



LUND UNIVERSITY

Reglerteknik Olinjära system -- Föreläsningar 1966

Åström, Karl Johan

1966

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Åström, K. J. (1966). *Reglerteknik Olinjära system -- Föreläsningar 1966*. [Publisher information missing].

Total number of authors:

1

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

REGLERTEKNIK

OLINJÄRA SYSTEM

FÖRELÄSNINGAR VID LTH 1968
K J ÅSTRÖM

REVIDERAT:

1970

K EKLUND S LINDAHL

1979

P MOLANDER

O L I N J Ä R A S Y S T E M

Föreläsningar i Reglerteknik
fortsättningskurs, LTH 1968

K-J Aström

Reviderat 1970

K Eklund S Lindahl

Reviderat 1979

P Molander

I N N E H Å L L S F Ö R T E C K N I N G

- Kap I - INLEDNING
- Kap II - RESUMÉ AV NÅGRA RESULTAT FRÅN TEORIN FÖR ORDINÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER
- Kap III - FASPLANANALYS
1. Inledning
 2. Klassificering av singulariteter till linjära d.e.
 3. Analys av styckvis linjära system
 4. Lyapunov - Poincarés sats
 5. Klassificering av singulariteter till olinjära d.e.
 6. Isoklinmetoden
 7. Något om periodiska lösningar
 8. Övningsexempel
 9. Flervalsfrågor
- Kap IV - STABILITETSTEORI
1. Inledning
 2. Lyapunovs satser om stabilitet hos lösningar till tidsinvarianta differentialekvationer
 3. Lyapunovs satser om instabilitet
 4. Konstruktion av Lyapunovfunktioner för linjära ekvationer
 5. Konstruktion av Lyapunovfunktioner för olinjära ekvationer
 6. Atomreaktorns stabilitet på grund av negativ temperaturkoefficient
 7. Stabilitetsområdets storlek
 8. Användning av Lyapunovteori för syntes av reglersystem
 9. Samband mellan Lyapunovteori och optimeringsteori
 10. Stabilitetskriterier i frekvensplanet
 11. Övningsexempel
 12. Flervalsfrågor

Kap V - METODEN MED BESKRIVANDE FUNKTIONEN

1. Inledning
2. Fourierserier
3. Definition av beskrivande funktion
4. Olinjäriteten behandlad som variabel förstärkning
5. Stabilitetsundersökning med hjälp av beskrivande funktion
6. Kompensering med hjälp av beskrivande funktion
7. Tillämpningsområden, noggrannhet och korrektion
8. Övningsexempel
9. Flervalsfrågor

Appendix: Beskrivande funktion för några olinjäriteter

Kap VI - REFERENSER

REGISTER

Kap I - INLEDNING

De flesta fysikaliska system är olinjära. Den teori, som existerar för olinjära dynamiska system, är emellertid relativt ofullständig. Man linjäriserar därför ekvationerna så att linjär teori kan användas. Detta går ofta bra om olinjäriteterna i systemet ej dominerar. Många reglersystem har dimensionerats med linjär teori och visat sig fungera mycket bra i en olinjär verklighet. I vissa fall då systemet är starkt olinjärt ger linjär teori inte ens en approximativ uppfattning om systemets egenskaper. Vi kan observera fenomen, som ej kan förklaras med linjär teori, t.ex. en triodoscillators stabila svängning. I andra fall införes olinjäriteten avsiktligt, t.ex. reläservon. Olinjäriteten är motiverad av att systemet då blir billigare och ibland även bättre. Vi skall först med ett enkelt exempel demonstrera otillräckligheten av den linjära approximationen.

Otillräckligheten av den linjära approximationen.

Betrakta ett hydraulservo, som driver en matningsslid på en styrd verktygsmaskin. Antag att slaglängden är 1000 mm, att den maximala matningshastigheten är 10 mm/sek, och det största tillåtna felet är 0,1 mm. Det följer från den allmänna kursen att vid ett kommando av konstant inhastighet erhålles i stationärt tillstånd ett fel

$$\text{positionsfel} = e_1 \cdot \text{hastighet}$$

där e_1 är hastighetskoefficienten. Systemspecifikationerna ger då

$$e_1 = 0,01$$

Om vi försummar alla tidskonstanter har det öppna systemets överföringsfunktion då följande utseende:

$$G_o(s) = \frac{100}{s}$$

I figur 1 visas reglersystemets principiella utseende. y betecknar slidens position och e positionsfelet.

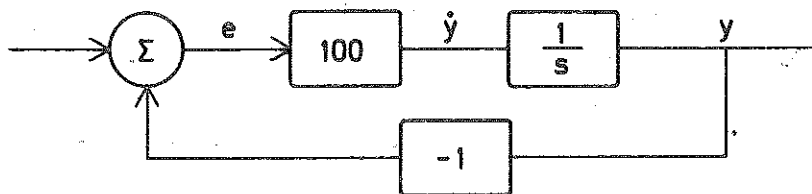


Fig. 1 - Principiellt blockschema för matningsslid.

Verktugsslidens utstyringshastighet är således 100 gånger positionsfelet. Antag nu att sliden står 500 mm fel då systemet påkopplas. Enligt det förda resonemanget skulle utstyringshastigheten då bli $50\,000\text{ mm} \cdot \text{sek}^{-1} = 50\text{ m} \cdot \text{sek}^{-1}$. En sådan utstyringshastighet är orimlig, då den kräver alltför stora krafter. Om hydraulservots kraft är begränsad finner vi således att systemet ej kan fungera enligt den linjära teorin vid stora värden på felsignalen.

För att ytterligare illustrera egenskaper hos olinjära system studerar vi några exempel. Vi begränsar oss till några av de mer väsentliga fenomen, som kan observeras. I anslutning till exemplen diskuteras vi också mer allmänna synpunkter på resultaten. I de första tre avsnitten studerar vi hur lösningarna till den olinjära differentialekvationen beror av insignalens storlek (amplitud), lösningarnas stabilitet och en speciell typ av lösningar. Avslutningsvis behandlas i två avsnitt dels ett speciellt fenomen, som kan observeras vid uppmätning av frekvenskurvor för olinjära system och dels hur ett olinjärt element introducerar nya frekvenser i utsignalen.

Utsignalens beroende av insignalens amplitud.

För att undersöka t.ex. stegsvarets beroende av insignalens amplitud studerar vi ett system, som beskrivs av den olinjära differentialekvationen:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 0,1x^3 = u(t)$$

Ekvationen kan tolkas som rörelseekvationen för en massa, som påverkas av viskös dämpkraft och en fjäderkraft, som är proportionell mot kuben på avvikelser från jämviktsläget. $u(t)$ är en yttre kraft, som verkar på massan. I figur 2 visas stegsvaren för olika värden på insignalens amplitud. Vi ser, att stegsvaret är monotont växande

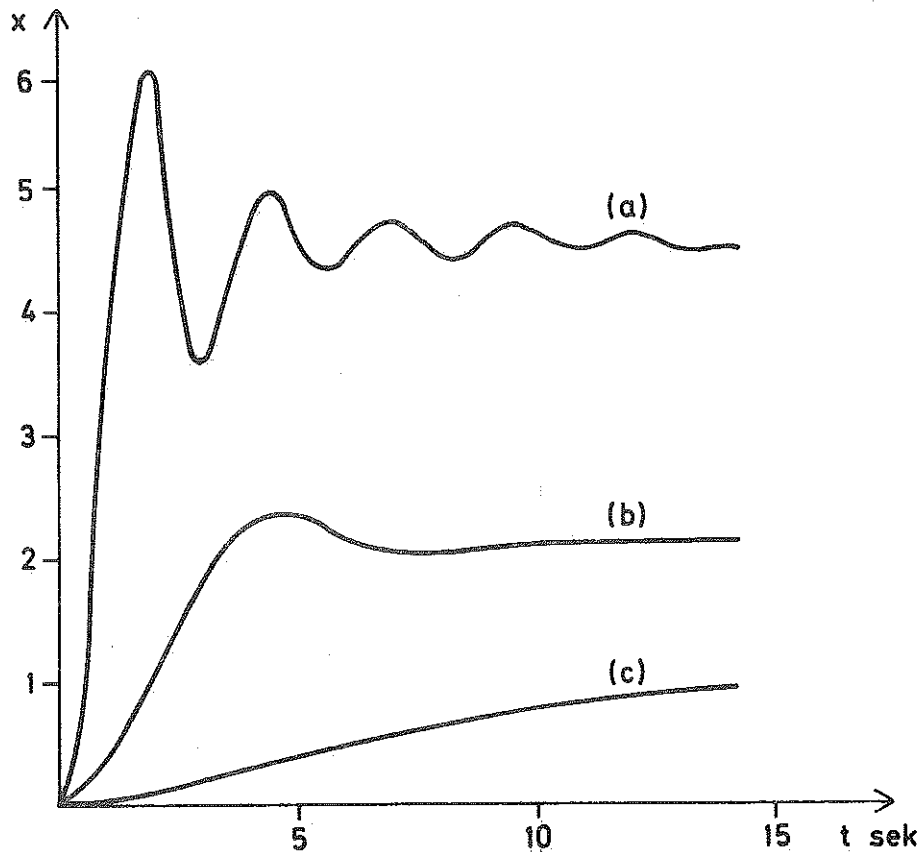


Fig. 2 - Lösningar till $\ddot{x} + \dot{x} + 0,1x^3 = u(t)$ då (a) $u(t) = 10$,
(b) $u(t) = 1$, (c) $u(t) = 0,1$ för $t \geq 0$.

för små signalamplituder. Ökas signalamplituden blir svaret alltmer oscillativt. Detta illustrerar en viktig egenskap hos olinjära system, d.v.s. att superpositionsprincipen inte gäller. Tillämpbarheten av superpositionsprincipen är en av de mest väsentliga egenskaperna hos linjära system. För olinjära system är således i allmänhet inte summan av två eller flera lösningar en lösning. Kännedom om t.ex. det olinjära systemets svar på ett enhetssteg medger inte kvantitativ prediktion av systemets svar på större eller mindre steg.

Stabilitet.

Vi såg i föregående avsnitt hur utsignalens form var beroende av insignalens amplitud. I detta avsnitt skall vi visa en mycket drastisk förändring av utsignalen, då insignalens amplitud växer. För tillräckligt stora amplituder blir lösningen till systemekvationen instabil.

Vi skall studera systemet i figur 3. En motor driver en ventil med olinjär karakteristik $f(x) = x^2$, d.v.s. utsignalen från ventilen är kvadraten på insignalen till ventilen.

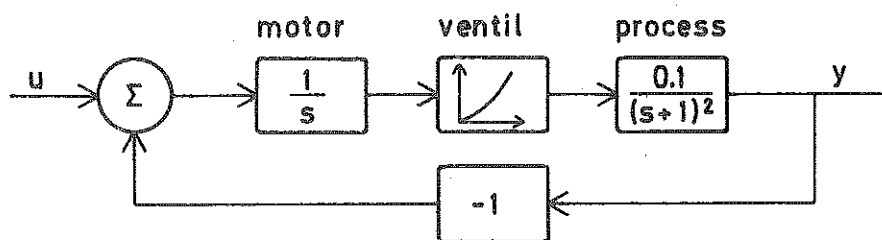


Fig. 3 - Blockdiagram för ett reglersystem med en olinjär ventiltkaraktistik.

Den reglerade processen kan beskrivas med ett linjärt system av 2:a ordningen vars överföringsfunktion är:

$$G(s) = \frac{0,1}{(s+1)^2}$$

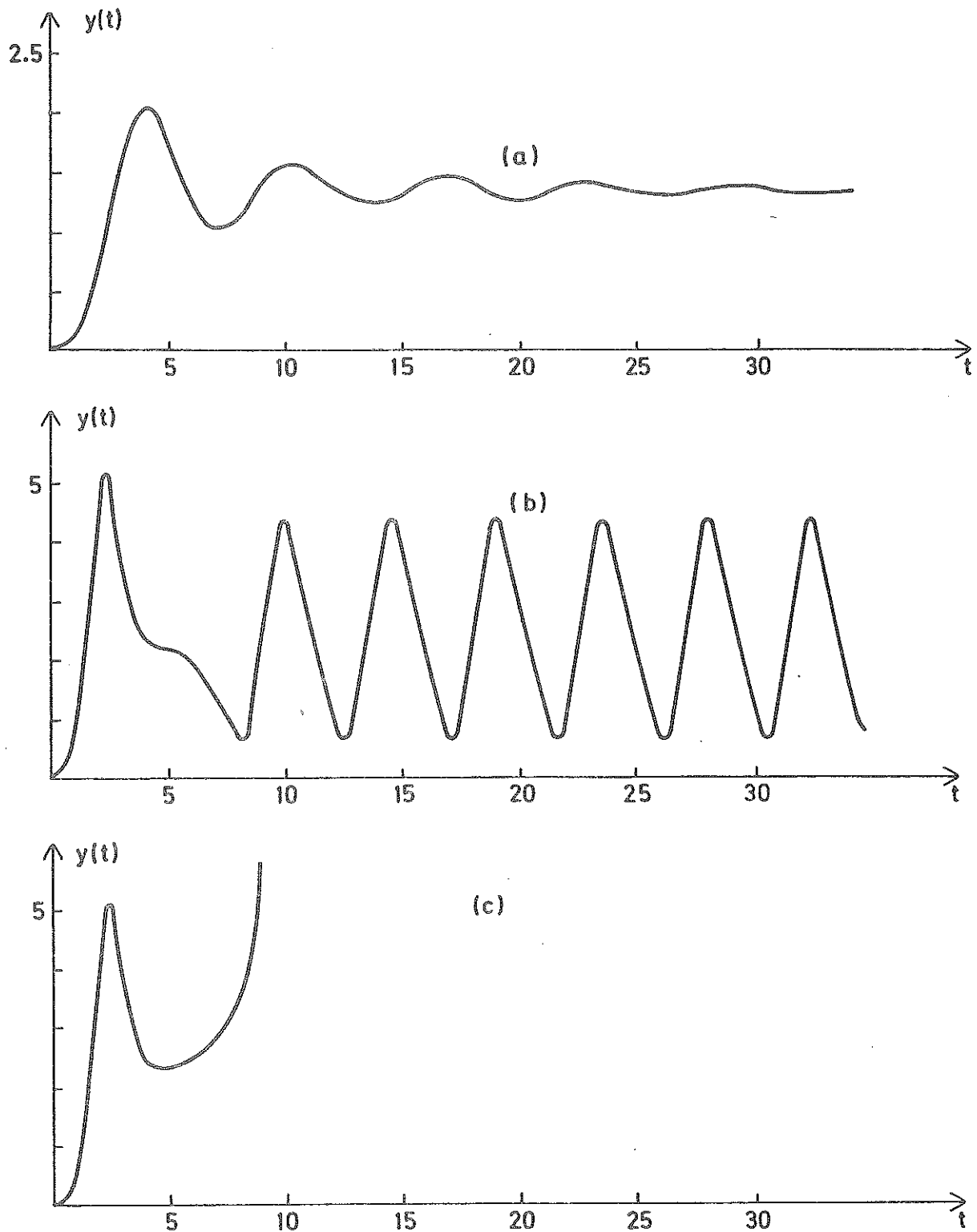


Fig. 4 - Stegsvär för systemet i figur 3, då (a) $u(t) = 0,2$,
 (b) $u(t) = 1,72$, (c) $u(t) = 1,74$ för $t \geq 0$.

I figur 4 visas systemets stegsvar för några olika insignalamplituder. För små insignalamplituder är stegsvaret relativt kraftigt dämpat. Ökas amplituden blir svaret allt mindre dämpat. För $u(t) = 1,74$ får vi ett instabilt stegsvar.

Olinjära system har således den egenskapen att lösningens stabilitet beror av insignalens amplitud och form. Vi kan därför endast tala om stabilitet av en enskild lösning. Stabilitet är således en egenskap hos varje enskild lösning till den olinjära differentialekvationen och inte en systemegenskap. Detta står i skarp kontrast till förhållandena för linjära system, där vi fann, att stabilitet var en systemegenskap.

Periodiska lösningar.

Med en periodisk lösning menar vi en självsvängning av konstant frekvens och amplitud. Förekomsten av sådana svängningar är mycket vanlig i olinjära system. Speciellt är existensen av stabila periodiska lösningar unik för olinjära system. Beträkta t.ex. servosystemet i figur 5. Systemet består av förstärkare, motor och en kuggväxel med glapp. Systemets utsignal är vinkelläget på axeln efter kuggväxeln.

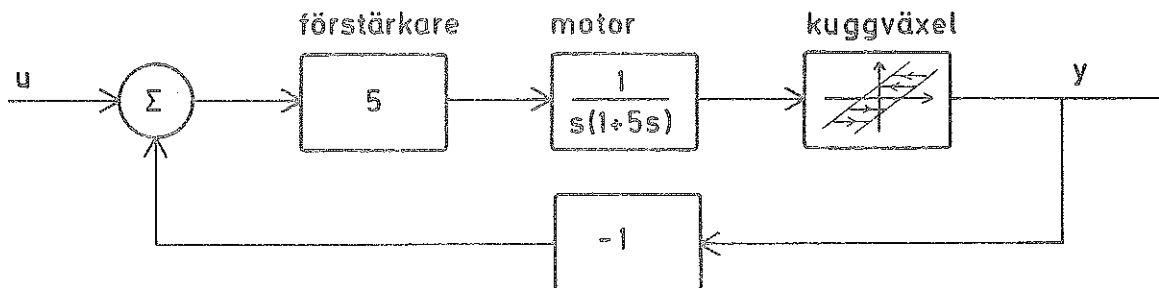


Fig. 5 - Blockdiagram för servosystem med glapp.

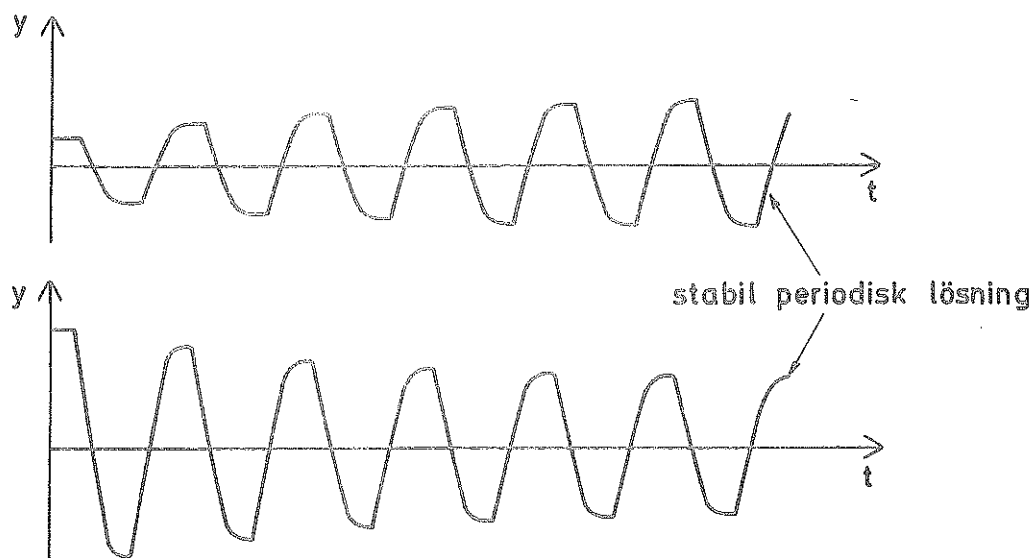


Fig. 6 - Stabil periodisk lösning för servosystemet i fig. 5.

I figur 6 visas utsignalen för olika initialvärden på utsignalen. Vi observerar att utsignalen, oavsett initialvärdet, svänger in till den periodiska lösningen. I båda fallen får vi således en kvarstående svängning av samma frekvens och amplitud.

I många fall är naturligtvis förekomsten av stabila periodiska lösningar i reglersystem helt oacceptabel. I andra fall är systemet baserat på existensen av detta fenomen, t.ex. stabila oscillatorer.

Hoppresonans.

För att illustrera hoppresonans antar vi, att vi vill bestämma en frekvenskurva, Bode-diagrammet, för systemet i figur 7. Detta är samma system som i föregående avsnitt, om vi antar att för-

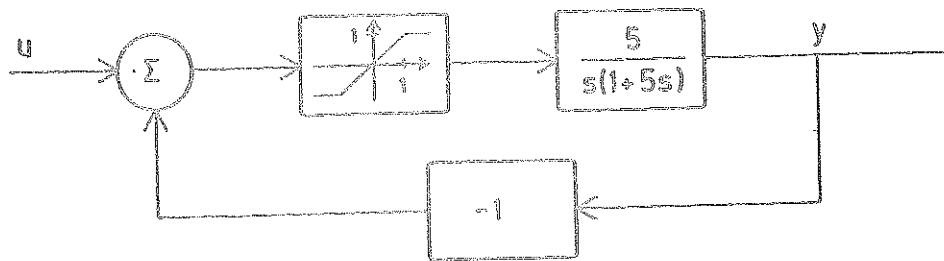


Fig. 7 - Blockdiagram för servosystem med mättande förstärkare.

stärkaren mättar och kuggväxeln är utan glapp. Låt insignalen vara en sinus, d.v.s. $u(t) = a \sin \omega t$. För olika frekvenser ω och amplituder a bestämmer vi beloppet av kvoten mellan in- och utsignal. I figur 8 visas resultatet plottat i ett logaritmiskt diagram. För höga och låga frekvenser överensstämmer amplitud-

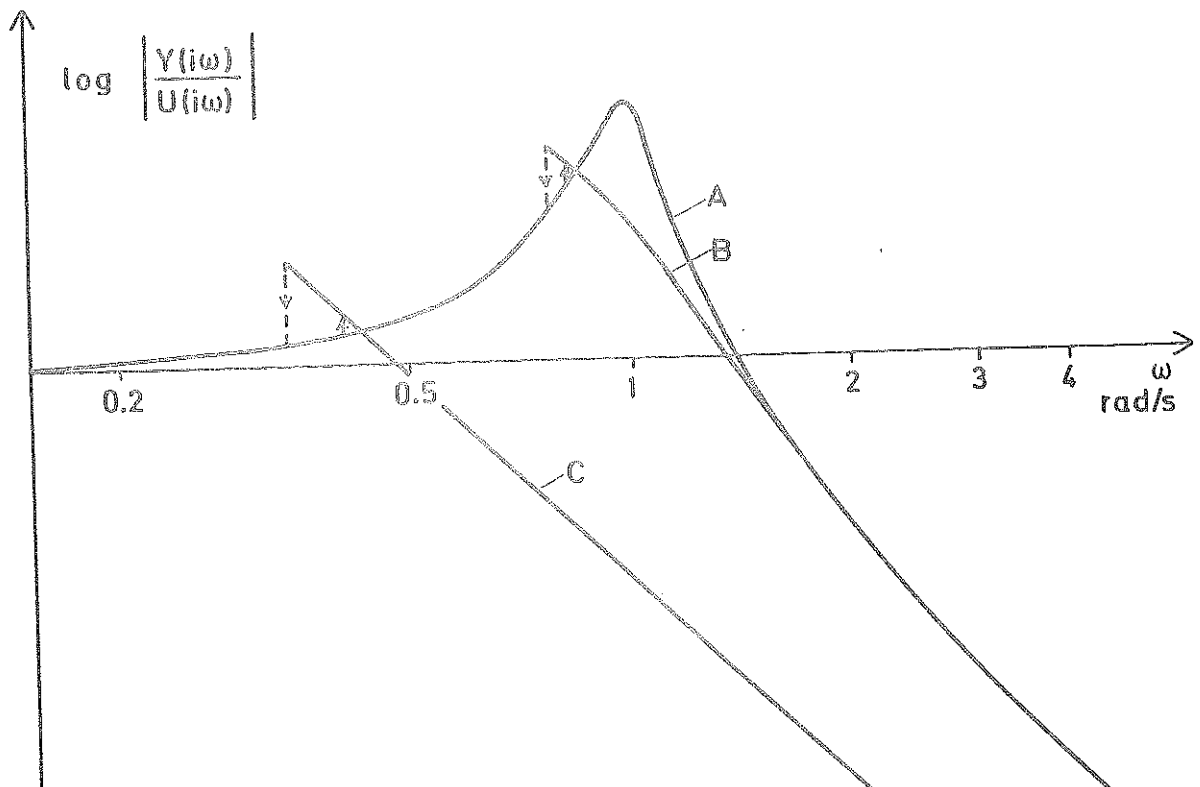


Fig. 8 - Frekvenskurvor för servosystemet i fig. 7:

- A. linjära systemet;
- B. olinjära systemet med $u(t) = 0,1 \cdot \sin \omega t$;
- C. olinjära systemet med $u(t) = 1 \cdot \sin \omega t$.

kurvorna A och B. Amplitudkurvan A gäller för det linjära systemet, d.v.s. vi antar att förstärkaren ej mättar. B och C gäller för det olinjära systemet med $a = 0,1$ resp. $a = 1,0$. Vi ser att kurva B har diskontinuiteter för $\omega = 0,77$ och $\omega = 0,82$. Hoppet äger rum vid en frekvens, som beror av experimentets förhistoria och den riktning från vilken vi nalkas hoppregionen. Amplitudkurvan för det olinjära systemet är således en tvåtydig funktion i ett visst frekvensområde. Registreras faskurvan kommer också denna att uppvisa diskontinuiteter.

Eftersom kurvorna B och C ej sammanfaller, finner vi, att den erhållna amplitudkurvan för det olinjära systemet beror av insignalens amplitud. Även det frekvensområde inom vilket funktionen är tvåtydig varierar. Detta exempel illustrerar att olinjära system och komponenter ej har en entydig överföringsfunktion. Allmänt följer detta av att superpositionsprincipen inte gäller. Av samma orsak följer att det samband mellan tidplan och frekvensplan, som gäller för linjära system, inte gäller för olinjära system.

Nya frekvenser.

Det gäller för linjära tidsinvarianta system att utsignalen endast innehåller de i insignalen ingående frekvenserna. Om t.ex. det linjära systemet påtvingas en sinusformad insignal av frekvensen ω_0 kommer i stationärt tillstånd utsignalen endast att innehålla frekvensen ω_0 . Detta är i allmänhet inte sant för olinjära system. Den olinjära komponenten i systemet kan generera svängningar med frekvenser, som dels är heltalsmultipler av grundfrekvensen (harmoniska svängningar) och dels bråkdelar av grundfrekvensen (subharmoniska svängningar).

Betrakta t.ex. den mättande förstärkaren i figur 7. Antag att insignalen till förstärkaren är en sinus $x_{in}(t) = a \sin \omega t$. För amplituder $a \leq 1$ är då utsignalen från förstärkaren $x_{ut}(t)$ proportionell mot insignalen. Då $a > 1$ blir emellertid utsignalen "klippt". Fourier-serieutveckla utsignalen $x_{ut}(t)$.

$$x_{ut}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)\omega$$

där

$$b_1 = \frac{2a}{\pi} \left[B + \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right] \quad a > 1$$

$$= 1 \quad a < 1$$

$$b_{2k+1} = \frac{a}{\pi \cdot k(k+1)} \left[\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \sin[(2k+1) \cdot B] - \frac{1}{a(2k+1)} \cos[(2k+1)B] \right] \quad a > 1$$

$$= 0 \quad a < 1$$

och

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$$

Termerna $b_3 \sin 3 \omega t$, $b_5 \sin 5 \omega t$, ... representerar således nya frekvenser, introducerade av det olinjära elementet.

Vad som hittills presenterats har varit en uppräknning av fenomen och egenskaper hos olinjära system. Avsikten har varit att ge en introducerande överblick av de svårigheter, man möter vid studiet av olinjära system. Sammanfattningsvis kan vi säga, att vi funnit följande dominerande egenskaper hos olinjära system:

- Superpositionsprincipen gäller ej;
- Stabilitet är en egenskap hos varje enskild lösning och ej en systemegenskap.

Vi har tidigare nämnt att det för analys och syntes av olinjära system ej finns någon helt sammanhängande teori tillgänglig. Följande metoder används emellertid med framgång:

- Linjärisering
- Fasplanmetoden
- Lyapunov teori
- Metoden med beskrivande funktion
- Simulering

Den första metoden återför problemet på analys och syntes av linjära system. I många problem är dock den linjära approximationen helt otillräcklig. Fasplanmetoden är begränsad till system av högst 2:a ordningen. Metoden är emellertid relativt lätt att använda och ger en mycket god uppfattning om utseendet av lösningarna till det olinjära systemet. Denna metod behandlas i kap. III. I kap IV behandlas Lyapunov teori och andra stabilitetskriterier. Med Lyapunovs metod finns potentiella möjligheter att behandla stabilitet hos godtyckliga olinjära system. I praktiken är dock metoden begränsad av svårigheten att finna en s.k. Lyapunov-funktion. Metoden med beskrivande funktion är en approximativ metod. Metoden kan tillämpas på system, som kan separeras i ett olinjärt och linjärt delsystem. Metoden presenteras i kap. V.

Den sist nämnda metoden, simulering, behandlas inte explicit i detta kompendium. Det studerade systemet simuleras på en analogmaskin eller dator. Vi kan nu studera stabilitet och inverkan av t.ex. parametervariationer. För varje given parameteruppsättning och givet initialvärde beräknas lösningen till den olinjära differentialekvationen. Vi kan emellertid endast beräkna ett relativt litet antal lösningar av t.ex. ekonomiska och tidsmässiga skäl. Vi har därför ingen garanti för att andra lösningar inte har överraskande egenskaper t.ex. är instabila. Detta är en väsentlig nackdel hos metoden. Med framgång har emellertid simulering använts för att analysera stora system, som ej kan angripas med analytiska metoder. Som exempel kan nämnas stabilitetsundersökningar av stora kraftsystem. Antalet linjära differentialekvationer var i detta fall ≈ 100 st och antalet olinjäriteter 20.

Kap II - RESUMÉ AV NÅGRA RESULTAT FRÅN TEORIN FÖR
DIFFERENTIALEKVATIONER

Vid försök till matematisk beskrivning av många olinjära system leds man till ordinära differentialekvationer av följande typ

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \quad (1)$$

$$y = g(x,u) \quad (2)$$

där u är insignalen, y utsignalen och x tillståndsvariabeln. Se kompendiet i allmänna kursen. Det är i ytterligt få fall som systemekvationerna kan lösas explicit. Vid såväl analys som syntes nödgas man därför alltid att tillgripa analogi- eller datamaskiner (eller i nödfall grafiska metoder). Den analys som kan genomföras ger i bästa fall endast lösningarnas kvalitativa struktur. Då automatiska räkneshjälpmedel användes är det ytterligt väsentligt att man kan avgöra att ekvationerna verkligen har en lösning samt att denna lösning är entydig. Om så ej är fallet kommer de numeriska algoritmerna endast att leverera nonsens. Vi vill därför börja med att ge en existens och entydighetssats för en ordinär differentialekvation.

Vi skall då betrakta en ekvation av typen (1) där man för insignalen u har substituerat en tidsfunktion. Vi skall således betrakta ekvationen

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad (3)$$

Observera att variabeln t kan elimineras genom att införa en extra tillståndsvariabel

$$x_{n+1} = t$$

associerad med ekvationen

$$\frac{d x_{n+1}}{dt} = 1$$

och det är således tillräckligt att studera ekvationen

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad , \quad x(0) = a \quad (4)$$

Det gäller nu

Sats 1

Låt R beteckna mängden

$$R = \{ z ; || z - a || \leq C_1 \}$$

Antag att funktionen $f(x)$ är sådan att

$$|| f(x) - f(y) || \leq C_3 || x - y ||^x$$

för alla $x, y \in R$. Då har ekvation (4) en entydig lösning i intervallet $0 \leq t \leq C_1 / C_2$ där

$$C_2 = \max_R || f(z) ||$$

^xLipschitz villkoret.

För bevis av denna sats hänvisas till Bellman: "Stability Theory of Differential Equations". McGraw Hill 1953.

Det finns även skarpare existens och entydighetssatser. Dessa kräver dock en mer avancerad integrationsteori. För sådana resultat hänvisas till något standardverk om differentialekvationer t.ex. Coddington - Levinson: "Theory of Differential Equations". McGraw Hill 1955.

Vi ger ett exempel på en ekvation som ej har en entydig lösning.

Exempel 1

Betrakta en 1:a ordningens differentialekvation given av

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$$

Vi finner att lösningen ges av

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}(t - C)\right)^2$$

I figur 1 visas några tänkbara lösningar.

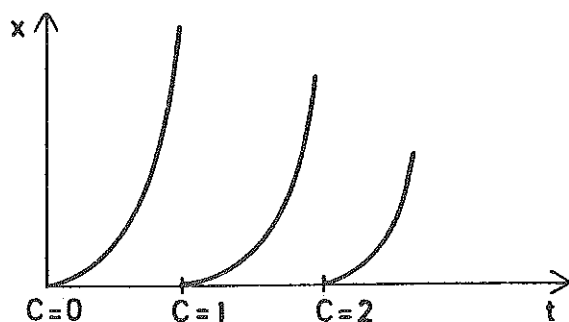


Fig. 1. Lösningar till differentialekvationen $\dot{x} = \sqrt{x}$

Lösningen är inte entydig ty \sqrt{x} uppfyller inte Lipschitz villkoret omkring origo. Vad händer om man försöker lösa ekvationen numeriskt?

Observera även att sats 1 endast ger existensen av lösningarna för $0 \leq t < C_1 / C_2$. I tillämpningarna är man ofta intresserad av att lösningarna existerar och är entydiga för $0 \leq t < \infty$.

Vi ger ytterligare ett exempel som belyser att detta måste särskilt undersökas.

Exempel 2 - Ändlig "explosionstid" (finite escapetime)

Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 ; \quad x(0) = x_0$$

där lösningen fås genom

$$\frac{dx}{x^2} = dt ; \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t ; \quad -\frac{1}{x} = t - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 t - 1}{x_0}$$

Vi får således

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

I fig. 2 visas några lösningar för olika initialvärden. För positiva initialvärden går varje lösning mot ∞ på ändlig tid. Det är inte möjligt att utvidga lösningsområdet.

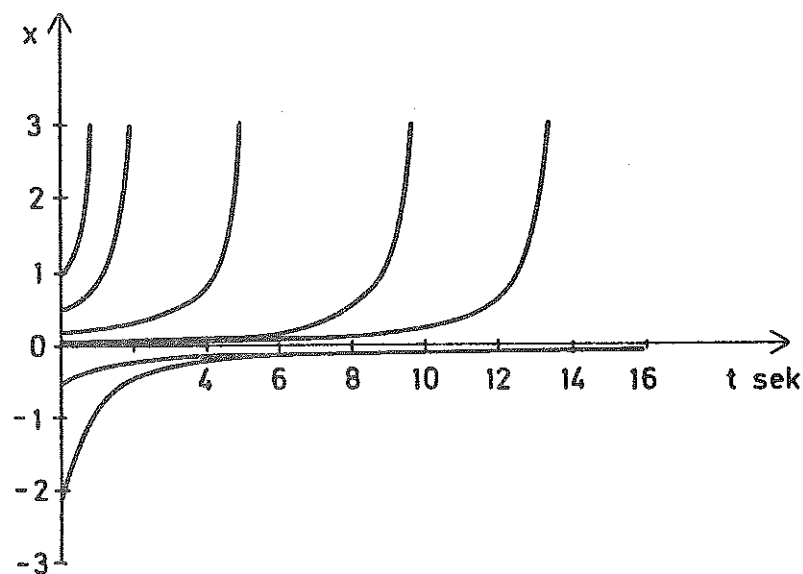


Fig. 2. Lösningar till differentialekvationen $\dot{x} = -x^2$

I det följande skall vi förutsätta att man i varje enskilt fall har verifierat existens och entydighet för lösningarna. Vi erinrar om några nomenklaturfrågor. Ekvationen (3) säges vara autonom om $f(x,t)$ ej innehåller variabeln t explicit. För en autonom ekvation gäller att sådana punkter x^i där $f(x^i) = 0$ kallas singulära punkter. De singulära punkterna motsvarar således stationära lösningar

$$x(t) = \text{konstant} = x^i$$

KAPITEL III - FASPLANANALYS

1. Inledning
2. Klassificering av singulariteter till linjära d.e.
3. Analys av styckvis linjära system
4. Lyapunov - Poincarés sats
5. Klassificering av singulariteter till olinjära d.e.
6. Isoklinmetoden
7. Något om periodiska lösningar
8. Övningsexempel
9. Flervalsfrågor

1. INLEDNING

I detta kapitel presenteras en metod för analys av olinjära system som kallas fasplananalys. Metoden förutsätter att analysproblemet kan formuleras som ett initialvärdesproblem för en olinjär differentialekvation

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.1)$$

Problemet består således i att ange karaktären hos lösningar till ekvation (1.1) för olika initialvärden. Observera att vi ej är intresserade av en enda lösning utan att vi vill veta karaktären hos alla lösningar. Det är således ej möjligt att lösa problemet enbart genom numerisk utvärdering av ett antal lösningar. Ty om vi ej har någon insyn i problemets natur måste alltför många fall undersökas. Vi skall däremot visa hur man genom en kombination av analys och numerisk utvärdering kan besvara problemet på ett tillfredsställande sätt.

Fasplananalysen är begränsad till autonoma system, dvs funktion f i (1.1) får ej bero explicit av tiden t . Fasplananalys är dessutom väsentligen begränsad till andra ordningens system. Trots dessa inskränkningar är metoden mycket väsentlig ty då den kan tillämpas ger den mycket god förståelse för många av de fenomen som uppträder hos olinjära system.

I det specialfall då tillståndsrummet är tvådimensionellt användes ofta ordet fasplan i stället för tillståndsrum. Med en trajektoria eller lösning till differentialekvationen (1.1) avses en kurva i produktrummet $R \times T$ där T är tidsaxeln. Med en fasplankurva eller ban avses projektionen på R av en trajektoria i $R \times T$. Med fasporträtt avses fasrummet med ett antal banor inritade. Fasplananalys består i att rita upp fasporträttet för ekvationen (1.1). Egenskaper hos lösningar till (1.1) med olika initialvillkor kan sedan direkt utläsas ur fasplanet. Om man sedan vet hur olika val av fysikaliska parametrar påverkar funktionen f är det också möjligt att kvalitativt

bedöma hur systemets egenskaper påverkas av dessa parametrar. Vi kan således säga att fasplananalysen består av två steg: uppritning av fasporträttet och tolkning av detsamma. Genom en kombination av analytiska, numeriska eller analoga metoder kan fasporträttet i många fall erhållas med måttlig ansträngning.

Vid uppritning av fasporträttet bestäms först de singulära punkterna eller jämviktspunkterna, dvs de punkter x^i där $f(x^i) = 0$. Därefter bestäms banorna i små omgivningar till de singulära punkterna. Fasplankurvornas egenskaper i närheten av de singulära punkterna bestäms väsentligen av den linjära approximationen till ekvation (1.1), dvs av ekvation

$$\frac{d}{dt} (x - x_0) = f_x(x_0)(x - x_0) \quad (1.2)$$

där

$$f_x(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Då ekvation (1.2) är linjär kan dess egenskaper studeras analytiskt. I vissa fall är det sedan möjligt att direkt skissera fasporträttet. Eventuellt får analysen kompletteras med analoga eller numeriska räkningar av några speciella trajektorier. Sedan de singulära punkterna bestämts är det ofta lätt att inse vilka trajektorier som är av intresse och det numeriska arbetet får härigenom rimlig omfattning.

I detta kapitel ges en detaljerad framställning av fasplananalysen. I avsnitt 2 behandlas den linjära differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x = Ax$$

som har en singularitet i origo. Vi undersöker faskurvornas kvalitativa utseende och kan härigenom klassificera de olika typer av singulariteter som kan förekomma. Singulariteterna är väsentligen av fyra olika typer: nod, fokus, sadelpunkt eller center.

Många reglersystem kan approximeras med ekvationer som är styckvis linjära. Även om en sådan approximation ej alltid återger alla detaljer korrekt, så erhåller man på detta sätt ofta systemets väsentliga egenskaper. I avsnitt 3 visas hur den karakterisering av singulära punkter, som genomfördes i avsnitt 2, kan tillämpas för att behandla det fall då funktionen $f(x)$ i ekvation (1.1) är styckvis linjär. Analysen är komplett för system av andra ordningen och resultaten är en effektiv metod att analysera olinjära reglersystem av andra ordningen.

En viktig sats av Lyapunov och Poincaré presenteras i avsnitt 4. Satsen innebär att om den linjära approximationen (1.2) till ekvation (1.1) i en omgivning till punkten $x = x^i$ är asymptotisk stabil, så är jämviktslösningen $x = x^i$ till den olinjära ekvationen (1.1) asymptotisk stabil.

Därefter visas i avsnitt 5 att banornas karaktär i närheten av en singulär punkt väsentligen bestäms av den linjära approximationen. De undantagsfall när detta icke gäller behandlas även kortfattat. I avsnitt 6 behandlas isoklinmetoden med vars hjälp banornas utseende långt från de singulära punkterna kan bestämmas. Några enkla kriterier för periodiska lösningar ges i avsnitt 7. Kapitlet avslutas sedan med några exempel, diskussion av begränsningar och möjliga generaliseringar.

2. KLASSIFICERING AV SINGULARITETER TILL LINJÄRA D.E.

Vi skall i detta avsnitt undersöka singulariteter till linjära differentialekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter. Linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter är välbekanta från den allmänna kursen och resultatet blir en annan formulering av redan kända fakta. Omformuleringen visar sig dock mycket lämplig för fortsatta generaliseringar.

