp lämpliga värden på koeffi-

cienterna k_1 , k_2 och k_3 snabbt kan bestämmas. Dessa metoder, som utvecklades under 1940-talet, är väsentligen grafiska och analytiska (10). De lämpar sig väl för enkla stationära system med en insignal och en utsignal. Det har emellertid visat sig ytterligt svårt att använda dessa metoder för komplicerade problem med många insignaler och många utsignaler. Sådana komplicerade problem förekommer allmänt inom processkontroll och rymdteknologi. För att lösa dessa problem har man sökt andra vägar, som förutsätter att siffermaskiner användes både för syntes och implementering av systemet. Dessa strävanden har medfört att regleringstekniken mer och mer börjat använda sig av matematiska hjälpmedel. Till en början hade detta också som konsekvens att man avlägsnade sig från den fysikaliska verkligheten och orealistiska resultat var ej ovanliga. De första försöken att formulera det regleringstekniska problemet som ett variationskalkylproblem ledde t. ex. till lösningar som fordrade att samtliga tillståndsvariabler kunde mätas eller rekonstrueras (2), (3), (12), (14), (26). Dessutom saknades "dynamik" i återkopplingskretsen $k_2 = k_3 = 0$ i ekv. (1.1). Det var t. ex. ej möjligt att få den Maxwellska integratorn i återkopplingskretsen. De resultat som erhöles var således ur praktisk synpunkt mycket otillfredsställande och de bemöttes med avsevärd kritik. En omsorgsfull analys visar att orsaken till svårigheterna kan återföras på det faktum, att man i de tidiga analyserna på ett eller annat sätt gjort antagandet, att insignal-utsignal-relationen är känd exakt. I detta föredrag skall vi introducera osäkerhet i insignal-utsignal-relationen genom att antaga, att systemet påverkas av stokastiska störningar samt att de mätinstrument, som användes för att observera systemet, har stokastiska mätfel.

Det problem som skall behandlas formuleras i avsnitt 2. Dess lösning ges i avsnitt 3 och resultaten tolkas fysikaliskt i avsnitt 4. Det totala systemets stabilitet diskuteras i avsnitt 5. Den resterande delen av föredraget behandlar diverse praktiska synpunkter förenade med lösningens implementering med hjälp av en siffermaskin. En differens-ekvationformulering ges i avsnitt 6. I sektion 7 behandlas val av

samplingstid. I avsnitt 8 ges några synpunkter på reelltidsberäkning contra tabelluppslagning. Automatisk konstruktion av optimala system har behandlats i sektion 9 och slutligen i avsnitt 10 ges några utblickar och generaliseringar.

Detta föredrag är avsett att ge en översikt av några nya resultat. Problemen formuleras och resultaten gives med fysikaliska tolkningar. För härledningar och bevis hänvisas till referenserna.

2. FORMULERING AV PROBLEMET

Betrakta ett system vars insignal-utsignal-relation är beskriven av den stokastiska differentialekvationen

$$(2.1) \quad dx(t) = F(t) x(t) dt + G(t) u(t) dt + dv(t)$$

$$(2.2) \quad dy(t) = H(t) x(t) dt + dw(t)$$

där systemets tillstånd $x(t)$ är en n -vektor, insignalen $u(t)$ är en r -vektor ($r \leq n$), utsignalen $y(t)$ är en s -vektor ($s \leq n$), störningarna $v(t)$ och $w(t)$ är n - respektive s -vektorer, $F(t)$ är en $n \times n$ matris, $G(t)$ är en $n \times r$ matris, $H(t)$ är en $s \times n$ matris. Vi antar att elementen av matriserna $F(t)$, $G(t)$ och $H(t)$ är begränsade, kontinuerliga funktioner av t . Systemets initialtillstånd antages vara en normalfördelad stokastisk ^{x)} variabel med

$$(2.3) \quad \begin{aligned} E x(t_0) &= m \\ \text{cov } x(t_0) x^T(t_0) &= R_0 \end{aligned}$$

Vidare antages att störningarna $v(t)$ och $w(t)$ är realisationer av Wienerprocesser (4), (25), d. v. s. stokastiska processer vars inkrement

$$(2.4) \quad \Delta v = v(t+h) - v(t)$$

$$(2.5) \quad \Delta w = w(t+h) - w(t)$$

är oberoende och normalfördelade ^{x)} med

$$(2.6) \quad E \Delta v = 0, \quad E \Delta w = 0$$

$$(2.7) \quad E \Delta v \Delta v^T = R_1(t) \cdot h$$

$$(2.8) \quad E \Delta w \Delta w^T = R_2(t) \cdot h$$

x) Vi gör här genomgående antagandet att alla stokastiska funktioner är normalfördelade. Detta har som konsekvens att kontrollagarna blir linjära. En alternativ hypotes är att postulera en linjär kontrollag och endast andra ordningens statistik.

där $R_1(t)$ och $R_2(t)$ är ickenegativa symmetriska $n \times n$ resp. $s \times s$ matriser. Det antages att elementen av $R_1(t)$ och $R_2(t)$ är kontinuerliga och begränsade funktioner av tiden. In- och utsignalerna, d. v. s. $u(t)$ och $\dot{y}(t)$, är fysikaliska storheter på karakteristiska för systemet medan systemets tillstånd $x(t)$ beror på det koordinatsystem som valts för att beskriva systemet. Den stokastiska processen $v(t)$ representerar störningar som påverkar systemet och den stokastiska processen $w(t)$ representerar mätfel.

Ekvationen (2.1) utsäger alltså, att den hastighet med vilken systemets tillstånd förändras är en linjär funktion av de aktuella värdena av systemets tillstånd, insignalen och störningen. Ekvationen (2.2) innebär, att den utsignal som kan observeras är en linjär funktion av systemets tillstånd. Observera att även om vi antagit linearitet, så tillåter vi såväl systemets som störningarnas egenskaper att vara funktioner av tiden. Detta ger oss frihet att approximativt behandla olinjära system genom att linearisera dessa kring en nominell lösning. I praktiken erhålles systemet (2.1), (2.2) ofta på detta sätt.

Systemets syfte skall nu definieras. Låt t_0 och t_f , $t_0 \leq t_f \leq \infty$, vara givna tidpunkter, låt $u^0(t)$ vara en integrerbar funktion definierad på (t_0, t_f) , vidare låt $x(t)$ vara en lösning till den stokastiska differentialekvationen med $u(t) = u^0(t)$ och med initialvärde $x(t_0)$, vars sannolikhetsfördelning är normal med egenskaperna givna av (2.3). Bilda

$$(2.9) \quad V(u^0) = E \left\{ x^T(t_f) Q_0 x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(s) Q_1(s) x(s) + u^T(s) Q_2(s) u(s)] ds \right\}$$

där Q_0 , $Q_1(s)$ och $Q_2(s)$ är ickenegativa definita symmetriska matriser.