Betrakta följande ekvation

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x = Ax \quad (2.1)$$

Uppenbarligen är $x_1 = x_2 = 0$ en singularitet till ekvationen. Vi skall anta att det är den enda singulariteten, dvs att

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$$

Karaktären av lösningarna till ekvation (2.1) bestäms av matrisen A:s egenvärden. Egenvärdena λ_1 och λ_2 erhålles som lösningar till den karakteristiska ekvationen

$$\det |\lambda I - A| = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0 \quad (2.2)$$

För att undersöka faskurvornas utseende skall vi särskilja följande fall:

1. Skilda reella egenvärden λ_1, λ_2

- a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ nod
- b) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ nod
- c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ sadelpunkt

2. Reella sammanfallande egenvärden
 - a) rangen $(A - \lambda I) = 0$
 - b) rangen $(A - \lambda I) = 1$
3. Komplexa egenvärden $\lambda = \sigma \pm i\omega$, $\sigma \neq 0$
4. Rent imaginära egenvärden

Vi skall nu diskutera vad som händer i dessa olika fall.

Fall 1 - Matrisen A har skilda reella egenvärden

Då A har skilda egenvärden finns en reguljär matris T sådan att

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Jämför AK kap. II. Inför $z = Tx$ och ekvationen (2.1) kan skrivas

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} z \quad (2.4)$$

Denna ekvation har lösningen

$$z_1(t) = z_1(0) e^{\lambda_1 t}$$

$$z_2(t) = z_2(0) e^{\lambda_2 t}$$

Ekvationen för banorna kan således skrivas

$$z_1 = C \cdot z_2^{\lambda_1/\lambda_2}, \quad C = z_1(0) [z_2(0)]^{-\lambda_1/\lambda_2} \quad (2.5)$$

Vi får nu göra ytterligare uppdelningar i olika fall.

Fall la - $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (stabil två tangent nod)

Kvoten λ_1/λ_2 är positiv och större än 1. Det följer då av fasplankurvornas ekvation (2.5) att faskurvorna är parabelliknande. Det gäller att

$$\lim_{z_2 \rightarrow 0} \frac{z_1}{z_2} = \lim_{z_2 \rightarrow 0} C \cdot z_2^{(\lambda_1/\lambda_2) - 1} = 0$$

Om $z_2(0) \neq 0$ så närmar sig faskurvan således origo längs z_2 -axeln. Däremot om $z_2(0) = 0$ följer att fasplankurvan ges av ekvationen $z_1(t) = e^{\lambda_1 t} z_1(0)$, dvs faskurvan är i detta specialfall identisk med z_1 -axeln.

Då både λ_1 och λ_2 är negativa gäller vidare att z_1 och $z_2 \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$. Faskurvorna är således orienterade mot origo. Då $t \rightarrow -\infty$ gäller vidare

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{z_2(t)}{z_1(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{z_2(0)}{z_1(0)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0$$

dvs om $z_1(0) \neq 0$ så kommer faskurvorna att vara parallella med z_1 -axeln för tillräckligt stora negativa värden på t . Faskurvornas utseende framgår av Fig. 2.1. Singulariteten kallas nod eller stabil två tangentnod, om vi särskilt vill betona att kurvorna för växande t närmar sig origo längs två skilda riktningar. Observera att dessa riktningar överensstämmer med den transformerade matrisens TAT^{-1} egenvektorer

$\text{col}(1,0)$ respektive $\text{col}(0,1)^x$

x fotnot

$\text{col}(1,0)$ är en beteckning för kolonnvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

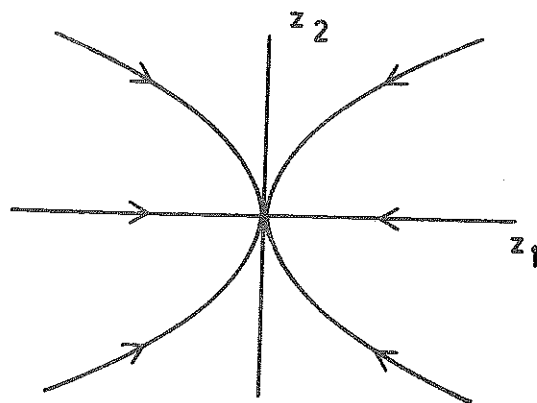


Fig. 2.1 - Fasporträtt för stabil (två tangent) nod

För att erhålla fasporträttet i det ursprungliga koordinat-systemet, transformerar vi lösningen tillbaka till x koordinaterna

$$x(t) = T^{-1} z(t) = z_1(0) T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + z_2(0) T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Vi finner då att faskurvorna för växande t närmar sig origo längs två skilda riktningar

$$e_1 = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ om } z_2(=0) = 0 \quad \text{resp.} \quad e_2 = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ om } z_2(0) \neq 0$$

Vi observerar vidare att e_1 och e_2 är högeregenvektorer till A . Vektorerna e_1 och e_2 har definierats så att

$$T^{-1} = [e_1, e_2]$$

men enligt ekvation (2.3) gäller

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

dvs

$$AT^{-1} = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

eller

$$A \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 \end{bmatrix}$$

dvs

$$A e_i = \lambda_i e_i \quad i = 1, 2$$

Den egenvektor som svarar mot det till beloppet största egenvärdet, dvs e_1 , kallas snabba egenvektorn och den andra egenvektorn e_2 kallas långsamma egenvektorn. Vi observerar att banor som ej sammanfaller med egenvektorerna är parallella med den snabba egenvektorn på stort avstånd från origo och parallella med den långsamma egenvektorn nära origo. Fasporträttet i de ursprungliga koordinaterna framgår av Fig. 2.2.

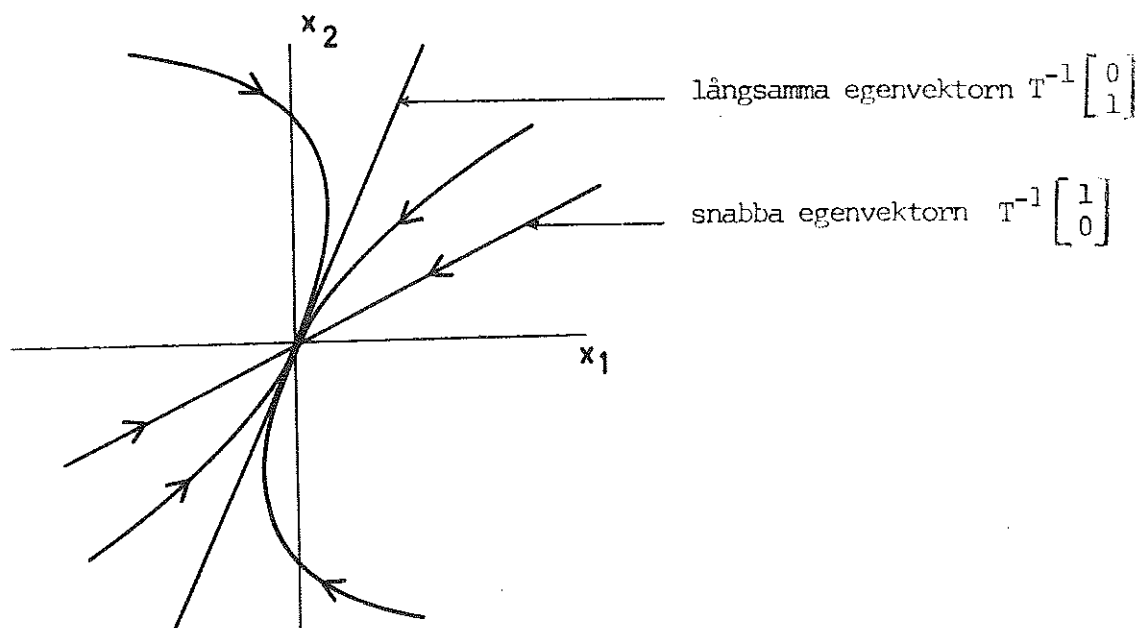


Fig. 2.2 - Fasporträtt för stabil (två tangent) nod

Fall 1b - $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ (instabil två tangent nod)

I detta fall är kvoten λ_1/λ_2 liksom i fall 1a positiv och större än 1. Banorna har således samma parabelliknande utseende som i fall 1a. Då både λ_1 och λ_2 är positiva, så kommer dock en punkt på faskurvan att avlägsna sig från origo med växande t . Singulariteten kallas en instabil nod eller en instabil två tangent nod. Fasplanet framgår av Fig. 2.3.

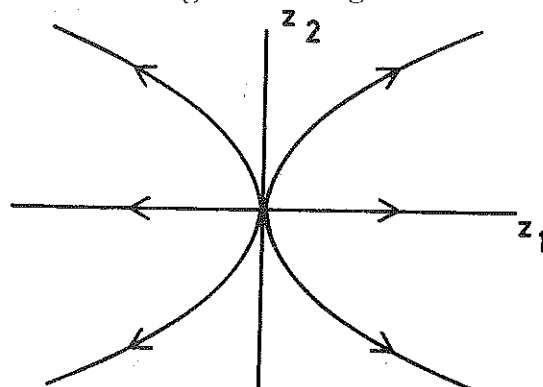


Fig. 2.3 - Fasporträtt för instabil två tangent nod

Fall 1c - $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (sadelpunkt)

Då egenvärdena har olika tecken är kvoten λ_1/λ_2 negativ. Det följer då av banornas ekvation (2.5) att dessa är hyperbelliknande med z_1 , z_2 -axlar som asymptoter. Då λ_1 är negativ och λ_2 positiv kommer lösningar som börjar på z_1 -axeln att närma sig origo med växande t , och lösningar som börjar på z_2 -axeln kommer att avlägsna sig från origo. Egenvektorn $\text{col}(1,0)$ till den transformerade matrisen TAT^{-1} kallas därför stabila egenvektorn och $\text{col}(0,1)$ instabila egenvektorn. Fasporträttet framgår av Fig. 2.4 och singulariteten kallas sadelpunkt.

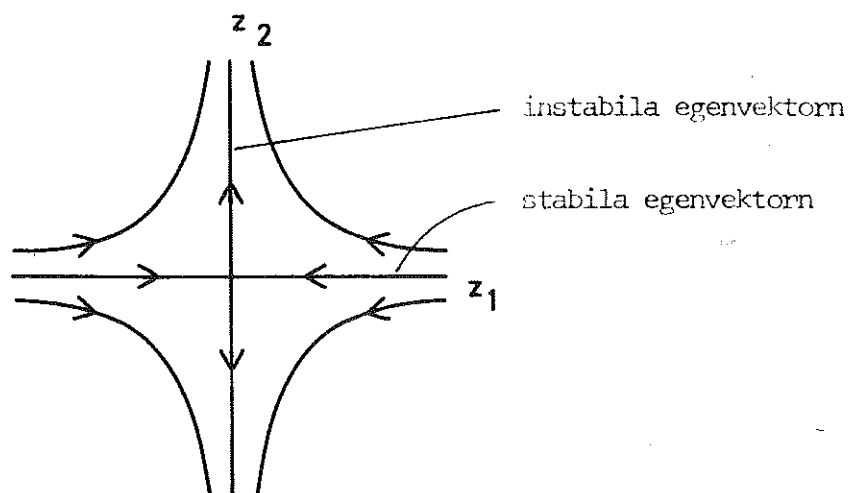


Fig. 2.4 - Fasporträtt för sadelpunkt

Fasporträttets utseende i de ursprungliga koordinaterna framgår av Fig. 2.5

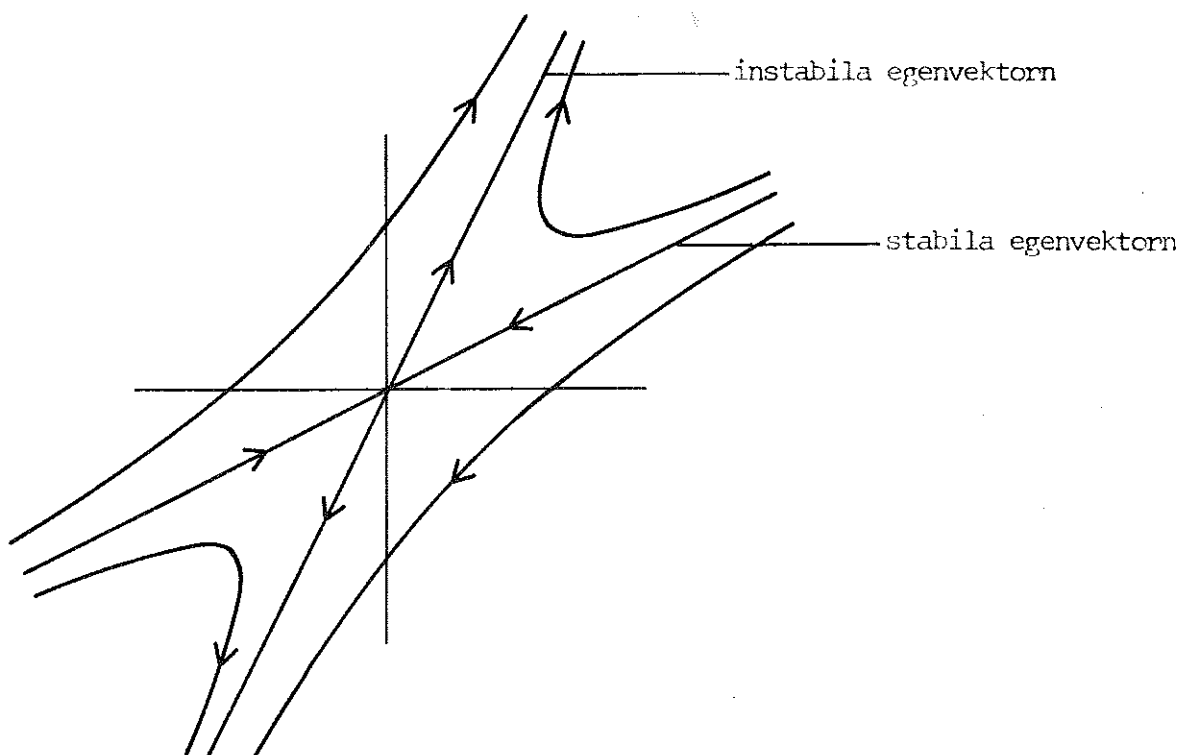


Fig. 2.5 - Fasporträtt för sadelpunkt

Fall 2 - $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Då matrisen A har sammanfallande rötter får vi undersöka två delfall beroende på om matrisen $A - \lambda I$ har rangen 0 eller rangen 1.

Fall 2a - stjärnnod

Då $A - \lambda I$ har rangen 0 gäller

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Vi finner då efter transformation

$$x_1(t) = x_1(0) e^{\lambda t}$$

$$x_2(t) = x_2(0) e^{\lambda t}$$

Fasporträttets utseende framgår av Fig. 2.6. Singulariteten kallas nod alternativt stjärnnod eller mångtangent nod om vi vill understryka skillnaden med noderna i fall 1.

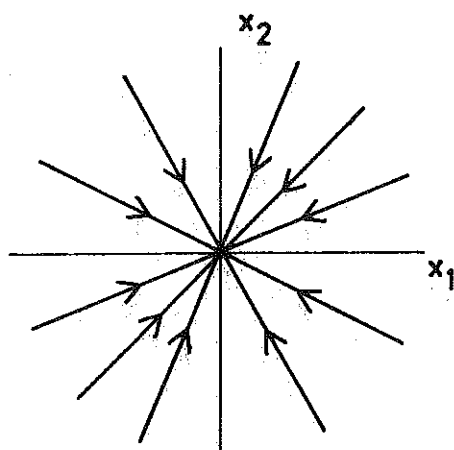


Fig. 2.6 - Fasporträtt för stabil stjärnnod

Fall 2b - (entangent nod)

Om matrisen $A - \lambda I$ har rangen 1 finns en transformation T sådan att

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

De transformerade ekvationerna lyder då

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_1 + z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \lambda z_2$$

och har lösningen

$$z_1(t) = z_1(0) e^{\lambda t} + t z_2(0) \cdot e^{\lambda t}$$

$$z_2(t) = z_2(0) e^{\lambda t}$$

Om $\lambda < 0$ gäller alltid

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_2(t)}{z_1(t)} = 0$$

dvs samtliga lösningar närmar sig origo längs z_1 -axeln. Singulariteten kallas nod eller entangent nod då lösningarna alltid närmar sig origo längs z_1 -axeln. Fasporträttet framgår av Fig. 2.7.

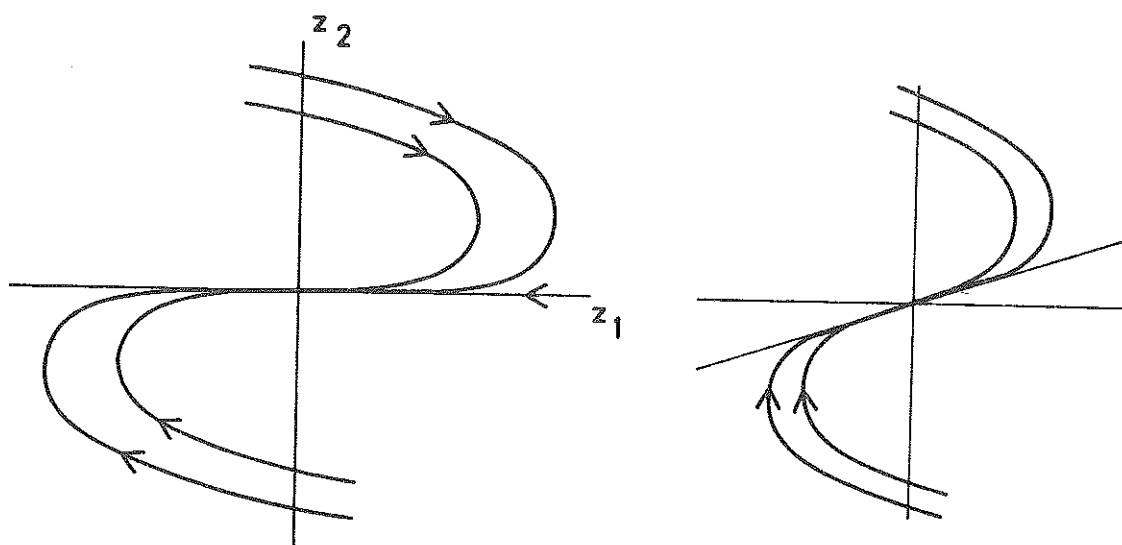


Fig. 2.7 - Fasporträtt för stabil entangent nod

Fall 3 - λ_1, λ_2 komplexa (fokus)

Då A har reella koefficienter är rötterna alltid komplexkonjugerade. Det finns då en transformation T sådan att

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma + i\omega & 0 \\ 0 & \sigma - i\omega \end{bmatrix}$$

De transformerade ekvationerna lyder då

$$\frac{dz_1}{dt} = (\sigma + i\omega) z_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = (\sigma - i\omega) z_2$$

Inför nu

$$v_1 = z_1 + i z_2$$

$$v_2 = i z_1 + z_2$$

och vi finner att systemet kan beskrivas på följande standardform

$$\frac{dv}{dt} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} v$$

Inför nu polära koordinater

$$r \cos \phi = v_1$$

$$r \sin \phi = v_2$$

Derivation av dessa uttryck ger

$$\frac{dr}{dt} \cos \phi - r \frac{d\phi}{dt} \sin \phi = \frac{dv_1}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} \sin \phi + r \frac{d\phi}{dt} \cos \phi = \frac{dv_2}{dt}$$

Elimination ger

$$r \frac{dr}{dt} = v_1 \frac{dv_1}{dt} + v_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = v_1 \frac{dv_2}{dt} - v_2 \frac{dv_1}{dt}$$

dvs

$$\frac{dr}{dt} = \sigma r$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega$$

Dessa ekvationer har lösningarna

$$r(t) = e^{\sigma t} r(0)$$

$$\phi(t) = -\omega t + \phi(0)$$

I det transformerade koordinatsystemet v_1, v_2 är lösningarna således spiraler som går mot origo för växande t om $\sigma < 0$ och som går från origo då $\sigma > 0$. Singulariteten kallas ett fokus eller en spiral. Fasplanet framgår av Fig. 2.8.

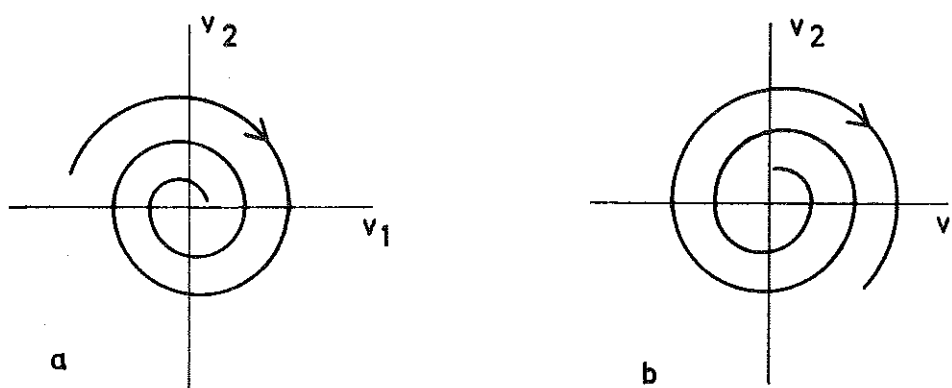


Fig. 2.8 - Fasporträtt för stabilt (a) och instabilt (b) fokus

Fall 4 - (centrum)

Analogt med fall 3 kan systemekvationen nu skrivas

$$\frac{dv}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} v$$

I polära koordinater gäller således

$$r(t) = \text{konst}$$

Faskurvorna är således koncentriska cirklar i det transformerade koordinatsystemet eller sneda ellipser i det ursprungliga koordinatsystemet. Se Fig. 2.9. Singulariteten kallas ett center.

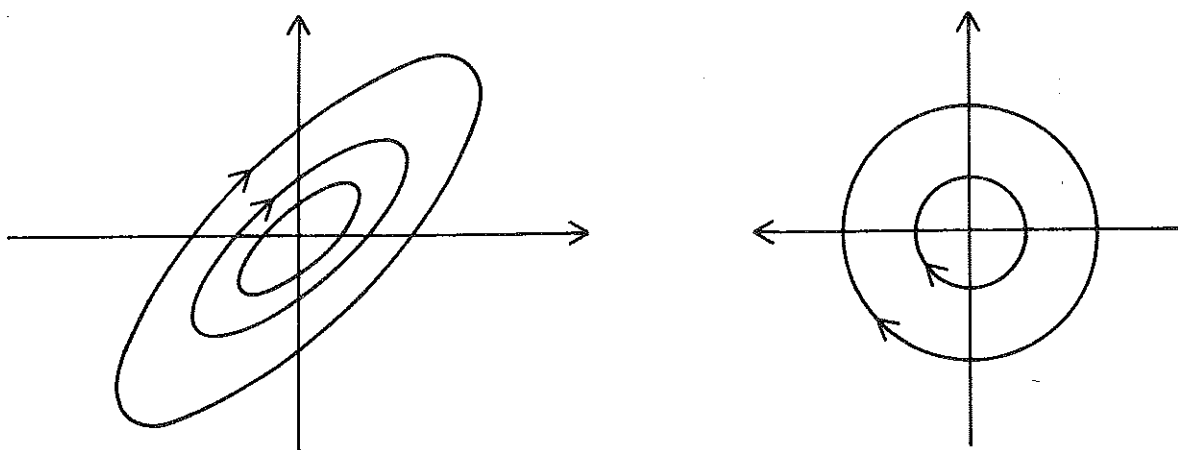


Fig. 2.9 - Fasporträtt för ett center

Sammanfattning

För det linjära systemet (2.1) med $\det A \neq 0$ finner vi således följande huvudtyper av singulariteter:

1. Singulariteten är en nod om A har reella egenvärden med samma tecken
2. Singulariteten är en sadelpunkt om A har reella egenvärden med olika tecken
3. Singulariteten är ett fokus om A har komplexa singulariteter med icke försvinnande realdel
4. Singulariteten är ett center om A har rent imaginära egenvärden

Inom grupperna nod och fokus kan vi dessutom göra en uppdelning i stabila resp. instabila singulariteter beroende på om rötternas realdel är negativa resp. positiva. Noderna kan vidare delas upp i tre typer: entangentnod, tvätangentnod och stjärnnod.

För att utföra karakteriseringen studerar vi således matrisen A 's karakteristiska ekvation vilken kan skrivas

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0$$

där

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} \quad (\text{spåret})$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{determinanten})$$

Den här ekvationen har lösningen

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{tr } A \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\text{tr } A)^2 - \det A}$$

En analys av de olika fallen visar nu att resultaten kan sammanfattas med Fig. 2.10.

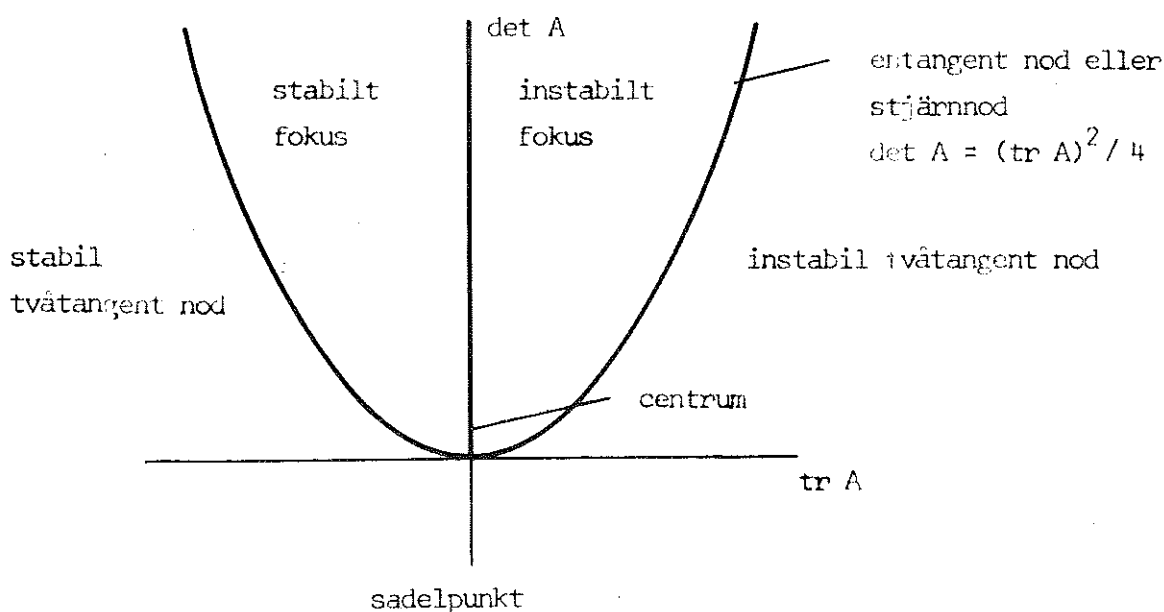


Fig. 2.10 - Karakterisering av singulariteterna för ekvationen $\dot{x} = Ax$

Vi skall slutligen diskutera vad som inträffar om $\det A = 0$.
 Matrisen A har då ett egetvärde 0 . Genom lämpligt val av koordinater i tillståndsrummet kan systemekvationerna skrivas

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} x$$

Denna ekvation har lösningen

$$x_1(t) = \text{konstant} = x_1(0)$$

$$x_2(t) = x_2(0) e^{\lambda t}$$

Varje punkt på axeln $x_2 = 0$ är således en singularär punkt. Fasporträttet framgår av Fig. 2.11.

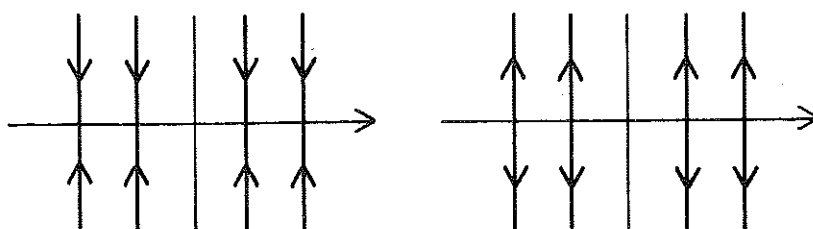


Fig. 2.11 - Fasporträtt då $\det A = 0$, dvs då origo ej är en isolerad singularitet

3. ANALYS AV STYCKVIS LINJÄRA SYSTEM

Om funktionen $f(x)$ är styckvis linjär kan fasplanet uppdelas i områden sådana att $f(x)$ är linjär i varje område. Varje område kan vidare tilldelas en singular punkt. Observera att den singulara punkten, som på detta sätt tillordnas ett område ej nödvändigtvis behöver tillhöra området. Den singulara punkten säges då vara en virtuell singularitet. Sedan den singulara punkten, som tilldelats ett visst område har karakteriserats så kan faskurvorna i hela området skisseras. Det kompletta fasplanet kan sedan bestämmas ur villkoret att faskurvorna är kontinuerliga vid övergång från ett område till ett annat. Det är således relativt lätt att bestämma fasporträttet för ett styckvis linjärt system. Approximation med styckvis linjära system är ett av de mest effektiva hjälpmedlen vid kvalitativa undersökningar av olinjära system.

Servosystem med olinjäriteter härrörande från olinjära ventilkaraktistika, glapp, mättning etc. utgör typexempel på tillämpningar. I det följande skall vi ge några exempel på tillämpningar. I övrigt hänvisar vi till de talrika exemplen i exempelsamlingen.

Exempel 3.1 (Reglersystem med olinjär dämpning)

Betrakta det reglersystem vars blockschema visas i Fig. 3.1.

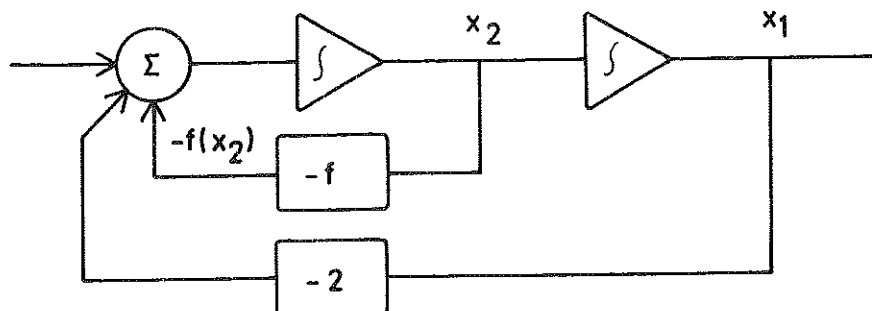


Fig. 3.1 - Blockschema för reglersystem med olinjär dämpning

Det är bekant från allmänna kursen att systemet ej är asymptotiskt stabilt för $f \equiv 0$. Det är också bekant att systemet kan stabiliseras t.ex. om vi väljer $f(x) = \alpha x$ med $\alpha > 0$. Det följer av figuren att

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_1}{dt}$$

återkopplingen via f representerar således en hastighetssignal. Vi skall nu visa att systemet kan stabiliseras med en olinjär hastighetsåterkoppling $f(x) = \alpha |x|$, vilket fysikaliskt betyder att endast hastighetens storlek återföres.

Ur blockschemat erhålles följande ekvationer för systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - f(x_2)$$

Vidare gäller

$$f(x_2) = \begin{cases} 3x_2 & x_2 \geq 0 \\ -2x_2 & x_2 < 0 \end{cases}$$

Systemekvationerna är således styckvis linjära. För att analysera systemet särskiljer vi två fall.

Fall I $x_2 \geq 0$

Då x_2 är icke negativ gäller

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x = Ax$$

dvs $\text{tr } A = -3$, $\det A = 2$. Vi finner således att origo är en stabil nod. Den karakteristiska ekvationen lyder

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

och har lösningarna

$$\lambda_1 = -1.0 \quad (\text{långsamma egenvärdet})$$

$$\lambda_2 = -2.0 \quad (\text{snabba egenvärdet})$$

Höger egenvektorerna erhålles ur

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

För $\lambda = -1$ erhålles den "långsamma egenvektorn"

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Snabba egenvektorn motsvarande $\lambda = -2$ erhålles ur

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Således

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Fasplankurvorna framgår av Fig. 3.2.

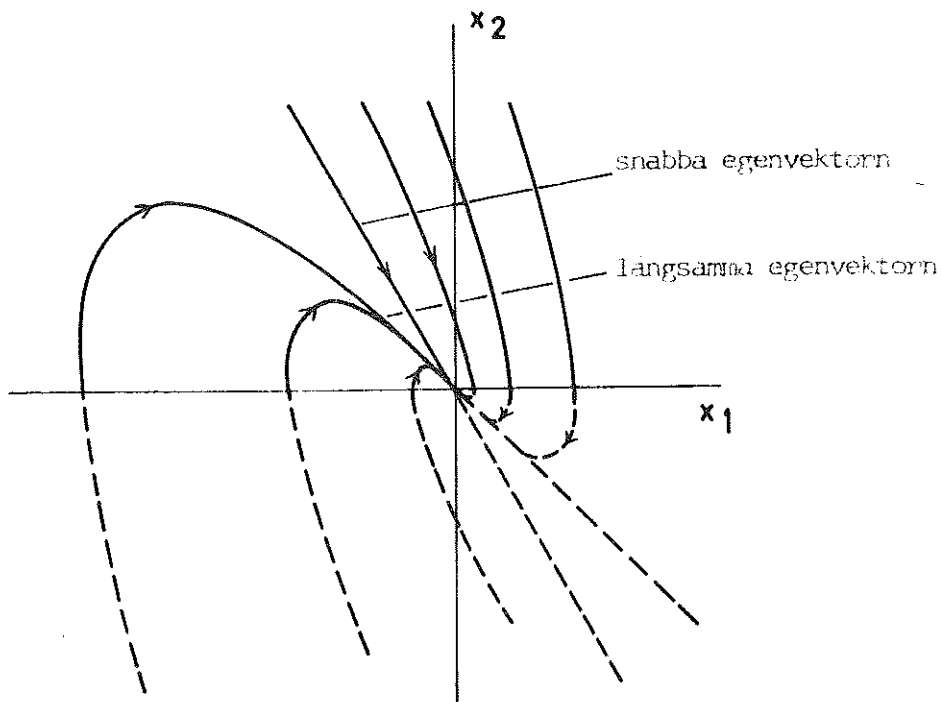


Fig. 3.2 - Fasplankurvor för den ekvation som gäller i området $x_2 > 0$. Kurvorna har streckats för $x_2 < 0$.

Fall II $x_2 < 0$

Då $x_2 < 0$ gäller

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x$$

$\text{tr } A = 2$, $\text{det } A = 2$, således instabilt fokus.

Den karakteristiska ekvationen lyder

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

Egenvärdena är således

$$\lambda = 1 \pm i$$

I Fig. 3.3 visas fasporträttet för den del av ekvationen som gäller då $x_2 < 0$.

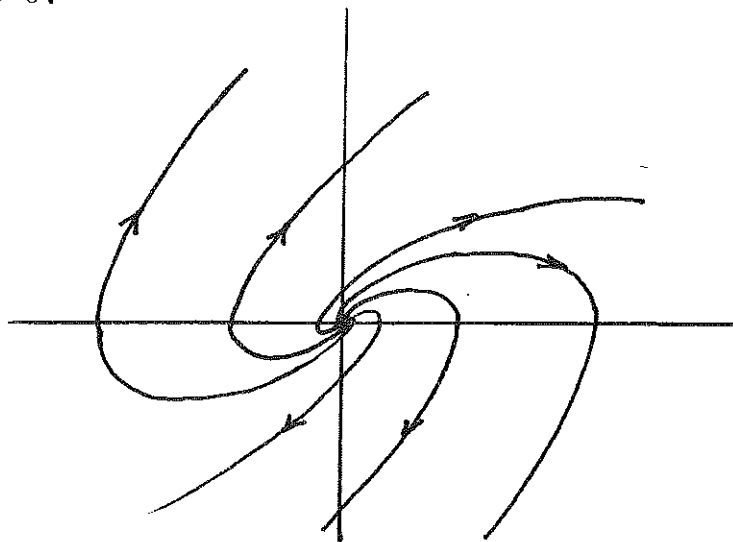


Fig. 3.3 - Fasporträtt för den ekvation som gäller då $x_2 < 0$.
Banorna har streckats för $x_2 > 0$.

Sammanfattas de olika dellösningarna erhålles ett fasporträtt för det olinjära systemet enligt Fig. 3.4.

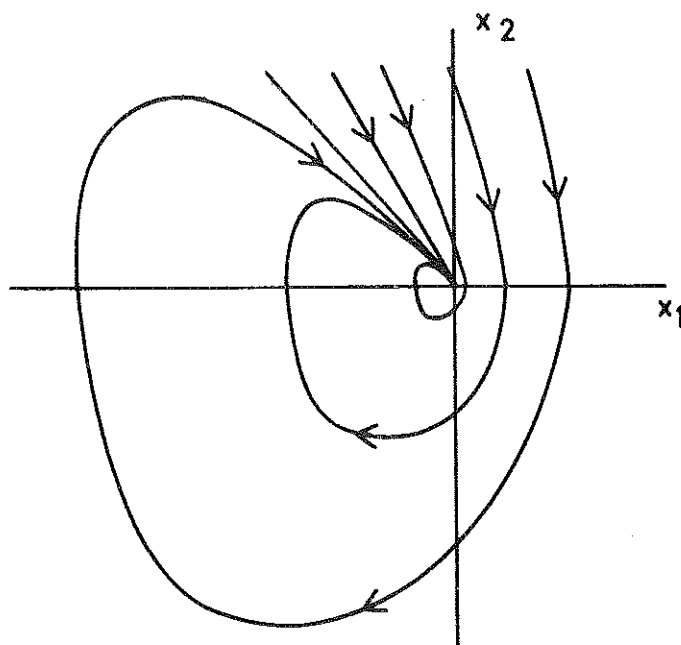


Fig. 3.4 - Fasporträtt för systemet i Fig. 1

Ur fasporträttet i Fig. 3.4 kan vi utläsa systemets kvalitativa egenskaper vid stegstörningar. Vi observerar att nolllösningen är stabil trots att den ekvation som beskriver systemet i området $x_2 < 0$ är instabil. Vi finner även ur fasporträttet i Fig. 3.4 att stegsvaret har högst en översläng.

Exempel 3.2 (Styckvis linjärt system som är instabilt trots att egenvärdena alltid är negativa)

Ett linjärt system med konstanta koefficienter är asymptotiskt stabilt om den karakteristiska ekvationens samtliga rötter ligger i vänstra halvplanet. Man skulle då kanske kunna förmoda att styckvis linjära system skulle vara stabila om det i varje delområde gäller att alla rötter till den karakteristiska ekvationen har negativ realdel. Vi skall med hjälp av ett exempel visa att denna förmodan ej är riktig. Betrakta ett system som beskrivs av ekvationerna

$$\text{I} \quad \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad x \in R_1$$

$$\text{II} \quad \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -a & -1 \end{bmatrix} x \quad x \in R_2$$

där R_1 och R_2 är områden i planet som ligger mellan de räta linjerna $x_2 = x_1/a$ och $x_2 = -ax_1$. Se Fig. 3.6.

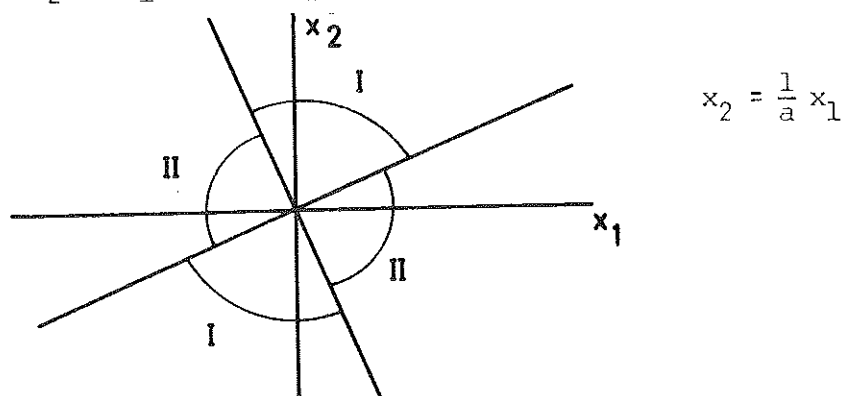


Fig. 3.6 - Figuren visar i vilka områden i fasplanet som systemet beskrivs av ekvation I resp. II

I varje delområde beskrives systemet således av linjära ekvationer, så beskaffade att den karakteristiska ekvationen har rötterna $\lambda_{1,2} = -1$ i alla delområden. Vi skall nu visa att systemet trots detta kan vara instabilt.

I området I gäller

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= -x_2 \\ \dot{x}_1 &= -x_1 + ax_2 \end{cases}$$

Origo är således en entangent nod för ekvationen

$$x_2(t) = e^{-t} x_2(0)$$

$$x_1(t) = e^{-t} x_1(0) + a \int_0^t e^{-(t-s)} \underbrace{x_2(s)}_{e^{-s} x_2(0)} ds = x_1(0)e^{-t} + at x_2(0)e^{-t}$$

Studera speciellt en lösning som börjar på den räta linjen

$$x_2 = -ax_1, \text{ dvs}$$

$$\begin{cases} x_1(0) &= -c \\ x_2(0) &= ac \end{cases}$$

Vi får för denna lösning

$$x_1(t) = (-c + at ac) e^{-t}$$

$$x_2(t) = ac e^{-t}$$

Se Fig. 3.7.