Elementen av matriserna $Q_1(s)$ och $Q_2(s)$ antages vara kontinuerliga och begränsade. Symbolen E betecknar matematisk förväntan med avseende på sannolikhetsfördelningarna av $x(t_0)$, $v(t)$ och $w(t)$. Storheten $V(u^0)$ kan fysikaliskt tolkas såsom medelförlusten för kontrollsignalen u^0 . Systemets syfte anges nu vara att välja u^0 så att värdet av $V(u^0)$ blir så litet som möjligt. Det regleringstekniska problemet kan således formuleras på följande sätt:

Problem:

Bestäm en kontrollsignal $u(t)$ sådan att funktionalen (2.9) är minimal. Kontrollsignalens värde vid tidpunkten t får bero på $y(s)$, $t_0 \leq s \leq t$, d. v. s. på den observerade utsignalens värden upp till tidpunkten t .

För att erhålla ett väldefinierat matematiskt problem skall vi också göra följande antaganden:

1. Matriserna $F(t)$, $G(t)$ och $H(t)$ är sådana att vi kan finna två matriser $A(t)$ och $B(t)$ sådana att differentialekvationerna

$$\frac{dx}{dt} = [F(t) + G(t) A(t)] x$$

$$\frac{dx}{dt} = [F(t) + B(t) H(t)] x$$

är likformigt asymptotiskt stabila.

2. Matriserna $Q_2(t)$ och $R_2(t)$ är positiv definita för alla $t \in (t_0, t_f)$.

Dessa antaganden är rent tekniska. Det första garanterar att funktionalen $V(u)$ har ett ändligt minimum och det andra antagandet garanterar, att minimum erhålles för en och endast en kontrollsignal.

Existens och entydighetsvillkoren kan även anges på många andra sätt.

3. LÖSNING

Lösningen till det problem som formulerades i föregående avsnitt utgöres av två satser. I detta avsnitt skall vi formulera dessa satser och ge en fysikalisk tolkning av dem.

Sats 1

Funktionalen (2.9) är minimal för

$$(3.1) \quad u(t) = -L(t) \hat{x}(t)$$

där $\hat{x}(t)$ är betingade medelvärdet av $x(t)$ med avseende på observationerna eller minsta medelkvadrateskattimatet av $x(t)$, baserat på $y(s)$, $t_0 \leq s \leq t$ och $L(t)$ är en $r \times n$ matris given av

$$(3.2) \quad L(t) = Q_2^{-1}(t) G^T(t) S(t; t_f)$$

där $S(t; t_f)$ är en symmetrisk $n \times n$ matris, som är lösningen till följande differentialekvation

$$(3.3) \quad -\frac{d}{dt} S = F^T S + S F - S G Q_2^{-1} G^T S + Q_1 \quad x)$$

med initialvärdet

$$(3.4) \quad S(t_f, t_f) = Q_0$$

Minimum av funktionalen (2.9) är

$$(3.5) \quad \min V(u) = m^T S(t_0, t_f) m + \int_{t_0}^{t_f} \text{tr} S(s; t_f) R_1(s) ds + \\ + \text{tr} S(t_0, t_f) R_0 + \int_{t_0}^{t_f} \text{tr} P(s, t_0) L^T(s) Q_2(s) L(s) ds$$

x) För att förenkla skrivarbetet har vi i denna formel utelämnat argumenten i matriserna $S(t; t_0)$, $F(t)$, $G(t)$, $Q_1(t)$ och $Q_2(t)$.

där $P(t)$ är covariansmatrisen för minsta medelkvadrat-
estimatet, d. v. s.

$$(3.6) \quad P(t; t_0) = E[x(t) - \hat{x}(t)][x(t) - \hat{x}(t)]^T$$

Satsen innebär således att den optimala kontrollsignalen är en linjär funktion av det från de observerade utsignalerna beräknade minsta kvadratfelsestimatet av tillståndsvektorn. Observera att matrisen $L(t)$ som definierar den linjära funktionen är oberoende av de stokastiska egenskaperna, d. v. s. R_0 , $R_1(t)$ och $R_2(t)$. Det regleringstekniska problemet kan alltså i detta fall uppdelas i två separata oberoende problem: 1/ ett deterministiskt kontrollproblem, d. v. s. bestämning av matrisen $L(t)$, och 2/ ^{ett estimationsproblem, d. v. s.} beräkning av minsta medelkvadrat estimatet av systemets tillstånd på basis av observationer av utsignalerna.

Det regleringstekniska problem vi diskuterar är mycket snarlikt vissa problem som uppträder inom den matematiska ekonomin. Ett resultat påminnande om Sats 1 har där givits det talande namnet osäkerhets-ekvivalensprincipen. Principen innebär, att i en situation där beslut skall fattas under osäkerhet, förfares på följande sätt: från tillgängliga data bestämmes ett "bästa" estimat av tillståndet, beslutet göres sedan som om det estimerade tillståndet vore det sanna tillståndet. Sats 1 utgör således en rigorös formulering av osäkerhetsekvivalensprincipen. Observera de starka fordringar som erfordras för att den skall hålla: linearitet hos modellen, additiva störningar, kvadratisk kriterium etc. Man kan lätt visa med hjälp av motexempel, att om dessa antaganden ej är uppfyllda så är principen ej längre giltig.

Det är instruktivt att studera de olika termer som uppträder i uttrycket för förlustfunktionens minimumvärde. Den första termen i ekvation (3.5) representerar det bidrag som orsakas av medelavvikelsen i initialtillståndet. Den andra termen representerar bidraget från stör-

ningen $v(t)$ som påverkar systemet, och de två sista termerna representerar bidraget till förlustfunktionen orsakat av estimationsfel. Observera att de tre första termerna i (3.5) avtages med $S(t; t_f)$.

För att fullborda det problem som formulerades i avsnitt 2 återstår nu att finna minsta medelkvadratestimatet av $x(t)$ baserat på observationerna av utsignalen, vilket är Wiener-Kolmogorovs välkända filterproblem. I vårt problem är detta delvis löst eftersom vi har en given representation av processen i form av ekvationerna (2.1) och (2.2), varigenom vi undviker den stora svårighet som är förenad med spektralfaktoreringsproblemet och vi har:

Sats 2 (Kalman)

Minsta medelkvadratestimatet av $x(t)$ baserat på de observerade utsignalerna är lösning till differentialekvationen

$$(3.7) \quad d\hat{x} = F(t)\hat{x} dt + G(t)u(t) dt + K(t)[dy(t) - \hat{y} dt]$$

$$(3.8) \quad \hat{y} = H(t)\hat{x}$$

med begynnelsevärdet

$$(3.9) \quad x(t_0) = m$$

där

$$(3.10) \quad K(t) = P(t; t_0) H^T(t) R_2^{-1}(t)$$

och $P(t; t_0)$ är covariansen matrisen för estimatet (3.7).

Matrisen $P(t; t_0)$ tillfredsställer följande differentialekvation:

$$(3.11) \quad \frac{dP}{dt} = FP + PF^T - PH^T R_2^{-1} HP + R_1$$

$$(3.12) \quad P(t_0; t_0) = R_0$$

Ekvation (3.7) innebär att estimatet erhålles genom att integrera systemekvationerna med en drivande funktion som beror på skillnaden mellan den observerade utsignalen $y(t)$ och dess estimat $\hat{y}(t)$.

Matrisen $K(t)$ anger den vikt som ges åt observationerna. I det skalära fallet kan $K(t)$ tolkas som kvoten mellan varianserna för estimationsfelet och mätfelet. Om mätfelet är stort, lägges således liten vikt vid observationerna.

Observera den formella likheten mellan $L(t)$, $S(t; t_f)$ och $K(t)$, $P(t; t_0)$.

Ekvationen visar hur estimationsfelet förändras med tiden. De två första termerna visar hur variansen propagerar på grund av systemekvationerna, den tredje termen motsvarar den minskning som erhålles genom observationer av utsignaler, och den sista termen representerar ökning i estimationsfelet på grund av störningen $v(t)$.

4. FYSIKALISK TOLKNING AV RESULTATEN

Vi har således formulerat och givit lösningen till ett matematiskt problem som innehåller flera av de faktorer som karakteriserar ett praktiskt kontrollproblem. Resultaten skall nu ges en fysikalisk tolkning. Det följer från Satserna 1 och 2, att den databehandling som erfordras för att beräkna kontrollsignalen från de observerade utsignalerna kan beskrivas med ekvationerna

$$(4.1) \quad d\hat{x} = [F(t) - K(t) H(t)] \hat{x} dt + G(t) u(t) dt + K(t) dy(t)$$

$$(4.2) \quad u(t) = -L(t) \hat{x}(t)$$

där $K(t)$ och $L(t)$ är givna av (3.2), (3.3), (3.10) och (3.11).

För att realisera lösningen till problemet fordras således komponenter som löser differentialekvationen (4.1) i reell tid. Genom att lösa (4.1) rekonstruerar vi således systemets tillstånd från observationerna av utsignalen. Denna operation, som väsentligen är ett tidsvariabelt Wiener-filter, betecknas med estimator i blockschemat i Fig. 3. Vidare fordras komponenter för att utföra multiplikationen (4.2). Återkopplingskretsen består således av ett dynamiskt system av samma ordning ^{x)} som det ursprungliga systemet (2.1).

Vi observerar att den dynamik som erfordras i återkopplingskretsen väsentligen består av en modell av det ursprungliga systemet; se

x) I princip fordras endast $L(t) x$ för att beräkna kontrollsignalen; det är således endast nödvändigt att rekonstruera r linjärkombinationer av tillståndsvektorn för att erhålla detta. För att genomföra detta fordras ofta rekonstruktion av alla komponenter av tillståndsvektorn. I undantagsfall kan det dock göras med färre komponenter. Analytiska kriterier för att avgöra detta finns tillgängliga.

speciellt ekvationerna (2.1) och (3.7). Resultaten visar alltså hur en modell av systemet skall utnyttjas för bestämning av tillståndsvektorns komponenter.

Speciellt för tidsinvarianta system, d.v.s. $F, G, H, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ konstanta, med $t_f = +\infty$, så kommer under lämpliga förutsättningar K och L att vara konstanta matriser. Ekvationerna (4.1) och (4.2) kan då tolkas som överföringsfunktionen

$$Y(p) = -L^0 [pI - F - K^0H - GL^0]^{-1} K^0$$

där vi traditionsenligt låter p beteckna derivationsoperatoren. Detta exempel visar tydligt relationen mellan Satserna 1 och 2 och den klassiska regleringstekniken. Observera att närvaron av många insignaler och många utsignaler ej vållar någon extra komplikation vid tillämpning av Satserna 1 och 2. Vi kan således få en mycket enkel tolkning av kompensationsteorin i den klassiska regleringstekniken: Kompensationsnätets verkan kan tolkas som en estimator som rekonstruerar systemets tillstånd från utsignalen. Denna tolkning innebär bl.a. att om det är möjligt att uppnå goda resultat med en PID regulator, d.v.s. en kontrollag av typ (1.1), så är uppenbarligen en rekonstruktion av två komponenter av tillståndsvektorn tillräcklig för att uppnå goda resultat. Vidare utgör satserna en generalisering av den klassiska kompensationsteorin till tidsvariabla system med många insignaler och många utsignaler.

5. STABILITETSKRITERIER

Det optimala systemets stabilitet skall nu diskuteras. Rörelseekvationerna för det kompletta systemet kan skrivas

$$(5.1 \text{ a}) \quad dx = [F(t) - G(t) L(t)] x dt + G(t) L(t) \tilde{x} dt + dv(t)$$

$$(5.1 \text{ b}) \quad d\tilde{x} = [F(t) - K(t) H(t)] \tilde{x} dt + dv(t) - K(t) dw(t)$$

där det totala systemets tillstånd representerats av x och $\tilde{x}$.

För att möjliggöra en stabilitetsdiskussion skall vi nu göra en avvikelse för att införa ett stabilitetsbegrepp som lämpar sig väl för en stokastisk differentialekvation av typ (5.1).

Betrakta den stokastiska differentialekvationen

$$(5.2) \quad dx = A(t) x dt + de$$

där $e(t)$ är en Wienerprocess med

$$E e(t) = 0$$

$$\text{cov} [e(t+h) - e(t)] = R(t) \cdot h$$

Vidare, låt

$$(5.3) \quad dx = A(t) x dt$$

vara motsvarande fria (ostörda) system.

Inför

Definition

den stokastiska differentialekvationen (5.2) säges vara stabil i medel om givet $\epsilon > 0$, det $\exists \delta_1 > 0$ och $\delta_2 > 0$, sådana att

$$\|E x(t) x^T(t)\| < \epsilon \quad t \geq t_0$$

om

$$\|E x(t_0) x^T(t_0)\| < \delta_1$$

om

$$\|R(t)\| < \delta_2$$

Stabilitet i medel är helt analogt med begreppet totalt stabil eller stabil under ständigt verkande störningar; se (20) och (22).

Vi har följande

Sats

Den stokastiska differentialekvationen (5.2) är stabil i medel om motsvarande ostörda ekvation (5.3) är likformigt asymptotiskt stabil.

Detta avslutar utvecklingen och vi skall nu återgå till att studera systemet (5.1). Vi skall ge villkor för att systemet (5.1) är stabilt i medel. Vi noterar att matriserna $K(t)$ och $L(t)$ endast är definierade för $t_0 \leq t \leq t_f$. För att diskutera stabilitet måste vi då utsträcka deras definition till godtyckligt stora värden av t . I detta avsnitt skall vi därför antaga att $t_f = +\infty$.

Det följer nu att (5.1) är stabilt i medel om matriserna $K(t)$ och $L(t)$ är begränsade och om ekvationerna

$$(5.4 \text{ a}) \quad \frac{dx}{dt} = [F(t) - G(t) L(t)] x$$

$$(5.4 \text{ b}) \quad \frac{d\tilde{x}}{dt} = [F(t) - K(t) H(t)] \tilde{x}$$

är likformigt asymptotiskt stabilt. Vi har vidare

Sats 3

Systemet (5.1) är stabilt i medel om matriserna $P(t, t_0)$ och $S(t; \infty)$ är begränsade och positiv definita för alla t .

Det finns ett flertal kriterier som garanterar att matriserna $P(t, t_0)$ och $S(t; \infty)$ är begränsade och positiv definita.