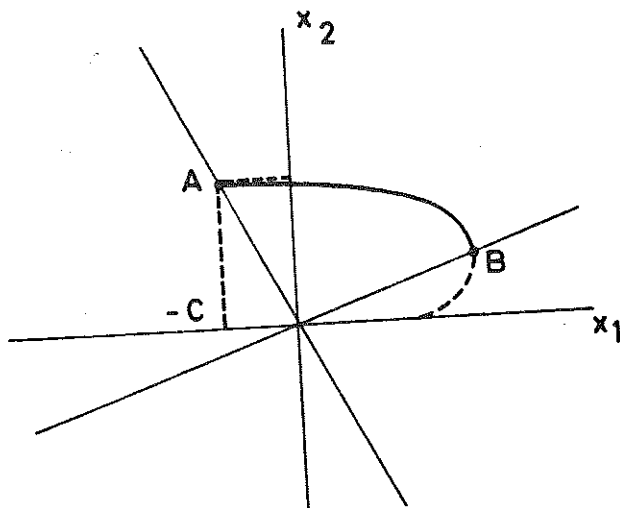


Fig. 3.7

Vi undersöker speciellt när lösningen lämnar området I. Detta sker i punkten B i Fig. 3.7 där $x_2 = x_1/a$, dvs $x_1 = ax_2$ eller

$$c(-1 + a^2 T) e^{-T} = a^2 c e^{-T}$$

där T är den tidpunkt då banan lämnar området I. Vi finner således

$$T = \frac{1}{a^2} (a^2 + 1) = 1 + a^{-2}$$

Koordinaterna för punkten B är vidare

$$x_1^B = a^2 c e^{-T}$$

$$x_2^B = ac e^{-T}$$

Betrakta nu lösningen i område II där det gäller

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -ax_1 - x_2 \end{cases}$$

Origo är en entangent nod även för dessa ekvationer

$$x_1(t) = e^{-t} x_1(0)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{-t} x_2(0) - a \int_0^t e^{-(t-s)} x_1(s) ds = \\ &= e^{-t} x_2(0) - at x_1(0) e^{-t} \end{aligned}$$

Studera speciellt en lösning som vid $t = 0$ startar i punkten B.
Dvs

$$x_1(0) = a^2 c e^{-T}$$

$$x_2(0) = ac e^{-T}$$

Vi finner då

$$x_1(t) = a^2 c e^{-T} \cdot e^{-t}$$

$$x_2(t) = (ac e^{-T} - at a^2 c e^{-T}) e^{-t} = (1 - a^2 t) ac e^{-T-t}$$

Se Fig. 3.8.

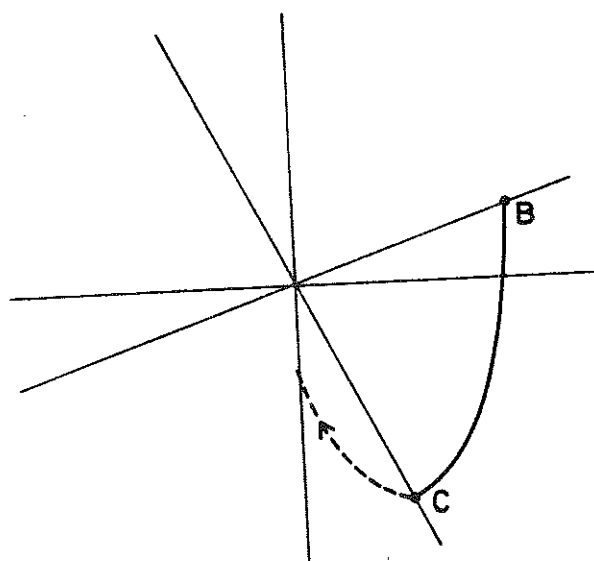


Fig. 3.8

Vi undersöker speciellt när lösningen passerar linjen $x_2 = -ax_1$ och lämnar området II i punkten C, där det gäller

$$(1 - a^2 t) a c e^{-T-t} = -a^3 c e^{-T-t}$$

dvs då

$$t = 1 + a^{-2} = T$$

Punkten C har koordinaterna

$$x_1^C = a^2 c e^{-2T}$$

$$x_2^C = -a^3 c e^{-2T}$$

Av symmetrin följer nu banans förlopp i områdena III och IV.

Vi finner speciellt att om

$$a^2 e^{-2T} = a^2 \exp(-2 - 2a^{-2}) > 1$$

så kommer punkten C att ligga på större avstånd från origo än punkten A och nolllösningen blir då instabil. Ovanstående villkor kan skrivas

$$a^2 > \exp(2 + 2a^{-2})$$

och kan alltid uppfyllas genom att välja a tillräckligt stort t.ex. $a = 3.5$.

Observera att lösningen tillbringar samma tid i alla områden I, II, III, IV samt att denna tid är oberoende av initialvillkoret. Ekvationen kan då även tolkas som en linjär ekvation med periodiskt varierande koefficienter.

I Fig. 3.9 visas fasporträttet för systemet. För att undvika den diskontinuerliga förändringen i ekvationens koefficienter vid passage mellan områdena kan man lägga in zoner enligt Fig. 3.9 och där jämna ut funktionen utan att ändra problemets och lösningens karaktär.

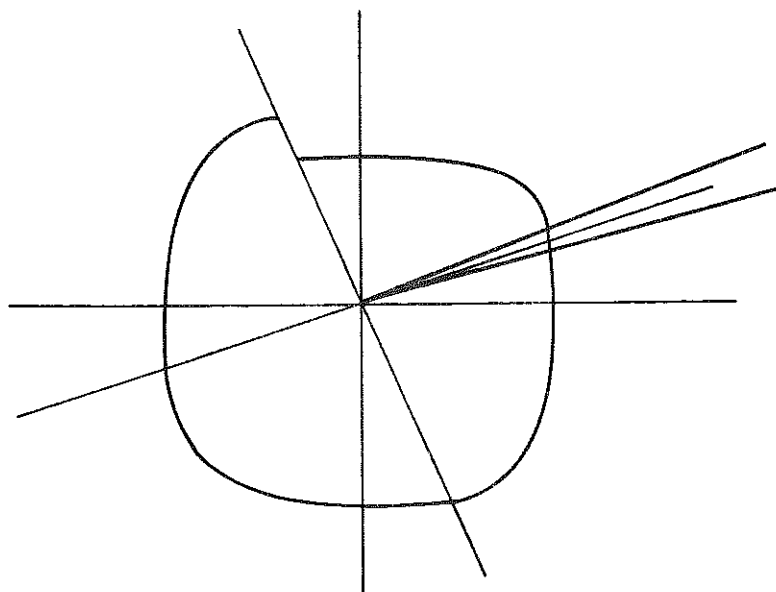


Fig. 3.9

Om vi i exemplet byter t mot $-t$ får vi ett styckvis linjärt system där den karakteristiska ekvationen har rötterna $\lambda_{1,2} = +1$ i varje delområde men som trots detta är stabilt.

4. LYAPUNOV - POINCARÉ'S SATS

Vi har nu klassificerat singulariteterna till linjära differentialekvationer av andra ordningen och vi har vidare använt klassificeringen till att bestämma fasporträtt för styckvis linjära system. Vi skall nu återgå till att studera olinjära ekvationer

$$\frac{dz}{dt} = f(z) \quad (4.1)$$

Låt z^0 vara en singular punkt till denna ekvation, dvs $f(z^0) = 0$. Lösningen $z(t) = z^0$ är således en jämviktslösning. Som en förberedelse till att rita fasporträttet till ekvation (4.1) skall vi nu undersöka jämviktslösningens stabilitet. För att göra detta införes en ny variabel

$$x = z - z^0$$

Om funktionen f är en gång kontinuerligt deriverbar gäller

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) \quad (4.2)$$

där

$$A = f_z(z^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{bmatrix} \quad z = z^0$$

och resttermen $g(x)$ är $o(\|x\|)$, dvs

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$$

Efter variabelbytet är jämviktslösningen således $x(t) = 0$. Vi skall nu visa att jämviktslösningens stabilitet väsentligen kan avgöras genom att studera den linjära approximationen

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4.3)$$

Sats (Lyapunov - Poincaré)

Betrakta ekvation (4.3). Om

- a) Varje lösning till den linjära approximationen (4.3) konvergerar mot noll då $t \rightarrow \infty$
- b) Funktionen $g(x)$ är kontinuerlig för $x = 0$
- c) $\|g(x)\|/\|x\| \rightarrow 0$ då $\|x\| \rightarrow 0$

så konvergerar varje lösning till (4.2) som startar tillräckligt nära origo mot noll då $t \rightarrow \infty$. Vi kan även låta g bero av t om b) och c) gäller likformigt i t .

Kommentar

Lyapunov - Poincarés sats säger således att om högerledet i ekvation (4.2) uppfyller regularitetsvillkoren och om jämviktslösningen är en asymptotiskt stabil lösning till den linjära approximationen (4.3), så är jämviktslösningen även en asymptotiskt stabil lösning till den olinjära ekvationen. Denna sats är mycket viktig, i själva verket är det grunden för den linjära teorin som presenterades i den allmänna kursen. Praktiska problem leder som regel till olinjära ekvationer. För att analysera dessa system linjariseras ekvationerna. På basis av de linjära approximationerna bestämmes sedan en regulator, så beskaffad att den linjära approximationen med denna regulator får den önskade stabila jämviktslösningen. Det följer sedan av Lyapunov - Poincarés sats att jämviktslösningen är en asymptotisk stabil lösning även för det olinjära systemet. Om Lyapunov - Poincarés sats ej var sann så skulle den linjära teorin således ej ha så stort tillämpningsfält. Vi skall nu bevisa satsen.

Bevis:

Det följer av antagande c) att högerledet till ekvation (4.2) är Lipschitz kontinuerligt i origo. Om $x(0) = c$ väljes tillräckligt liten gäller då enligt existenssatsen för differentialekvationen (sats II.1) att lösningen $x(t,0,c)$ existerar i ett intervall $0 \leq t < T$. Vi skall nu först visa att lösningen $x(t,0,c)$ existerar för alla T och att den är likformigt begränsad.

Ekvationen (4.2) omformas först till följande integralekvation

$$x(t) = e^{At} c + \int_0^t e^{A(t-s)} g(x(s)) ds \quad (4.4)$$

Vi skall nu visa att varje lösning till denna integralekvation är likformigt begränsad om c väljes tillräckligt liten, dvs att

$$\|x\| < 2a_1 \|c\| \quad \|a_1\| = \|e^{At}\| \quad (4.5)$$

Vi visar detta som ett motsägelsebevis. Antag att lösningen ej är begränsad. Låt t_2 vara den första tidpunkt i intervallet $(0, T)$ då lösningen lämnar sfären $\|x\| < 2a_1 \|c\|$, dvs

$$\|x(t_2)\| = 2a_1 \|c\| \quad (4.6)$$

Då gäller

$$\begin{aligned} 2a_1 \|c\| &\leq \|e^{At_2}\| \cdot \|c\| + \int_0^{t_2} \|e^{A(t-s)}\| \|g(x(s))\| ds \\ &\leq \|e^{At_2}\| \cdot \|c\| + \max_s \|g(x(s))\| \int_0^{t_2} \|e^{A(t-s)}\| ds \end{aligned}$$

Men enligt förutsättning a) gäller att varje lösning till ekvationen

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

konvergerar mot noll. Då A är en konstant matris innebär detta att A 's alla egenvärden har negativ realdel. Då är emellertid integralen

$$\int_0^{\infty} ||\exp As|| ds$$

begränsad, säg $< K$. Vidare gäller enligt antagandet som gjordes i början av motsägelsebeviset att

$$||x(s)|| \leq 2a_1 ||c|| \quad 0 \leq s \leq t_2$$

Vi finner då

$$\max_s ||g(x(s))|| \leq \max_{||x|| \leq 2a_1 ||c||} ||g(x)||$$

Genom att välja c tillräckligt litet följer då av förutsättning c) att

$$\max_s ||g(x(s))|| \leq \max_{||x|| \leq 2a_1 ||c||} \epsilon_1 ||x|| = \epsilon_1 \cdot 2a_1 ||c||$$

där ϵ_1 kan göras godtyckligt liten. Vi finner således

$$\begin{aligned} 2a_1 ||c|| &\leq ||e^{At_2}|| \cdot ||c|| + 2Ka_1 \epsilon_1 ||c|| = \\ &= a_1 ||c|| (1 + 2K\epsilon_1) \end{aligned}$$

Men då ϵ_1 kan göras godtyckligt liten genom att välja $||c||$ liten, så har vi således en motsägelse till antagandet att det finns ett t_2 sådant att (4.6) gäller. Vi finner således att lösningen är begränsad. Vi observerar vidare att beviset gäller även om funktionen g beror av t under förutsättningen att b) och c) gäller likformigt i t .

För att visa att lösningen konvergerar mot noll då $t \rightarrow \infty$ gör vi variabelbytet

$$z = xe^{-\lambda t}$$

där λ är ett tal sådant att

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A) < \lambda < 0$$

Vi finner då att z satisfierar följande ekvation

$$\frac{dz}{dt} = (a - \lambda I)z + e^{-\lambda t} g(ze^{\lambda t})$$

Vi finner genom tillämpning av det tidigare resonemanget att

$$\|z(t)\| \leq \text{konstant}$$

dvs

$$\|x(t)\| \leq \text{konstant} \cdot e^{\lambda t} \rightarrow 0 \text{ då } t \rightarrow \infty \text{ och satsen är bevisad.}$$

5. KLASSIFICERING AV SINGULARITETER TILL OLINJÄRA D.E.

Vi skall nu studera den olinjära ekvationen

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (5.1)$$

Vi förutsätter att koordinatsystemet translaterats så att $x = 0$ är en singular punkt, dvs att $f(0) = 0$. Man skulle intuitivt kunna vänta sig att lösningarna till ekvation (5.1) för små värden på x liknar lösningarna till den linjära approximationen, dvs

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (L)$$

där

$$A = f_x(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad x = 0$$

För att undersöka detta skrives ekvation (5.1) som

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) \quad (OL)$$

I avsnitt 2 klassificerades singulariteterna till den linjära ekvationen (L). Den klassificering som gjordes var helt bunden till egenskaperna hos matrisen A . Vi skall nu ta fasta på de egenskaper hos lösningarna till det linjära systemet vi fann i avsnitt 2 och göra en klassificering, som endast beror på lösningarnas egenskaper. Det visar sig bekvämt att införa polära koordinater

$$x_1 = r \cos \phi$$

$$x_2 = r \sin \phi$$

Vi inför nu följande definitioner.

Origo är en attraktionspunkt (attractor) för $t \rightarrow +\infty$ eller $t \rightarrow -\infty$ om det finns en omgivning till origo U sådan att varje lösning med $x(0) \in U$ existerar för $[0, +\infty)$ eller $(-\infty, 0]$ och $r(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow +\infty$ eller $t \rightarrow -\infty$.

Origo är en nod om $r(t) \rightarrow 0$ och $\phi(t) \rightarrow c = \text{konstant}$ då $t \rightarrow +\infty$ eller $t \rightarrow -\infty$. Om det finns en lösning motsvarande varje reellt c kallas origo en stjärnnod. Om det finns lösningar endast för k olika värden på c kallas origo en k tangent nod.

En attraktionspunkt, nod och fokus säges vara stabil om utsagon ovan gäller då $t \rightarrow +\infty$, instabil om utsagon gäller då $t \rightarrow -\infty$.

Vidare gäller att:

Origo är ett centrum om det finns åtminstone uppräknligt många slutna banor i U som omsluter origo.

Det är inte lätt att definiera en sadelpunkt. Läroböckerna i differentialekvationer har också några olika alternativ. Följande är en möjlig definition:

Origo är en sadelpunkt om det finns åtminstone två banor genom origo där den ena avlägsnar sig och den andra närmar sig då $t \rightarrow +\infty$ eller $t \rightarrow -\infty$.

Genom att tillämpa dessa definitioner på det linjära systemet (L) finner vi att definitionerna överensstämmer med de tidigare definitionerna som infördes i avsnitt 2. Detaljerna lämnas som övning. Vi skall nu visa att karaktären på singulariteterna för den olinjära ekvationen (OL) väsentligen kan avgöras genom att studera den linjära approximationen (L). Dessa resultat visades först av Poincaré.

Sats 5.1

Om $\|g(x)\| = o(\|x\|)$, $g(x)$ är kontinuerlig i origo och origo är en attraktionspunkt för (L), så är origo även en attraktionspunkt för (OL).

Bevis:

Resultatet följer omedelbart ur Lyapunov - Poincarés sats.

Sats 5.2

Om origo är ett fokus för (L) och $\|g(x)\| = o(\|x\|)$, så är origo även ett fokus för (OL).

Bevis:

Beviset genomföres för ett stabilt fokus. Vi kan alltid välja koordinatsystemet i fasplanet så att

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{bmatrix} \quad \sigma > 0$$

Inför polära koordinater (r, ϕ) . Det följer då av sats 5.1 att $r(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$. Vidare erhålles följande ekvation för ϕ

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = -\omega r^2 + o(r^2)$$

Då $r \rightarrow 0$ och då $t \rightarrow \infty$ gäller således

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega + o(1)$$

dvs

$$\phi(t) = -\omega t + o(t)$$

och $\phi(t) \rightarrow \pm \infty$ då $t \rightarrow \infty$. Enligt definitionen är då origo ett fokus till (OL).

Vi skall här ge några ytterligare resultat utan bevis. För bevis och kommentarer hänvisas till någon bok i differential-ekvationsteori, t.ex.

Coddington, Levinson: "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill 1955 sid 375-387

Cesari: "Asymptotic Behaviour and Stability Problems in Ordinary Differential Equations", Springer 1963 sid 156-163.

Följande gäller

Sats 5.3

Om origo är en entangent nod resp. en två tangent nod till (L) och $\|g(x)\| = o(\|x\|)$, så är origo en entangent nod resp. två tangent nod till (OL).

Sats 5.3 gäller ej utan ytterligare inskränkningar för stjärnoder, vilket framgår av följande exempel.

Exempel 5.1

Betrakta ekvationen

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2/\log r$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_1/\log r$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Origo är uppenbarligen en stjärnnod till den linjära approximationen. Den olinjära ekvationen går att integrera analytiskt. Vi finner

$$r \frac{dr}{dt} = -x_1^2 - x_2^2 = -r^2$$

dvs

$$r = r(0) e^{-t}$$

Vidare

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = \frac{r^2}{\log r} = \frac{r^2}{c - t}$$

dvs

$$\phi = \log |t - c|$$

Vi finner således att origo är ett fokus till den olinjära ekvationen.

Sats 5.4

Om origo är en stjärnnod till (L) och om $\|g(x)\| \leq \psi(r) = o(r)$ och $\int_{0^+} r^{-2} \psi(r) dr < +\infty$, då är origo en stjärnnod till (OL).

Sats 5.5

Om origo är ett center för (L) och $\|g(x)\| = o(\|x\|)$, då är origo antingen ett center eller ett fokus för (OL).

För sadelpunkt gäller vidare

Sats 5.6

Om origo är en sadelpunkt för (L) och funktionen g har partiella derivator av första ordningen i en omgivning till origo, så är origo en sadelpunkt till (OL).

Olinjära system kan även ha singulariteter som ej har någon motsvarighet för linjära system. Ett exempel visas i Fig. 5.1.

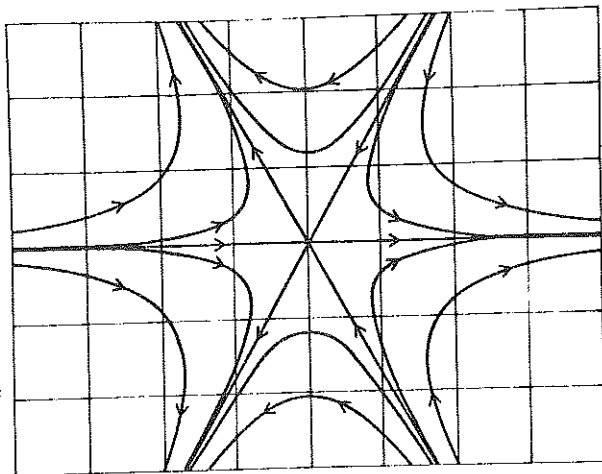


Fig. 5.1 - Fasporträtt för ekvationen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 - x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1x_2$$

Sammanfattning

Om vi antar att funktionen $g(x)$ är deriverbar och att $\|g(x)\| < \|x\|^{1+\epsilon}$, finner vi således att om den linjära approximationen har fokus, nod eller sadelpunkt så har den olinjära ekvationen motsvarande typ av singularitet. Om den linjära approximationen däremot har ett centrum så har den olinjära ekvationen antingen ett centrum eller ett fokus.

Vi kan nu ange en metod för att rita fasporträtt för olinjära system.

1. Bestäm de singulära punkterna $x = x^i$
2. Bestäm för varje singulär punkt A-matrisen i den linjära approximationen
3. Undersök om den olinjära ekvationens singulariteter kan karakteriseras genom den linjära approximationen. Om så är fallet beräkna $\text{tr } A$ och $\det A$ och bestäm den linjära approximationens singulariteter. I kritiska fall integreras den olinjära ekvationen numeriskt

4. Skissa banorna i närheten av singulära punkter
5. Beräkna om så erfordras vissa banor numeriskt.

Vi skall nu ge ett exempel som illustrerar hur man ritar fasporträtt och hur man använder fasporträtt för analys av olinjära reglersystem.

Exempel 5.2 (Infasning av synkronmaskiner)

Som en tillämpning på fasplananalys skall vi nu studera en synkronmaskin, som är kopplad till ett elektriskt nät. Vi skall först rita upp fasporträttet och sedan visa hur man kan utnyttja detta för att dra slutsatser om systemets egenskaper.

Vi skall således betrakta en synkronmaskin som drives av en turbin och som är inkopplad på ett nät. Se Fig. 5.2.

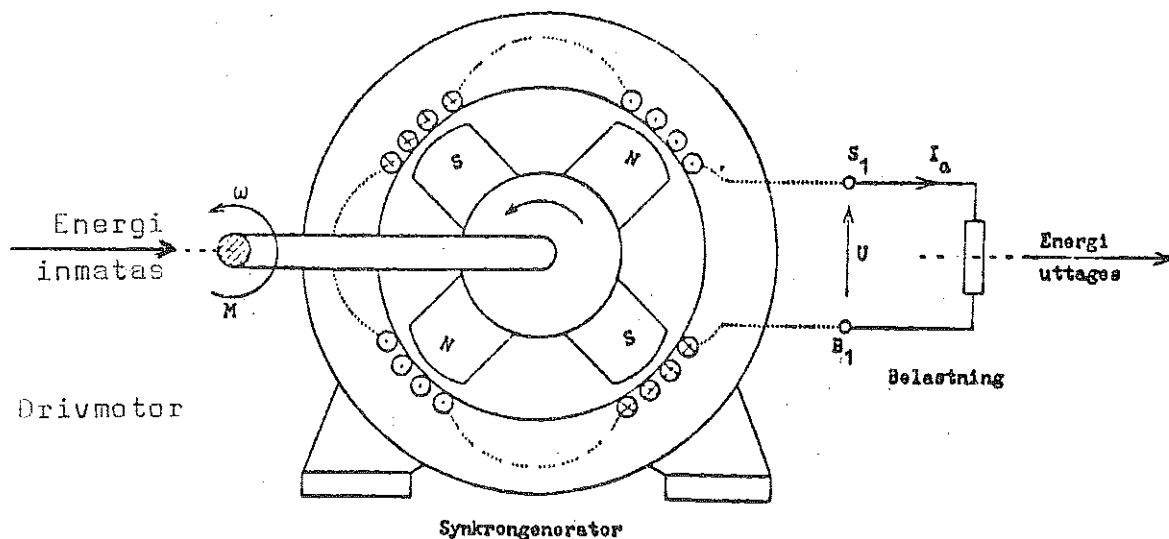


Fig. 5.2 - Förenklad bild av synkronmaskin

Rörelseekvationen för en synkronmaskin kan skrivas

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M - M_e$$

där θ är rotorns vridningsvinkel, J dess tröghetsmoment, M det drivande momentet och M_e det elektriska momentet.

Det elektriska momentet beror dels av generatorns vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$ och dels av fasläget mellan nätets spänning och generatorns elektromotoriska kraft. Om vi antager att generatorns genererade effekt är liten i förhållande till totala effekten i nätet gäller att nätfrekvensen ω_n är oberoende av generatorns vinkelhastighet. Man talar då om ett starkt nät. I detta fall gäller

$$M_e = C\omega - K \sin(\omega_n t - \theta)$$

där C och K är konstanter. Synkronmaskinen kan således beskrivas med ekvationen

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M - C \frac{d\theta}{dt} + K \sin(\omega_n t - \theta) \quad (5.2)$$

För att analysera denna ekvation införes tillståndsvariablerna

$$x_1 = \theta - \omega_n t$$

$$x_2 = \frac{d\theta}{dt} - \omega_n$$

Ekvation (5.2) kan så skrivas

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = M/J - C \omega_n / J - (C/J) x_2 - (K/J) \sin x_1 \quad (5.3)$$

Vi undersöker först de singulära punkterna. Dessa bestäms av

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \sin x_1 = (M - C \omega_n) / K \end{cases}$$

Vi får således

$$x_1 = \arcsin (M - C \omega_n) / K \quad (5.4)$$

eller

$$x_1 = \pi - \arcsin (M - C \omega_n) / K \quad (5.5)$$

För att minska skrivarbetet införes nu parametrarna

$$\alpha = C/J$$

$$\beta = K/J$$

$$\gamma = \arcsin (M - C \omega_n) / K$$

Vi skall nu undersöka de singulära punkternas karaktär. Vi får då särskilja två fall beroende på om rötterna är givna av ekvation (5.4) eller (5.5).

Fall 1 Singulära punkter bestämda av (5.4)

I detta fall är de singulära punkterna givna av

$$x_1 = \gamma + 2\nu\pi$$

$$x_2 = 0$$

Linjarisering av systemekvationerna (5.3) kring dessa punkter ger

$$\frac{d}{dt} (x - x^v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta \cos \gamma & -\alpha \end{bmatrix} (x - x^v)$$

Den linjära approximationen har följande karakteristiska ekvation

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta \cos \gamma = 0$$

För att avgöra singulariteternas karaktär studerar vi karakteristiska ekvationens rötter. Vi finner

$$\lambda = -\alpha/2 \pm \sqrt{\alpha^2/4 - \beta \cos \gamma}$$

Det gäller således

$$\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{centrum}$$

$$0 < \alpha^2 < 4\beta \cos \gamma \quad \Longrightarrow \quad \text{stabilt fokus}$$

$$\alpha^2 = 4\beta \cos \gamma \quad \Longrightarrow \quad \text{stabil entangent nod}$$

$$\alpha^2 > 4\beta \cos \gamma \quad \Longrightarrow \quad \text{stabil två tangent nod}$$

Enligt satserna i avsnitt 5 (se t.ex. sammanfattningen) så har den olinjära ekvationen då samma singulariteter utom möjligen i fallet centrum. För att undersöka detta fall närmare sätter vi $\alpha = 0$ i ekvation (5.3). Denna ekvation kan då integreras direkt. Vi finner genom att multiplicera den andra ekvationen med dx_1/dt

$$\dot{x}_2 \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \dot{x}_2 = a \dot{x}_1 - \beta \dot{x}_1 \sin x_1$$

dvs

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} x_2^2 - ax_1 - \beta \cos x_1 \right) = 0$$

eller

$$x_2^2 = 2ax_1 + 2\beta \cos x_1 + \text{konstant} \quad (5.6)$$

där $a = M/J$. Men ekvation (5.6) består av en skara slutna kurvor i närheten av singulariteten. Singulariteten är därför ett centrum även till den olinjära ekvationen.

Fall 2 Singulära punkter givna av ekvation (5.5)

Vi skall nu undersöka de singulära punkterna

$$x_1^v = \pi - \gamma + 2v\pi$$

$$x_2 = 0$$

Linjarisering av systemekvationerna kring dessa punkter ger

$$\frac{d}{dt} (x - x^v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta \cos \gamma & -\alpha \end{bmatrix} (x - x^v)$$

Den linjära approximationen har följande karakteristiska ekvation

$$\lambda^2 + \alpha\lambda - \beta \cos \gamma = 0$$

Om $\beta \cos \gamma > 0$ är singulariteten således en sadelpunkt. Det följer vidare av sats 5.6 att även den olinjära ekvationen har en sadelpunkt. Vi finner således att ekvationen (5.3) har sadelpunkter då $x_2 = 0$ och $x_1 = \pi - \gamma + 2v\pi$. Vidare har ekvationen singulariteter i punkterna $x_2 = 0$, $x_1 = \gamma + 2v\pi$. Dessa singulariteter kan vara centra, foki eller noder beroende på parametrarnas numeriska värden. Vi skall nu rita upp fasporträttet och väljer då ett specialfall $\alpha = c = 0$. Singulariteterna är då centra resp. sadelpunkter. Vi kan nu omedelbart märka ut de singulära punkterna och rita banorna i deras närhet. För att komplettera fasporträttet måste vi beräkna några banor. Välj då t.ex. att bestämma ekvationen för de banor som går genom sadelpunkterna. Då $\alpha = 0$ ges dessa av ekvation (5.6), dvs

$$x_2^2 = 2a_1x_1 + 2\beta \cos x_1 + A$$

Bestäm nu talet A så att banan går genom $x_1 = \pi - \gamma$ och $x_2 = 0$. Vi finner då

$$x_2^2 = 2a(x_1 - \pi + \gamma) + 2\beta(\cos x_1 + \cos \gamma)$$

Fasporträttet för $\alpha = 0$ framgår av Fig. 5.3.

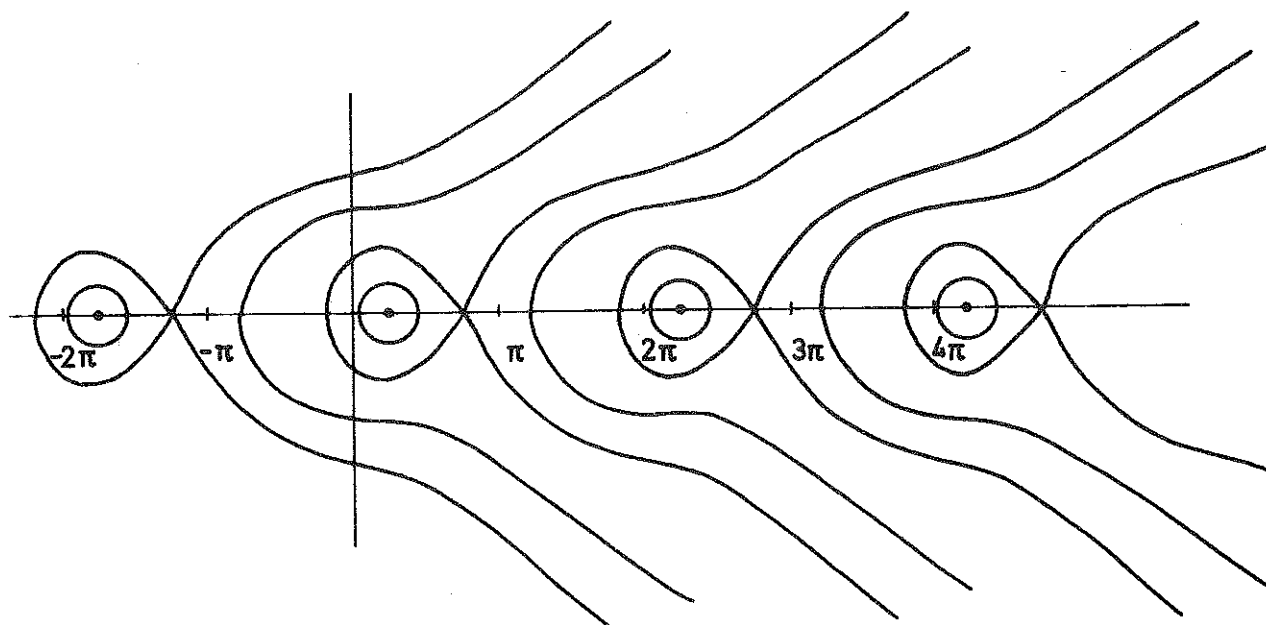


Fig. 5.3 - Fasporträttet för den ekvation som beskriver en synkronmaskin kopplad till ett starkt nät. Parametern har värdena $\gamma = 1/\sqrt{2}$, $a = 1$, $\beta = \sqrt{2}$

Ur fasporträttet kan vi nu utläsa systemets egenskaper. Vi finner att om systemet får en måttlig störning så erhålles en periodisk lösning med begränsad amplitud. Om däremot störningen blir så stor att lösningen kommer utanför en bana genom en sadelpunkt, så kommer lösningen att divergera mot oändligheten med stora värden på t .

$$x_2^2 = 2a(x_1 - \pi + \gamma) + 2\beta(\cos x_1 + \cos \gamma)$$

Fasporträttet för $\alpha = 0$ framgår av Fig. 5.3.

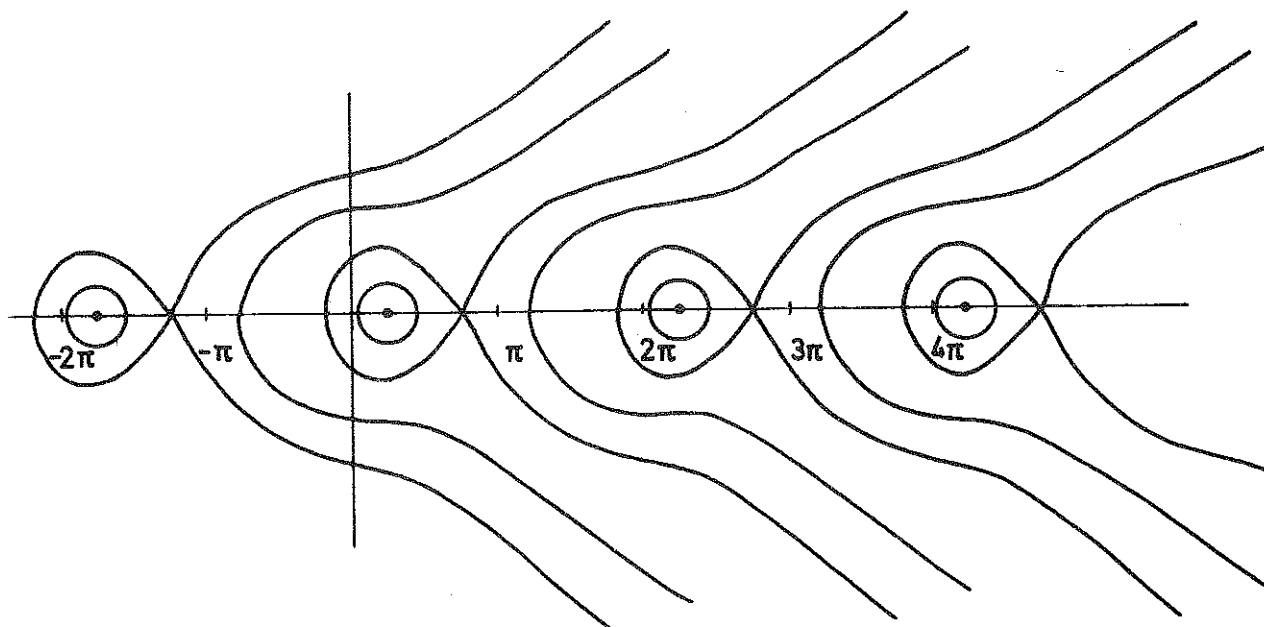


Fig. 5.3 - Fasporträttet för den ekvation som beskriver en synkronmaskin kopplad till ett starkt nät. Parametern har värdena $\gamma = 1/\sqrt{2}$, $a = 1$, $\beta = \sqrt{2}$

Ur fasporträttet kan vi nu utläsa systemets egenskaper. Vi finner att om systemet får en måttlig störning så erhålles en periodisk lösning med begränsad amplitud. Om däremot störningen blir så stor att lösningen kommer utanför en bana genom en sadelpunkt, så kommer lösningen att divergera mot oändligheten med stora värden på t .

Exempel 5.3 Analys av faslåsning (phase lock)

Vid mottagning av sinusformade signaler kan ett högt signal-brusförhållande erhållas genom att utnyttja det faktum att signalens form är känd. Principen för en mottagare av detta slag visas i Fig. 5.4.

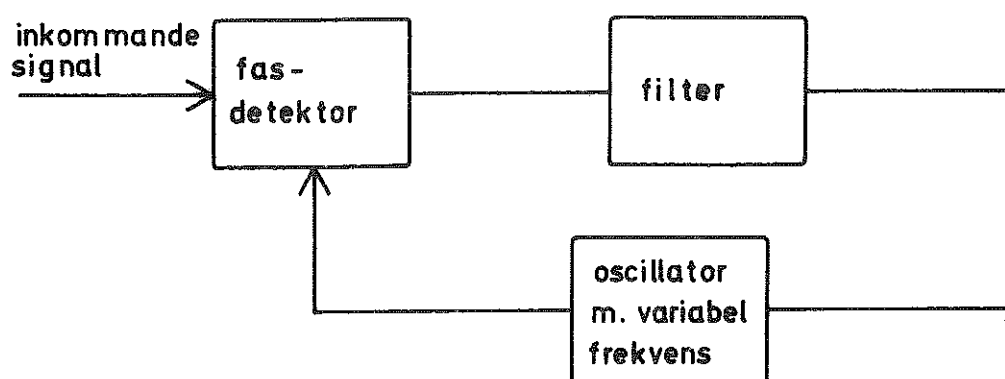


Fig. 5.4 - Schematisk bild av krets för faslåsning

I fasdetektorn jämföres fasläget av den inkommande signalen med fasen från den styrbara oscillatorn. Fasdetektorns utsignal är en funktion av fasdifferensen mellan de två signalerna. Signalen från fasdetektorn filtreras. Den filtrerade signalen får sedan styra den variabla oscillatorns frekvens på ett sådant sätt att fasskillnaden mellan insignalen och oscillatorsignalen avtar. När kretsen är "låst" är spänningen från oscillatorn sådan att dess frekvens exakt överensstämmer med den inkommande signalens medelfrekvens. För varje period hos insignalen gör oscillatorn exakt en period.

Låt den mottagna signalen vara

$$v_i = a_1 \sin(\omega t + \theta_1)$$

och oscillatorsignalen

$$v_u = a_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$

Utsignalen från fasdetektorn är då

$$\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Om vi vidare antar att filtret är av första ordningen samt att oscillatoren kan beskrivas som en integrator, får vi ett blockschema för systemet enligt Fig. 5.5.

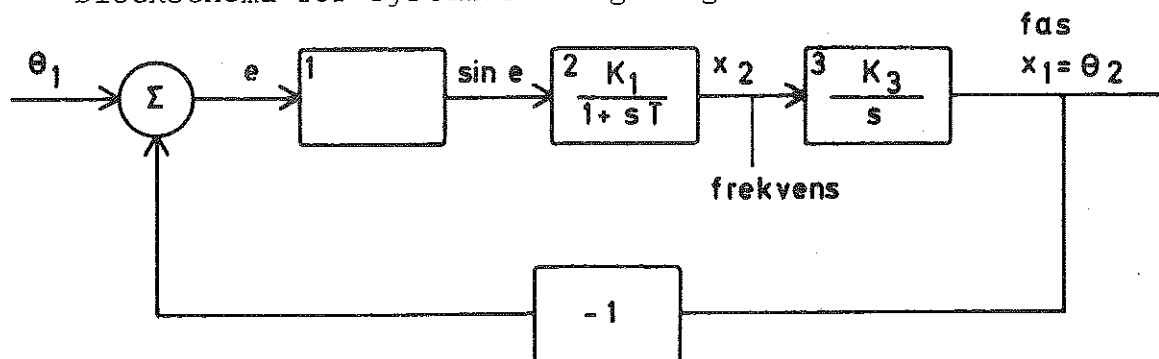


Fig. 5.5 - Blockschema för fasläsningskretsen. Insignalen θ_1 representerar den inkommande signalens fasläge, θ_2 utsignalens fasläge. Block 1 representerar fasdetektorn, block 2 och 3 filtret resp. oscillatoren

Vi får ur blockschemat följande ekvationer om $K_1 = K_3 = K$.

$$\frac{dx_1}{dt} = K x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -T^{-1} x_2 + KT^{-1} \sin(\theta_1 - x_1)$$

De singulära punkterna är givna av

$$x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$\sin(\theta_1 - x_1) = 0$$

$$x_1 = \theta_1 + n\pi$$

Vi skall nu undersöka de singulära punkternas karaktär. Systemekvationerna linjariseras kring de singulära punkterna. Koordinaterna z_i får beteckna avvikelserna från resp. singulära punkt. Vi får särskilja två fall.

Fall 1 n jämnt

$$\frac{dz_1}{dt} = K z_2$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -T^{-1} K z_1 - T^{-1} z_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K/T & -1/T \end{bmatrix}$$

Den karakteristiska ekvationen lyder

$$\lambda^2 + \lambda T^{-1} + K^2 T^{-1} = 0, \quad T > 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

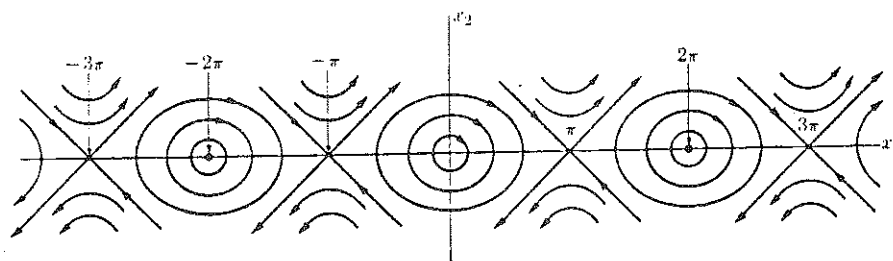
Singulariteten är således ett stabilt fokus om $K > 1/(2\sqrt{T})$ eller en stabil nod om $0 < K < 1/(2\sqrt{T})$. Om $\lambda/T = 0$ är singulariteten ett centrum.