6. IMPLEMENTERING AV LÖSNINGEN MED HJÄLP AV EN SIFFERMASKIN. DIFFERENSEKVATIONER.

De beräkningar, definierade av ekvationerna (3.1)-(3.4) (3.7)-(3.12), som fordras för att implementera det optimala systemet, är ofta så omfattande att deras genomförande kräver en siffermaskin. Vi skall nu diskutera vilka konsekvenser det har och hur beräkningarna skall organiseras. En av siffermaskinens fundamentala egenskaper är att den opererar diskret i tiden. Användandet av en siffermaskin medför således vissa restriktioner av de kontrollsignaler u som kan realiseras. I praktiken användes ofta kontrollsignaler som är styckvis konstanta, linjära, exponentiella etc. Motivet för detta är att man söker funktioner som kan realiseras utan komplicerad utrustning. En kontrollsignal som är styckvis konstant kan t.ex. erhållas genom att låta ett register i siffermaskinen styra en hållkrets analog regulator e.dyl. Vi skall därför i det följande endast studera det fall, då kontrollsignalen är styckvis konstant. ^{x)} Det tidsintervall över vilket kontrollsignalen är konstant kallas samplingsintervall. Systemet kommer således att arbeta på följande sätt. Den observerade utsignalen omvandlas till digital form. På basis av utsignalen beräknas den önskade insignalen enligt (3.2)-(3.5), (3.7)-(3.12). Utsignalen omvandlas till analog form. Den omvandlade signalen styr en hållkrets som håller ett konstant värde, medan ett nytt mätvärde läses in och en ny kontrollsignal beräknats etc. etc. Implementeringsproblemet består nu i att finna ett program för siffermaskinen som genomför räkningarna (3.2)-(3.5), (3.7)-(3.12). En uppenbar metod att lösa detta problem är att under antagandet att kontrollsignalen är konstant under samplingsintervallet göra differensapproximationer av differentialekvationerna (3.3), (3.7), (3.11) samt att programmera motsvarande differensekvationer. Detta förfarande är dock ej entydigt och det är naturligt att fråga, vilken differens-

x) De situationer då kontrollsignalens variation över ett samplingsintervall kan representeras som lösningen till en linjär differentialekvation kan alltid transformeras till detta fall; se t.ex. (34).

approximation som skall väljas för att vid givet samplingsintervall få "bästa" resultat i den meningen att förlustfunktionen (2.9) blir så liten som möjligt. För att besvara denna fråga observerar vi att antagandet om styckvis konstant kontrollsignal innebär, att systemekvationerna kan integreras explicit och vi erhåller följande ekvation för tillståndsförändringen över ett samplingsintervall.

$$(6.1 a) \quad x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}; t_k) x(t_k) + \Gamma(t_{k+1}; t_k) u(t_k) + e_1(t_k)$$

$$(6.1 b) \quad z(t_{k+1}) = \theta(t_{k+1}; t_k) x(t_k) + e_2(t_k)$$

där samplingsintervallen betecknats med (t_k, t_{k+1}) och

$$(6.2 a) \quad \frac{d}{dt} \Phi(t; t_k) = F(t) \Phi(t; t_k) \quad , \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\Phi(t_k; t_k) = I$$

$$(6.2 b) \quad \Gamma(t; t_k) = \int_{t_k}^t \Phi(t; s) G(s) ds \quad , \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$(6.2 c) \quad \theta(t_{k+1}; t) = \int_t^{t_{k+1}} H(s) \Phi(s; t) ds \quad , \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

och $e_1(t_k)$ och $e_2(t_k)$ är sviter av normalfördelade stokastiska vektorer med medelvärden

$$(6.3 a) \quad E e_1(t_k) = 0 \quad \text{alla } k$$

$$(6.3 b) \quad E e_2(t_k) = 0 \quad \text{alla } k$$

och covariansfunktionerna

$$(6.3 \text{ c}) \quad E e_1(t_k) e_1^T(t_s) = R_{11}(t_k) \delta_{ks}$$

$$(6.3 \text{ d}) \quad E e_1(t_k) e_2^T(t_s) = R_{12}(t_k) \delta_{ks}$$

$$(6.3 \text{ e}) \quad E e_2(t_k) e_2^T(t_s) = R_{22}(t_k) \delta_{ks}$$

där δ_{ks} är Kroneckers delta, och

$$(6.3 \text{ f}) \quad R_{11}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}; s) R_1(s) \Phi^T(t_{k+1}; s) ds$$

$$(6.3 \text{ g}) \quad R_{12}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}; s) R_1(s) \theta^T(t_{k+1}; s) ds$$

$$(6.3 \text{ h}) \quad R_{22}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\theta(t_{k+1}; s) R_1(s) \theta^T(t_{k+1}; s) + R_2(s)] ds$$

$$(6.3 \text{ i}) \quad R_{21}(t_k) = R_{12}^T(t_k)$$

Den ekvation som vi erhållit för $z(t_k)$ är baserad på antagandet att instrumenteringen medger kontinuerlig registrering av mätsignalen $y(s)$ samt att det tal som erhålles i siffermaskinens register efter filtreringen är

$$(6.1 \text{ c}) \quad z(t_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dy(s)$$

Det finns naturligtvis många andra möjligheter att introducera mätsignalen, se t.ex. (27). Ofta kan utsignalen ej observeras kontinuerligt

utan mätningar är endast möjliga vid diskreta tidpunkter. Detta är t. ex. fallet vid användning av analytiska instrument. De modifieringar som erfordras för att handha dessa fall är triviala.

Under antagandet om styckvis konstant kontrollsignal kan uttrycket för förlustfunktionen förenklas till

$$(6.4 \text{ a}) \quad V(t_0, x_0, T_1, u) = E \left\{ x^T(t_N) Q_0 x(t_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} x(t_k) \\ u(t_k) \end{pmatrix}^T Q(t_k) \begin{pmatrix} x(t_k) \\ u(t_k) \end{pmatrix} \right\}$$

$$(6.4 \text{ b}) \quad Q(t_k) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t_k) & Q_{12}(t_k) \\ Q_{21}(t_k) & Q_{22}(t_k) \end{pmatrix}$$

och

$$(6.4 \text{ c}) \quad Q_{11}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^T(s; t_k) Q_1(s) \Phi(s; t_k) ds$$

$$(6.4 \text{ d}) \quad Q_{12}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^T(s; t_k) Q_1(s) \Gamma(s; t_k) ds$$

$$(6.4 \text{ e}) \quad Q_{21}(t_k) = Q_{12}^T(t_k)$$

$$(6.4 \text{ f}) \quad Q_{22}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\Gamma^T(s; t_k) Q_1(s) \Gamma(s; t_k) + Q_2(s)] ds$$

Under antagandet att kontrollsignalen är styckvis konstant, kan vi således omformulera kontrollproblemet på följande sätt:

Problem:

Given är den stokastiska differensekvationen (6.1) och funktionalen (6.4 a). Finn en svit av vektorer $\{u(t_k)\}$ sådan att (6.4 a) är minimum. Värdet av u vid tidpunkten t_{k+1} får bero av $z(t_s)$, $0 \leq s \leq k$, d.v.s. av de mätvärden som erhållits i siffermaskinens register upp till tidpunkten t_k .