Fall 2 n udda

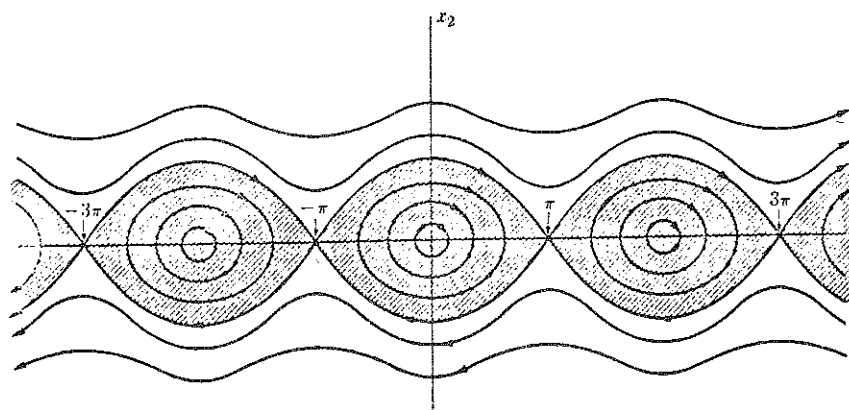
Den karakteristiska ekvationen lyder

$$\lambda^2 + \lambda T^{-1} - K^2 T^{-1} = 0$$

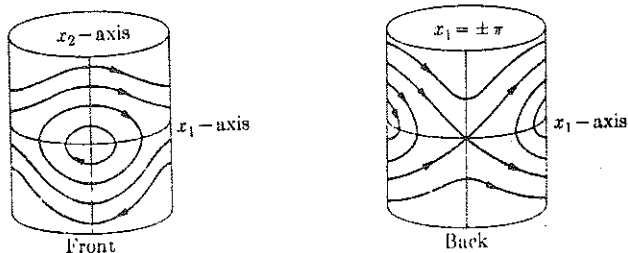
singulariteten är således en sadelpunkt.



a) Fasporträtt i närheten av singulära punkter



b) Fullständigt fasporträtt



c) Cylindriskt fasrum

Fig. 5.6 - Fasporträtt för faslösningsskretsen då $\lambda/T = 0$ och $\theta_1 = 0$

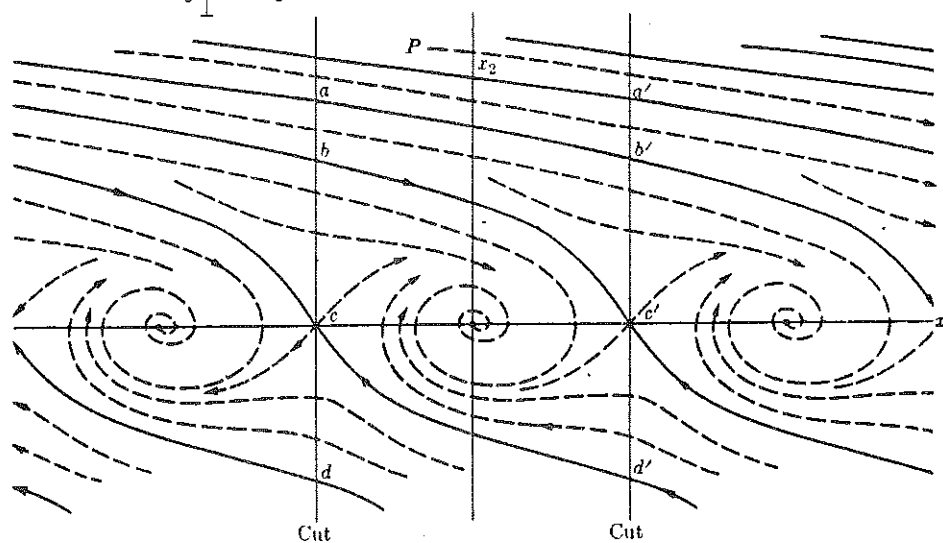


Fig. 5.7 - Fasporträtt för faslösningsskretsen då $\theta_1 = 0$ och $K > 1/(2\sqrt{T})$

6. ISOKLINMETODEN

Isoklinmetoden innebär att vi bestämmer ett antal orter för konstant lutning hos banorna i fasplanet. Dessa orter kallas isokliner. Metoden ger en möjlighet att bestämma banornas utseende även långt från de singulära punkterna hos den olinjära differentialekvationen utan att lösa denna. Isoklinmetoden är begränsad till högst andra ordningens tidsinvarianta differentialekvationer på formen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h\left(\frac{dy}{dt}, y\right) = 0 \quad (6.1)$$

Ekvation (6.1) täcker emellertid ett stort antal system av praktiskt intresse.

Inför tillståndsvariablerna

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (6.2)$$

vilket ger systemekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -h(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Lutningen hos banorna i fasplanet ges av

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{h(x_1, x_2)}{x_2} \quad (6.4)$$

Ekvationen för isoklinen för lutningen K fås ur (6.4) med $dx_2/dx_1 = K$ dvs

$$K = -\frac{h(x_1, x_2)}{x_2} \quad (6.5)$$

Vi observerar att om $x_2 = 0$ så är lutningen $K = \infty$. Banorna skär således alltid x_1 -axeln under rät vinkel. Detta beror emellertid på det sätt tillståndsvariablerna införts. Antag t.ex. att systemekvationen i stället lyder

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Banorna skär då kurvan $f_1(x_1, x_2) = 0$ med lutningen ∞ .

Studera först fallet med linjära systemekvationer

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + b y = 0 \quad (6.6)$$

där a, b är konstanter. Tillståndsvariablerna väljs enligt (6.2). Ekvationerna för isoklinerna lyder då

$$x_2 = -\frac{b}{a + K} x_1$$

där K är lutningen associerad med en speciell isoklin. För andra ordningens linjära differentialekvationer är således isoklinerna räta linjer. I figur 6.1 visas isokliner och fasporträtt för ett dämpat linjärt andra ordningens system.

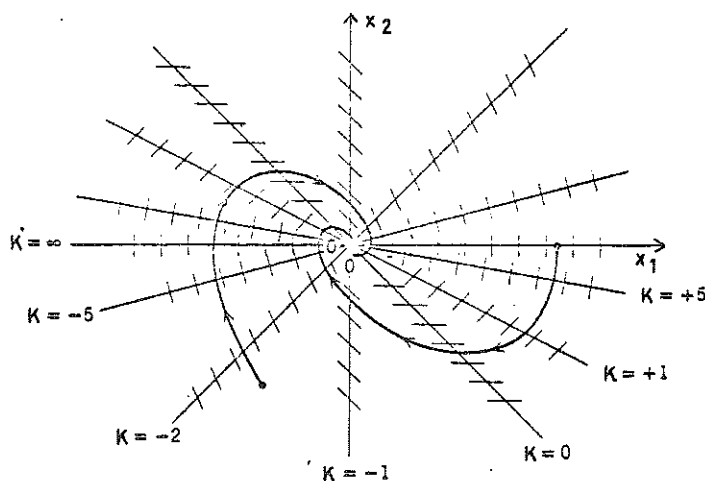


Fig. 6.1. Isokliner och fasporträtt för ekv (6.6) med $a=b=1$

Beroende på den enkla formen på isoklinekvationen för linjära system lämpar sig således isoklinmetoden mycket väl för att bestämma fasporträttet för styckevis linjära system.

Olinjära differentialekvationer ger vanligen ett relativt komplicerat uttryck för isoklinerna. Vi illustrerar detta med ett exempel.

Exempel 6.1

Betrakta ekvationen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (6.7)$$

vilken är olinjär med en variabel dämpning, som kan anta både positiva och negativa värden beroende på tecknet av y . Inför tillståndsvariabler enligt (6.2) vilket ger systemekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Vi finner att origo är en singular punkt. Den linjära approximationen är

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (6.9)$$

som har egenvärden $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Origo är således ett center för den linjära approximationen (6.9). Eftersom $g(x)$ i detta fall uppfyller förutsättningen i sats 5.5 så är origo antingen ett center eller ett fokus för den olinjära differentialekvationen (6.8). Dämpningen i ekvation (6.7) kan anta både positiva och negativa värden varför det är svårt att direkt avgöra om vi har ett center eller fokus i origo.

Enligt ekvation (6.5) ges isoklinerna av

$$x_2 = - \frac{x_1}{K + x_1} \quad (6.10)$$

För att bestämma fasporträttet måste ett antal isokliner beräknas och varje isoklin bestäms genom att vi beräknar ett antal punkter på denna.

Isokliner och fasporträtt för systemet (6.8) visas i figur 6.2.

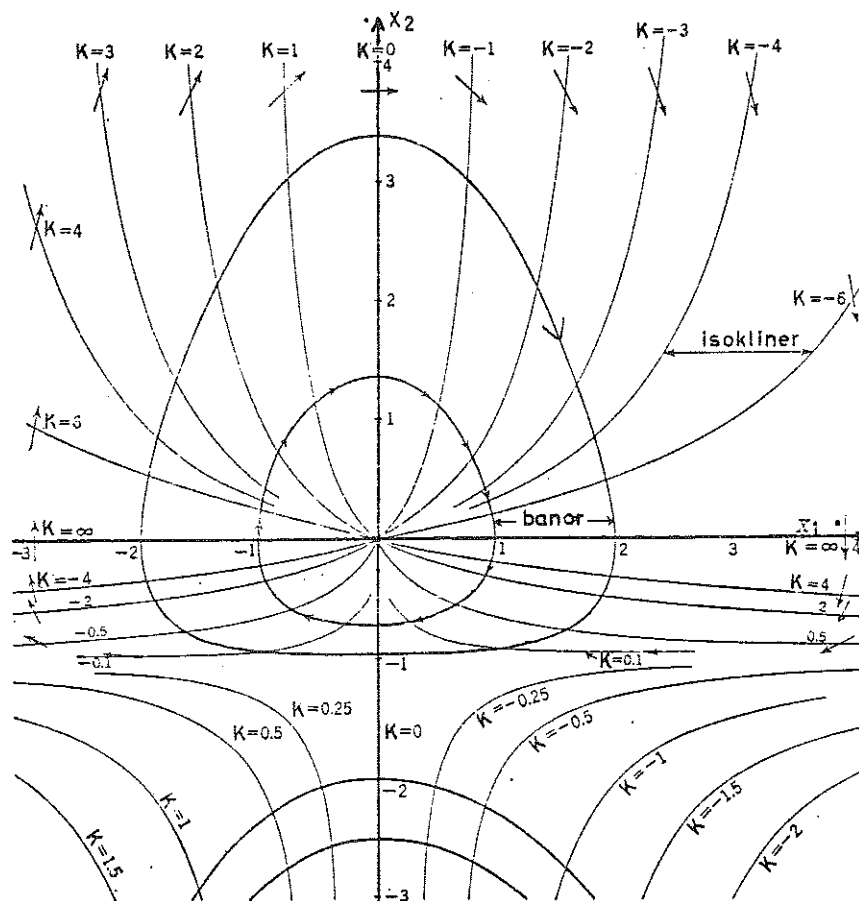


Fig. 6.2. Isokliner och fasporträtt för systemet (6.8)

Det är ofta svårt att avgöra om en bana är sluten eller svagt konvergerar alternativt divergerar utan att noggrant beräkna ett mycket stort antal isokliner. I detta speciella fall räcker det att observera att isokliner för lutning med motsatt tecken är symmetriska med avseende på x_2 -axeln. Origo är således ett center för den olinjära differentialekvationen. Av figur (6.2) framgår också att om initialvärdet väljes i 3:e eller 4:e kvadranten i fasplanet och är tillräckligt stort så är lösningen instabil.

Sammanfattningsvis kan sägas att isoklinmetoden är ett värdefullt hjälpmedel då vi vill bestämma hela fasporträttet dvs även banornas utseende långt från singulariteterna. Metodens väsentliga nackdel är att arbetet att beräkna isoklinerna kan bli omfattande.

7. NÅGOT OM PERIODISKA LÖSNINGAR

I detta avsnitt skall vi studera ett fenomen som är unikt för olinjära system, nämligen förekomsten av stabila periodiska lösningar (limit cycles). Periodiska lösningar är för regler-teknikern intressanta ur två synpunkter. Dels är man ibland intresserad av att konstruera system som har periodiska lösningar, t.ex. oscillatorer, dels kan vissa system uppvisa icke önskvärda periodiska lösningar (självsvängningar), som man vill undvika. Vi skall senare i kap V återkomma till andra metoder att studera periodiska lösningar.

Linjära system kan ha periodiska lösningar t.ex.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (7.1)$$

Dessa lösningar är emellertid ej asymptotiskt stabila ty efter en ändring i initialtillståndet ändras svängningens amplitud och den återkommer sedan ej till det ostörda tillståndet. Existensen av stabila periodiska lösningar är praktiskt mycket betydelsefull. Utan dessa skulle oscillatorer t.ex. i signalgeneratorer ej existera.

Vi börjar med att studera ett speciellt fall.

Exempel 7.1

För att generera mycket noggranna sinusfunktioner på analogi-maskin kan man koppla upp följande ekvationer

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Det finns även noggranna kommersiella sinusgeneratorer som är konstruerade som en speciell analogmaskin för lösning av ovanstående ekvationer. Vi skall nu undersöka egenskaperna hos ekvationen (7.2). Ekvationen har en singular punkt

$$x_1 = x_2 = 0$$

I denna punkt gäller

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{tr } A = 2, \quad \det A = 2$$

Origo är således ett instabilt fokus till den linjära approximationen. Jämför Fig. 2.10. Enligt sats 5.2 är origo även ett fokus till den olinjära ekvationen.

För att studera lösningarna närmare införes polära koordinater

$$x_1 = r \cos \phi$$

$$x_2 = r \sin \phi$$

Vi finner så

$$r \frac{dr}{dt} = x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = r^2 (1 - r^2)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} = -r^2$$

I detta fall kan vi lösa ekvationerna analytiskt och vi får

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + ke^{-2t}}}$$

$$\phi(t) = t_0 - t$$

Ekvationerna har således en periodisk lösning

$$r(t) = 1$$

$$\phi(t) = t_0 - t$$

dvs

$$x_1(t) = \cos(t_0 - t)$$

$$x_2(t) = \sin(t_0 - t)$$

Då $t \rightarrow \infty$ kommer varje lösning att konvergera mot denna stabila periodiska lösning. Fasporträttet för ekvationen framgår av Fig. 7.1.

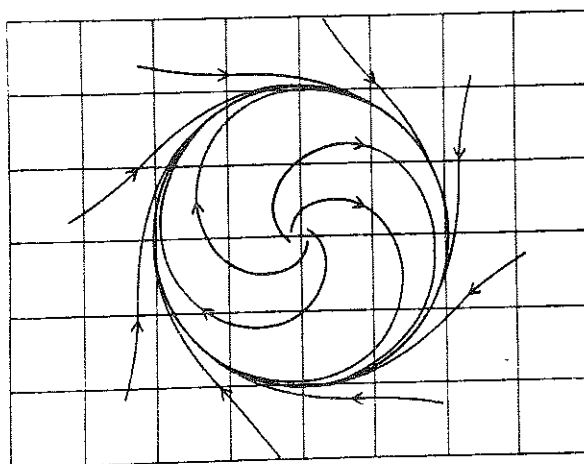


Fig. 7.1 - Fasporträtt för ekvationen i exempel 6.1

Problemet att avgöra om en ekvation har periodiska lösningar är i allmänhet mycket svårt. Vi skall i kap V återkomma med några kraftfulla approximativa metoder. I speciella fall finns en hel del resultat i läroböcker om differentialekvationer. Vissa villkor kan visas elementärt t.ex. följande resultat av Bendixson.

Sats 7.1 (Bendixsons sats)

Om uttrycket

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

är positivt eller negativt i ett enkelt sammanhängande delområde D i fasplanet, så har ekvationen

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (7.3)$$

inga periodiska lösningar i D .

Bevis:

Antag att

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} > 0 \quad x_1, x_2 \in D$$

Vi skall då visa att det ej finns periodiska lösningar i D . Antag motsatsen, dvs att det finns en periodisk lösning \mathcal{L} i D . Det gäller allmänt att

$$\oint (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 > 0 \quad (7.4)$$

Men då \mathcal{L} är en lösning till (7.3) gäller även

$$f_1 dx_2 = f_2 dx_1$$

dvs vänsterledet i (7.4) är noll och vi har fått en motsägelse och satsen är bevisad.

Exempel 7.2 Instabilitet hos hydraulservo vid låga matningshastigheter. Stick-slip motion

I nedanstående Fig. 7.2 visas en schematisk bild av ett servosystem för en numeriskt styrd verktygsmaskin.

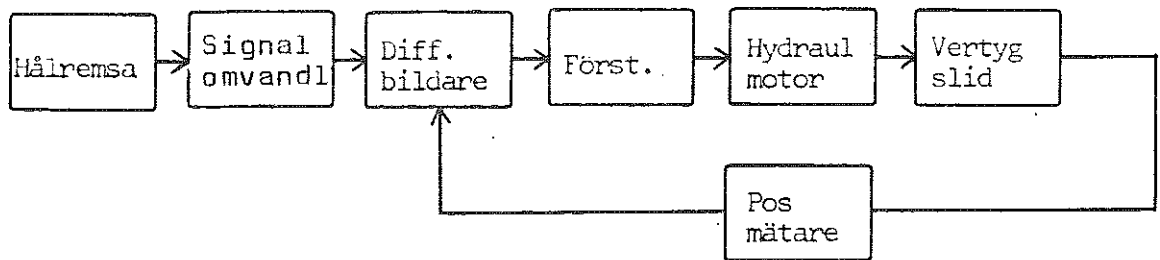


Fig. 7.2 - Schematisk bild av numeriskt styrd verktygsmaskin

Den information som finns stansad på hållremsan läsas och omvandlas av signalomvandlaren till en referenssignal för hydraulservot. Det kan förutsättas att differensbildaren, förstärkaren och hydraulmotorn ger en kraft på maskinssliden, som är proportionell mot skillnaden mellan referenssignalen u och maskinsslidens läge x .

För att få god precision på styrningen är maskinssliden hårt åtsatt med gejdor vilket emellertid medför att avsevärda friktionskrafter påverkar maskinssliden. Det har i praktiken visat sig att man vid låga mätningshastigheter kan få en ryckig rörelse hos maskinen. Vi skall nu förklara varför en sådan ryckig rörelse kan uppkomma och visa hur den kan elimineras genom modifiering av servosystemet.

Rörelseekvationen för verktygssliden lyder

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + F + k(x - u) = 0 \quad (7.5)$$

där m är slidens massa, F friktionskraften och $k(x - u)$ kraften från hydraulkolven. Vi antar att friktionskraften F är torrfriktionskraften. Friktionskraften vid vila antages ligga mellan gränserna $-\mathcal{H}D < F < \mathcal{H}D$. Vid rörelse antas friktionskraftens storlek vara D och dess riktning motriktad rörelsen. Vi inför då

$$F = F(\dot{x}) = \begin{cases} D & \dot{x} > 0 \\ -D & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Observera att funktionen F ej är definierad för argumentet noll. Då F antagits representera torrfriktion vet vi emellertid att för

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

gäller att

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{om} \quad -\mathcal{H}D < k(x - u) < \mathcal{H}D$$

Vi skall i det följande skriva F som en funktion F av argumentet dx/dt , men vi måste då speciellt undersöka vad som händer då argumentet är noll.

Vi skall nu undersöka hur systemet uppträder då referenssignalen är en linjärt växande funktion $u = vt$, dvs vad som händer då verktygsmaskinen köres med konstant matning. Inför felet

$$e = u - x$$

och en normerad tidsvariabel

$$\tau = \omega t = \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Verktgsslidens rörelseekvation kan då skrivas

$$\frac{d^2e}{d\tau^2} + \frac{1}{k} F\left(\omega \frac{de}{d\tau} - v\right) + e = 0 \quad (7.7)$$

Systemet kan således beskrivas med en styckvis linjär differentialekvation som vi efter införande av tillståndsvariablerna

$$x_1 = e$$

$$x_2 = \frac{de}{d\tau}$$

kan skriva på standardformen

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - \frac{1}{k} F(\omega x_2 - v) \quad (7.8)$$

För att undersöka systemets egenskaper ritar vi först upp fasporträttet. Vi observerar att systemekvationen är linjär i områdena $\omega x_2 < v$ och $\omega x_2 > v$. Enligt vad som tidigare sägts måste fallet $\omega x_2 = v$ undersökas speciellt.

Fall 1 $\omega x_2 < v$

Systemekvationerna lyder då

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 + \frac{D}{k}$$

Denna ekvation har en singularär punkt

$$x_1 = D/k$$

$$x_2 = 0$$

Vi finner att

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs $\text{tr } A = 0$ $\det A = 1$. Singulariteten är ett center och med de valda koordinaterna är banorna cirklar.

Fall 2 $\omega x_2 > v$

Systemekvationerna lyder

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - \frac{D}{k}$$

Den singulära punkten är

$$x_1 = -D/k$$

$$x_2 = 0$$

Detta är en virtuell singular punkt ty den ligger ej i området $\omega x_2 > v$. Vi finner att singulariteten även denna gång är ett center.

Vi finner således att banorna består av cirklar med medelpunkter i $(-D/k, 0)$ då $\omega x_2 > v$ resp. $(D/k, 0)$ då $\omega x_2 < v$. För att komplettera fasporträttet måste vi undersöka om det finns några faskurvor som sammanfaller med den räta linjen $\omega x_2 = v$. Detta är möjligt endast om

$$\frac{dx_2}{d\tau} = 0$$

Detta gäller om kraften från hydraulkolven är mindre än friktionskraften, dvs om

$$-\mathcal{H} D/k < x_1 < \mathcal{H} D/k$$

Linjesegmentet

$$x_2 = \frac{v}{\omega}$$

$$-\frac{\mathcal{H} D}{k} < x_1 < \frac{\mathcal{H} D}{k}$$

är således en bana. Inga andra delar av linjen $\omega x_2 = v$ kan vara banor och vi kan då komplettera fasporträttet genom att utanför linjesegmentet sammanfoga cirkelbågarna med hjälp av kontinuitetsvillkor. Det kompletta fasporträttet framgår av Fig. 7.3.

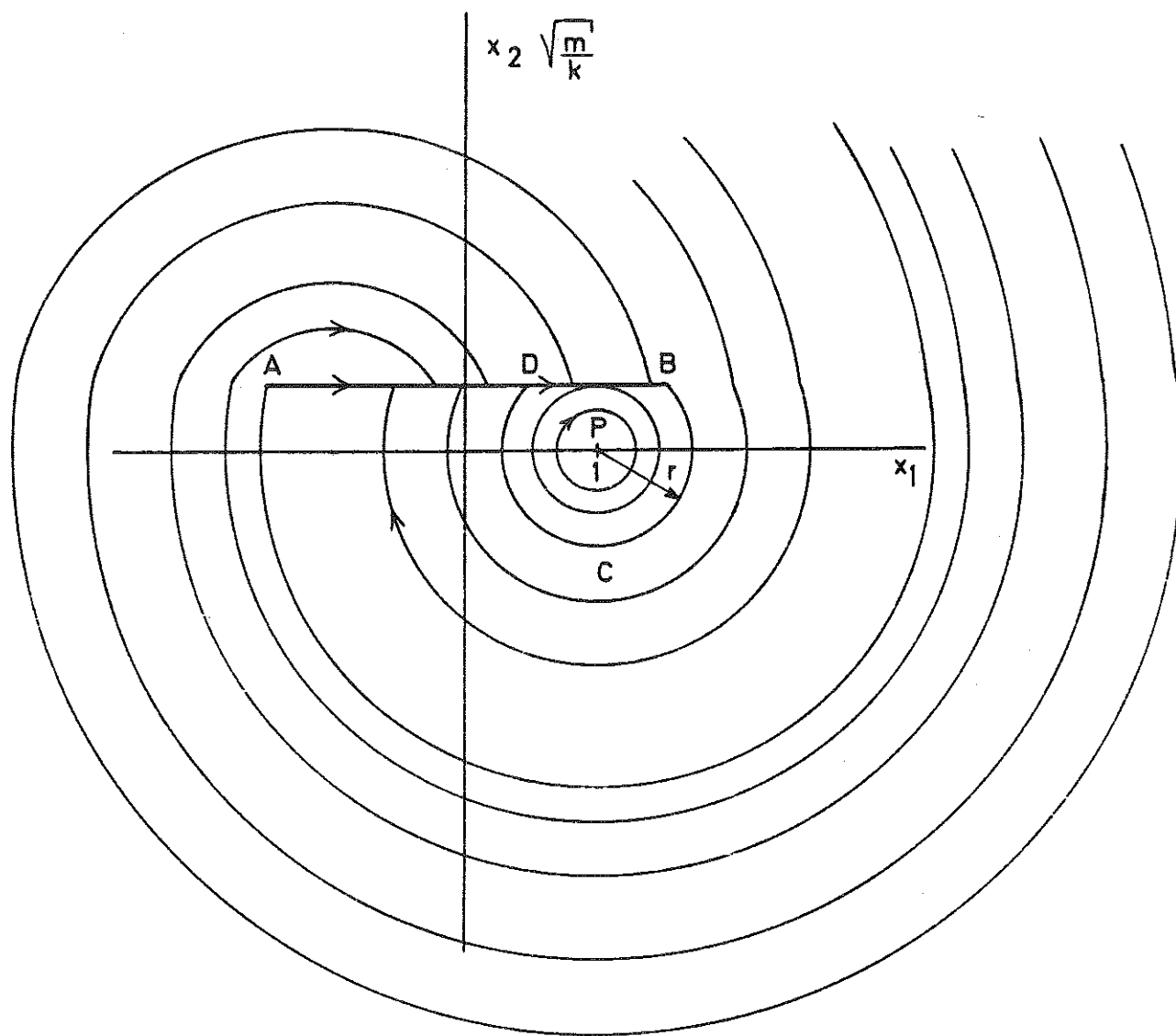


Fig. 73 - Fasporträtt för ekvation (7.8) med $m = 0.5 \sqrt{k/m}$,
 $D/k = 1.0$, $h = 1.5$

Egenskaperna hos systemet kan nu utläsas ur fasporträttet. Vi finner att lösningar som börjar tillräckligt långt från punkten P alltid träffar linjesegmentet A B. En bana som träffat segmentet A B övergår sedan till den slutna banan B,C D. En bana som börjar tillräckligt nära punkten P består av en cirkel runt P. Fysikaliskt betyder detta följande. Om reglerfelet blir stort erhålles alltid en stabil periodisk lösning B C D. Vid små reglerfel erhålles också periodiska lösningar. Den stabila periodiska lösningen är sammansatt av delar av en sinuskurva och en rätlinjig del. Se Fig. 7.4.

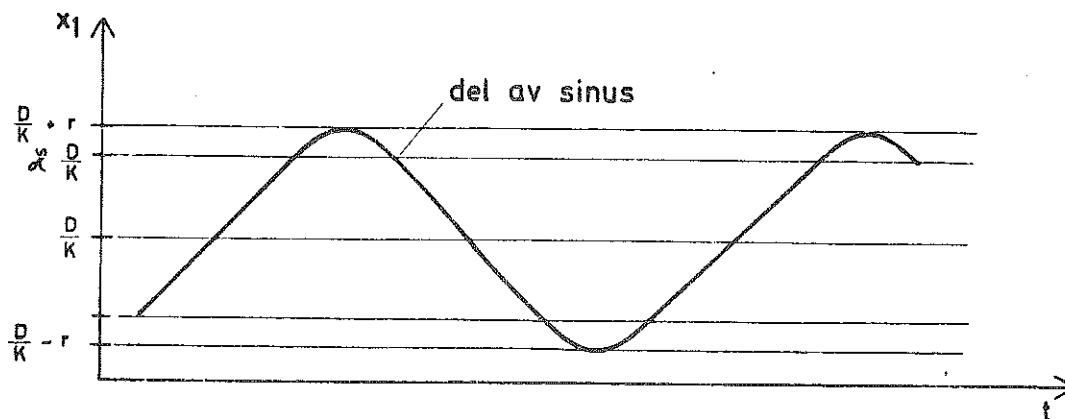


Fig. 7.4 - Den periodiska lösningen

Systemet är således mycket otillfredställande som ett servosystem, och det är naturligt att undersöka vad som kan göras för att förbättra systemet. Om vi inför dämpning i systemet t.ex. genom att låta hydraulkraften bero ej endast av e utan även av $\frac{de}{dt}$ blir singulariteterna fokus i stället för center och fasplanet framgår av Fig. 7.5.

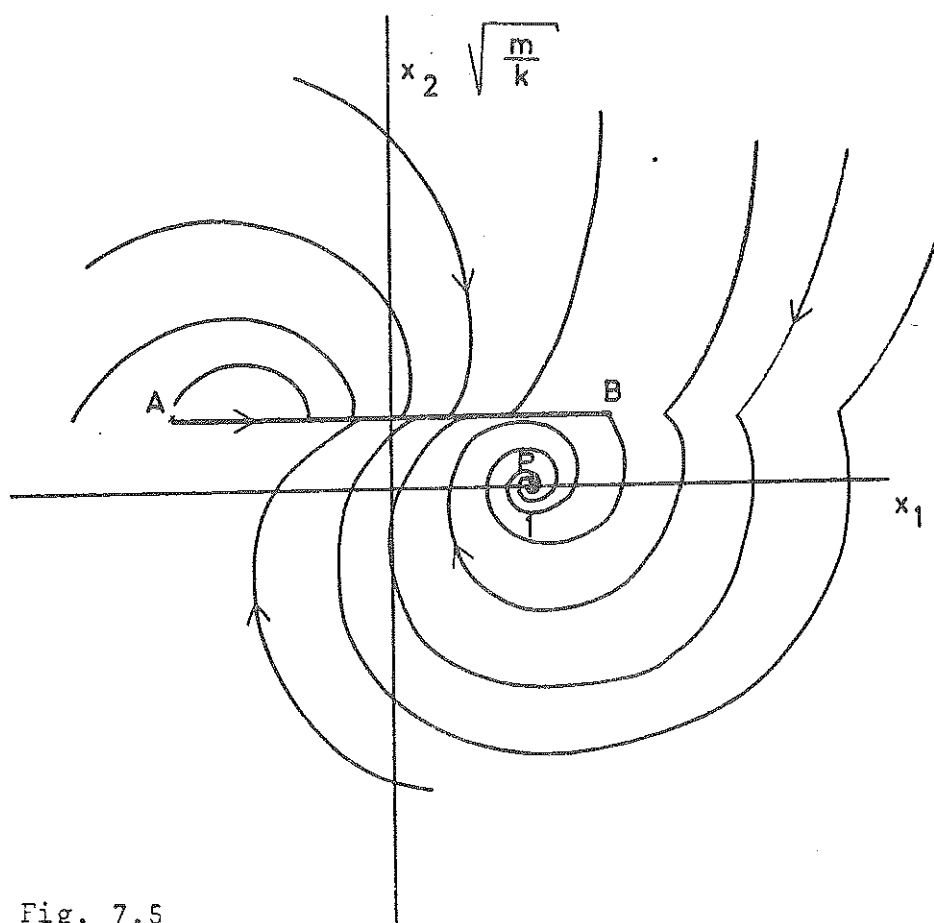


Fig. 7.5

Exempel 7.3 Triodoscillatorn

Som ett exempel på användning av fasplananalys skall vi nu studera triodoscillatorn i sin enklaste form. Den ekvation som beskriver oscillatorn är olinjär. Den olinjära ekvationen är nödvändig för att kvalitativt visa oscillatorns viktigaste egenskap nämligen existensen av en stabil periodisk lösning.

I Fig. 7.6 visas en schematisk bild av triodoscillatorn.

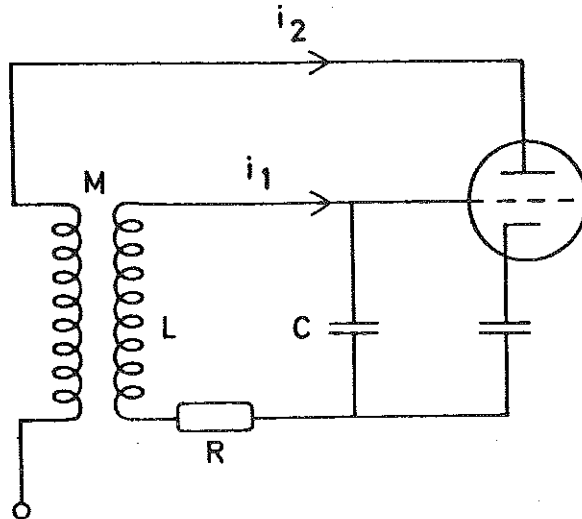


Fig. 7.6 - Schematisk bild av triodoscillatorn

Införes anodströmmen i_2 , strömmen i_1 och gallerpotentialen u erhålles följande ekvationer

$$L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$u = \frac{1}{C} \int i_1 dt$$

Vidare är anodströmmen en olinjär funktion av gallerpotentialen. Se Fig. 7.7. Låt $f(u)$ vara triodens karakteristik och vi finner

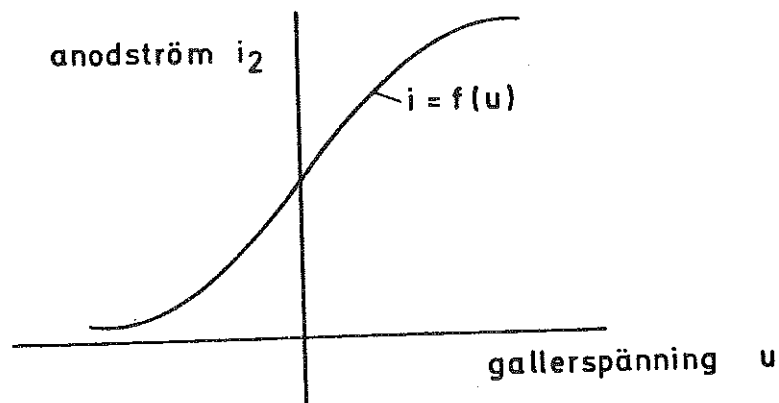


Fig. 7.7 - Triodens karakteristik, dvs anodströmmen som funktion av gallerpotentialen

Elimineras i_1 och i_2 ur ovanstående ekvationer erhålles följande ekvation

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + (RC - M f'(u)) \frac{du}{dt} + u = 0$$

Normalisera tidsskalan $\tau = \sqrt{\frac{L}{LC}} \cdot t$ och inför

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{RC}{LC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\frac{M}{RC} f'(u) = g(u)$$

så kan ekvationen skrivas

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \varepsilon(1 - g(u)) \frac{du}{d\tau} + u = 0$$

Om vi speciellt antar

$$g(u) = 2 - u^2$$

erhålles

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - u^2) \frac{du}{d\tau} + u = 0$$

Denna ekvation brukar kallas Van der Pool's ekvation efter sin upptäckare som först genomförde analysen av triodoscilatorn med den väsentliga olinjariteten medtagen.

Införes nu på vanligt sätt tillståndsvariablerna

$$x_1 = u$$

$$x_2 = \frac{du}{d\tau}$$

erhålles

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2) x_2$$

Denna ekvation har en isolerad singularitet i origo. Den linjära approximationen i origo lyder

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

Vi finner

$$\text{tr } A = \epsilon$$

$$\det A = 1$$

Origo är således en instabil nod om $\epsilon > 2$ och ett instabilt fokus om $\epsilon < 2$. Om vi löser ekvationen t.ex. grafiskt med isoklinmetoden som brukades i van der Pool's originalundersökning erhålles ett fasporträtt enligt Fig. 7.8.

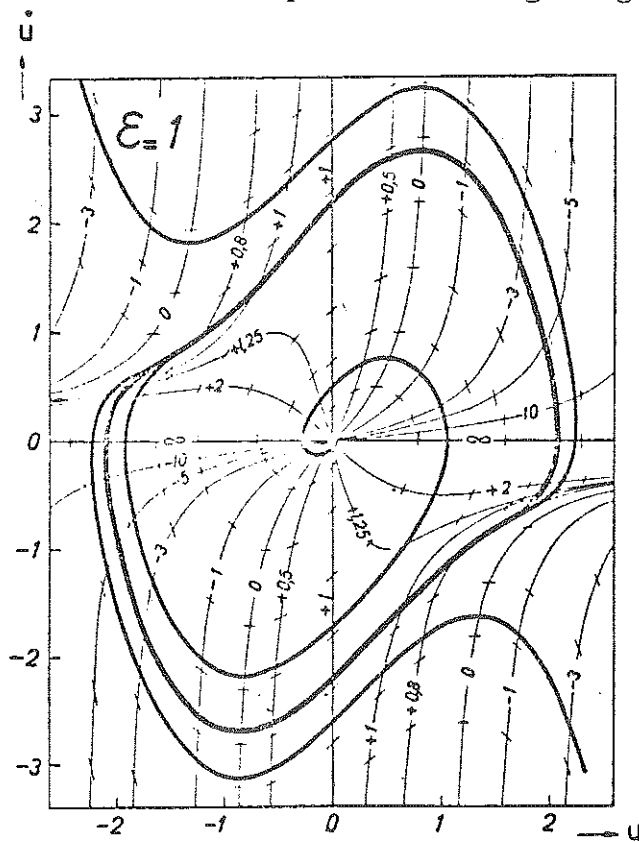


Fig. 7.8 - Isokliner och fasplan för van der Pool's ekvation $\epsilon = 1$

I Fig. 7.9 visas trajektorian $u(t)$ för $\epsilon = 1$.

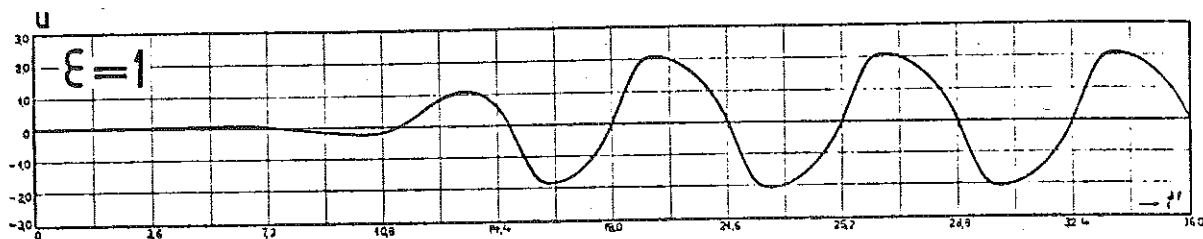


Fig. 7.9

Van der Pool's ekvation har således en stabil periodisk lösning som svarar mot triodoscillatorns stabila svängning.

Observera att approximationen

$$g(u) = 2 - u^2$$

är en mycket grov approximation av triodkaraktistikens derivata, speciellt för stora signalamplituder. Trots detta har man i alla fall fått med de väsentligaste egenskaperna hos systemet. Ett annat alternativ är att göra följande approximation

$$g(u) = \begin{cases} 2 & |u| \leq 1 \\ 0 & |u| > 1 \end{cases}$$

Triodoscillatorn kan då beskrivas med styckvis linjära ekvationer och en analytisk lösning med passning av initialvillkor är möjlig.

Övningsuppgift: Genomför analysen av triodoscillatorn med ovanstående approximation

Låt oss även använda Bendixsons sats för att få en uppskattning av den periodiska lösningens amplitud.

För van der Pool's ekvation gäller

$$f_1(x_1, x_2) = x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2) x_2$$

Vi får då

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \varepsilon(1 - x_1^2)$$

Av Bendixsons teorem följer då att det ej finns några periodiska lösningar som helt förlöper i strimlan $-1 < x_1 < 1$.

Se Fig. 7.10.

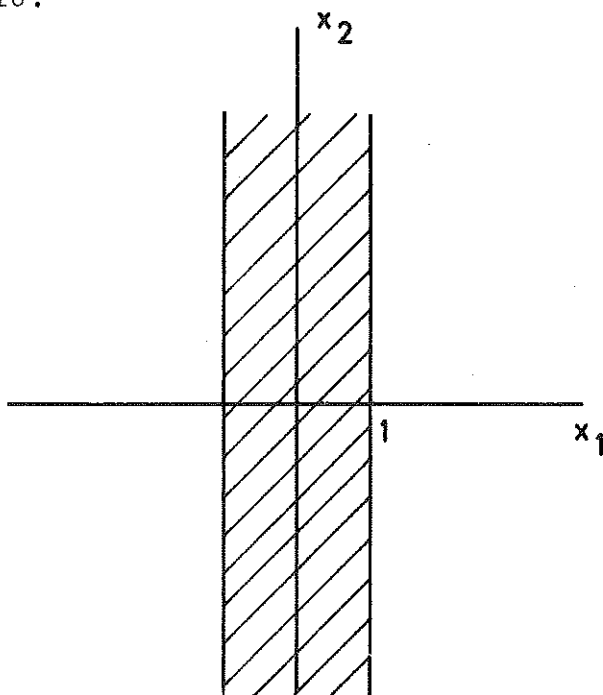


Fig. 7.10

Dvs om det finns en periodisk lösning så är amplituden åtminstone större än ett. Jämför Fig. 7.8.

8. ÖVNINGSEXEMPEL

3.1

Bestäm de singulära punkterna, deras karaktär, för olika värden på ζ och ange även tidssvaret i olika fall för den linjära ekvationen

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = 0$$

3.2

Givet differentialekvationen

$$\ddot{x} - \left(0.1 - \frac{10}{3}\dot{x}^2\right)\dot{x} + x + x^2 = 0$$

Bestäm de singulära punkterna och deras karaktär.

3.3

Bestäm de singulära punkterna till följande ekvation

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1(a^2 - x_1^2) + bx_2 \quad a, b \neq 0$$

Angiv de singulära punkternas karaktär och skissera lösningens utseende för de fall som kan inträffa.

3.4

Bestäm de singulära punkterna och deras karaktär för systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1 x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_2 - x_1 x_2$$

Skissa även fasporträttet.

3.5

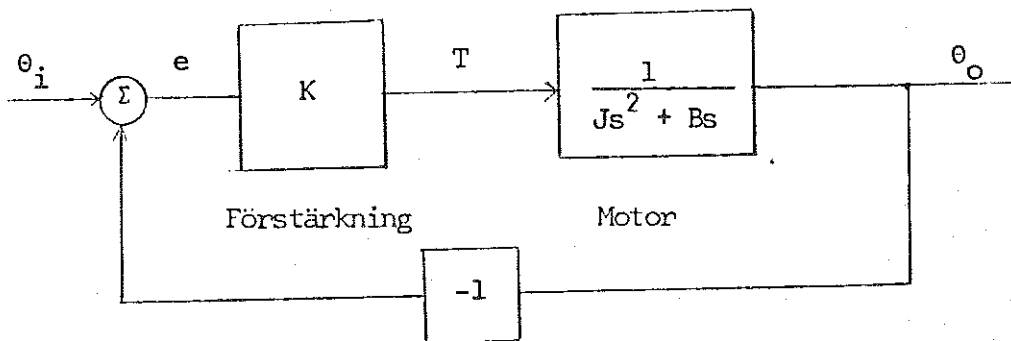
Bestäm de singulära punkterna och deras typ för systemet

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^2 - x_2 \end{aligned} \right\}$$

och skissera fasporträttet.

3.6

Bestäm fasporträttet för felet e i servomekanismen i figuren.

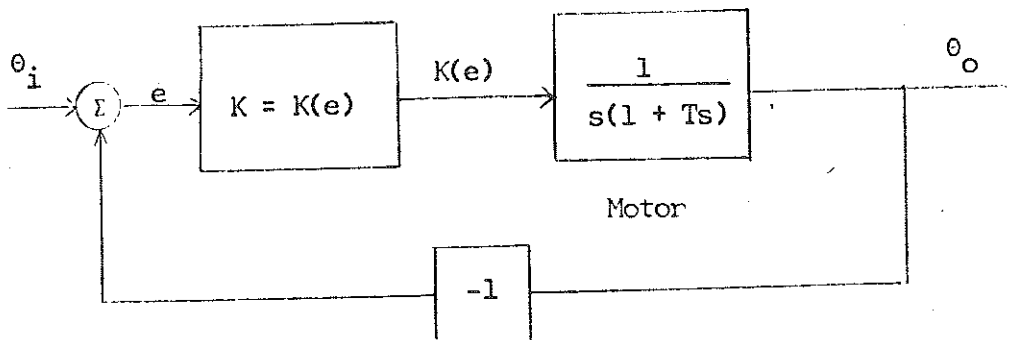


3.7

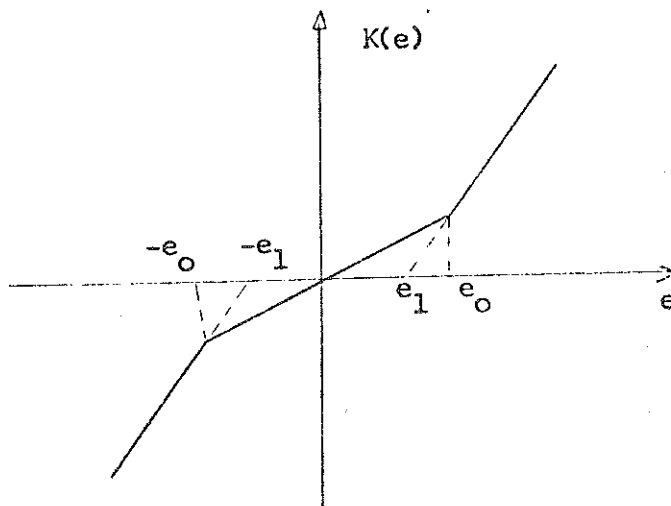
Undersök i fasplanet rörelseekvationen för en enkel pendel:

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \sin \theta = 0$$

3.8



En servomekanism med en olinjäritet som är analog med en "hård fjäder".



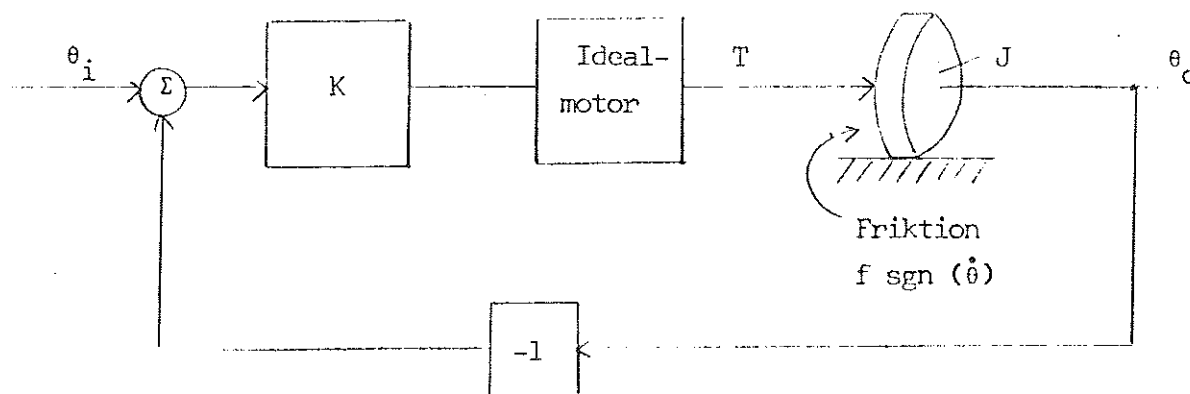
Bestäm fasporträtt för olika insignaler

$$\theta_i = a = \text{konstant}$$

$$\theta_i = K_i t = \text{ramp}$$

3.9

Bestäm fasporträttet för ett system enligt figur med Coulomb friktion

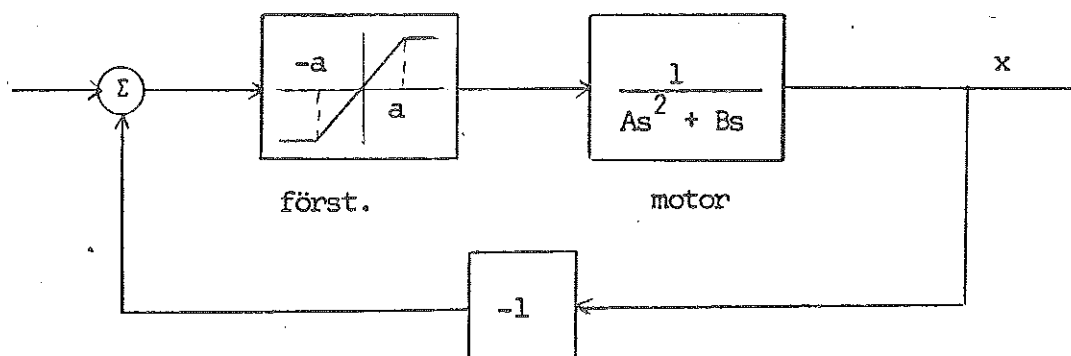


Visa även i fasplanet vilken effekt små störningar av jämviktsläget har på systemet.

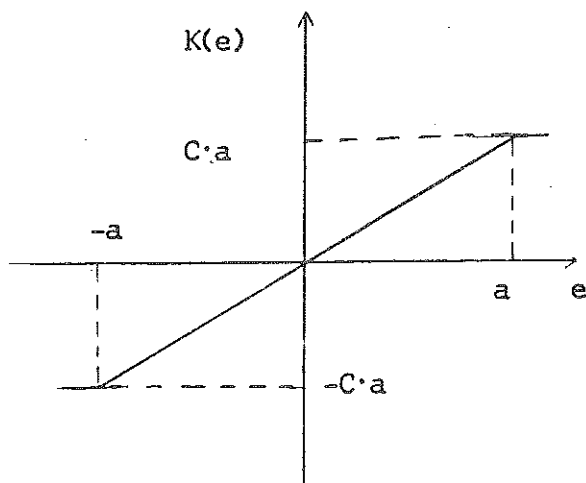
3.10

Bestäm fasporträttet för servomekanismen enligt figuren.

Förstärkaren går i mättning utanför området $-a < e < a$.

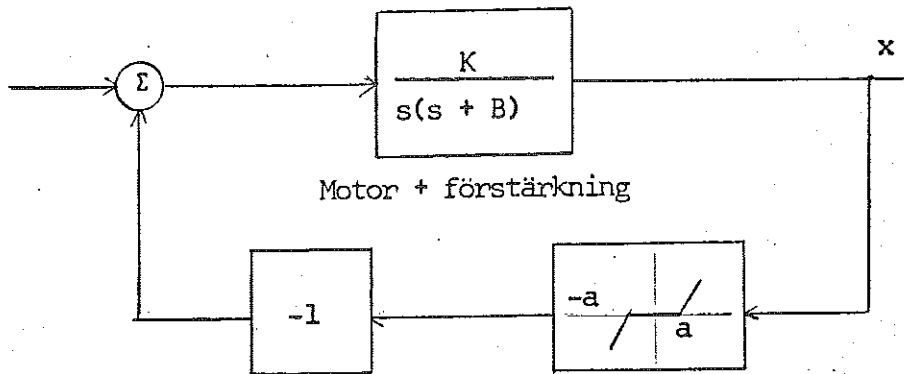


Den olinjära länkens karakteristik



3.11

Bestäm fasporträttet för ett positionsservo enligt figuren.

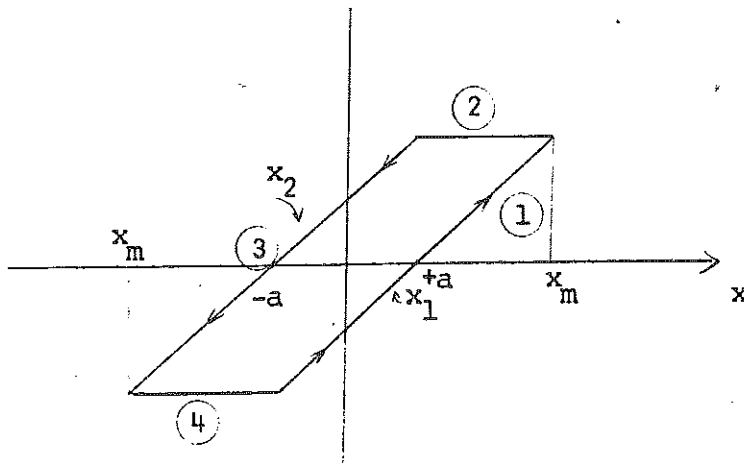
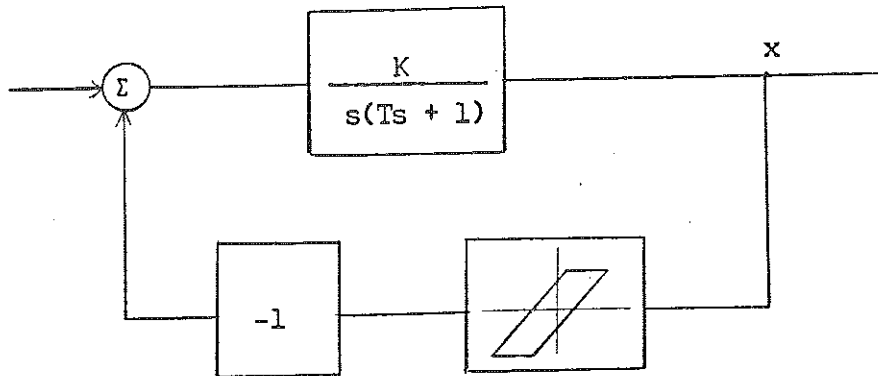


Positionen avkänns med en E-transformator, som kan beskrivas med ett olinjärt block av typ dödområde.

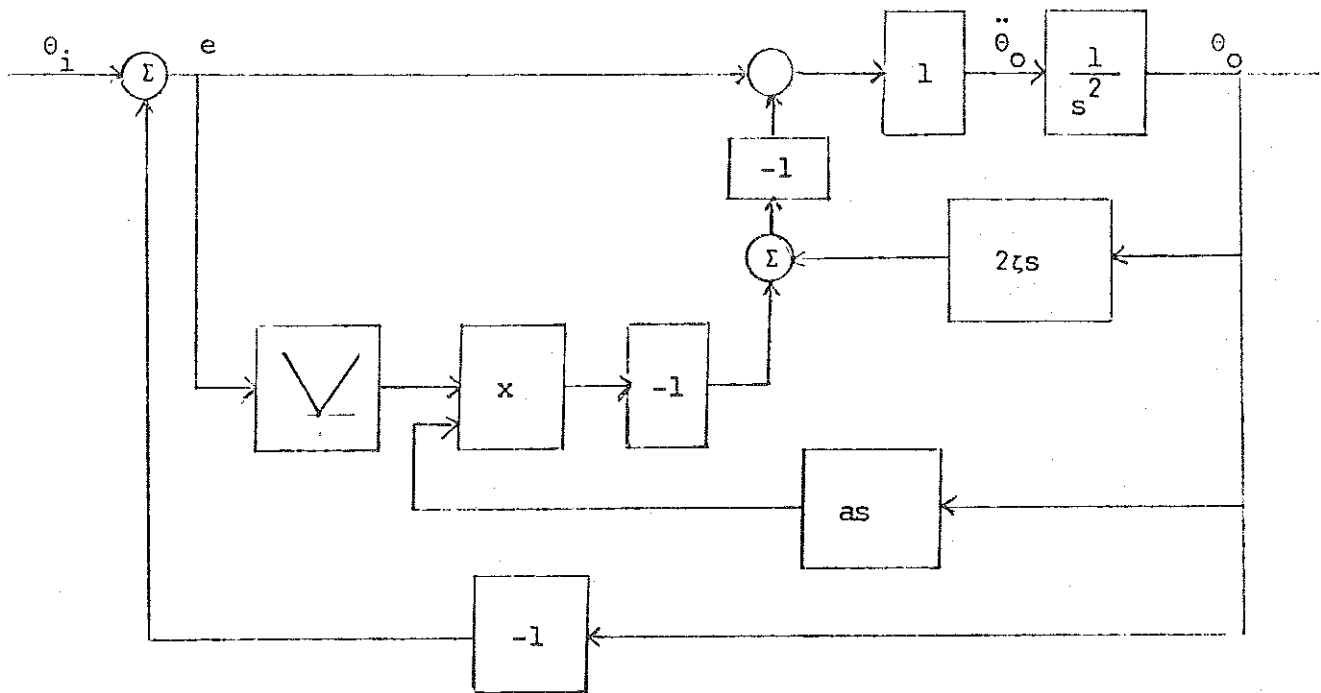
-3.12 -

Bestäm fasporträttet för nedanstående servomekanism med hysteres i återföringen. Denna olinjära effekt kan bero på glapp i kugväxlar eller återföringslänkage.

först. + motor



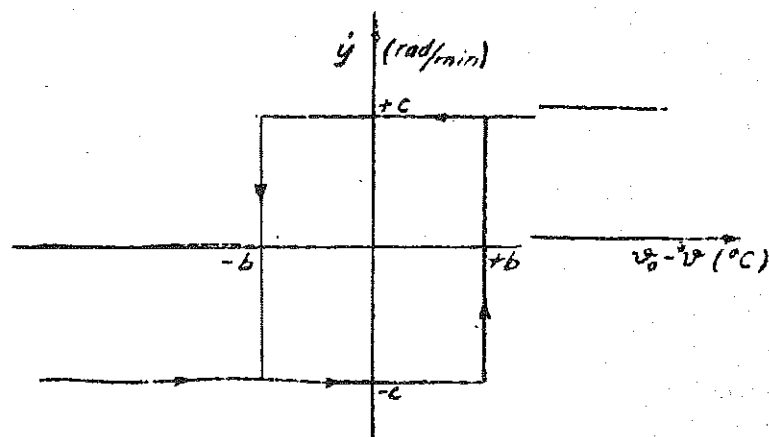
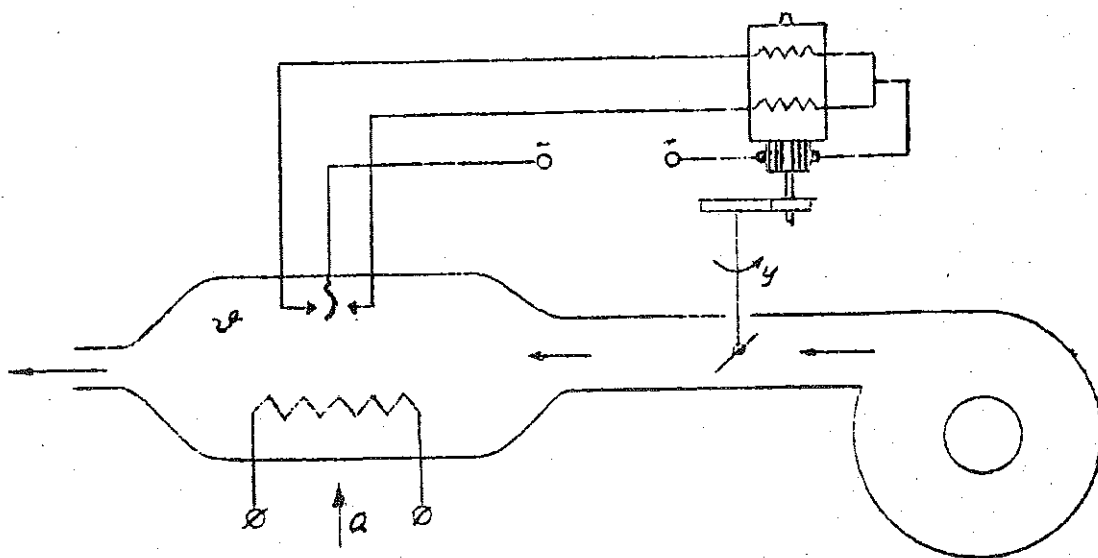
3.13



Figuren illustrerar den s.k. Lewis servomekanism. Systemet är konstruerat så att systemets dämpning minskar med ökande fel. Insvängningsförloppet för måttliga fel blir då snabbare än för motsvarande linjära system. Bestäm fasporträttet och undersök inverkan av begynnelsevillkor på stabiliteten.

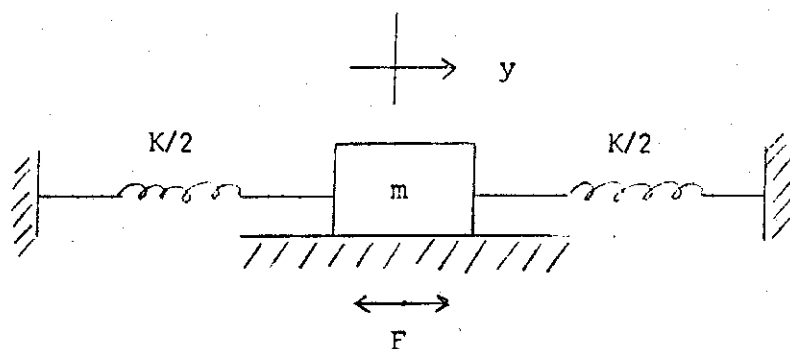
3.14

Undersök i fasplanet nedanstående system för temperaturreglering. Ett rum tillföres en konstant värmemängd Q kcal/min. För att reglera temperaturen tillföres en variabel mängd kallluft. Temperaturregleringen utföres med en termostat (bimetall) som är inställd på ett börvärde v_0 . Temperaturen i rummet är v . Termostaten styr en likströmsmotor med två skilda fält så att motorn, som vrider ett spjäll i kallluftledningen, reverserar och går med konstant hastighet när termostaten kopplar om. Sambandet mellan felet i temperatur och spjällets vinkelhastighet \dot{y} visas också nedan.



3.15

Bestäm med hjälp av fasplanmetoden stegsvaret $y(t)$ för följande anordning om $y(0) = y_1$ och $\dot{y}(0) = 0$. Tidsskalan behöver ej graderas.



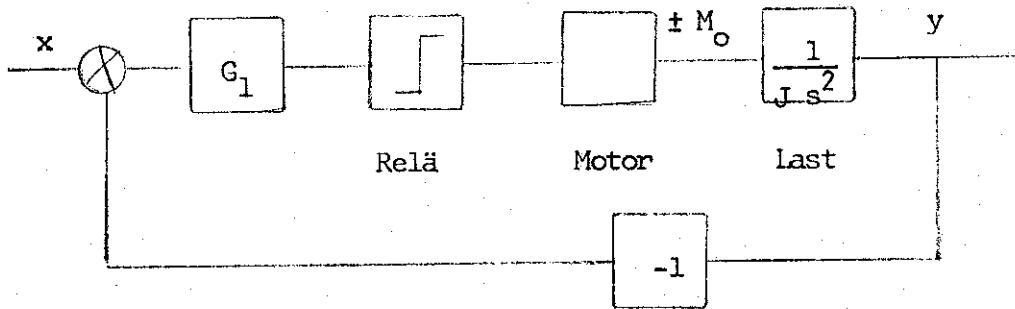
K = total fjäderkonst.

F = torrfriktionskraft verkande på kroppen med massan m

y = kroppens momentana läge.

3.16

Upprita och diskutera trajektorier i fasplanet (\dot{e} , e) för nedanstående fall hos följande servo:

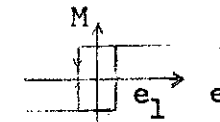


Motorn lämnar momentet $\pm M_0$

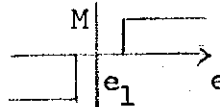
a) $G_1 = 1$. Ideellt relä, dvs ingen dödzon eller hysteres

b) $G_1 = 1 + s\tau$. Ideellt relä. τ liten resp. stor.

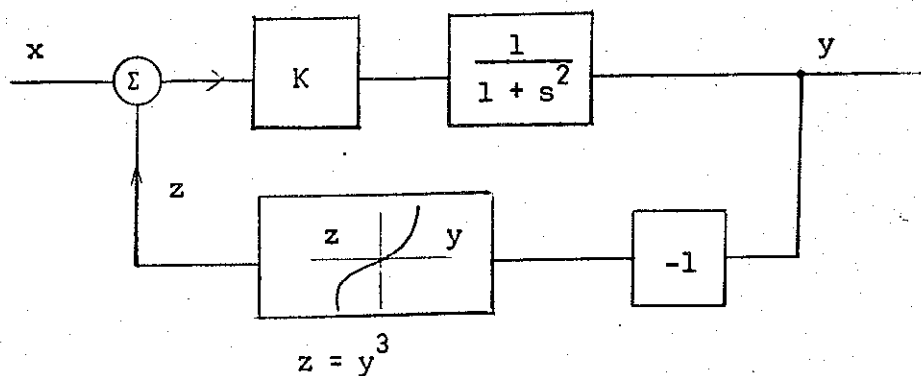
c) $G_1 = 1$. Relä med hysteres:



d) $G_1 = 1$. Relä med dödzon:



3.17



Ett mekaniskt servosystem är så svagt dämpat att det kan approximeras med $G_o(s) = \frac{1}{1+s^2}$ och det har en olinjär återföring med kubisk karaktäristik.

a) Ställ upp systemets diff.ekv. och visa att det alltid har en periodisk lösning för $K > 0$ om $x = 0$. Skissera fasplanskurvorna med följande data givna:

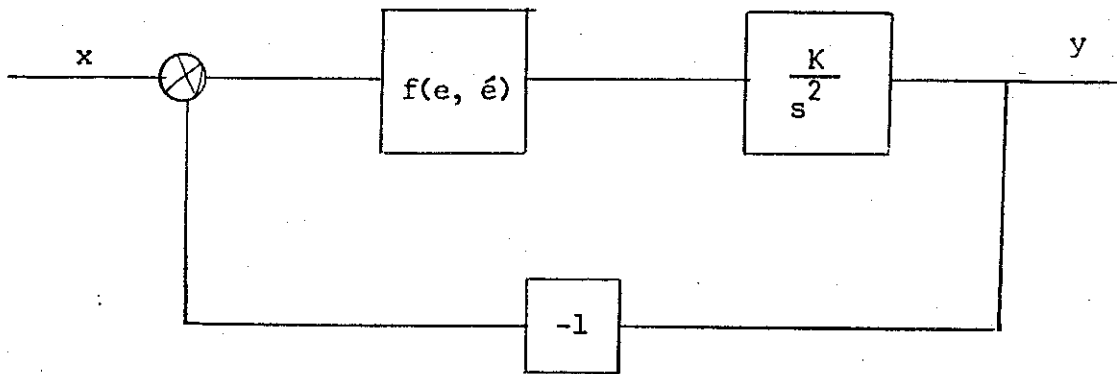
$$x = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad y(0) = 2$$

$$K = 1 \text{ resp. } 2$$

b) Avgör med hjälp av detta hur periodiska lösningens frekvens varierar med K samt ange \dot{y}_{\max} som funktion av K med ovanstående beg. värden givna.

Ledning: Genom multiplikation med $2\dot{y}$ kan ekvationen integreras direkt en gång.

3.18



$$f(e, \dot{e}) = |e| \cdot \text{sign}(e + \lambda \dot{e})$$

Beräkna trajektorian för

$$e(0) = -1$$

$$\dot{e}(0) = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$K = 0.5$$

$$X = 0 \text{ för } t > 0$$

i de tre först genomlöpta kvadranterna. Rita lösningen med följande skalor:

$$\dot{e} = 1 \hat{=} 2 \text{ cm}$$

$$e = 1 \hat{=} 2 \text{ cm}$$

3.19

För nedanstående ekvationer är fasplanets isokliner med tillhörande linjeelement skisserade i angivna figurer på separat blad.

Ekv. $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$

Figur nr 3

$\ddot{x} + \dot{x} = 2$

4

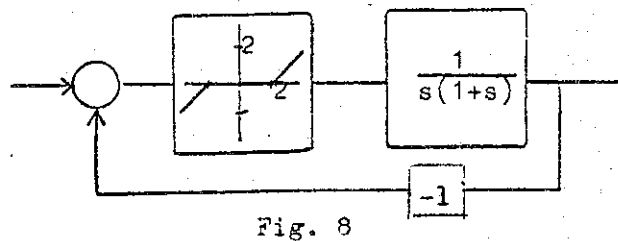
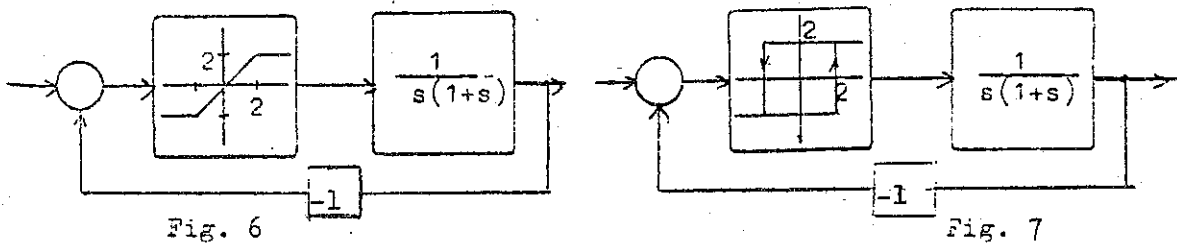
$\ddot{x} + \dot{x} = -2$

5

$\ddot{x} + \dot{x} = 0$

Lutningen är $\lambda = -1$ i hela planet

Skissera med hjälp av ovanstående material fasplanporträttet för reglerkretsarna i nedanstående figurer



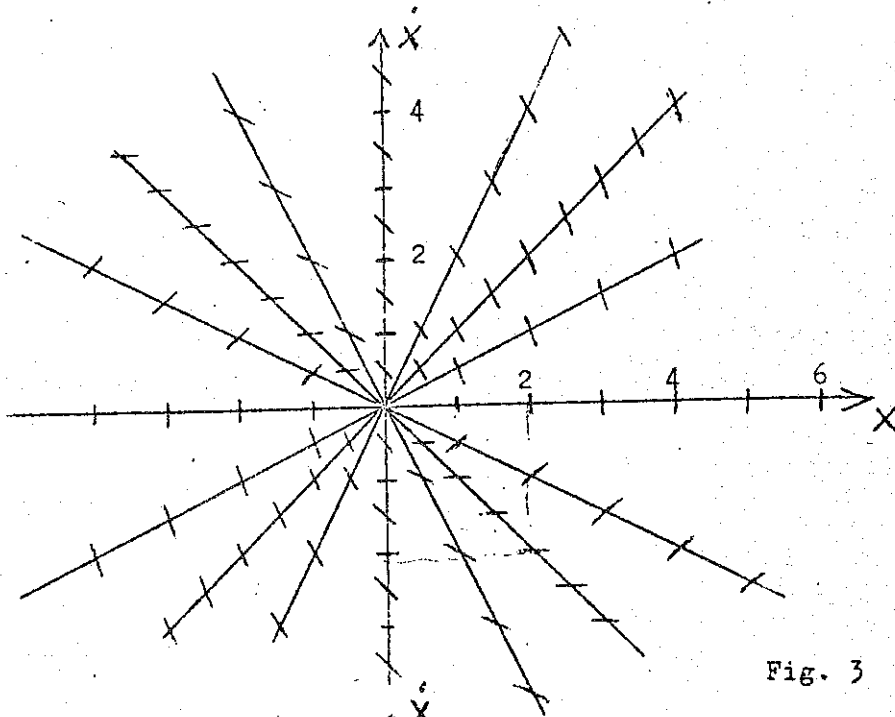


Fig. 3

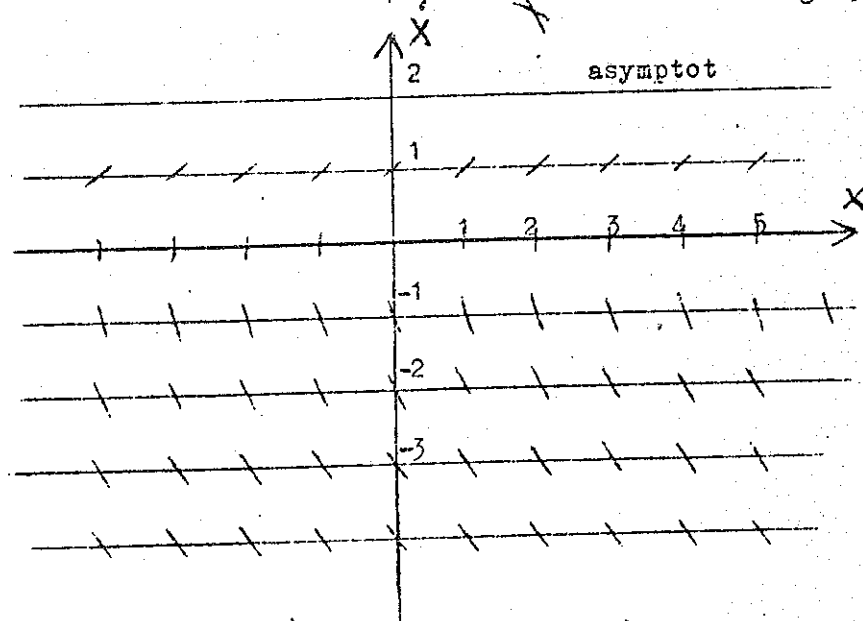


Fig. 4

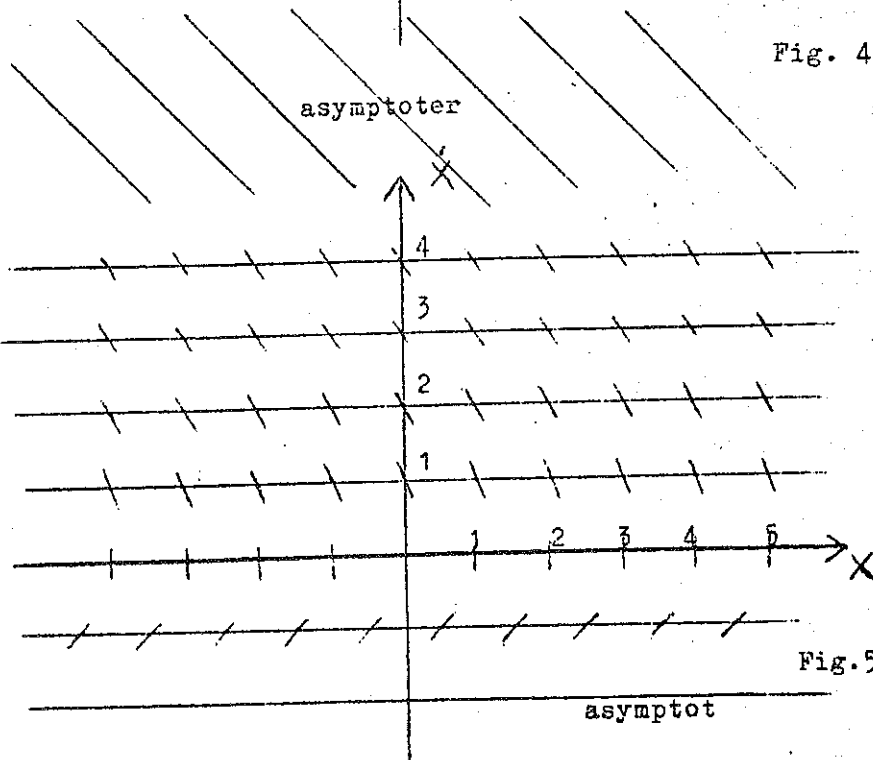
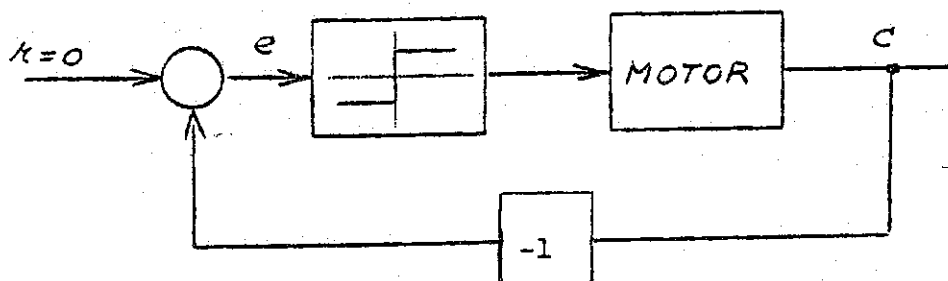


Fig. 5

+2

-2

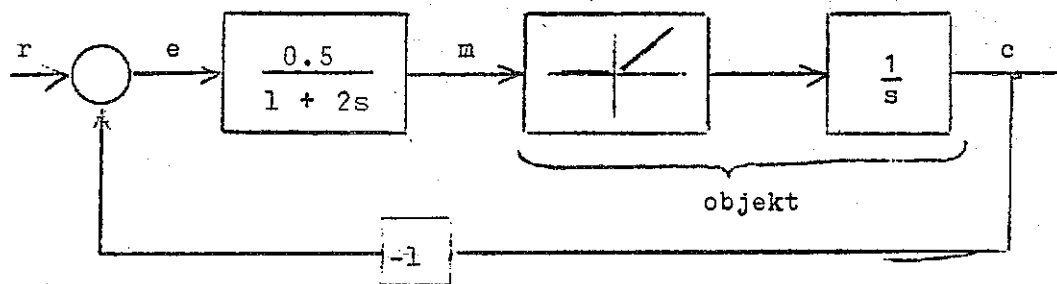
3.20



Figuren visar en servokrets med en relästyrd motor. Motorn ger utvariabeln c en konstant acceleration eller retardation beroende på hastighetens riktning och reläets läge. Retardationen är dubbelt så stor som accelerationen. Skissera i ett fasplan hur kretsen svänger in till jämviktsläget $c = 0$ $\dot{c} = 0$.

(Obs. acceleration betyder att \dot{c} ökar, retardation att \dot{c} minskar)

3.21



Reglerobjektet i ovanstående system motsvarar en integrator som bara kan styras ut i positiv riktning, $\dot{c} = m$ för $m > 0$, $\dot{c} = 0$ för $m < 0$. (Jfr värmeaccumulator med försumbar läckning).
 Begynnelsestillståndet är $c = -4$. Önskat sluttillstånd $c = 0$.
 Börvärde $r = 0$ under hela förloppet.

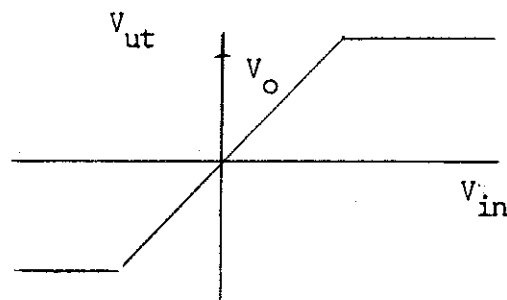
- Använd fasplanmetoden för att skissera hur systemet svänger in.
- Om insvängningen befinnes vara ogynnsam, finns det någon enkel metod att förbättra den?

3,22

Ett positionsservo skall ha en elektrisk motor som verkställande organ. Motorns överföringsfunktion är

$$Y(s) = \frac{K}{s(1 + sT)}$$

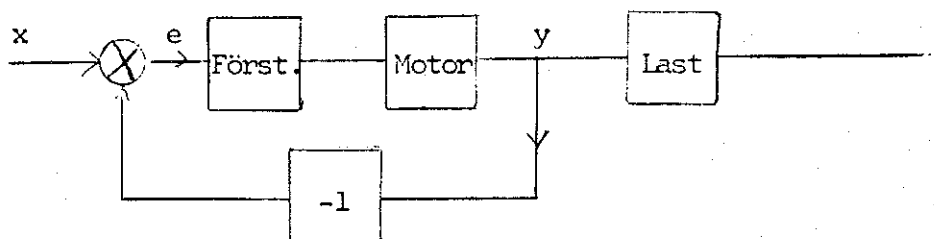
Den förstärkare som driver motorn har en karakteristik enligt figuren.



Angiv hur servosystemet skall utformas för att insvängningstiden vid en störning skall bli så liten som möjligt.

3.23

Bestäm med hjälp av fasplanet (\dot{e} , e) hur motorn bör köras i nedanstående positionsservo för att ge den kortaste inställningstiden hos stegsvaret. Tröghetsmoment hos motor + last är J . Bestäm även inställningstiden.



- Motorns hastighet begränsad till V_0 .
- Motorns moment begränsat till M_0 . Hur ser "optimal switchingline" ut?

3.24

Ett positionsservo har en motor som verkställande organ. Använd fasplanet för att konstruera ett system som får kortast möjliga inställningstid då insignalen är en stegfunktion med amplituden a och

- Motorns hastighet begränsad
- Motorns moment begränsat.
- Motorns hastighet och moment är begränsade.

Angiv i stora drag hur de olika systemen kan realiseras. Rita stegfunktionssvaret och jämför med ett linjärt system.

3.25

Ett olinjärt system beskrivs av ekvationerna

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1) + x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2$$

Angiv de singulära punkterna och deras karaktär, samt skissera fasplanet för systemet.

3.26

Skissa fasporträttet för systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(4x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_1 - x_2(4x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

3.27

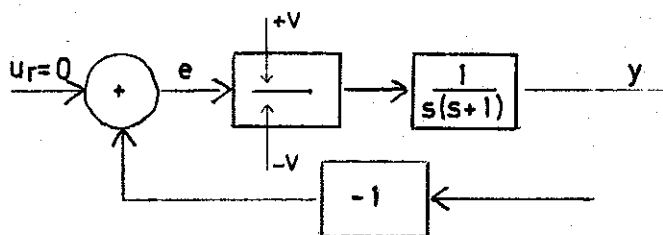
Rita upp fasplanet för ekvationen

$$\dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

3.28

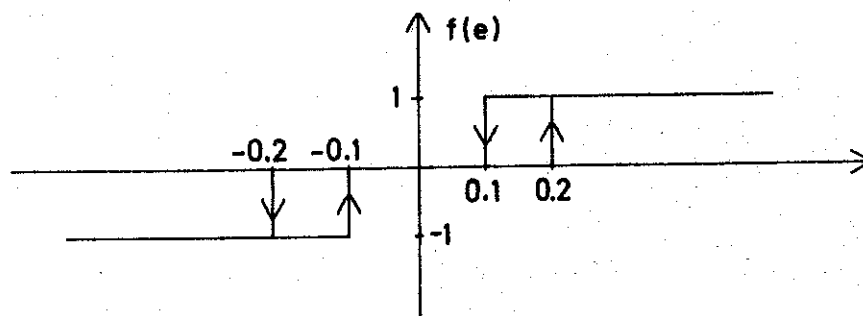
En motor drives av en reläförstärkare enligt blockdiagrammet nedan.



Systemet beskrives alltså av differentialekvationen

$$\ddot{y} + \dot{y} = f(e)$$

För ett idealt relä gäller $f(e) = \text{sgn } e$. Visa med hjälp av fasplanet (e, \dot{e}) hur systemets stabilitet förändras, om man i stället för idealt relä räknar med hysteresis och dödzon, så att reläets karakteristik i stället är följande.



Blir systemet instabilt? Kan det konvergera mot noll?

3.29

Systemet

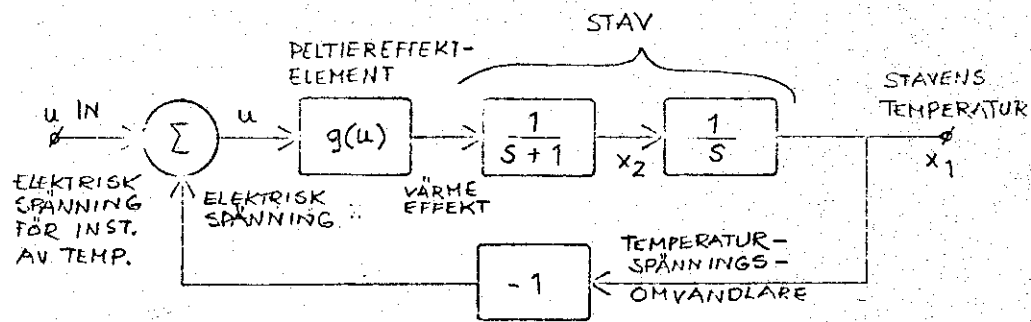
$$\dot{x}_1 = 0.05x_1 + 0.1x_2 - 0.2 \frac{x_1^2}{1 + x_1}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 0.1x_2 + 1.5 \frac{x_1^2}{1 + x_1}$$

är givet. Undersök med hjälp av fasplan systemets singulära punkter och deras karaktär.