Vi kallar detta problem det diskreta eller det "samplade" problemet i motsats till problemet i avsnitt 2, som härnäst skall benämnas det kontinuerliga problemet. Det diskreta problemet är helt analogt med det kontinuerliga problemet och vi har följande resultat.

Sats 4

Summan (6.4 a) är minimum för

$$(6.5) \quad u(t_k) = -\tilde{L}(t_k) \hat{x}(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

där $\hat{x}(t_k)$ är betingade medelvärde av $x(t)$ med avseende på observationerna eller minsta medelkvadrateskattimatet av $x(t_k)$ baserat på observationerna $z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_k)$, och $\tilde{L}(t_k)$ är en rxn matris given av

$$(6.6) \quad L = [\Gamma^T \tilde{S}(t_{k+1}; t_N) \Gamma + Q_{22}]^{-1} [\Gamma^T \tilde{S}(t_{k+1}; t_N) \Phi + Q_{21}]$$

och $\tilde{S}(t_{k+1}; t_N)$ är en symmetrisk nxn matris som satisfierar följande differensekvation

$$(6.7) \quad \tilde{S}(t_k; t_N) = \Phi^T \tilde{S}(t_{k+1}; t_N) \Phi - L^T [\Gamma^T \tilde{S}(t_{k+1}; t_N) \Gamma + Q_{22}] \cdot L + Q_{11}$$

med begynnelsevärdet

$$(6.7 \text{ a}) \quad S(t_N; t_N) = Q_0$$

Minimalvärdet av summan (6.4 a) är

$$(6.8) \quad \min_u V(u) = \sum_{i=0}^{N-1} \text{tr} \tilde{S}(t_{i+1}; t_N) R_{11}(t_i) + m^T \tilde{S}(t_0, t_N) m + \\ + \text{tr} \tilde{S}(t_0, t_N) R_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \text{tr} \{ \tilde{P}(t_i; t_0) L^T(t_i) [Q_2(t_i) + \\ + \Gamma^T(t_{i+1}; t_i) \tilde{S}(t_{i+1}; t_i) \Gamma(t_{i+1}; t_i)] L(t_i) \}$$

där $\tilde{P}(t_k)$ är covariansmatrisen för estimationsfelet, d. v. s.

$$(6.9) \quad \tilde{P}(t_k, t_0) = E [x(t_k) - \hat{x}(t_k)] [x(t_k) - \hat{x}(t_k)]^T$$

Sats 5

Minsta medelkvadrateskattningen av $x(t_k)$, d. v. s. av tillståndsvektorns värde vid tidpunkten t_k , baserat på de observerade utsignalerna $z(t_1), \dots, z(t_k)$ är lösning till differens-ekvationen

$$(6.10 \text{ a}) \quad \hat{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}; t_k) \hat{x}(t_k) + \Gamma(t_{k+1}; t_k) u(t_k) + \\ + \tilde{K}(t_{k+1}) [z(t_{k+1}) - \hat{z}(t_{k+1})]$$

$$(6.10 \text{ b}) \quad \hat{z}(t_{k+1}) = \theta(t_{k+1}; t_k) \hat{x}(t_k)$$

med begynnelsevärdet

$$(6.10 \text{ c}) \quad \hat{x}(t_0) = m$$

där $\tilde{K}(t_k)$ betecknar mxs matrisen

$$(6.11) \quad \tilde{K}(t_k) = [\Phi \tilde{P}(t_k; t_0) \theta^T + R_{12}] [\theta \tilde{P}(t_k; t_0) \theta^T + R_{22}]^{-1}$$

där $P(t_k; t_0)$ är covariansmatrisen för estimationsfelet.
Jämför ekvation (6.6). Matrisen $P(t_k; t_0)$ satisfierar
differensekvationen

$$(6.12 \text{ a}) \quad \tilde{P}(t_{k+1}; t_0) = \Phi \tilde{P}(t_k; t_0) \Phi^T - \tilde{K}(t_k) [\theta \tilde{P}(t_k; t_0) \theta^T + R_{22}]$$

$$\tilde{K}^T(t_k) + R_{11}$$

med initialvärdet

$$(6.12 \text{ b}) \quad P(t_0, t_0) = R_0$$

För att förenkla utskrivandet av formlerna i ovanstående satser har vi
utelämnat argumenten för funktionerna Φ , Γ , θ , Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} ,
 R_{11} , R_{12} , R_{22} . Argumenten skall vara

Φ	=	$\Phi(t_{k+1}; t_k)$
Γ	=	$\Gamma(t_{k+1}; t_k)$
θ	=	$\theta(t_{k+1}; t_k)$
Q_{11}	=	$Q_{11}(t_k)$
Q_{12}	=	$Q_{12}(t_k)$
Q_{22}	=	$Q_{22}(t_k)$
R_{11}	=	$R_{11}(t_k)$
R_{12}	=	$R_{12}(t_k)$
R_{22}	=	$R_{22}(t_k)$

Den fysikaliska tolkningen av dessa resultat är identisk med den tolkning som givits av det kontinuerliga problemet. Läsaren uppmanas att såsom en övning genomföra tolkningen av ekvationen i Sats 4 och Sats 5.

Följande är några villkor som garanterar att det existerar en entydig lösning till det diskreta problemet.

D1. Matriserna Φ , Γ och θ är sådana att vi kan finna två sekvenser av matriser $A(t_k)$ och $B(t_k)$ sådana att differens-ekvationerna

$$x(t_{k+1}) = [\Phi(t_{k+1}; t_k) - \Gamma(t_{k+1}; t_k) A(t_k)] x(t_k)$$

$$x(t_{k+1}) = [\Phi(t_{k+1}; t_k) - B(t_k) \theta(t_{k+1}; t_k)] x(t_k)$$

är likformigt asymptotiskt stabila.

D2. Matriserna

$$\theta(t_{k+1}; t_k) \tilde{P}(t_k; t_0) \theta^T(t_{k+1}; t_k) + R_{22}(t_k)$$

och

$$\Gamma^T(t_{k+1}; t_k) \tilde{S}(t_k; t_N) \Gamma(t_{k+1}; t_k) + Q_{22}(t_k)$$

är positiv definita för alla k .

Observera att det första villkoret som garanterar att minimum är ändligt är strängare än motsvarande villkor för det kontinuerliga problemet, medan det andra villkoret är avsevärt svagare.

De beräkningar som erfordras för att bestämma kontrollsignalen $u(t)$ från de observerade utsignalerna består endast av multiplikationer och additioner och vi har således fått resultatet på en form, som är väl lämpad för programmering på en siffermaskin.

7. VAL AV SAMPLINGSTID

Vi fann i föregående avsnitt att användningen av en siffermaskin för implementering av det optimala systemet medför vissa inskränkningar av klassen av tillåtna kontrolls signaler. Vi skall nu i korthet diskutera några implikationer av detta. Ur teoretisk synpunkt är det värt notera, att restriktionen av tillåtna kontrolls signaler ger mildare regularitetskrav. Ur praktisk synpunkt är frågan hur mycket förlustfunktionen ökas genom restriktionen av insignalen betydligt väsentligare. Denna fråga är ingående behandlad i (34) och vi skall här endast sammanfatta de viktigaste resultaten.