3.30

Bo Leden har byggt ett temperaturservo för att kunna simulera värmestaven i lab 2 i AK. Värme till- och bortföres med hjälp av Peltiereffektelement. På grund av resistiva förluster har Peltiereffektelementet en olinjär karakteristik. Ett schematiskt blockschema över temperaturservo och värmestav visas i figuren.



Systemet beskrivs av följande differentialekvationer:

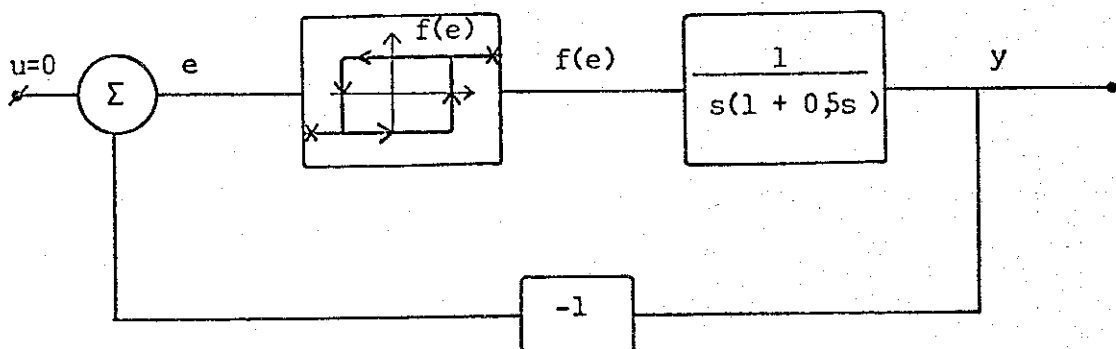
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + g(-x_1)$$

Peltiereffektelementet ger följande samband mellan pålagd spänning och erhållen temperatur $g(u) = u + u^2$, där den kvadratiska termen beror på Joulskt värme. Bestäm de singulära punkternas läge och karaktär. Skissera fasporträttet i närheten av de singulära punkterna.

3.31

En motor drivs av ett relä med hysteres enligt blockschemat nedan



Systemet beskrives av differentialekvationen

$$0.5\ddot{y} + \dot{y} = f(e)$$

där $f(e)$ är utsignalen från reläet.

Reläets karakteristik definieras av

$$\left. \begin{array}{l} f(e) = 2 \quad \text{för } e \geq 1 \\ f(e) = -2 \quad \text{för } e < 1 \end{array} \right\} \quad \text{för } \dot{e} \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(e) = 2 \quad \text{för } e \geq -1 \\ f(e) = -2 \quad \text{för } e < -1 \end{array} \right\} \quad \text{för } \dot{e} < 0$$

Rita fasplanet med e och \dot{e} på axlarna. Undersök med hjälp av metoden med beskrivande funktion om en stabil periodisk lösning kan existera och ange i så fall amplitud och vinkelfrekvens.

Den negativa inverterade beskrivande funktionen för reläet finns angiven i tabellen nedan (A betecknar amplituden på insignalen).

A	$\text{Re}\{-1/Y_N\}$	$\text{Im}\{-1/Y_N\}$
1.0	± 0.000	-0.393
1.1	-0.180	-0.393
1.2	-0.261	-0.393
1.3	-0.326	-0.393
1.4	-0.385	-0.393
1.5	-0.436	-0.393
1.6	-0.491	-0.393
1.7	-0.540	-0.393
1.8	-0.588	-0.393
1.9	-0.635	-0.393
2.0	-0.681	-0.393

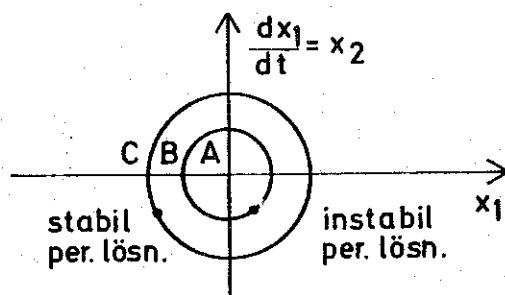
9. FLERVALSFRÅGOR

3.1

Ett system har två stycken periodiska lösningar (= "limit cycles"), en stabil och en instabil såsom angivits i figuren på svarsblanketten. Förutsättningarna är vidare:

- origo är en singulär punkt
- lösningar med små begynnelsevärden konvergerar mot noll-lösningen $x(t) = 0$.

Rita ut banornas principiella förlopp i de tre områdena A, B och C i fasplanet.



3.2

Ett linjärt system med tidsvariabla koefficienter

$$\dot{x} = A(t) \cdot x$$

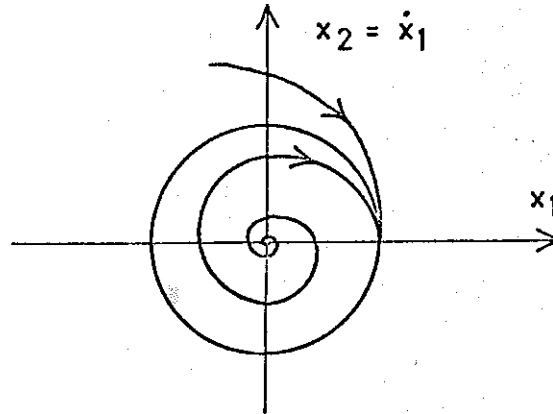
har alla tidpunkter sina egenvärden i vänstra halvplanet.

Kan systemet ha instabila lösningar?

- A Ja
- B Nej

3.3

Figuren visar fasplanet för ett system av andra ordningen. Inga lösningar divergerar mot ∞ . Vilket eller vilka av följande påståenden är alltid sanna?



- A Systemet är stabilt
- B Systemet är instabilt
- C Det finns en periodisk lösning
- D Den periodiska lösningens amplitud beror på begynnelsevillkoren

3.4

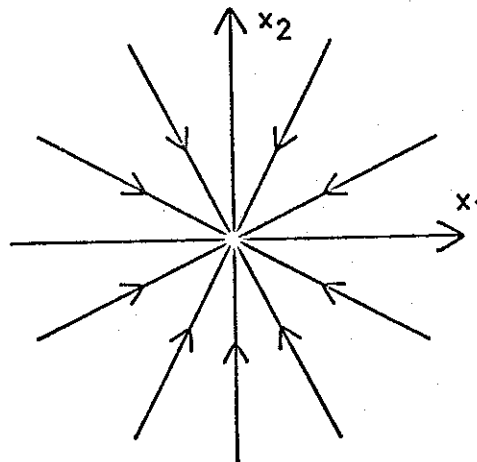
Differentialekvationen

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

är given. Fasporträttet visas i figuren. Vilket eller vilka av följande påståenden är alltid sanna?



- A $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ och rang $(A - \lambda I) = 0$
 B $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ och rang $(A - \lambda I) = 1$
 C $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ och rang $A = 0$
 D $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ och rang $A = 1$

3.5

Den linjära differentialekvationen $\dot{x} = Ax$ är given (2 dim.).
 Man vet att $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ samt att $0 < \det A < (\text{tr } A)^2/4$.
 På stort avstånd från origo i ett fasplan är banor, som ej
 är räta linjer, parallella med en rät linje L . Vilket eller
 vilka av följande påståenden är alltid sanna?

- A L är parallell med vektorn e_1 där $Ae_1 = \lambda_1 e_1$
 B L är parallell med vektorn e_2 där $Ae_2 = \lambda_2 e_2$
 C L har vinkelkoefficienten λ_1
 D L har vinkelkoefficienten λ_2

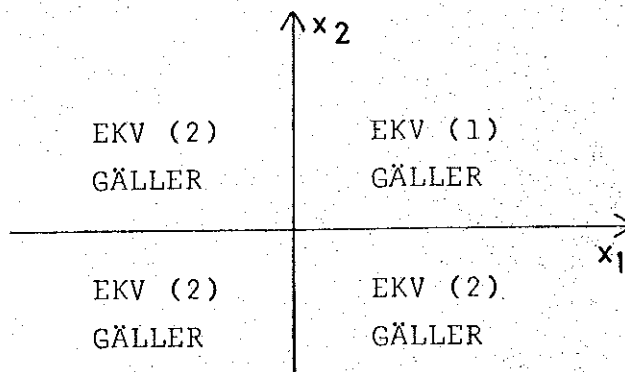
3.6

Ett gungande barn kan beskrivas med följande styckvis linjära
 differentialekvationer

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 \end{array} \right\} \quad (1) \text{ för } x_1 \geq 0 \text{ och } x_2 \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{array} \right\} \quad (2) \text{ för } x_1 < 0 \text{ eller } x_2 < 0$$

Vilket eller vilka av följande påståenden är alltid sanna?

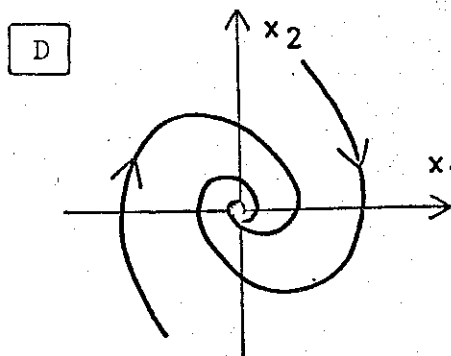
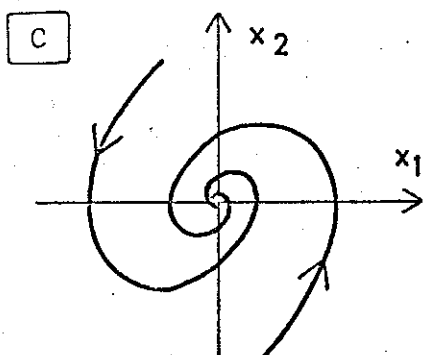
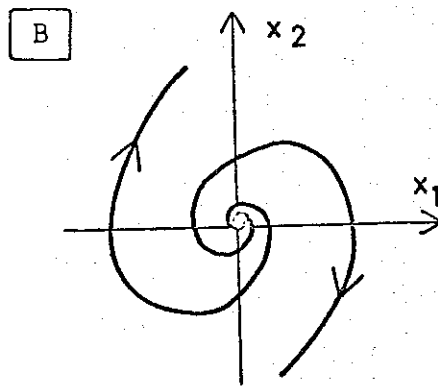
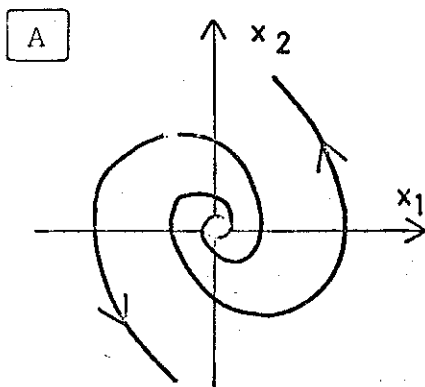


- A Nolllösningen $x(t) = 0$ är stabil, men ej asymptotiskt stabil
- B Nolllösningen $x(t) = 0$ är asymptotiskt stabil
- C Nolllösningen $x(t)$ är instabil
- D Det existerar en stabil periodisk lösning (= "limit cycle")

3.7

Ett linjärt system $dx/dt = Ax$ där $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.6 \end{bmatrix}$ är givet.

Vilket eller vilka av följande fasporträtt kan höra till ovanstående system?



- E Inget av ovanstående

KAPITEL IV - STABILITETSTEORI

1. Inledning
2. Lyapunovs satser om stabilitet hos lösningar till tidsinvarianta differentialekvationer
3. Lyapunovs satser om instabilitet
4. Konstruktion av Lyapunovfunktioner för linjära ekvationer
5. Konstruktion av Lyapunovfunktioner för olinjära ekvationer
6. Atomreaktorns stabilitet på grund av negativ temperaturkoefficient
7. Stabilitetsområdets storlek
8. Användning av Lyapunovteori för syntes av reglersystem
9. Samband mellan Lyapunovteori och optimeringsteori
10. Popovs stabilitetskriterium
11. Cirkelkriterier
12. Övningsexempel
13. Flervalsfrågor

1. INLEDNING

Vi skall nu utveckla stabilitetsteorin för olinjära system. De grundläggande begreppen klargjordes redan i den allmänna kursen och vi refererar till denna för fundamenta. Observera särskilt att för linjära system är det möjligt att tala om systemets stabilitet medan för olinjära system kan vi endast tala om en enstaka lösnings stabilitet. Av skäl som gavs i den allmänna kursen skall vi väsentligen diskutera stabiliteten m.a.p. störningar i initialvärden. Den metod, Lyapunovs andra metod, som vi diskuterar i de första avsnitten behandlar systemet:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad (1.1)$$

Vid analys av ett reglersystem

$$\frac{dx}{dt} = g(x,u,t) \quad (1.2)$$

med en styrlag

$$u = h(x,t) \quad (1.3)$$

har vi således antagit att styrlagen (1.3) insats i ekvation (1.2), dvs att vi eliminerat u mellan (1.2) och (1.3) och erhållit

$$\frac{dx}{dt} = g(x,h(x,t),t) = f(x,t)$$

Lyapunovs andra metod har under de senaste åren varit föremål för ett mycket intensivt intresse inom reglertekniken. Metoden behandlar problemet att undersöka om ekvation (1.1) är stabil m.a.p. störningar i initialvärden. Lyapunov som studerade problemet (1892) uppdelar sina metoder i två kategorier vilka sedermera kallats Lyapunovs första resp andra metod. I den s.k. första metoden inkluderas

alla förfaranden som baseras på en direkt lösning av differentialekvationen. Lyapunovs andra metod skiljer sig från den första därigenom att man avgör stabiliteten genom att analysera ekvationen utan att den behöver lösas. Lyapunovs andra metod är väsentligen en generalisering av Lagranges sats i mekaniken att ett jämviktsläge är stabilt om den potentiella energin har ett minimum. Under de senaste åren har Lyapunovs arbeten rönt ett mycket stort intresse bl.a. på grund av de regleringstekniska tillämpningarna, och hans teorier har vidareutvecklats i många riktningar.

I de sista avsnitten i detta kapitel behandlas Popovs metod och cirkelkriterier, vilka samtliga utvecklas under 1960-talet. Dessa metoder är i motsats till Lyapunovs andra metod begränsade till en viss klass av olinjära differentialekvationer. De skiljer sig från Lyapunov också genom att de är frekvensanalytiska. De är emellertid lätta att tillämpa och anknyter starkt till Nyquist kriterium. Metoderna är således baserade på en frekvenskurva och kräver inte att vi löser den olinjära differentialekvationen. Med Popovs metod behandlas stabilitet m.a.p. störningar i initialvillkoren. Cirkelkriterierna kan även användas för att studera en viss typ av insignal-utsignal stabilitet.

2. LYAPUNOV'S SATSER OM STABILITET HOS LÖSNINGAR TILL TIDS- INVARIANTA DIFFERENTIALEKVATIONER

I detta avsnitt skall vi behandla några av Lyapunovs grundläggande resultat. Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (2.1)$$

Antag att $f(x,t)$ är sådan att (2.1) har en entydig kontinuerlig lösning för $t_0 \leq t < \infty$. Den entydiga lösningen betecknas $x(x^0, t_0; t)$ eller $x(t)$. Det är ej någon inskränkning att antaga att

$$x(0, t_0; t) = 0 \quad (2.2)$$

är en lösning till (2.1). Denna lösning kallas i det följande den "ostörda" lösningen.

Vi erinrar om de stabilitetsbegrepp som infördes i den allmänna kursen.

Definition 2.1

Lösningen (2.2) säges vara stabil om det för givet $\varepsilon > 0, \exists \delta$ så att för alla lösningar till (2.1) med

$$\|x^0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$$

gäller att

$$\|x(x^0, t_0; t)\| < \varepsilon$$

för $t > t_0$. ($\|\dots\|$ betecknar en norm i R^n).

Lösningen (2.2) säges vara instabil om den ej är stabil.

Definition 2.2

Lösningen (2.2) säges vara asymptotiskt stabil om den är stabil och om dessutom

$$\|x(x^0, t_0; t)\| \rightarrow 0 \quad \text{då } t \rightarrow \infty$$

för alla lösningar till (2.1) med

$$\|x^0\| < \delta(t_0)$$

Dessa definitioner, som ursprungligen infördes av Lyapunov motsvarar således stabilitet m.a.p. störningar i begynnelsevillkoren. Observera även att stabilitet enligt ovanstående definitioner är lokala begrepp då de refererar till små begynnelsevärdesstörningar av en speciell lösning.

Vi skall i fortsättningen antaga att differentialekvationen är stationär, dvs att $f(x, t)$ ej innehåller variabeln t explicit. Vi skall således studera ekvation

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.3)$$

Lösningarna till denna ekvation beror endast av begynnelsevärdet x^0 och $t - t_0$, och vi kan således utan förlust i allmängiltighet antaga $t_0 = 0$. Lösningarna till (2.3) betecknas $x(x^0, t)$ (2.4)

Liksom tidigare skall vi antaga att $x(0, t) = 0$ är en lösning. De satser och den bevismetodik som presenteras kan även med mindre modifikationer överföras till det allmänna fallet. Se t.ex. Malkin sid 161-168.

Innan vi formulerar Lyapunovs satser för stabilitet skall vi införa begreppet Lyapunovfunktion.

Definition 2.3

$V(x)$ är en Lyapunovfunktion för systemet

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$f(0) = 0$$

om

1. $V(x)$ och grad V är definierade och kontinuerliga i en omgivning till $x = 0$
2. $V(x)$ är positiv definit
3. $\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot f(x)$ är negativ definit

En funktion $V(x)$ är positiv semidefinit i en omgivning till origo, om $V(0) = 0$ och för övrigt gäller $V(x) \geq 0$ i omgivningen. Om $V(0) = 0$ och $V(x) > 0$ för $x \neq 0$ i omgivningen säges $V(x)$ vara positiv definit där. Analogt definieras negativ (semi)definit funktion.

Sats 2.1

Lösningen $x(0,t) = 0$ är en stabil lösning till (2.3) om man kan finna en funktion $V(x)$ sådan att

1. Villkoren 1 och 2 i def. 2.3 på sid. IV:4b är uppfyllda.

2. $\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot f(x)$ neg. semidefinit

Bevis:

Låt 1. och 2. gälla för $\|x\| < h$. Tag $\varepsilon < h$. Sätt

$$\ell = \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x) \quad (2.5)$$

Studera en godtycklig lösning $x(x^0, t)$ till (2.1) sådan att

$$\|x^0\| < \delta$$

och

$$V(x^0) < \ell$$

För denna lösning gäller

$$\|x(x^0, t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

ty påståendet är uppenbarligen sant för små värden på t . Vi skall visa att det gäller för alla t . Antag motsatsen. Det måste då \exists ett T sådant att

$$\|x(x^0, T)\| = \varepsilon$$

då gäller

$$V(x(x^0, T)) = V(x^0) + \int_0^T \frac{dV}{dt} dt \leq V(x^0) < \ell$$

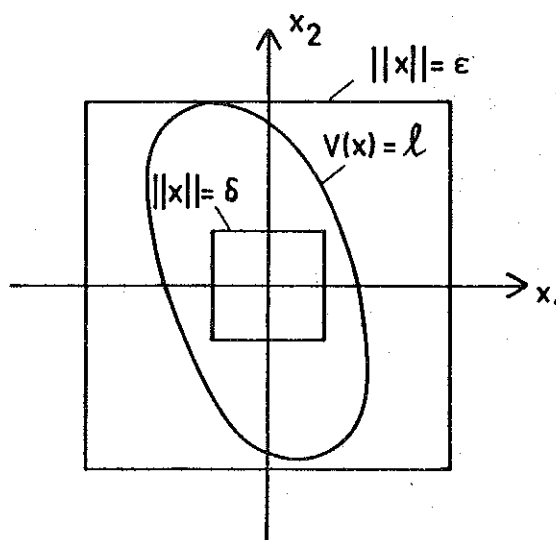
vilket strider mot definitionen av ℓ (2.5). Vi har således en motsägelse och påståendet (2.6) gäller alltså för alla t och lösningen $x(0,t) = 0$ är följaktligen stabil. V.S.B.

Geometrisk tolkning.

Sats 2.1 skall nu ges en geometrisk tolkning. Antag att $x \in \mathbb{R}^2$ med normen

$$\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$$

För $\|x\| < h$ är $V(x)$ pos. definit och $V(x) = a$ är således en skärslutna kurvor. En kurva motsvarande ett större a -värde omsluter helt en kurva motsvarande ett mindre a -värde.



Figur 2.1

Fig. 2.1 visar kurvorna

$$\|x\| = \varepsilon$$

$$\|x\| = \delta(\varepsilon)$$

$$V(x) = \ell$$

En lösning till (3.1) kan representeras av en kurva i planet. Då

$$V(x(x^0, t)) \leq V(x^0) < \ell$$

ligger således alla lösningar med $\|x^0\| < \delta$ innanför kurvan

$$V(x) = \ell$$

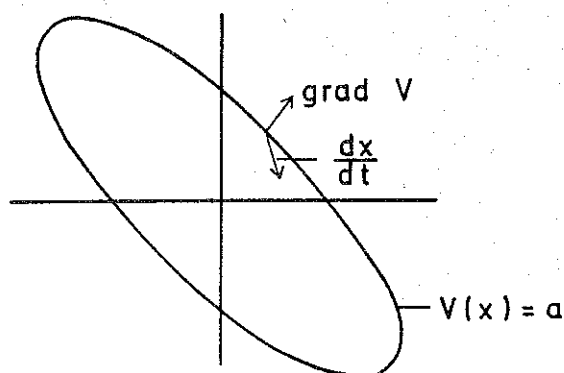
och för dessa lösningar gäller således $\|x\| < \epsilon$ för $t \geq 0$.

Observera att den geometriska tolkningen ger en möjlighet att kvantitativt bestämma relationen mellan δ och ϵ samt att skarpaste resultat erhålles då metriken anpassas efter funktionen $V(x)$. Om man kan välja $V(x) = \|x\|$ erhålles $\delta(\epsilon) = \epsilon$.

Observera även att

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot \dot{x} < 0$$

innebär att hastighetsvektorn \dot{x} har negativ projektion på grad V . Dvs en lösning som börjar på konturen $V(x) = a$ kan aldrig gå utanför denna kontur om lösningen är stabil. Se Fig. 2.2.



Figur 2.2

Sats 2.2

Lösningen $x(0,t) = 0$ är en asymptotiskt stabil lösning till (2.3) om det existerar en Lyapunovfunktion $V(x)$ i $x = 0$.

Bevis:

Låt förutsättningarna gälla för $\|x\| < h$. Studera en godtycklig lösning till (2.3) vars begynnelsevärde x^0 valts så att

$$\|x(x^0, t)\| < \varepsilon < h, \text{ för } t \geq t_0.$$

Detta är möjligt ty lösningen $x(0, t) = 0$ är stabil. Enligt 2.

gäller

$$\frac{dV}{dt} < 0.$$

Funktionen $V(x(t))$ är alltså monotont avtagande med t . Gränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(x^0, t)) = \alpha$$

existerar således. Vi skall visa att $\alpha = 0$. Antag motsatsen dvs. $\alpha > 0$.

Då gäller

$$\|x(x^0, t)\| \geq \lambda > 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} < -a$$

dvs

$$V(x(x^0, t)) = V(x^0) + \int_0^t \frac{dV}{dt} dt \leq V(x^0) - a \cdot t$$

vilket strider mot

$$V(x(x^0, t)) \geq \alpha$$

Gränsvärdet α är således noll. På grund av 1. gäller då

$$\|x(x^0, t)\| \rightarrow 0 \text{ då } t \rightarrow \infty$$

och lösningen $x(0, t) = 0$ är således asymptotiskt stabil. V.S.B.

Kommentar

Observera att om $\frac{dV}{dt}$ är negativ semidefinit och d.e. ej har någon lösning som helt förlöper i det området där $\frac{dV}{dt} = 0$ så är nolllösningen asymptotiskt stabil.

Innan vi går vidare skall vi studera ett exempel.

Exempel

Betrakta ekvationen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Den linjära approximationen lyder

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} z$$

vilket är oscillatorns ekvation. Då den linjära approximationen är stabil men ej asymptotiskt stabil kan vi ej avgöra stabiliteten hos den olinjära ekvationen med Lyapunov - Poincarés sats.

Vi skall nu undersöka om stabilitetsfrågan kan avgöras med hjälp av Lyapunovs sats.

Inför Lyapunovfunktionen

$$2V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Denna funktion är uppenbarligen positiv definit. Derivation ger

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = -a(x_1^2 + x_2^2)^2$$

Lyapunovfunktionens tidsderivata är således negativ definit och $x(0, t) = 0$ är enligt sats ^{2.2} en asymptotiskt stabil lösning.

3. LYAPUNOV'S SATSER OM INSTABILITET

Lyapunov har även angivit satser för instabilitet. Då dessa för stationära ekvationer är helt analoga till de i avsnitt 2 lämnas bevisen som övning. Jfr Malkin s. 31 - 38.

Sats 3.1

Lösningen $x(0,t) = 0$ är instabil om man kan finna en funktion $V(x)$ med egenskaperna

1. $\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot f(x)$ pos. definit
2. V antager pos. värden

Sats 3.2

Lösningen $x(0,t) = 0$ är instabil om man till d.e. (2.1) kan ange en funktion $V(x)$ vars totala tidsderivata

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot f(x)$$

har formen

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W$$

där λ är en pos. konstant och

$$a) \quad W \equiv 0$$

eller

$$b) \quad W \text{ pos. semidefinit}$$

V antager positiva värden

4. KONSTRUKTION AV LYAPUNOVFUNKTIONER TILL LINJÄRA EKVATIONER

Lyapunovs teorem ger ingen anvisning på hur man skall bestämma Lyapunovfunktioner. Då satserna utgår från att Lyapunovfunktionen är känd är det uppenbarligen mycket väsentligt för tillämpningarna att kunna bestämma Lyapunovfunktioner. Det finns tyvärr inga generella metoder för att bestämma Lyapunovfunktioner i det allmänna fallet. I det linjära fallet finns däremot systematiska metoder. Vi skall i detta avsnitt studera dessa metoder. Betrakta således den linjära ekvationen

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4.1)$$

Om samtliga egenvärden till matrisen A har negativ realdel, så är ekvationen stabil. Vi skall nu undersöka om man under denna förutsättning kan bestämma en positiv definit form $V(x)$ sådan att dess tidsderivata

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot f(x) \quad (4.2)$$

är negativ definit. Vi studerar först några exempel.

Exempel 4.1

Antag att A är diagonal dvs

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Funktionen

$$V = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{\lambda_1} + \frac{x_2^2}{\lambda_2} \right)$$

är uppenbarligen en Lyapunovfunktion med

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 - x_2^2$$

Exempel 4.2

Bestäm en kvadratisk form

$$V = x^T P x \quad (\text{T anger transponering})$$

som är Lyapunovfunktion till (4.1) och för vilken gäller

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Q x$$

Enligt def. gäller

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot Ax = x^T P A x + x^T P^T A x = x^T P A x + x^T A^T P x$$

ty $x^T P^T A x$ är en skalär och då gäller uppenbarligen $x^T P^T A x = (x^T P^T A x)^T = x^T A^T P x$. Ett alternativt sätt att utföra beräkningen är följande

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (x^T P x) = \frac{dx^T}{dt} P x + x^T P \frac{dx}{dt} = x^T A^T P x + x^T P A x$$

Identifikation av koefficienterna ger följande algebraiska ekvation för att bestämma matrisen P

$$P A + A^T P = -Q \quad (4.3)$$

Problemet att finna en Lyapunovfunktion har således återförts på problemet att lösa den algebraiska ekv. (4.3). Om vi för givet Q pos. definit kan finna en pos. definit lösning P till (4.3) har vi således en Lyapunovfunktion till d.e. (4.1), som garanterar asymptotisk stabilitet.

Vi specialiserar nu ytterligare till följande system av andra ordningen

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x$$

Antag

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}$$

Insättning i ekvation (4.3) ger

$$-2a_2 P_{12} = -q_{11}$$

$$-a_2 P_{22} + P_{11} - a_1 P_{12} = -q_{12}$$

$$2P_{12} - 2a_1 P_{22} = -q_{22}$$

Detta ekvationssystem har en lösning för godtyckliga q_i om

$$a_1 a_2 \neq 0$$

Under detta villkor gäller

$$P_{11} = \frac{a_1^2 q_{11} - 2a_1 a_2 q_{12} + (a_2 + 1) q_{22}}{2a_1 a_2}$$

$$P_{12} = \frac{q_{11}}{2a_2}$$

$$P_{22} = \frac{q_{11} + a_2 q_{22}}{2a_1 a_2}$$

Det återstår nu att undersöka under vilka förutsättningar i detta exempel matrisen P blir positiv definit om Q är positiv definit. Detta lämnas som övning.

Vi skall nu formulera en sats som anger när det existerar en lösning till (4.3).

Sats 4.1 (Lyapunov)

Lösningen $x(0,t)$ till det fria systemet (4.1) är asymptotiskt stabil om och endast om det för varje symmetriskt positiv definit matris Q existerar en symmetrisk positiv definit matris P som är den entydiga lösningen till (4.3).

Om A har egenvärden med negativ realdel är således funktionen $V = x^T P x$ en Lyapunovfunktion till (4.1).

OBS! Sidorna 15-18 utgår i denna version.

5. KONSTRUKTION AV LYAPUNOVFUNKTIONER TILL OLINJÄRA EKVATIONER

Vi skall nu angiva några idéer som kan ligga till grund för konstruktion av Lyapunovfunktioner för olinjära system

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (5.1)$$

Som vi tidigare nämnt finns inga systematiska metoder i egentlig mening utan de följande kan närmast betraktas som en uppsättning knep.

Nästan linjära system

I det fall då funktionen $f(x)$ kan approximeras med ett linjärt uttryck sätter vi

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = Ax + g(x) \quad (5.2)$$

där funktionen $g(x)$ är liten i någon "mening". Vi skall specifikt förutsätta att

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (5.3)$$

Som Lyapunovfunktion till den olinjära ekvationen väljer vi nu en Lyapunovfunktion till den linjära approximationen dvs

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (5.4)$$

Vi angav i avsnitt 4 systematiska metoder för att bestämma en Lyapunovfunktion till (5.4). Vi kan t.ex. förfara på följande sätt:

- 1) Välj matrisen Q symmetrisk och pos. definit
- 2) Bestäm en symmetrisk matris P sådan att

$$A^T P + PA = -Q \quad (5.5)$$

Det följer sedan av sats 4.1 att om (5.4) är stabil så blir matrisen P alltid pos. definit. Som Lyapunovfunktion till det olinjära systemet (5.2) väljes nu

$$V = x^T P x$$

Vi finner då

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \\ &= (Ax + g(x))^T P x + x^T P (Ax + g(x)) \\ &= x^T (A^T P + PA)x + g^T(x) P x + x^T P g(x) \end{aligned}$$

dvs

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Q x + g^T(x) P x + x^T P g(x) \quad (5.6)$$

Men enligt antagandet (5.3) är $\|g(x)\| < \epsilon \|x\|$ där ϵ kan göras godtyckligt liten genom att välja $\|x\|$ liten. I en omgivning till origo är således $\frac{dV}{dt}$ negativ definit om den linjära approximationen (5.4) är stabil.

Som exempel på hur man kan utnyttja detta resonemang ger vi ett nytt bevis på Lyapunov-Poincarés teorem.

Sats 5.1

Om samtliga egenvärden till matrisen A har neg. realdel och om $g(x)$ uppfyller (5.3) så är lösningen $x(0,t) = 0$ till ekv. (5.2) asymptotiskt stabil.

Bevis:

Man kan visa att det existerar en pos. definit form V sådan att

$$\text{grad } V \cdot Ax = -x^T x$$

Bilda tidsderivatan av V m.a.p. ekv.(5.2)

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot (Ax + g(x)) = -x^T x + \text{grad } V \cdot g(x)$$

5. KONSTRUKTION AV LYAPUNOVFUNKTIONER TILL OLINJÄRA EKVATIONER

Vi skall nu ange några idéer som kan ligga till grund för konstruktion av Lyapunovfunktioner för olinjära system

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (5.1)$$

Som vi tidigare nämnt finns inga systematiska metoder i egentlig mening utan de följande kan närmast betraktas som en uppsättning knep.

Nästan linjära system

I det fall då funktionen $f(x)$ kan approximeras med ett linjärt uttryck sätter vi

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = Ax + g(x) \quad (5.2)$$

där funktionen $g(x)$ är liten i någon "mening". Vi skall specifikt förutsätta att

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (5.3)$$

Som Lyapunovfunktion till den olinjära ekvationen väljer vi nu en Lyapunovfunktion till den linjära approximationen dvs

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (5.4)$$

Vi angav i avsnitt 4 systematiska metoder för att bestämma en Lyapunovfunktion till (5.4). Vi kan t.ex. förfara på följande sätt:

- 1) Välj matrisen Q symmetrisk och pos. definit
- 2) Bestäm en symmetrisk matris P sådan att

$$A^T P + PA = -Q \quad (5.5)$$

Det följer sedan av sats 4.1 att om (5.4) är stabil så blir matrisen P alltid pos. definit. Som Lyapunovfunktion till det olinjära systemet (5.2) väljes nu

$$V = x^T P x$$

Vi finner då

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \\ &= (Ax + g(x))^T P x + x^T P (Ax + g(x)) \\ &= x^T (A^T P + PA)x + g^T(x) P x + x^T P g(x) \end{aligned}$$

dvs

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Q x + g^T(x) P x + x^T P g(x) \quad (5.6)$$

Men enligt antagandet (5.3) är $\|g(x)\| < \epsilon \|x\|$ där ϵ kan göras godtyckligt liten genom att välja $\|x\|$ liten. I en omgivning till origo är således $\frac{dV}{dt}$ negativ definit om den linjära approximationen (5.4) är stabil.

Som exempel på hur man kan utnyttja detta resonemang ger vi ett nytt bevis på Lyapunov-Poincarés teorem.

Sats 5.1

Om samtliga egenvärden till matrisen A har neg. realdel och om $g(x)$ uppfyller (5.3) så är lösningen $x(0,t) = 0$ till ekv. (5.2) asymptotiskt stabil.

Bevis:

Man kan visa att det existerar en pos. definit form V sådan att

$$\text{grad } V \cdot Ax = -x^T x$$

Bilda tidsderivatan av V m.a.p. ekv. (5.2)

$$\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot (Ax + g(x)) = -x^T x + \text{grad } V \cdot g(x)$$

Vidare gäller

$$\| \text{grad } V \cdot g(x) \| \leq \| \text{grad } V \| \cdot \| g(x) \| \leq \varepsilon \| x \|^2$$

För fortsättningen behövs följande lemma.

Lemma

Om V är en definit form av ordningen m och om W är en funktion sådan att

$$\| W \| \leq \varepsilon \| x \|^m$$

så är

$$V_1 = V + W$$

en definit funktion.

Beviset av detta lämnas som övning.

Av lemmat följer nu att $\frac{dV}{dt}$ är en negativt definit funktion och lösningen $x(0,t) = 0$ är således asymptotiskt stabil enligt sats 2.2.

Sats 5.2

Om något av A 's egenvärden har pos. realdel och om funktionen $g(x)$ uppfyller (5.3) så är lösningen $x(0,t) = 0$ instabil.

Beviset av denna sats är helt analogt med beviset till sats 5.1.

Observera att de erhållna resultaten även kan tolkas som stabilitet med avseende på störningar i differentialekvationens form. Detta följer ur nedanstående alternativa formulering av sats 5.1.

Sats 5.1

Om $x(0,t) = 0$ är en asymptotiskt stabil lösning till d.e.

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

och om funktionen $g(x)$ uppfyller (5.3) så är $x(0,t) = 0$ även en asymptotiskt stabil lösning till

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x)$$

I denna formulering är satserna 5.1 och 5.2 omvändbara, dvs $x(0,t) = 0$ (som uppfyller (5.3)) är en asymptotiskt stabil lösning till (5.2) för godtyckliga $g(x)$ om och endast om samtliga egenvärden till A har neg. realdel och $x(0,t) = 0$ är en instabil lösning till (5.2) för godtyckliga $g(x)$ om och endast om A har minst ett egenvärde med realdelen > 0

Krassovskys metod

Den ryske forskaren Krassovsky har föreslagit att man som Lyapunovfunktion till ekvation (5.1) skall välja funktionen

$$V(x) = f^T(x) P f(x) \quad (5.7)$$

där P är en symmetrisk positiv definit matris. Vi skall nu derivera funktionen (5.7) m.a.p. differentialekvationen (5.1). Vi finner

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{df}{dt} \right)^T P f + f^T P \frac{df}{dt}$$

Betrakta en komponent av funktionen f , dvs

$$f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Vi finner

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dt} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} f_n \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dt} \\ \frac{df_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df_n}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{f_x} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Med ett kompakt beteckningssätt skriver vi detta som

$$\frac{df}{dt} = f_x \cdot \frac{dx}{dt} = f_x \cdot f$$

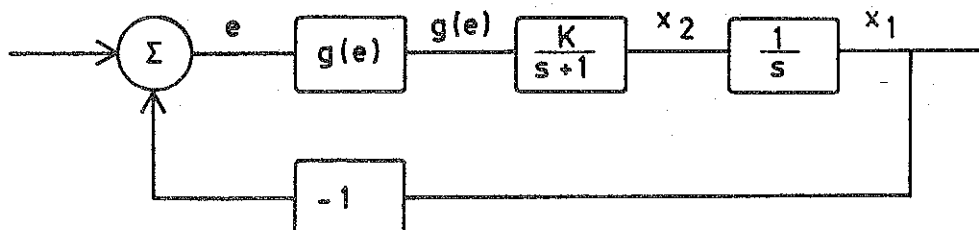
dvs formellt helt analogt med det skalära fallet. Vi finner således

$$\frac{dV}{dt} = (f_x f)^T P f + f^T P f_x f = f^T (f_x^T P + P f_x) f \quad (5.8)$$

Tidsderivatan (5.8) av funktionen (5.7) är således negativ definit om matrisen $f_x^T P + P f_x$ är negativ definit.

Exempel 5.1

Betrakta servosystemet i Fig. 5.1.

Fig. 5.1

Inför tillståndsvariablerna x_1 och x_2 såsom antytts i figuren. Antag att referenssignalen är noll. Systemekvationerna kan så skrivas

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + Kg(e) = -x_2 + Kg(-x_1) \quad (5.9)$$

Antag vidare att olinjariteten g är av formen $g(x) = x^3$. Undersök om reglersystemet är stabilt. Om vi identifierar ekv. (5.9) med standardformen (5.1) finner vi således

$$f_1(x_1, x_2) = x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -x_2 + Kg(-x_1) = -x_2 - Kg(x_1)$$

Vi ansätter nu enligt Krassovsky en Lyapunovfunktion (5.7) dvs

$$V(x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = P_{11}f_1^2 + 2P_{12}f_1f_2 + P_{22}f_2^2$$

$$= P_{11}x_2^2 + 2P_{12}x_2(-x_2 - Kg(x_1)) + P_{22}(-x_2 - Kg(x_1))^2$$

där P är positiv definit dvs $p_{11} > 0$ och $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$.

Lyapunovfunktionens tidsderivata blir nu

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (-2p_{12}K \frac{dg}{dx_1}) f_1^2 + (2p_{11} - 2p_{22}K \frac{dg}{dx_1} - 2p_{12}) f_1 f_2 + \\ &\quad + (2p_{12} - 2p_{22}) f_2^2 \\ &= a f_1^2 + 2b f_1 f_2 + c f_2^2 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

där

$$a = -2p_{12} \cdot K \frac{dg}{dx_1} = -6 p_{12} K \cdot x_1^2$$

$$b = p_{11} - p_{22} K \frac{dg}{dx_1} - p_{12} = p_{11} - p_{12} - 3K p_{22} x_1^2$$

$$c = 2p_{12} - 2p_{22} = 2(p_{12} - p_{22})$$

Lyapunovfunktionens tidsderivata (5.8) är negativ definit om $a < 0$ och $ac - b^2 > 0$. Insättes $g(x) = x^3$ ger dessa villkor

$$1) \quad a < 0 \quad \Rightarrow \quad -6p_{12} K x_1^2 < 0$$

$$2) \quad ac - b^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad +12p_{12} K x_1^2 (p_{22} - p_{12}) > (p_{11} - 3p_{22} K x_1^2 - p_{12})^2$$

Vi förfogar fortfarande över talen p_{11} , p_{12} och p_{22} och väljer nu t.ex. $p_{11} = p_{12}$ och $p_{22} = \beta p_{11}$. Olikheten 1) är då automatiskt uppfylld, olikheten 2) ger

$$4(\beta - 1) > 3\beta^2 K x_1^2$$

dvs

$$x_1^2 < \frac{4}{3K} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) = \frac{4}{3K} f(\beta)$$

Vi väljer nu β så att högerledet blir så stort som möjligt dvs

$$f'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = 0 \quad \beta = 2$$

Vi finner då

$$x_1^2 < \frac{1}{3K}$$

Med den gjorda ansatsen till Lyapunovfunktion finner vi således att systemets nollösning är stabil om initialvärdet väljes så att $|x_1^0| < 1/\sqrt{3K}$ och $x^0 \in U^1$. För att bestämma mängden U^1 måste vi bestämma stabilitetsområdets storlek. Till detta återkommer vi i avsnitt 7.