Sats 5

Om både det kontinuerliga och det diskreta problemet är reguljärt, gäller

$$\tilde{V} \rightarrow V \text{ då } \max_k (t_{k+1} - t_k) \rightarrow 0$$

Denna sats innebär således att differensen mellan förlustfunktionens värden i de diskreta och kontinuerliga fallen kan göras godtyckligt liten genom att välja samplingsintervallen tillräckligt små. Vi kan också uppskatta skillnaden mellan $\tilde{V}$ och V och vi finner

$$1 + \alpha_1 \leq \frac{\tilde{V} - V}{V} \leq 1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0$$

där koefficienterna α_1 och α_2 beror av systemparametrarna. Speciellt erhålles i det stationära deterministiska fallet

$$\alpha_i = \beta_i h^2 + O(h^3) \quad i = 1, 2$$

där

$$h = \max_k (t_{k+1} - t_k)$$

8. TABELLUPPSLAGNING ELLER REELLTIDSBERÄKNING AV MATRISERNA $L(t_k)$ OCH $K(t_k)$. ADAPTIV ELIMINERING AV TILLFÄLLIGT FELAKTIGA MÄTNINGAR.

Vi observerar att beräkningen av den optimala kontrollsignalen kan uppdelas i två oberoende delar:

1. Beräkning av matriserna $\tilde{L}(t_k)$ och $\tilde{K}(t_k)$ från ekvationerna (6.6), (6.7), (6.11) och (6.12).
2. Beräkning av kontrollsignalen $u(t_k)$ från de observerade utsignalerna enligt ekvationerna (6.5) och (6.10).

Del 2 av beräkningen måste uppenbarligen göras i reell tid, allt eftersom mätvärden av systemets utsignal erhålles. Den första delen av beräkningen kan däremot genomföras på förhand, eftersom alla storheter som erfordras är kända a priori, och resultaten kan lagras t.ex. på magnetband. Den siffermaskin som ingår i regleringskretsen kan sedan läsa in $\tilde{L}(t_k)$ och $\tilde{K}(t_k)$ när de behövs och maskinen behöver således endast lösa differensekvationen (6.10) i reell tid. Observera speciellt att beräkningen av L-matrisen i reell tid är mycket tidskrävande eftersom rekursionsformeln (6.7) för S-matrisen går baklänges i tiden.

Det bör även noteras att en fullständig stokastisk modell av systemet och dess omgivning är tillgänglig i systemet. Speciellt är sannolikhetsfördelningen för utsignalen indirekt given via P-matrisen. Detta är mycket viktigt för många praktiska tillämpningar. Det kan t.ex. inträffa att mätutrustningen upphör att fungera genom komponentfel. I vissa kemiska processer, där analytiska instrument användes, kan det rörsystem som användes för provtagning tillfälligt pluggas igen, etc. Det är ytterst väsentligt att förhindra att de mycket stora mätfel, som kan uppträda genom sådana mekanismer, ej tillåtes påverka beräkningen av kontrollsignalen. Då sannolikhetsfördelningen av utsignalen är känd, kan man testa huruvida ett erhållet mätvärde är rimligt och förkasta alltför osannolika mätvärden.

I och med att mätvärden förkastas är det ej möjligt att a priori ge en fullständig beskrivning av sannolikhetsstrukturen utan att införa en modell för instrumenteringens sporadiska sammanbrott. Detta medför att beräkningen av K-matrisen måste modifieras. För att se vad som skall ändras skall vi ge en fysikalisk tolkning av de olika termerna i ekvation (6.12 a).

$\Phi \tilde{P}(t_k; t_o) \Phi^T$ anger bidraget till $\tilde{P}(t_{k+1}; t_o)$ från osäkerheten i $\hat{x}(t)$.

$-\tilde{K}(t_k) [\Phi \tilde{P}(t_k; t_o) \Phi^T + R_{22}] \tilde{K}^T(t_k)$ anger minskningen i covariansen för estimatet $\hat{x}(t_{k+1})$ på grund av den uppmätta utsignalen $z(t_{k+1})$.

R_{11} anger ökningen i covariansen för estimatet $\hat{x}(t_{k+1})$ på grund av störningen $e_1(t_k)$ som driver processen.

Om ett mätvärde förkastas, skall således termen

$$\tilde{K}(t_k) [\Phi \tilde{P}(t_k; t_o) \Phi^T + R_{22}] \tilde{K}^T(t_k)$$

elimineras och ekvation (6.12 a) skall ersättas med

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t_{k+1}; t_k) = & \Phi \tilde{P}(t_k; t_o) \Phi^T - \tilde{K}(t_k) [\Phi \tilde{P}(t_k; t_o) \Phi^T + R_{22}] \tilde{K}^T(t_k) + R_{11} \\ & \text{om mätvärde } z(t_{k+1}) \text{ användes} \\ & \Phi \tilde{P}(t_k; t_o) \Phi^T + R_{11} \quad \text{om mätvärde } z(t_{k+1}) \text{ förkastas} \end{aligned}$$

Eftersom beräkningen av P-matrisen nu är beroende av de erhållna mätvärdena kan beräkningen ej genomföras a priori utan P-matrisen måste reelltidsberäknas. Vi får således en ökad flexibilitet till priset av ett mer komplicerat system.

9. AUTOMATISK KONSTRUKTION AV OPTIMALA SYSTEM

Konstruktionen av ett optimalt system kan således reduceras till beräkning av matriserna $\tilde{K}(t_k)$ och $\tilde{L}(t_k)$ från ekvationerna (6.6), (6.7), (6.11) och (6.12). Dessa ekvationer har en form som väl lämpar sig för programmering på en siffermaskin och hela konstruktionsförfarandet kan således automatiseras.

Två FORTRAN-program

1. FIRST PROGRAM
2. SYNTHESIS OF LINEAR SYSTEMS WITH QUADRATIC CRITERIA

som genomför syntesen på IBM 7090 har utvecklats. Programmen kan handha system upp till 12 ordningen. Det första programmet, som är specifikt för varje problem, beräknar den diskreta versionen av systemekvationerna och läser in de data som erfordras av det andra programmet på band.

Det andra programmet som är universellt läser in systemparametrarna $\Phi, \Gamma, \theta, Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1, R_2$ som kan vara tidsvariabla från magnetband. Matriserna K, P, L och S samt förlustfunktionens värde beräknas sedan.

En beskrivning av dessa program samt tillämpningsexempel har givits i (32) och (33).

Bestämning av ett lämpligt samplingsintervall kan även rationaliseras. I referens (34) har vi givit två FORTRAN-program, SAMPAS och TSAMPN, som beräknar talen α_i och β_i för stationära system med konstant samplingsintervall.

10. SAMMANFATTNING OCH UTBLICKAR

De fundamentala antaganden som ligger bakom den presenterade teorin är

1. Systemet är linjärt och tidsvariabelt.
2. Omgivningens verkan på systemet anges med störningar som antages vara Wiener-processer.
3. Systemparametrarna och störningarnas stokastiska egenskaper är kända a priori.

Det första antagandet innebär i praktiken, att störningarna som påverkar systemet är så små att systemet kan lineariseras.