Variabla gradientmetoden (Variable gradient method)

För en godtycklig funktion $V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gäller

$$V(x) = V(0) + \int_0^x \text{grad } V \, dx \quad (5.10)$$

Detta kan utnyttjas för att bestämma Lyapunovfunktioner. Man förfar då på följande sätt:

- 1) Ansätt en gradient, $g = \text{grad } V$
- 2) Bestäm $\frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot f$ och gör inskränkningar på g så att $\frac{dV}{dt}$ är negativ definit.
- 3) Kontrollera att g efter de gjorda inskränkningarna fortfarande är en gradient genom att undersöka om rot $g = 0$. Modifiera eventuellt.
- 4) Bestäm V genom att integrera gradienten med formeln (5.10). Kontrollera att V är positiv definit. Ändra annars ansatsen.

För att undersöka om $g(x)$ verkligen är en gradient av en funktion undersöker vi rotationen för g . Jämför vektoranalysen!

Ekvationen $\text{rot } g = 0$ betyder i två dimensioner att

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \quad (5.11)$$

och i tre dimensioner att

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_3} &= \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Exempel 5.2

Betrakta samma system som i exempel 5.1, dvs

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1^3 - x_2 \end{aligned} \quad (5.9')$$

Vi skall undersöka om nolllösningen är stabil.

1) Ansätt gradienten

$$g = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(x)x_1 + \alpha_{12}(x)x_2 \\ \alpha_{21}(x)x_1 + \alpha_{22}(x)x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

2) Beräkna sedan

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \text{grad } V \cdot \frac{dx}{dt} = (\text{grad } V)^T f(x) = \\ &= \alpha_{11}x_1x_2 + \alpha_{12}x_2^2 - \alpha_{21}x_1^4 - \alpha_{21}x_1x_2 - \alpha_{22}x_1^3x_2 - \alpha_{22}x_2^2 = \\ &= x_1x_2(\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{22}x_1^2) + x_2^2(\alpha_{12} - \alpha_{22}) - \alpha_{21}x_1^4 \end{aligned}$$

Välj nu funktionerna α_{ij} så att $\frac{dV}{dt}$ blir negativ definit. Uppenbarligen måste det gälla att

$$\alpha_{12} - \alpha_{22} < 0 \quad (5.13)$$

$$\alpha_{21} > 0 \quad (5.14)$$

Vi sätter vidare koefficienten för $x_1 x_2$ till noll

$$\alpha_{11} - \alpha_{21} - \alpha_{22} x_1^2 = 0 \quad (5.15)$$

3) Kontrollera att g är en gradient. Ekvation rot $g = 0$ ger

$$\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_2} x_2 + \alpha_{12} = \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial x_1} x_2 + \alpha_{21} \quad (5.16)$$

Välj nu godtyckligt α_{21} , α_{12} , α_{22} till konstanter. Då erhålles enligt (5.15)

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} + \alpha_{22} x_1^2$$

Vidare erhålles då enligt (5.16)

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

Vi väljer nu (åter godtyckligt) $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{22} = \alpha > 4$ och får då $\alpha_{11} = 1 + \alpha x_1^2$. Detta val uppfyller olikheterna (5.13) och (5.14). Funktionen $\frac{dV}{dt}$ är således negativ definit.

4) Vi beräknar nu funktionen V enligt (5.10). Då vi under 3) förvissat oss om att g är gradienten av en funktion, kan vi välja integrationsvägen godtyckligt. Vi finner

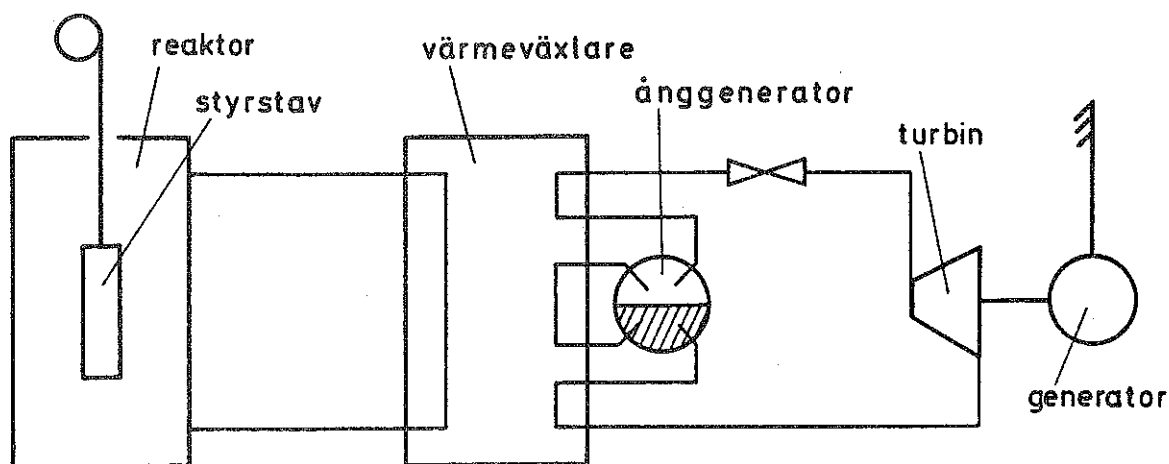
$$\begin{aligned} V &= \int_0^x \text{grad } V \quad dx = \int_0^x g_1 dx_1 + g_2 dx_2 = \\ &= \int_0^x (\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2) dx_1 + (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2) dx_2 = \\ &= \int_0^x \{(1 + \alpha x_1^2) x_1 + x_2\} dx_1 + \{x_1 + \alpha x_2\} dx_2 = \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$= (1/2) x_1^2 + (\alpha/4) x_1^4 + 2 x_1 x_2 + (\alpha/2) x_2^2 = 1/2 (x_1^2 + 2 x_2)^2 + x_2^2 (\alpha/2 - 2) + \alpha/4 x_1^4$$

Då $\alpha > 4$ är funktionen V uppenbarligen positiv definit. Med hjälp av Lyapunovfunktionen (5.17) finner vi således att nolllösningen till (5.9) är stabil för godtyckliga störningar i initialvärdet. Jämför med den Lyapunovfunktion vi fann i exempel 5.1 där vi endast kunde visa att nolllösningen var stabil om initialvärdet valdes så att $x_1^0 < 1/\sqrt{3}$. ($K = 1$) och $x^0 \in U^1$ (se avsnitt 7).

6. ATOMREAKTORNS STABILITET PÅ GRUND AV DESS NEGATIVA TEMPERATURKOEFFICIENT

Som ett exempel på tillämpning av Lyapunovteori skall vi nu undersöka stabiliteten av en atomreaktor. I Fig. 6.1 visas en schematisk bild av ett atomkraftverk. Den producerade värmemängden bestäms av reaktorn. Genom att variera kontrollstavarnas position kan kärnreaktionen och därmed den genererade effekten påverkas.



Figur 6.1 - Schematisk bild av atomkraftverk

För att översiktligt beskriva förloppet i reaktorn användes vanligen följande matematiska modell, de s.k. kinetikekvationerna

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\delta k}{l} n - \frac{\beta}{\lambda} n + \sum_{i=1}^k \lambda_i C_i \quad (6.1)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{l} n - \lambda_i C_i \quad (6.2)$$

Symbolerna har följande innebörd:

- n neutronernas medelkoncentration i reaktorn
- λ neutronernas medellivslängd. För en grafitmodererad reaktor så är λ av storleksordningen 1 msek.
- δk reaktiviteten, dvs $\delta k = (k - 1) / k$ där k är multiplikationsfaktorn.
- β relativa antalet fördröjda neutroner
- C_i medelkoncentrationen hos i :e gruppen fördröjda neutroner
- λ_i sönderfallskonstanten för i :e gruppen fördröjda neutroner.
- k antalet grupper av fördröjda neutroner.

Ekvationen (6.1) erhålles ur en kontinuitetsekvation för neutronerna. Den första termen i högerledet representerar således koncentrationsökningen på grund av det växande neutronantalet. Vid fissionen genereras ej alla neutroner momentant utan en del β alstras genom sekundärt sönderfall. Dessa s.k. fördröjda neutroner är mycket väsentliga för reaktionens dynamik. De fördröjda neutronerna ger upphov till termen $-\beta n/\lambda$ i ekvationen (6.1). De fördröjda neutronernas andel beror på fissionsmaterialet. I tabell 6.1 visas de fördröjda neutronernas antal och medellivslängd.

Mean life t_i , sec	Decay constant λ_i , sec ⁻¹	Fraction of total neutrons β_i
$U^{235}, \beta = 0.0064$		
0.332	3.01	0.00027
0.880	1.14	0.00074
3.32	0.301	0.00253
8.98	0.111	0.00125
32.8	0.0305	0.00140
80.4	0.0124	0.00021

Tabell 6.1 - Karakteristiska koefficienter för fördröjda neutroner för U^{235}

Den effekt som reaktorn momentant genererar är proportionell mot antalet neutroner i kärnan ($1 \text{ W} \longleftrightarrow 3 \times 10^{10}$ fissioner per sek). För en given reaktor är talet n således direkt proportionellt mot effektnivån.

Reaktiviteten δk beror av en mängd faktorer såsom temperatur, förekomsten av förgiftningsämnen t.ex. xenon. Vid reaktorer med vattenmoderator påverkas även reaktiviteten av ängbildning. Vidare kan reaktiviteten påverkas genom att ändra kontrollstavarnas läge.

Ekvationen (6.1) är naturligtvis en approximation. Man har vid härledningen förutsatt att reaktorn är homogen. I verkligheten är såväl neutronkoncentration, temperatur moderator etc. rumsberoende. Trots detta ger den en noggrannhet som ofta är fullt tillräcklig för att dimensionera styrsystem för en reaktor.

I vissa fall kan man approximera ytterligare och endast taga hänsyn till en grupp av fördröjda neutroner. Vi får då följande ekvation

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\delta k}{\ell} n - \frac{\beta}{\ell} n + \lambda C \quad (6.3)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{\ell} n - \lambda C \quad (6.4)$$

I detta fall är således reaktiviteten δk styrvariabel, effektnivån n är utsignal. Införes tillståndsvariablerna $x_1 = n$ och $x_2 = C$ finner vi att ekvation kan skrivas på följande standardform

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\ell} x_1 u - \frac{\beta}{\ell} x_1 + \lambda x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\beta}{\ell} x_1 - \lambda x_2$$

$$y = x_1$$

Det karakteristiska för denna ekvation är förekomsten av produkterna $x_1 u$ i den första av ekvationerna. Styrvariabeln uppträder således multiplikativt.

Vi skall nu förutsätta att kontrollstavsläget hålles konstant. Reaktiviteten är trots detta ej konstant ty den beror bl.a. av temperaturen. Reaktiviteten avtar i allmänhet med stigande temperatur dvs

$$\frac{\delta k}{\ell} = -f(T)$$

Om vi endast tar hänsyn till en grupp av fördröjda neutroner erhålles

$$\frac{dn}{dt} = -f(T) \cdot n - \frac{\beta}{\ell} n + \lambda C \quad f(T_1) = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{\ell} \cdot n - \lambda C \quad (6.6)$$

Temperaturen beror dessutom på neutronflödet. Det gäller för-
enklat att

$$\frac{dT}{dt} = A_1 n - A_2 - A_3 (T - T_0) = A_1 (n - n_0) - A_3 (T - T_1) \quad (6.7)$$

En atomreaktor med kontrollstavarnas läge fixerat kan således approximativt beskrivas med ekvationerna (6.5), (6.6) och (6.7). Systemet är stationärt och har jämviktsläget

$$n = n_0 = \frac{A_2 + A_3(T_1 - T_0)}{A_1} > 0$$

$$T = T_1$$

$$C = C_0 = \frac{\beta}{\lambda} n_0$$

$$\text{där } f(T_1) = 0$$

Vi skall undersöka om denna stationära lösning är stabil.

Vi skall visa att om följande olikheter är uppfyllda så är jämviktslösningen stabil.

$$(T - T_1) f(T_1) > 0 \quad T \neq T_1$$

$$\beta > 0$$

$$\lambda > 0$$

$$A_1 > 0$$

$$A_2 \geq 0$$

$$A_3 \geq 0$$

$$A_2 + A_3 T_0 \neq 0$$

Bilda Lyapunovfunktionen

$$V(n, C, T) = \int_{T_1}^T f(T') dT' + \int_{n_0}^n \frac{A_1(n' - n_0)}{n'} dn' + \int_{C_0}^C \frac{A_1(C' - C_0)}{C'} dC'$$

Dess tidsderivata lyder efter reduktion

$$\frac{dV}{dt} = -A_3 \cdot f(T) \cdot (T - T_1) - \frac{A_1 n_0}{\lambda n C} \left(\frac{\beta}{\lambda} n - \lambda C \right)^2$$

Denna funktion är negativ semidefinit för

$$n > 0, \quad C > 0$$

och försvinner för

$$A_3 = 0 \quad \text{eller} \quad T = T_1$$

$$\frac{\beta}{\lambda} n = \lambda C$$

enligt Lyapunovs sats 2.1 är lösningen stabil.

Det följer vidare av kommentaren till sats 2.2 att jämviktslösningen är asymptotiskt stabil. Ty det finns ingen lösning utom jämviktslösningen för vilken $\frac{dV}{dt}$ försvinner identiskt.

Med andra ord mängden

$$\left\{ x ; \frac{dV}{dt}(x) = 0 \right\}$$

innehåller endast jämviktslösningen.

Observera att man kan visa att för $\beta = \lambda = A_3 = 0$ så är uttrycket

$$V_1 = \int_{T_1}^T f(t) dt + \int_{n_0}^n \frac{A_1(n - n_0)}{n} dn$$

(Detta är skälet till att man funnit ovanstående Lyapunovfunktion)

en första integral till differentialekvationen. Vidare kan systemet då ha periodiska lösningar.

Övningsuppgift.

Visa att jämviktslösningen är asymptotiskt stabil för $\beta > 0, \lambda > 0$ även om $A_3 = 0$. Detta visar den väsentliga betydelsen av de fördröjda neutronerna för reaktionsstabilitet.

7. STABILITETSOMRÅDETS STORLEK

Vi har hittills endast diskuterat stabilitet med avseende på små störningar i differentialekvationens initialtillstånd. De stabilitetsbegrepp som införts har varit rent lokala begrepp. I praktiska problem är det självfallet mycket väsentligt att veta hur stora initialstörningar som kan göras. För att avgöra denna fråga får vi således undersöka inom vilket område i tillståndsrummet som förutsättningarna för stabilitetssatserna gäller. Antag att det finns ett begränsat område U i vilket $V(x)$ är positiv definit och $\frac{dV}{dt}$ negativ definit.

Låt ∂U beteckna randen av området. Inför

$$l = \min_{x \in \partial U} V(x)$$

och låt U' beteckna området $\{x; V(x) \leq l\}$. Det följer då av sats 2.1 och 2.2 att alla lösningar med begynnelsevärdena $x^0 \in U'$ konvergerar mot den stationära lösningen.

Om stabilitetsområdet ej är begränsat gäller som visats av Krassovskii och Barbashin ej detta resonemang utan man får då införa ytterligare begränsningar på Lyapunovfunktionen för att erhålla asymptotisk stabilitet för alla initialvillkor. Man måste då kräva att funktionen $V(x)$ antar stora värden då x blir stor.

Specifikt att

$$V(x) \geq \varphi(\|x\|)$$

$$\text{Jär} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(\|x\|) \rightarrow \infty$$

Funktionen V säges då vara radiellt obegränsad (radially unbounded).

Om en lösning är stabil för godtyckliga störningar i initialvillkoret säges lösningen vara globalt stabil. Följande villkor garanterar global asymptotisk stabilitet.

Sats 7.1

Lösningen $x(0,t) = 0$ till

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

är globalt asymptotiskt stabil om det existerar en Lyapunovfunktion $V(x)$ sådan att

$$V(x) \geq \varphi(\|x\|) \quad \text{där} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(\|x\|) = \infty$$

Exempel 7.1

Använd Lyapunovfunktionen

$$V(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{x_1^2}{2(1-x_1x_2)}\right) - 1$$

för att uppskatta stabilitetsområdet för ekvationen

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_1^2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2$$

Exempel 7.2

Använd Lyapunovfunktionen

$$V(x_1, x_2) = -\log(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

för att uppskatta stabilitetsområdets storlek för ekvationen

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Exempel 7.3

Betrakta van der Pol's ekvation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Ekvationen har en singular punkt i origo. Om $\epsilon < 2$ så är denna punkt ett stabilt fokus, om $\epsilon > 2$ så är origo en stabil nod. Jfr exempel 6.3 i kap III.

Ekvationen är ett specialfall av Lienards ekvation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0$$

med

$$f(x) = \epsilon(1 - x^2)$$

$$g(x) = x$$

Lienards ekvation kan skrivas

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{dx}{dt} + \int_0^x f(u) du \right\} + g(x) = 0$$

Inför tillståndsvariablerna

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \frac{dx}{dt} + \int_0^x f(u) du = \frac{dx}{dt} + F(x)$$

Vi finner då

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - F(x_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -g(x_1)$$

Inför Lyapunovfunktionen

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g(u) du + \frac{1}{2} x_2^2 = G(x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

Vi finner att Lyapunovfunktionens tidsderivata kan skrivas

$$\frac{dV}{dt} = -g(x_1) F(x_1)$$

Vi inför nu de speciella funktionerna och erhåller

$$F(x) = \epsilon \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) = \epsilon x \left(1 - \frac{x^2}{3} \right)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\varepsilon x_1^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{3}\right)$$

Inom området U , $U = \{x: |x_1| < \sqrt{3}\}$ är $V(x)$ positiv definit och dV/dt negativ semidefinit. $dV/dt=0$ för $x_1=0$. Ingen lösning förlöper emellertid helt på linjen $x_1=0$. På randen δU har $V(x)$ minimum för $x_2=0$, se figur 7.1. Nivåkurvorna är cirklar ty Lyapunovfunktionen är $1/2(x_1^2 + x_2^2)$. Alla lösningar med begynnelsevärde $x^0 \in U^1$, $U^1 = \{x: x_1^2 + x_2^2 < 3\}$ konvergerar således mot origo.

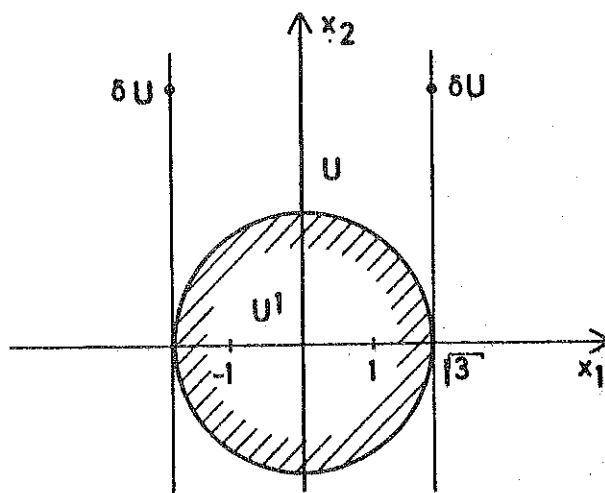


Fig. 7.1. Stabilitetsområdet för system i exempel 7.3.

Exempel 7.4

I exempel 5.1 fann vi att $|x_1^0| < 1/\sqrt{3K}$ var ett nödvändigt villkor för att nolllösningen skall vara stabil. Inom området U , $U = \{x: -1/\sqrt{3K} < x_1 < 1/\sqrt{3K}\}$ är således $V(x)$ positiv definit och dV/dt negativ definit. Låt x_m vara en punkt på randen δU för vilken $V(x)$ har minimum lika med ϵ . Alla lösningar med begynnelsevärden $x^0 \in U^1$, $U^1 = \{x: V(x) \leq \epsilon, |x_1| < 1/\sqrt{3K}\}$ konvergerar således mot den stationära lösningen. I figur 7.2 visas stabilitetsområdet.

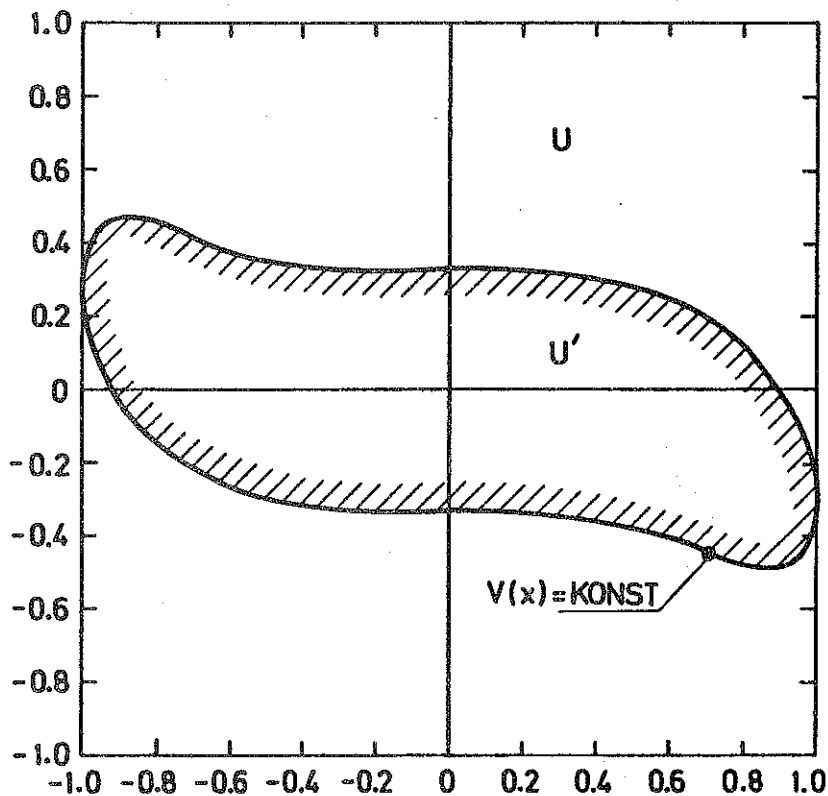


Fig. 7.2. Stabilitetsområdet för systemet i exempel 7.4.

8. ANVÄNDNING AV LYAPUNOVTEORI FÖR SYNTES AV REGLERSYSTEM

Vi har i tidigare avsnitt sett flera exempel på hur Lyapunovs resultat kan användas för stabilitetsundersökningar av reglersystem. Vi skall nu visa att Lyapunovs andra metod även är ett utmärkt hjälpmedel för syntes. I själva verkät är Lyapunovteorin en av de få metoder som kan användas för att dimensionera olinjära system.

Exempel 8.1 - Användning av Lyapunovs andra metod för dimensionering av reläservo.

Betrakta ett linjärt autonomt system som har överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \quad (8.1)$$

Styrsignalen $u(t)$ är begränsad $|u(t)| \leq 1$. För att realisera systemet önskar man använda en reläförstärkare. Angiv en styrlag som garanterar ett stabilt system.

Systemekvationen kan skrivas

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy}{dt} + y = u$$

Införes tillståndsvariablerna

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt}$$

kan systemet skrivas på standardform

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \quad (8.2)$$

Vi bestämmer först en Lyapunovfunktion

$$V(x) = x^T P x$$

till det fria systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

sådan att

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Q x$$

Detta kan göras med de metoder som beskrevs i avsnitt 5.

Väljes speciellt $Q = I$ erhålles

$$A^T P + P A = -Q$$

Jämför ekvation (5.5). Vi finner efter identifikation av koefficienterna

$$P_{11} = \frac{1 + 2\zeta^2}{2\zeta}$$

$$P_{12} = \frac{1}{2} = P_{21}$$

$$P_{22} = \frac{1}{2\zeta} \tag{8.3}$$

Vi väljer nu $V = x^T P x$ som Lyapunovfunktion till det styrda systemet och finner då

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x + u B^T P x + x^T P B u \end{aligned}$$

$$= -x_1^2 - x_2^2 + 2u (x_1 P_{12} + x_2 P_{22}) \tag{8.4}$$

Vi kan uppenbarligen få $\frac{dV}{dt}$ negativ definit genom att välja

$$u = \begin{cases} \text{negativ} & \text{då } x_1 p_{12} + x_2 p_{22} & \text{positiv} \\ \text{positiv} & \text{då } x_1 p_{12} + x_2 p_{22} & \text{negativ} \end{cases} \quad (8.5)$$

Om vi har en förstärkare med olinjär karakteristik $f(e)$ sådan att

$$e f(e) \geq 0$$

så gäller att varje styrlag på formen

$$u = -f(x_1 p_{12} + x_2 p_{22}) \quad (8.6)$$

resulterar i att nolllösningen blir asymptotiskt stabil. Speciellt erhålles för reläförstärkaren

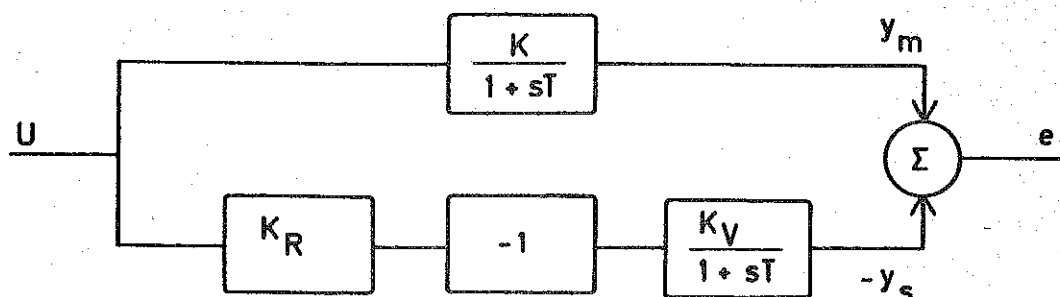
$$u = -\operatorname{sgn}(x_1 p_{12} + x_2 p_{22}) = -\operatorname{sgn}\left(x_1 + x_2 / \tau\right) \quad (8.7)$$

där $\operatorname{sgn} x$ är relä funktionen

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (8.8)$$

Exempel 8.2 - Användning av Lyapunovteori för dimensionering av adaptivt system

I många fall kan omgivningen påverka systemet så att systemets parametrar varierar. För att framgångsrikt reglera ett system under sådana betingelser måste koefficienterna i styrlagen varieras. System med denna egenskap brukar kallas adaptiva. Whitakers s.k. modellreferensmetod är en metodik som framgångsrikt använts för att variera koefficienterna i autopiloter. Det som följer är ett starkt förenklat exempel som visar hur grunddragen i Whitakers metod kan härledas med Lyapunovteori. I Fig. 8.1 visas ett förenklat blockschema för systemet.



Figur 8.1

Blockschema för enkelt adaptivt system med modellreferens

Processens överföringsfunktion är

$$\frac{K_V}{1 + sT}$$

där förstärkningsparametern K_V varierar medan tidskonstanten T är konstant. Systemets specifikationer har formulerats så att den önskade insignal utsignal relationen är given av överföringsfunktionen

$$\frac{K}{1 + sT}$$

För att kompensera variationerna i processens förstärkning K_V förses denna med en serieregulator med variabel förstärkning K_R . För att ställa in den variabla förstärkningen K_R förfäres på det sätt som illustrerats i figur 8.1.

Styrsignalen u får påverka såväl processen som en modell. Modellens utsignal jämföres med processens utsignal och förstärkningsparametern K_R justeras med ledning av felet. Problemet är att bestämma hur K_R skall ändras för att det totala systemet skall få de önskade egenskaperna.

Vi skall nu visa hur man med hjälp av Lyapunovteori kan bestämma hur K_R skall styras av felet så att det totala systemet blir stabilt.

Systemet beskrivs av följande ekvationer

$$\begin{aligned} T \frac{dy_m}{dt} &= -y_m + K u && \text{modell} \\ T \frac{dy_s}{dt} &= -y_s + K_R K_V u && \text{system} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Vidare är

$$e = y_m - y_s$$

och vi får följande ekvation för felet e

$$T \frac{de}{dt} = -e + (K - K_R K_V) u$$

Vi antar att koefficienten K_R styres med hjälp av ett hastighetsservo.

Inför nu tillståndsvariablerna

$$x_1 = e$$

$$x_2 = K - K_R K_V$$

och ekvationen för systemet kan skrivas

$$\begin{aligned} T \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + x_2 \cdot u \\ \frac{dx_2}{dt} &= -K_V \dot{K}_R \end{aligned} \quad (8.10)$$

Problemet är nu att välja parameterns ändringshastighet \dot{K}_R på ett sådant sätt att $K_V K_R$ överensstämmer med K .

Inför Lyapunovfunktionen

$$2V(x_1, x_2) = x_2^2 + \alpha x_1^2 \quad (8.11)$$

Vi finner då

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\alpha x_1^2}{T} + \frac{\alpha u}{T} x_1 x_2 - x_2 K_V \dot{K}_R \quad (8.12)$$

Om vi väljer \dot{K}_R så att

$$\dot{K}_R = \frac{\alpha u x_1}{K_V T}$$

blir tydligen dV/dt negativ semidefinit. Vi observerar att detta innebär att K_V måste vara känd för att \dot{K}_R skall kunna bestämmas. För att undvika detta kan vi välja $\alpha = K_V \beta$. Ovanstående ekvation lyder då

$$\dot{K}_R = \frac{\beta u}{T} x_1 \quad (8.13)$$

Vidare finner vi att systemekvationen har ingen lösning som helt förlöper på räta linjen $x_1 = 0$. Vi finner således att om parameterjusteringen sker enligt ovanstående styrlag så är nolllösningen asymptotiskt stabil. Om regulatorns förstärkning K_R ändras enligt styrlagen (8.13) så kommer således efter en parameterförändring förstärkningen K_R automatiskt att ställa in sig så att $K_R K_V = K$. Detta resonemang förutsätter att K_V ändras stegvis. Om K_V varierar ständigt måste ovanstående resonemang modifieras.

9. SAMBAND MELLAN LYAPUNOVTEORI OCH OPTIMERINGSTEORI

Det råder intima samband mellan optimeringsteori och stabilitetsteori. För att demonstrera dessa samband studerar vi det linjära systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (9.1)$$

som förutsättes vara asymptotiskt stabilt. Vi kan då finna en Lyapunovfunktion $V = x^T P x$ sådan att

$$\frac{dV}{dt} = -x^T Q x \quad (9.2)$$

genom att lösa ekvationen

$$A^T P + P A = -Q \quad (9.3)$$

Det gäller uppenbarligen

$$V(x(t, t_0, a)) - V(a) = \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt = - \int_{t_0}^t x^T(s) Q x(s) ds$$

Men då (9.1) är asymptotiskt stabil gäller

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, a)\| \rightarrow 0$$

$t \rightarrow \infty$

Således

$$V(a) = \int_{t_0}^{\infty} x^T(s) Q x(s) ds = a^T P a \quad (9.4)$$

och vi har fått en integralframställning av Lyapunovfunktionen.

Observera dock att detta ej är något bra sätt att utvärdera Lyapunovfunktionen då det kräver lösning av ekvationen (9.1)

Vi skall nu göra en utvikning för att studera ett annat problem för ekvation (9.1). Antag att systemets syfte kan karakteriseras med förlustfunktionen

$$\int_{t_0}^{\infty} x^T(s) Q x(s) ds \quad (9.5)$$

som det integrerade kvadratiska felet då systemet startar i tillståndet $x(t_0) = a$. En jämförelse med ekvation (9.4) visar nu att förlustfunktionen (9.5) är identisk med Lyapunovfunktionens värde i punkten $x = a$. Att bestämma en Lyapunovfunktion är således ekvivalent med att utvärdera en förlustfunktion.

Exempel

Betrakta ett andra ordningens system

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = 0$$

Beräkna förlustfunktionen

$$\int_t^{\infty} (x^2(s) + \mu \dot{x}^2(s)) ds$$

Införes tillståndsvariablerna

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

erhålles

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} x$$

Förlustfunktionen kan då skrivas

$$\int_t^{\infty} \dot{x}^T Q x \, ds$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

För att bestämma förlustfunktionen löser vi ekvationen

$$A^T P + P A = -Q$$

och vi finner då

$$P = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\mu}{4\zeta} \end{bmatrix}$$

$$V(x) = \zeta x_1^2 + \frac{1+\mu}{4\zeta} (x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2$$

Antag nu speciellt att systemet startas i tillståndet $x_1 = a$
och $x_2 = 0$

$$V(x) = a^2 \left(\zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta} \right)$$

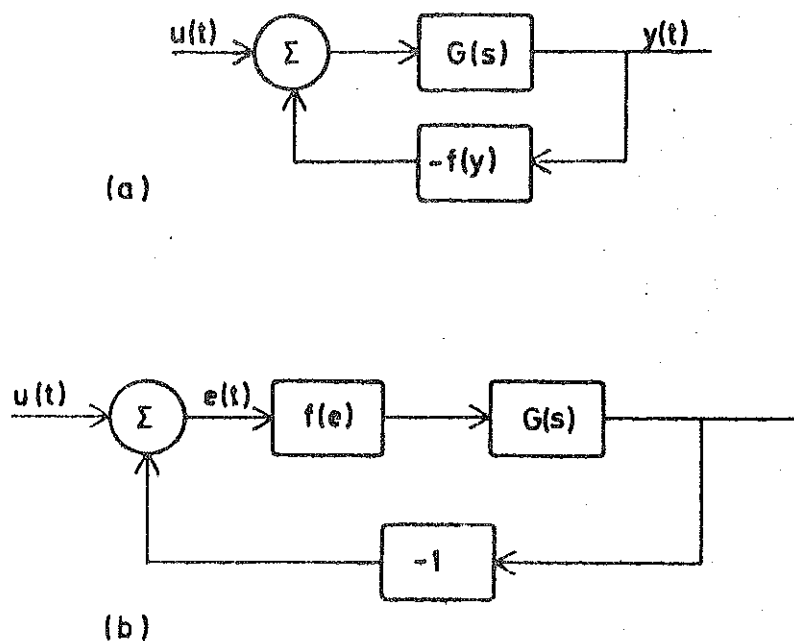
Om systemets dämpning kan väljas fritt finner vi således
att förlustfunktionen har minimum då

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+\mu}}{2}$$

Om $\mu = 1$ erhålles det välbekanta $\zeta = 1 / \sqrt{2}$

10. STABILITETSKRITERIER I FREKVENSPANET

En nackdel med Ljapunovs metod är att den inte ger någon anvisning om hur Ljapunovfunktionen ska konstrueras. För vissa klasser av olinjära system är dock generella Ljapunovfunktioner kända. Fig 1 visar ett sådant system.



Figur 1.

Systemet går alltså att splittra upp i ett linjärt tidsinvariant delsystem med en olinjär länk i återkopplingen. Då $u(t) \equiv 0$, är systemen i Fig 1 a och b ekvivalenta ur stabilitetssynpunkt.

Det linjära delsystemet antas ofta vara asymptotiskt stabilt, medan antagandena om $f(\cdot)$ varierar. T ex kan $f(\cdot)$ vara tidsvariabel eller tidsinvariant; man kan ha begränsningar på f 's derivata eller bara på funktionen själv osv.

Lure och Postnikov formulerade 1944 ett problem som kom att få stor betydelse för stabilitetsteorins utveckling.

Problem: Antag att $f(\cdot)$ uppfyller

$$\sigma f(\sigma) \geq 0.$$

Ge villkor på $G(s)$ som garanterar global asymptotisk stabilitet hos nolllösningen till systemet. \square

Antagandet innebär att $f(\cdot)$ ligger i 1:a och 3:e kvadranterna. Antag att vi skärper antagandet till

$$0 \leq \sigma f(\sigma) \leq K\sigma^2 \quad \text{ngt } K < \infty.$$

Ett nödvändigt krav för stabilitet är uppenbarligen att systemet är stabilt för alla linjära återkopplingar i intervallet $[0, K]$. Aizermanns hypotes (1957) innebär att detta också skulle vara tillräckligt. Motexempel gavs av Pliss (1958) och Krasovskij (1959).

Kalmans hypotes innebär att stabilitet skulle gälla om man har stabilitet för alla linjära återkopplingar i intervallet $[0, K]$ och skärper kravet på $f(\cdot)$ till

$$0 \leq \frac{f(\sigma_1) - f(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \leq K.$$

Ett motexempel har givits av J C Willems.

Lösningen på Lure-Postnikovs problem gavs 1960 av den rumänske matematikern V M Popov. Efter Popovs genombrott följde en lång rad av tillräckliga villkor för stabilitet, av vilka cirkelkriteriet är det mest använda.

Det förutsätts i fortsättningen att slutna systemet är asympt. stabilt för alla linjära, konstanta återkopplingar i respektive sektor. Detta innebär ingen inskränkning, men villkoret är bra att ha med för att utesluta felaktiga resultat i vissa patologiska exempel.

Cirkelkriteriet

Def. 1: Låt $H(s)$ vara en funktion från \mathbb{C} till \mathbb{C} som är reellvärd på reella axeln. $H(s)$ sägs vara positivt reell (P.R.) om

$$\operatorname{Re} H(s) \geq 0 \quad \text{för alla } s \text{ med } \operatorname{Re} s > 0. \quad \square$$

Några egenskaper hos P.R.funktioner:

- i) $H(s)$ är analytisk i $\operatorname{Re} s > 0$ (inga poler i öppna HHP).
- ii) Eventuella poler på imaginära axeln är enkla och har positiva residuer.
- iii) Om $H(s)$ är rationell, är skillnaden mellan täljarens och nämnarens gradtal högst 1.

En alternativ definition är:

Def. 1': Låt $H(s)$ vara en funktion från \mathbb{C} till \mathbb{C} som är reellvärd på reella axeln. $H(s)$ sägs vara positivt reell (P.R.) om i) och ii) ovan gäller och

$$\operatorname{Re} H(s) \geq 0 \quad \text{för alla } s \text{ med } \operatorname{Re} s = 0. \quad \square$$

Def. 2: $H(s)$ sägs vara strikt positivt reell (S.P.R.) om $H(s-\epsilon)$ är P.R. för något $\epsilon > 0$. □

Ex. 1: $H_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ är P.R. men ej S.P.R.

$H_2(s) = \frac{1}{s+a}$ är S.P.R. om $a > 0$. Rita! □

Sats 1: (Cirkelkriteriet)

(Narendra-Goldwyn, Sandberg, Zames m fl)

Betrakta differentialekvationen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - b f(y, t) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

Antag att $f(\sigma, t)$ uppfyller

$$0 \leq \sigma f(\sigma, t) \leq K\sigma^2 \quad (2)$$

Om $G(s) = C(sI - A)^{-1} b$ uppfyller

$$G(s) + \frac{1}{K} \quad \text{S.P.R.},$$

så är nolllösningen till (1) globalt asymptotiskt stabil. \square

Anm.: Villkoret på $G(s)$ innebär bl a att öppna systemet är asymptotiskt stabilt. Vi ska senare släppa detta villkor. \square

Bevis: Vi ansätter en Ljapunovfunktion på formen

$$V(x) = x^T P x.$$

Då blir

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \text{grad } V \cdot \frac{dx}{dt} = 2x^T P [Ax - bf(cx)] = \\ &= x^T (A^T P + PA) x - 2x^T P bf(cx). \end{aligned} \quad \square$$

För att komma vidare behöver vi

Lemma: (Jakubovič-Kalman-Lefschetz)

Det existerar $P = P^T > 0$, $\epsilon > 0$ och v som löser

$$\begin{cases} A^T P + PA = -vv^T - \epsilon \cdot I \\ Pb = c^T - \sqrt{2d} \cdot v \end{cases} \quad (3)$$

då och endast då

$$H(s) = c(sI - A)^{-1} b + d \quad \text{är S.P.R.} \quad \square$$

I vårt fall är $d = 1/K$. Sätt in (3) i uttrycket för $\frac{dv}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= x^T (-vv^T - \epsilon I) x - 2x^T \left(c^T - \sqrt{\frac{2}{K}} v \right) f(cx) = \\ &= -\epsilon x^T x - (x^T v)^2 + 2x^T v \sqrt{\frac{2}{K}} f(cx) - 2cx \cdot f(cx) = \\ &= -\epsilon x^T x - \left(x^T v - \sqrt{\frac{2}{K}} f(cx) \right)^2 + \frac{2}{K} f(cx)^2 - 2cx \cdot f(cx) = \\ &= -\epsilon x^T x - \left(x^T v - \sqrt{\frac{2}{K}} f(cx) \right)^2 - \frac{2}{K} f(cx)^2 \left(\frac{K \cdot cx}{f(cx)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Här är första termen < 0 för $x \neq 0$; den tredje är icke-positiv p g a antagandet (2) om $f(\sigma, t)$. Eftersom $V(x)$ är radiellt obegränsad, gäller global asymptotisk stabilitet. \square

Antag att olinjäriteten istället uppfyller

$$K_1 \sigma^2 \leq \sigma f(\sigma, t) \leq K_2 \sigma^2$$

där $K_1 \neq 0$. Genomför transformationen

$$\frac{dx}{dt} = Ax - b f(cx, t) = (A - b K_1 c) x - b [f(cx, t) - K_1 cx].$$

Sektorn för olinjäriteten blir $[0, K_2 - K_1]$. Enligt tidigare gäller då stabilitet om

$$G_1(s) = c(sI - A + b \cdot K_1 c)^{-1} b = \frac{G(s)}{1 + K_1 G(s)}$$

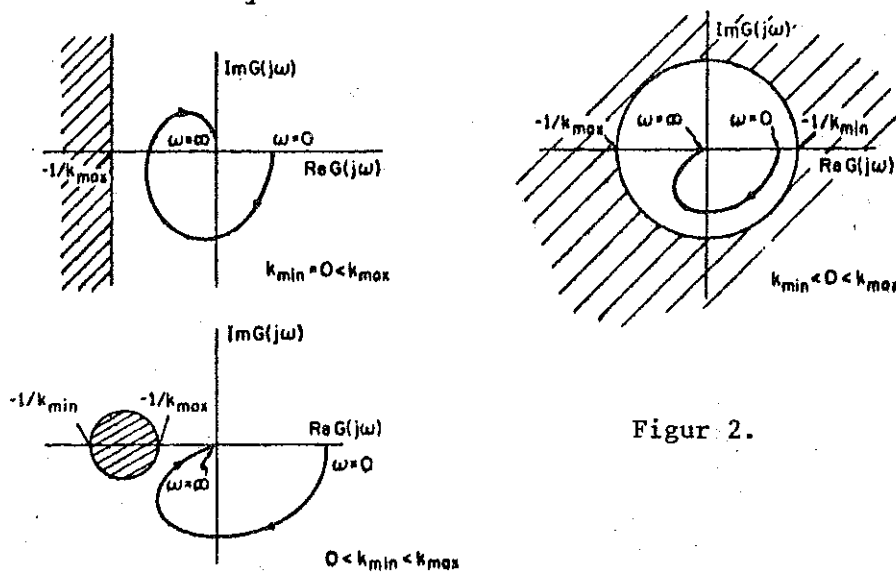
uppfyller

$$G_1(s) + \frac{1}{K_2 - K_1} \quad \text{S.P.R.}$$

Uttryckt i $G(s)$ blir detta

$$\frac{1 + K_2 G(s)}{1 + K_1 G(s)} \quad \text{S.P.R.}$$

Geometriskt uttryckt blir detta:



Figur 2.