Det andra antagandet är ej speciellt restriktivt. Det är t.ex. trivialt att generalisera till störningar som är stationära gaussiska processer med rationellt effektspektrum. Om t.ex. störningen v har spektrum

$$\Phi_v = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

så följer av Karhunen's representationssats (17), att störningen v kan representeras med den stokastiska differentialekvationen

$$dv + v dt = de$$

där e är en Wiener-process. Genom att använda denna representation samt att inkorporera v som en komponent i tillståndsvektorn har vi således en beskrivning av systemet på formen (2.1).

Det tredje antagandet är ganska restriktivt, då det fordrar avsevärd a priori-kunskap om systemet och dess omgivning. Det vore speciellt önskvärt att relaxera de hypoteser som göres beträffande systemets omgivning.

Vi skall visa hur antagandet om att störningarna har medelvärdet noll kan avlägsnas. Vi observerar först att om medelvärdesfunktionen är känd så kan den alltid borttransformeras genom ett koordinatbyte. Vidare noteras att om medelvärdesfunktionen är konstant men okänd, kan vi förfara på följande sätt:

Antag t.ex.

$$E \Delta v = m \cdot h$$

där m är en okänd konstant. Inför

$$z = m$$

så följer att

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

och systemekvationen (2.1) kan skrivas

$$d \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} G & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} dv' \\ 0 \end{pmatrix}$$

där

$$v' = v - m$$

är en Wiener-process med medelvärdet noll. Vi har således åter ett problem på standardform. Observera att det nya systemets tillståndsvektor är

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

d.v.s. vi har i tillståndsvektorn inkluderat parametern z som karakteriserar omgivningen. Vid problemets lösning kommer vi således att estimerar z , d.v.s. störningens medelvärde under det att processen evolverar. Det är således ej nödvändigt att a priori ha kännedom om störningens medelvärde. Vi har med andra ord ett system med adaptiva egenskaper.

Vi har ovan endast visat ett enkelt exempel. En analog transformation kan naturligtvis även genomföras i det fall, då covariansfunktionen eller systemparametrarna är okända. Detta leder emellertid till olinjära system, vars behandling fordrar andra hjälpmedel.

11. REFERENSER

1. Bellman, R.E.:
"Dynamic Programming", Princeton University Press,
Princeton, N.J.
2. Bellman, R.:
"Adaptive Control Processes, A Guided Tour", Princeton
University Press, Princeton, N.J., 1961.
3. Bertram, J.E., Sarachik, P.E.:
"On Optimal Computer Control", Proc. IFAC Congress,
Moscow, 1960.
4. Doob, J.L.:
"Stochastic Processes" (book), Wiley, 1953.
5. Florentin, J.J.:
"Optimal Control of Continuous-Time, Markov, Stochastic
Systems", J. Electronics and Control, 10, 1961, pp. 473-488.
6. Florentin, J.J.:
"Partial Observability and Optimal Control", J. Electronics
and Control, 13 (3), 1962, pp. 263-279.
7. Gunckel, T.L., Franklin, G.F.:
"A General Solution for Linear Sampled Data Control",
Journal of Basic Engineering, 1963 (to appear).
8. Howard, R.:
"Dynamic Programming and Markov Processes", MIT
Technological Press and Wiley, 1960.
9. Ito, K.:
"On Stochastic Differential Equations", Mem. Am. Math.
Soc. 4, 51 pp., 1951.

10. James, H.M., Nichols, N.B., Phillips, R.S.:
"Theory of Servomechanisms", McGraw-Hill, 1947.
11. Joseph, P.D., Tou, J.T.:
"On Linear Control Theory", AIEE Trans., Vol. 80, Part II, 1961.
12. Kalman, R.E.:
"Contributions to the Theory of Optimal Control", Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1960, 102-119.
13. Kalman, R.E.:
"New Methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory", RIAS Report TR 61-1, 1961. (Also in Proceedings of the First Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability, Bogdanoff, J.L., editor, John Wiley & Sons, 1963.)
14. Kalman, R.E., Bertram, J.E.:
"General Synthesis Procedure for Computer Control of Single and Multi-drop Linear Systems", Trans. AIEE, Vol. 77, part II, 1958.
15. Kalman, R.E., Bucy, R.S.:
"New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", J. Basic Engineering (ASME Trans.), 83 D, 1961.
16. Kalman, R.E., Koepcke, R.E.:
"Optimal Control of Linear Sampling Control Systems using Generalized Performance Indexes", Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs., 80, 1958, p. 1820.
17. Karhunen, K.:
"Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Am. Acad. Sci. Fennicae, I, Math.-Physica 37, 1947, 79 pp.
18. Kolmogorov, V.A.:
"Interpolation und Extrapolation von stationären zufälligen Folgen", Bull. Acad. Sci. USSR Sec. Math. 5 3-14, 1941.
19. Krasovskii, N.N., Lidskii, Z.A.:
"Analytical Design of Controllers in Systems with Random Attributes", I-III, Automation and Remote Control, 22 (9), 1961, pp. 1021-1025; 22 (10), 1961, pp. 1141-1146; 22 (11), 1961, pp. 1289-1294.

20. LaSalle, J.P.:
"Stability and Control", RIAS Technical Report 61-17,
December, 1961.

21. LaSalle, J.P., Lefschetz, S.:
"Stability by Liapunov's Direct Method with Application",
Academic Press, 1961.

22. Malkin, I.G.:
"Theorie der Stabilität einer Bewegung", Oldenbourg,
München, 1959.

23. Maxwell, J.C.:
"On Governors", Proc. Roy. Soc., London, 16, (1867),
270-283.

24. Newton, G.C., Gould, L.A., Kaiser, J.F.:
"Analytical Design of Linear Feedback Controls",
Wiley, New York, 1957.

25. Parzen, E.:
"Stochastic Processes with Applications to Science and
Engineering".

26. Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V.,
Mishchenko, E.F.:
"The Mathematical Theory of Optimal Processes", Inter-
science, New York, 1962.

27. Ragazzini, J.R., Franklin, G.F.:
"Sampled-Data Control Systems", McGraw-Hill Book Co., Inc.,
New York, 1958.

28. Simon, H.A.:
"Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic
Criterion Function", Econometrica 24 (74-81), 1956.

29. Wiener, N.:
"Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series", MIT Technological Press and Wiley, 1949.
30. Yaglom, A. M.:
"An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions", Prentice-Hall, 1962.
31. Åström, K. J.:
"A Survey of Some Results of the Theory of Markov Processes and their Application to Some Problems in Control System Theory", Report TN 18.059, October 3, 1961, IBM Nordiska Laboratorier, Stockholm, Sweden.
32. Åström, K. J., Koepcke, R. W., Tung, F.:
"On the Control of Linear Discrete Dynamic Systems with Quadratic Loss", Report RJ 222, September 10, 1962, IBM San Jose Research Laboratory, California, USA.
33. Åström, K. J.:
"Some Problems of Optimal Control in Inertial Guidance", Report RJ 229, November 15, 1962, IBM San Jose Research Laboratory, California, USA. Presented at the SIAM Symposium on multi-variable control system theory in Boston, October, 1962.
34. Åström, K. J.:
"On the Choice of Sampling Rates in Optimal Linear Systems",
Report RJ 243, April 25, 1963, IBM San Jose Research Laboratory, California, USA.
35. Åström, K. J., Bertram, J. E., et.al.:
"Current Status of Linear Optimal Control Theory", SIAM Symposium on multi-variable control, Boston, October, 1962.
36. Åström, K. J.:
"A Stochastic Bolza Problem", Notes from lectures delivered to Dept. of Mathematics, IBM Research, Yorktown Heights, N. Y., USA, July, 1963.



Fig.1 Insignal - utsignal system.

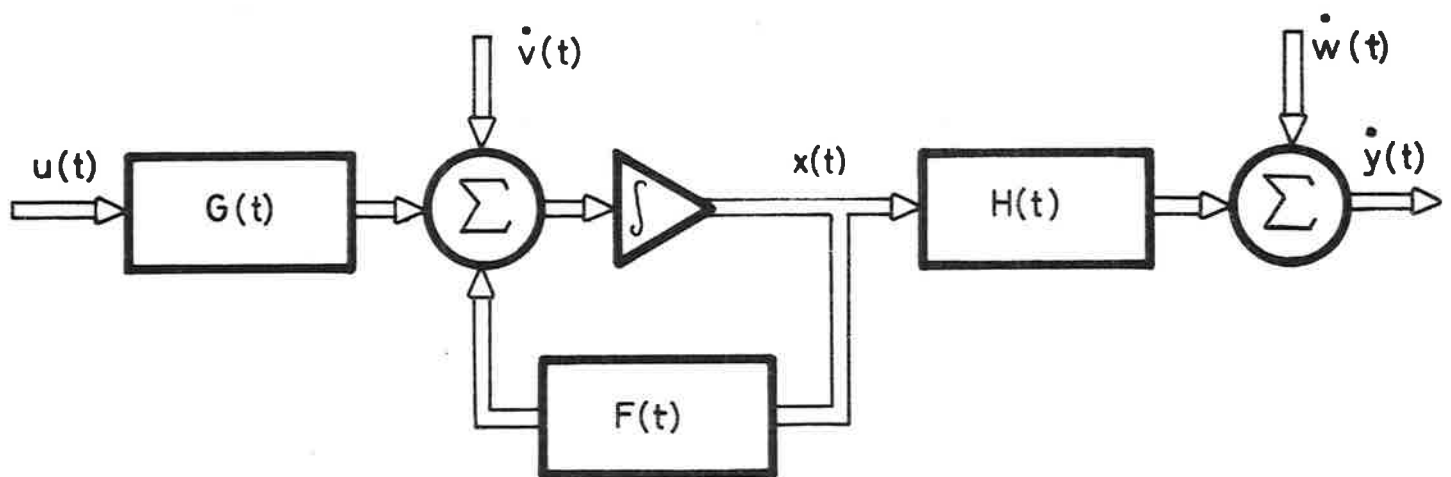


Fig.2 Blockschema för systemmodellen.

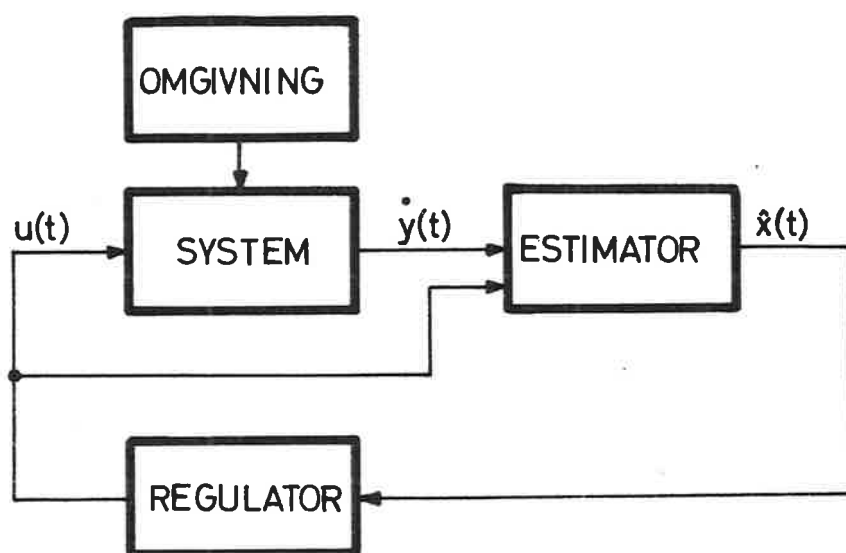


Fig.3 Det optimala systemets struktur.

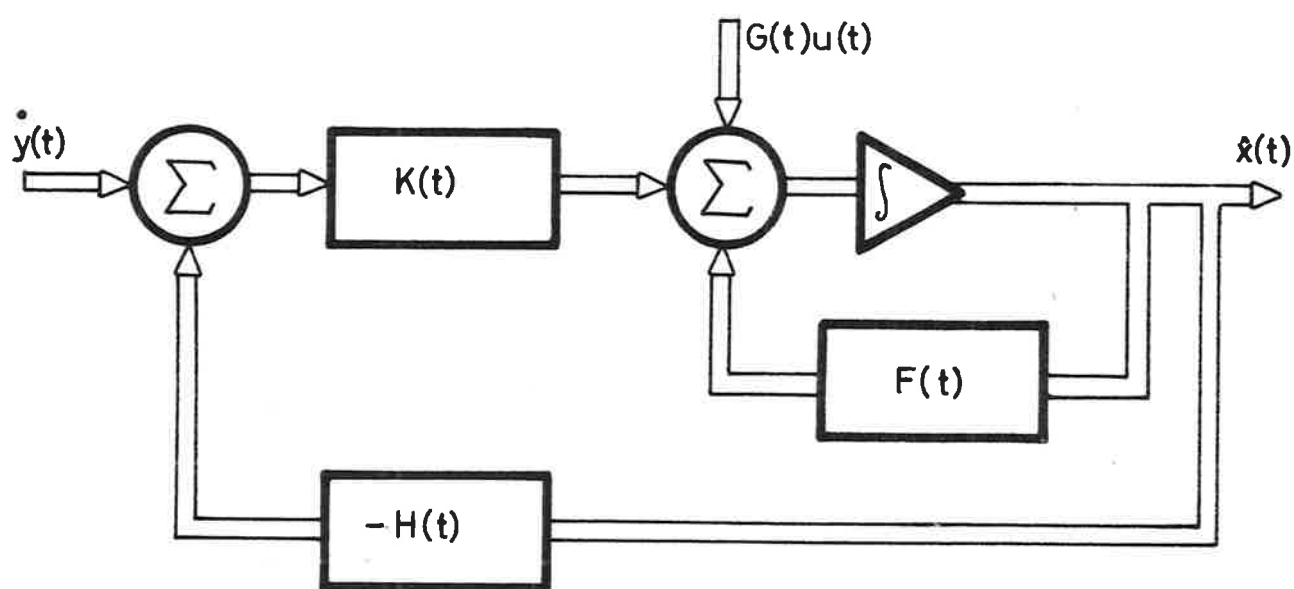


Fig.4 Blockschemata för estimatören (Wiener filtret)