Ann. 1: När $K_2 \rightarrow K_1$ (linjära fallet) övergår cirkelkriteriet i Nyquistkriteriet. \square

Ann. 2: Förutsättningen att öppna systemet är asymptotiskt stabilt är onödigt restriktivt i fallet $K_1 > 0$. Försök själv formulera satsen utan den förutsättningen (jfr användningen av argument-variationsprincipen istället för Nyquistkriteriet då $G(s)$ har poler i HHP). \square

Popovkriteriet

Sats 2: (Popov) Betrakta det autonoma systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - b f(y) \\ y = Cx \end{cases} \quad (4)$$

Antag att

i) A har alla egenvärden i öppna VHP och

$$0 \leq \sigma f(\sigma) \leq K\sigma^2 \quad K \leq \infty$$

eller att

ii) A har alla egenvärden i slutna VHP och

$$0 < \sigma f(\sigma) \leq K\sigma^2 \quad K \leq \infty.$$

Då är nolllösningen till (4) globalt asymptotiskt stabil om det existerar ett $\alpha \in \mathbb{R}$ så att

$$(1 + \alpha s) \left[G(s) + \frac{1}{K} \right] \quad \text{P.R.} \quad \square$$

Beviskiss: Man ansätter Ljapunovfunktionen

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + \alpha \int_0^{Cx} f(\sigma) d\sigma.$$

Räkningarna blir ungefär desamma som för cirkelkriteriet; även här är det avgörande steget en variant av Jakubovič-Kalmans lemma. \square

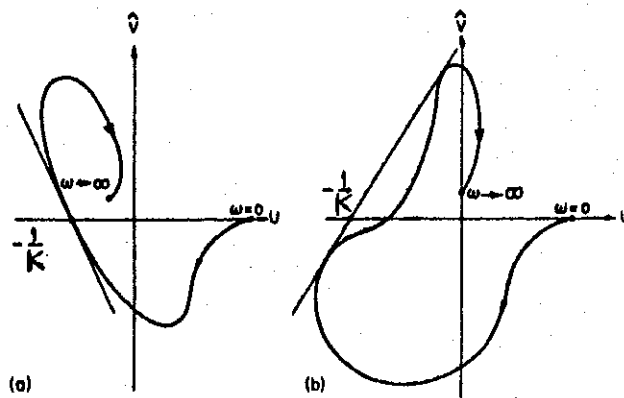
Även Popovkriteriet går att tolka geometriskt. Villkoret lyder

$$\operatorname{Re}(1 + \alpha s) \left[G(s) + \frac{1}{K} \right] \geq 0 \quad \text{för } s = i\omega,$$

dvs

$$\operatorname{Re} G(i\omega) - \alpha \cdot \omega \cdot \operatorname{Im} G(i\omega) \geq -\frac{1}{K}.$$

Detta innebär att kurvan $[\operatorname{Re} G(i\omega), \omega \operatorname{Im} G(i\omega)]$, $\omega \geq 0$, ska ligga till höger om någon linje genom $(-\frac{1}{K}, 0)$ med lutning $\neq 0$. Kurvan kallas Popov-kurvan eller den modifierade Nyquistkurvan (se fig nästa sida).



Figur 3. Två tillämpningar på Popovs sats.

Cirkelkriterium 2 ("Off-Axis Circle Criterion")

Cirkelkriteriet kan skärpas väsentligt om man lägger restriktioner på olinjäriteten.

Sats 3: (Cho-Narendra) Betrakta det autonoma systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - b f(y) \\ y = Cx. \end{cases} \quad (5)$$

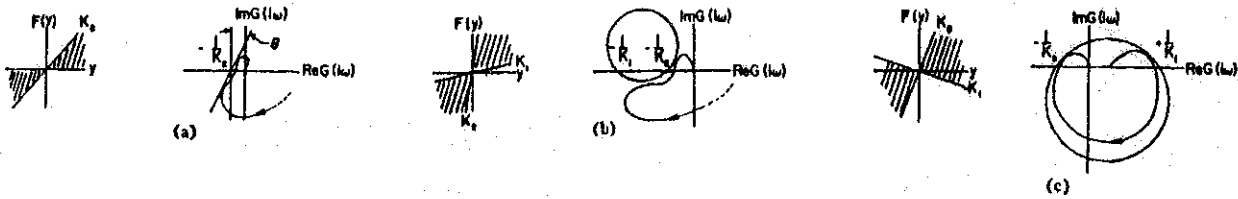
Antag att $f(\cdot)$ uppfyller

$$K_1 \leq \frac{f(\sigma_1) - f(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \leq K_2 \quad -\infty < K_1 < K_2 < \infty.$$

Antag vidare att A har alla egenvärden i öppna VHP. Då är nolllösningen till (5) globalt asymptotiskt stabil om Nyquist-kurvan inte har någon punkt gemensam med en cirkel genom $(-\frac{1}{K_1}, 0)$ och $(-\frac{1}{K_2}, 0)$ med godtycklig medelpunkt. \square

Beviset utelämnas.

Geometrisk tolkning av Cirkelkriterium 2:



Figur 4.

Anm.: Precis som i Cirkelkriterium 1 kan man i fallet $K_1 > 0$ släppa på kravet att A ska ha alla egenvärden i öppna VHP.

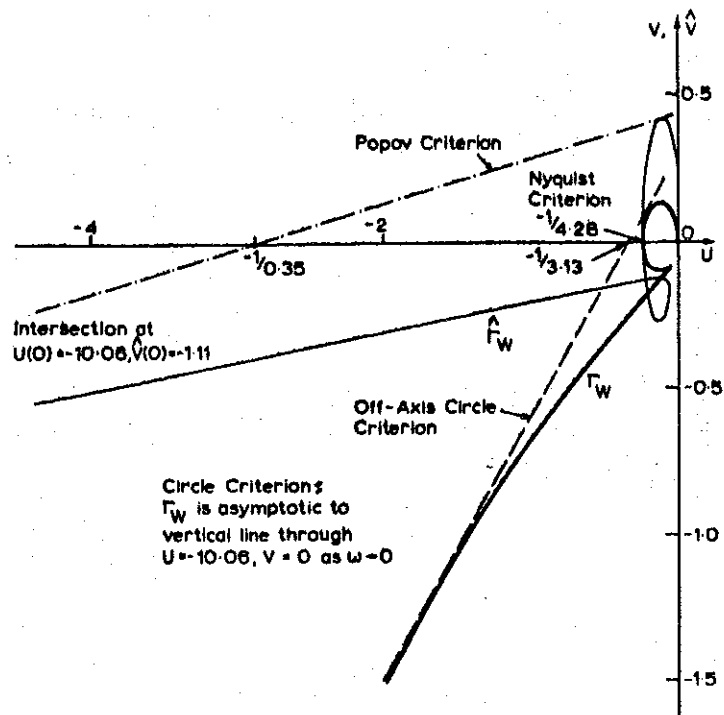
Exempel

Betrakta exemplet

$$G(s) = \frac{s + 1}{s(s + 0.1)(s^2 + 0.5s + 9)}$$

Nyquist- och Popov-kurvorna visas i Fig. 5.

- i) Nyquist-kurvan skär negativa reella axeln i punkten $(-1/4.28, 0)$. Slutna systemet är alltså globalt asymptotiskt stabilt för alla linjära, konstanta återkopplingar i intervallet $(0, 4.28)$.
- ii) Nyquist-kurvan närmar sig asymptotiskt en vertikal linje $u = -1/0.0993$ då $\omega \rightarrow 0$. Enligt cirkelkriteriet är alltså slutna systemet G.A.S. för alla tidsvariabla, olinjära återkopplingar i sektorn $[\epsilon, 0.0993]$, $\epsilon > 0$.
- iii) Den optimala Popov-linjen skär negativa reella axeln i punkten $(-1/0.35, 0)$. Enligt Popov-kriteriet är slutna systemet alltså G.A.S. för alla tidsinvarianta, olinjära återkopplingar i sektorn $(0, 0.35]$.



Figur 5. Γ_W Nyquist-kurvan, $\hat{\Gamma}_W$ Popov-kurvan.

- iv) En rät linje som "nästan" tangerar Nyquist-kurvan i två punkter går genom punkten $(-1/3.13, 0)$. Enligt Cirkelkriterium 2 är slutna systemet alltså G.A.S. för alla tidsberoende olinjäriteter, vilkas derivata ligger i intervallet $(0, 3.13)$.

12. ÖVNINGSEXEMPEL

4.1

Givet den olinjära differentialekvationen

$$\ddot{y} + 0.2(1 + \dot{y}^2) \dot{y} + y = 0$$

Låt tillståndsvariablerna vara $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$.

Ställ upp stabilitetsvillkoren för systemets nollösning.

Pröva som Lyapunovfunktion $V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$.

4.2

Lewis servomekanism kan beskrivas med differentialekvationen

$$\ddot{e} + 2\xi(1 - a|e|)\dot{e} + e = 0$$

Undersök om nollösningen $e = \dot{e} = 0$ är stabil. Uppskatta stabilitetsområdets storlek.

4.3

För att generera sinus och cosinusfunktioner kan man med hjälp av operationsförstärkare bygga upp en krets som löser ekvationerna

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 \quad x_1(0) = 1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \quad x_2(0) = 0$$

Dessa ekvationer har lösningen $x_1 = \cos t$ och $x_2 = \sin t$. Är denna lösning stabil? Är lösningen även asymptotiskt stabil? Vilka tekniska konsekvenser har detta?

Om kretsarna i stället kompletteras så att de representerar ekvationerna

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad x_1(0) = 1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad x_2(0) = 0$$

så finner vi att $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$ fortfarande är en lösning. Är denna lösning asymptotiskt stabil? Vilka tekniska konsekvenser har resultatet? Diskutera vad som händer i de båda fallen om initialvärdet är $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 0$.

4.4

Betrakta det dynamiska systemet

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Avsätt Lyapunovfunktionen $2V = x_1^2 + x_2^2$ och härled med hjälp av denna Lyapunovfunktion en linjär styrlag $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$ som ger ett asymptotiskt stabilt system.

4.5

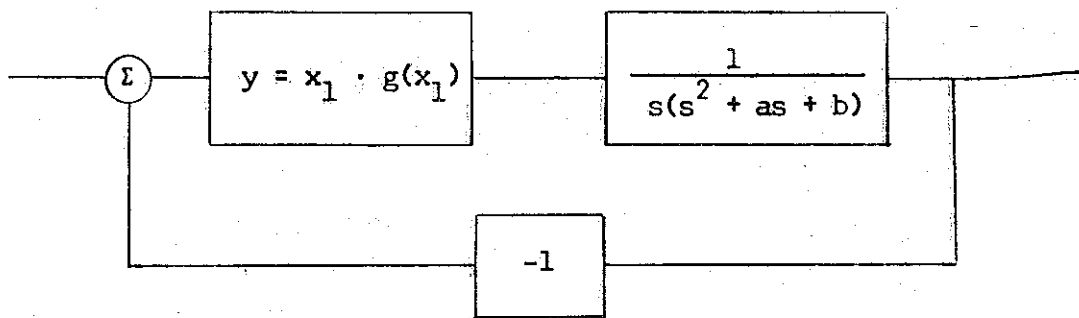
Ett olinjärt svängande system kan beskrivas av ekvationen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + b x^2 = 0$$

Undersök om jämviktssläget är en stabil lösning. Angiv även stabilitetsområdets storlek.

4.6

Betrakta ett olinjärt servosystem enligt figuren



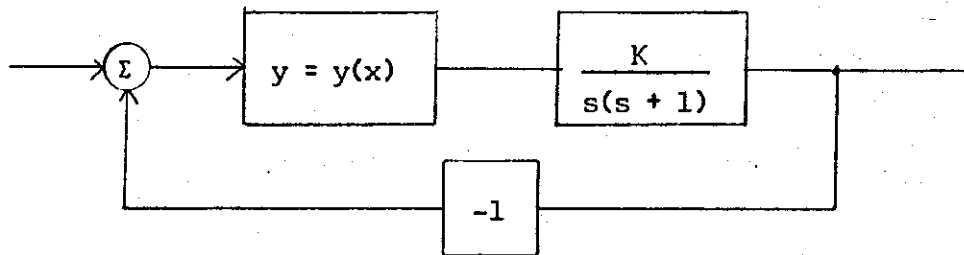
Konstruera en Lyapunovfunktion med hjälp av variabelgradientmetoden. Vilka villkor måste uppfyllas av a , b och f för att systemets jämviktstillstånd skall vara stabilt.

4.7

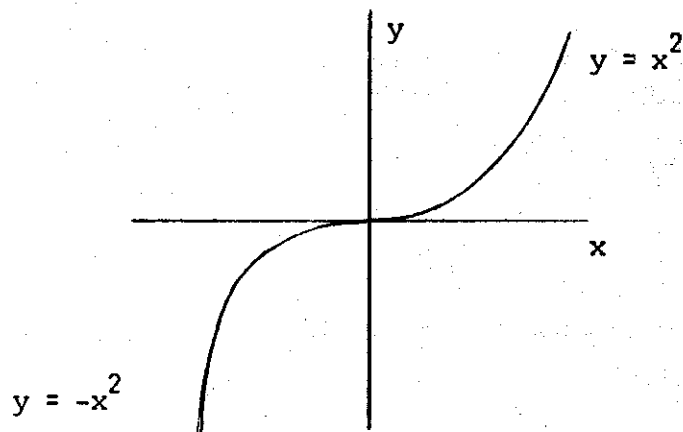
Använd variabelgradientmetoden för att bestämma en Lyapunovfunktion till Lewis servomekanism.

4.8

Betrakta ett olinjärt servosystem enligt nedanstående figur



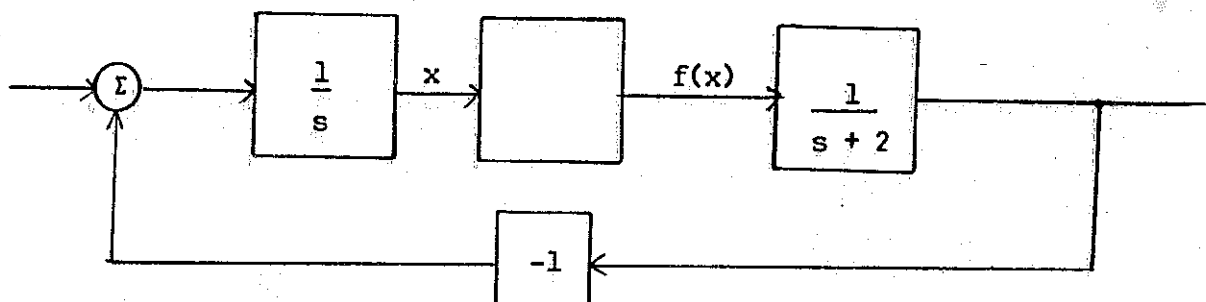
där olinjariteten har följande karakteristik



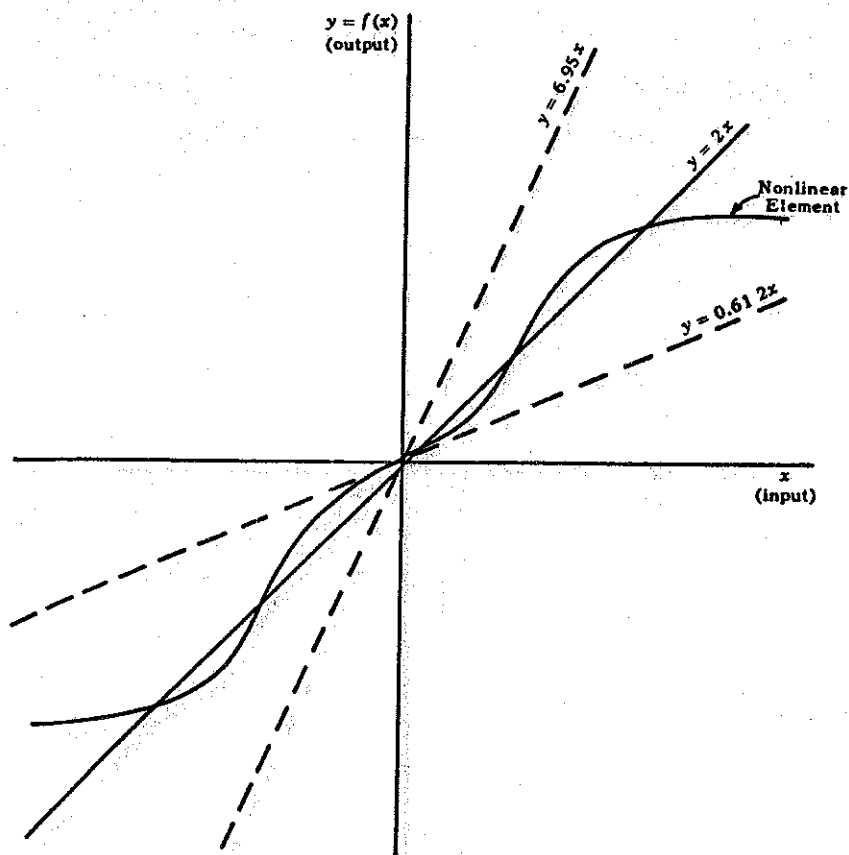
Angiv ett nödvändigt villkor för att systemets vilotillstånd skall vara asymptotiskt stabilt.

4.9

Betrakta systemet



där olinjäriteten $f(x)$ är angiven i nedanstående figur



Visa

att jämviktstillståndet är stabilt om funktionen $f(x)$ uppfyller villkoren

$$0.612 < \frac{f(x)}{x} < 6.95$$

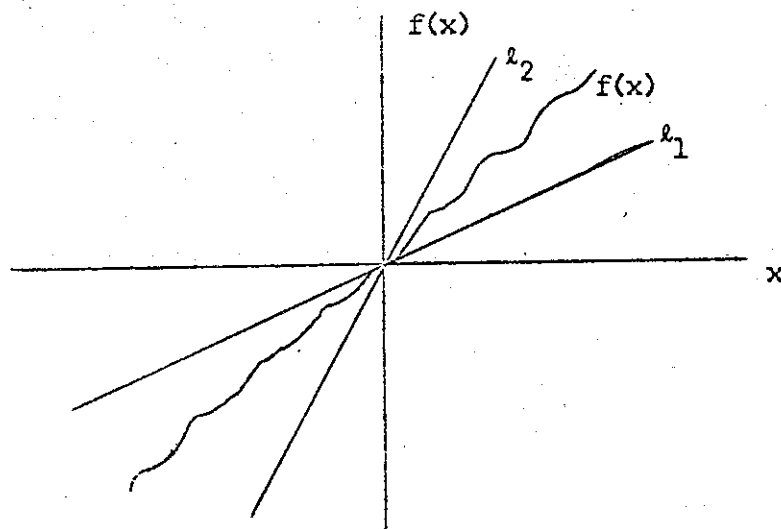
4.10

Ett olinjärt servosystem kan beskrivas med följande ekvationer

$$\dot{x}_1 = -3x_2 - f(x_1)$$

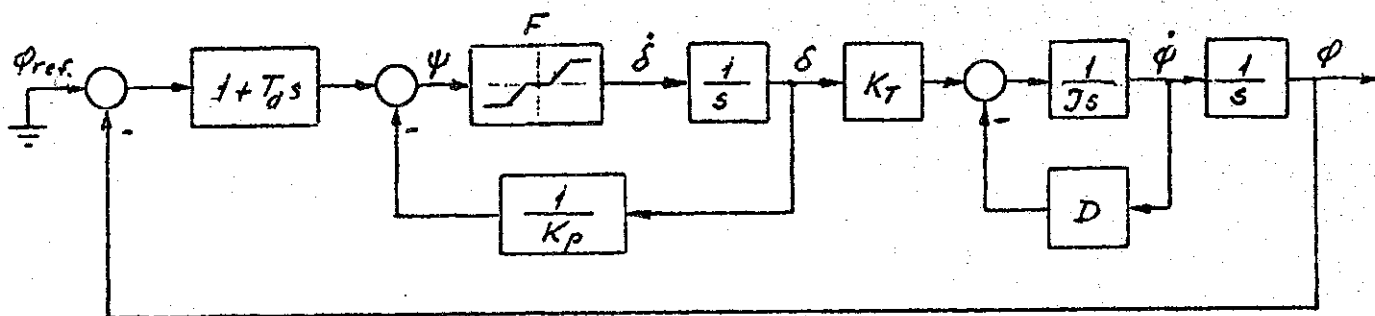
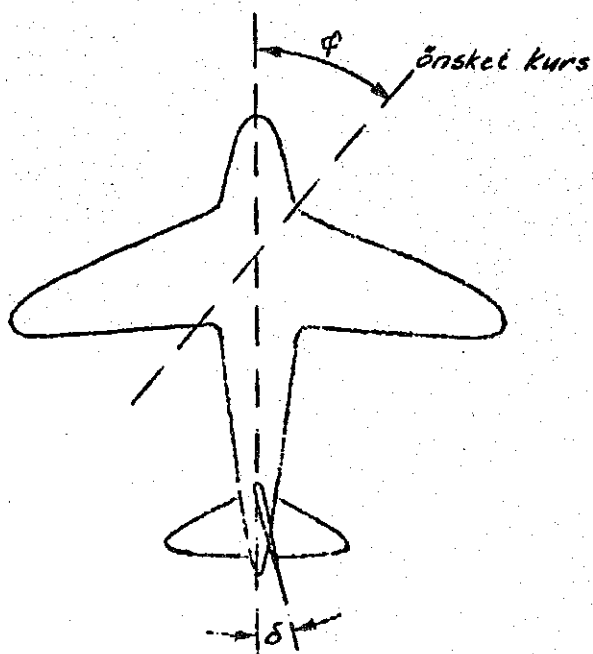
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + f(x_1)$$

Vid tillverkningen av systemen kommer den olinjära funktionen att variera något från system till system. I regel ansluter sig funktionen dock någorlunda till den linjära funktionen $f(x) = x$. Angiv två linjära funktioner l_1 och l_2 sådana att systemet alltid är stabilt om $f(x)$ ligger mellan gränserna l_1 och l_2 .



4.11

Figuren visar blockschema för en autopilot för styrning av ett flygplans kurs. Angiv den fysikaliska motsvarigheten till blockschemats delar. Angiv de villkor som fordras för att den rörelse som svarar mot att flygplanet flyger längs den givna konstanta kursen skall vara stabil.



4.12

Ett reläservo beskrives av ekvationen

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

där

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2.26 & -0.2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Variabeln u är reläets utsignal. Denna kan antaga värdena ± 1 . Reläets styrsignal skall vara en linjär funktion av tillståndsvariablerna. Hur skall denna linjära funktion väljas för att systemets jämviktstillstånd skall motsvara en stabil lösning.

4.13

Betrakta det linjära systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 + u$$

där styrvariabeln u är begränsad $|u| \leq 1$

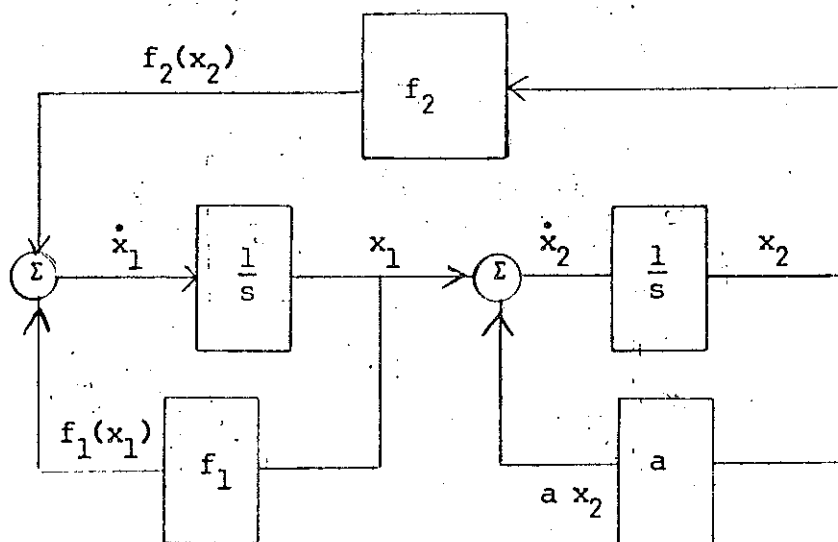
Angiv en kvadratisk Lyapunovfunktion V för det fria systemet ($u = 0$) sådan att

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 - x_2^2$$

Konstruera sedan med hjälp av Lyapunovfunktionen en stabil styrlag för relästyrning. Visa med blockschema hur systemet kan realiseras om endast variabeln x_1 är tillgänglig för mätning.

4.14

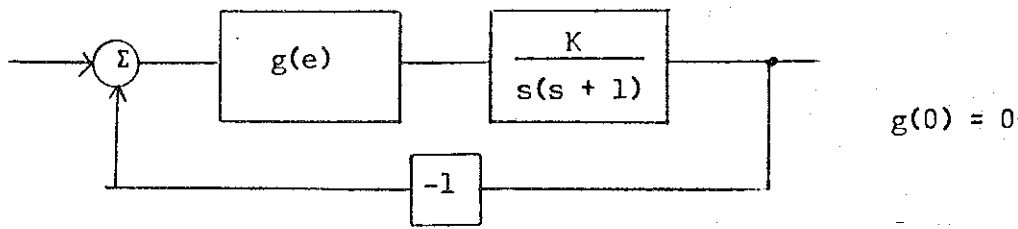
Systemet i figuren innehåller två olinjäriteter.



Här är $f_1(0) = f_2(0) = 0$ och f_1 och f_2 är deriverbara funktioner. Bestäm systemets stabilitetsgränser med Krasovskiis teorem.

4.15

Betrakta det olinjära systemet i nedanstående figur



Antages insignalen noll kan systemekvationen skrivas

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

där

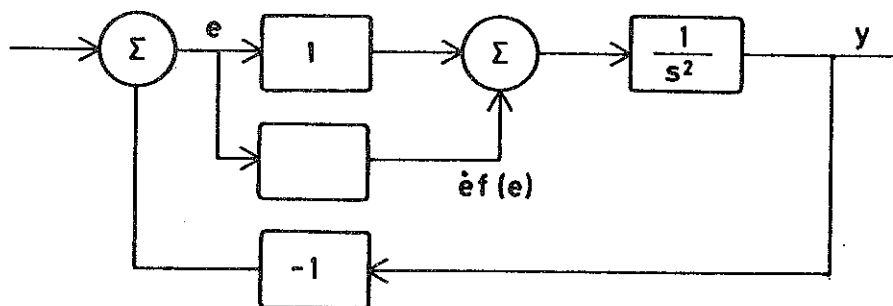
$$f_1(x) = x_2$$

$$f_2(x) = -Kg(x_1) - x_2$$

Vilka villkor måste funktion g uppfylla för att systemets nollösning skall vara stabilt. Härled först ett allmänt uttryck och insätt sedan $g(x) = x^3$. Lös problemet både med Krassovskii's metod och med variabla gradientmetoden.

4.16

Nedanstående figur visar blockschemat för ett reglersystem med olinjär dämpning.



Antag att referenssignalen är noll och inför tillståndsvariablerna $x_1 = e$, $x_2 = \frac{de}{dt}$. Systemekvationerna kan då skrivas

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 f(x_1)$$

För att bestämma den olinjära dämpningen har man intuitivt resonerat på följande sätt. Om systemet skall vara stabilt för små störningar från jämviktsläget, så måste vi ha

$$f(0) = \alpha > 0$$

För att få en snabb insvängning vid stora störningar bör dämptermen vara liten vid stora reglerfel e . Detta uppnås genom att välja

$$f(x) = \frac{\alpha}{1 + \beta x^2} \quad ; \quad \beta > 0$$

Blir systemets nollösning globalt asymptotiskt stabil med detta val av olinjär dämpning?

4.17

Systemet

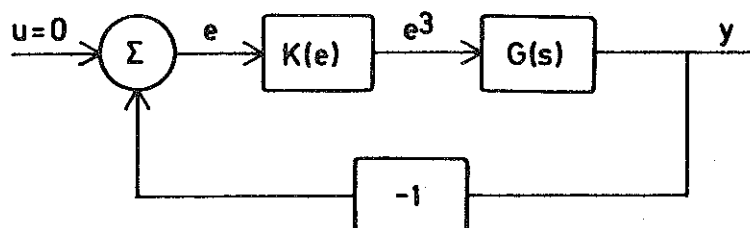
$$\dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

är givet. Visa med hjälp av Lyapunovs teori inom vilket område nollösningen $x_1 = x_2 = 0$ är stabil. Visa även att det existerar instabila lösningar.

4.18

Nedanstående system är givet



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$K(e) = e^3$$

K är alltså en förstärkare med kubisk karakteristik.

a) Bestäm systemets stabilitet med hjälp av L-funktionen

$$V = \frac{1}{2} y^4 + \frac{1}{2} y^2 + y \frac{dy}{dt} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

Är systemet globalt stabilt?

b) Bestäm stabiliteten med hjälp av beskrivande funktionsmetoden.

4.19

Systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

är givet. Härled med hjälp av Lyapunov teorin en stabil styr-
lag. Styrning sker med hjälp av ett relä, $u = \pm a$.

4.20

Systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_1 + x_1^2$$

har en stabil lösning $x_1(t) = x_2(t) = 0$. Uppskatta stabilitets-
områdets storlek med hjälp av Lyapunovfunktionen

$$V(x) = \frac{3}{2} x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

Vilket är det största möjliga stabilitetsområde som kan erhållas med $V(x)$ enligt ovan. Visa att lösningen är asymptotiskt stabil i hela ellipsen

$$\frac{3}{2} x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \leq 1/4$$

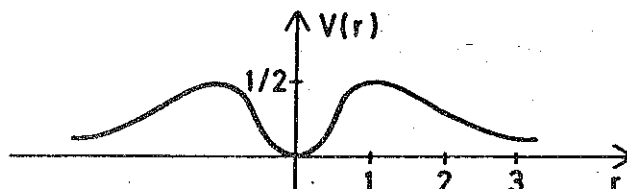
(Ledning till sista delen: Bryt ut någon lämplig faktor i uttrycket för dV/dt)

13. FLERVALSFRÅGOR

4.1

Systemet $\dot{x} = f(x)$ och Lyapunovfunktionen $v(r) = r^2/(r^4 + 1)$, där $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ är givna (2 dim.). Vidare är $dv/dt = \text{grad } V \cdot \dot{x} < 0$ för $r \neq 0$ och $r \neq 1$.

Vilken eller vilka av följande påståenden är alltid sanna?

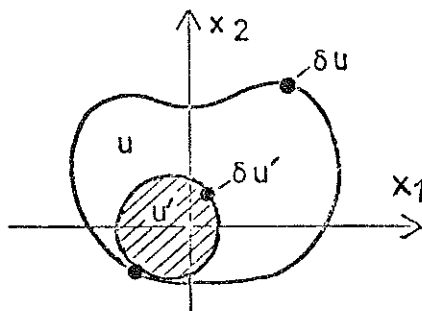


- A Med denna Lyapunovfunktion kan man garantera att varje lösning med $\|x(0)\| < 1$ asymptotiskt närmar sig nolllösningen $x(t) = 0$.
- B Med denna Lyapunovfunktion kan man garantera att varje lösning med $\|x(0)\| < 2$ asymptotiskt närmar sig nolllösningen $x(t) = 0$.
- C Med denna Lyapunovfunktion kan man garantera global asymptotisk stabilitet.

4.2

Systemet $\dot{x} = f(x)$ och Lyapunovfunktionen $v(x)$, (2 dim.) är givna. I det slutna området u gäller:

- I) $v(x) > 0$ för $x \neq 0$
- II) $dv/dt = \text{grad } v \cdot \dot{x} < 0$ för $x \neq 0$
- III) $f(0) = 0$



Vidare gäller att $\ell = \min_{x \in \delta u} v(x)$ samt att $u' = \{x: v(x) \leq \ell\}$ och

$\delta u' = \{x: v(x) = \ell\}$. Vilket eller vilka av följande påståenden är alltid sanna?

- A Med denna Lyapunovfunktion kan man garantera att varje lösning med $x(0) \in U$ asymptotiskt närmar sig nolllösningen $x(t) = 0$
- B Med denna Lyapunovfunktion kan man garantera att varje lösning som vid något tillfälle kommer in i U asymptotiskt närmar sig nolllösningen $x(t) = 0$
- C Med denna Lyapunovfunktion kan man garantera att varje lösning med $x(0) \in U$ asymptotiskt närmar sig nolllösningen $x(t) = 0$
- D Inget av ovanstående påståenden är sant

KAPITEL V - METODEN MED BESKRIVANDE FUNKTION

1. Inledning
2. Fourierserier
3. Definition av beskrivande funktion
4. Olinjäriteten behandlad som variabel förstärkning
5. Stabilitetsundersökning med hjälp av beskrivande funktion
6. Kompensering med hjälp av beskrivande funktion
7. Tillämpningsområden, noggrannhet och korrektion
8. Övningsexempel
9. Flervalsfrågor

Appendix: Beskrivande funktion för några olinjäriteter

1. INLEDNING

I detta kapitel skall vi närma oss stabilitetsbegreppet från en annan utgångspunkt än tidigare och vi skall ge villkor i frekvensplanet för stabilitet. Vi kommer att använda metoden med beskrivande funktion som ett stabilitetskriterium, vars giltighetsområde vi ej känner utan att simulera systemet.

Grundprincipen är att man antar att en periodisk lösning finns och undersöker villkoren för att denna svängning skall kunna upprätthållas. I de allra flesta fall existerar då en periodisk lösning. I undantagsfall existerar ingen periodisk lösning, trots att våra kalkyler förutser en sådan.

I detta senare fall har vi en indikation på att systemet är dåligt dämpat och mindre lämpat som reglersystem. Man måste då liksom när villkoren för självsvängning nästan är uppfyllda på något sätt modifiera systemet för att det skall kunna uppfylla sitt syfte. För att få en känsla för när metoden fungerar illustrerar vi med ett stort antal exempel.

I avsnitt 2 ger vi utan några bevis ett antal resultat från teorin om fourierserier, som utgör grunden för metoden med beskrivande funktion. Den beskrivande funktionen definieras i avsnitt 3 där vi även ställer upp några villkor på systemet för att metoden skall kunna tillämpas. I avsnitt 4 börjar vi att tänja ut den linjära stabilitetsteorin så att den även gäller för udda entydiga olinjäriteter.

I avsnitt 5 repeterar vi Nyquistteoremet och formulerar ett liknande kriterium för olinjära system med hjälp av beskrivande funktion.

Vi illustrerar med ett exempel i avsnitt 6 hur metoden kan användas för syntes.

Slutligen skall vi i avsnitt 7 något diskutera vilka frågor man kan få svar på, samt noggrannhet som är vanlig vid tillämpning av beskrivande funktion. Vi skall även antyda hur man kan förbättra approximationen.

2. FOURIERSERIER

I detta avsnitt skall vi sammanfatta några för metoden med beskrivande funktion viktiga resultat från teorin om fourierserier. Låt $f(z)$ vara en begränsad och integrerbar funktion. Låt vidare $f(z)$ vara 2π -periodisk, dvs

$$f(z) = f(z + 2\pi) \quad \forall z \quad (2.1)$$

Varje sådan funktion $f(z)$ kan tillordnas en fourierserie

$$\begin{aligned} T(z) &= \hat{a}_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz) \\ &= a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nz + \varphi_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

där

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cos nz \, dz \quad (n = 0, 1, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \sin nz \, dz \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \varphi_n = \operatorname{arctg} a_n/b_n \\ c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

För koefficienterna a_n och b_n gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

samt Parsevals formel

$$a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(z) \, dz \quad (2.5)$$

Man kan visa att serien (2.2) konvergerar mot $f(z)$ under mycket allmänna villkor. Även om vi endast tar med ändligt många termer i serien (2.2) så kommer den m :te delsumman

$$T_m(z) \hat{=} a_0/2 + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nz + b_n \sin nz) \quad (2.6)$$

att vara en god approximation av $f(z)$.

För fixt m gäller att a_n och b_n enligt (2.3) minimerar uttrycket

$$\int_0^{2\pi} [f(z) - T_m(z)]^2 dz \quad (2.7)$$

Fysikalisk tolkning

Ett periodiskt förlopp kan tänkas uppdelat i en konstant del, en grundton samt övertoner. Effekten hos ursprungsförloppet är lika med summan av effekterna hos de olika tonerna. Varje delsumma är så bestämd att den minimerar effekten hos approximationsfelet.

Exempel 2.1

Låt $f(z)$ vara en fyrkantvåg, dvs

$$\begin{cases} f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0 \\ f(z) = +1 & 0 < z < \pi \\ f(z) = -1 & \pi < z < 2\pi \end{cases} \quad (2.8)$$

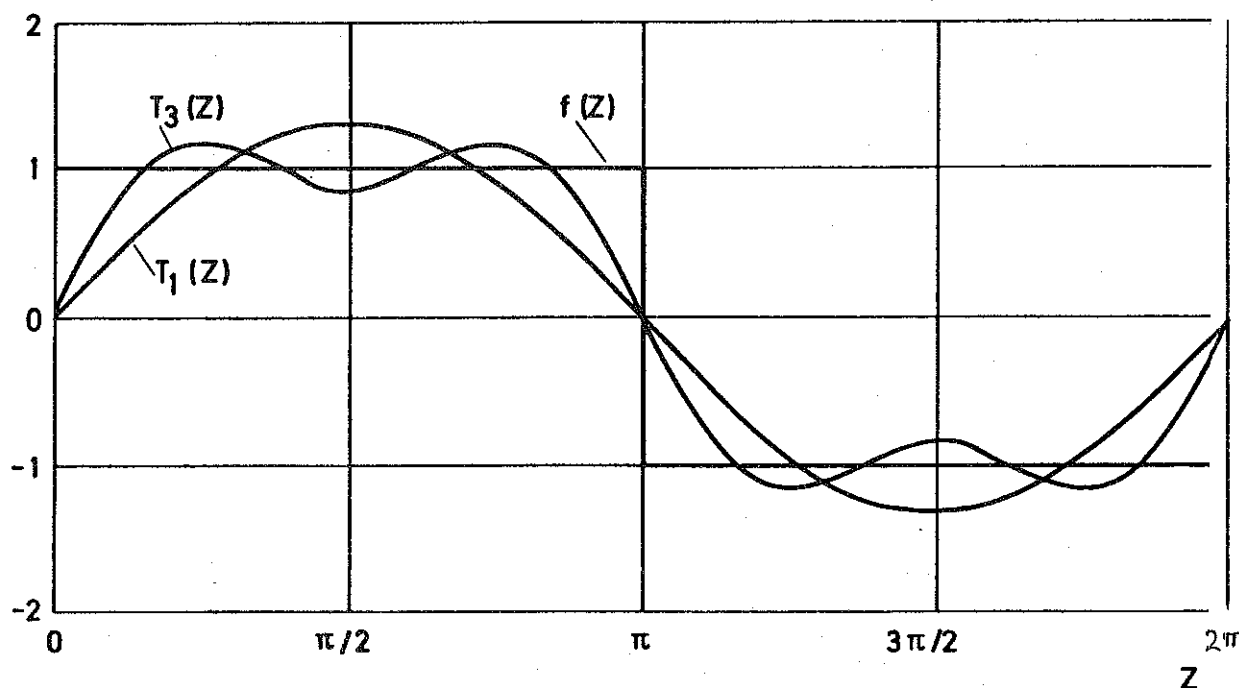


Fig. 2.1. Fyrkantvåg approximerad med ändlig fouriersserie $T_m(z)$

Enligt (2.3) får vi

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nz \, dz - \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos nz \, dz = 0 \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nz \, dz - \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \sin nz \, dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos nz}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos nz}{n} \right]_\pi^{2\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ jämt } 2k \\ \frac{4}{\pi n} & , \quad n \text{ udda } 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Fyrkantvågen $f(z)$ samt $T_1(z)$ och $T_3(z)$ visas i fig. 2.1.

3. DEFINITION AV BESKRIVANDE FUNKTION

I detta avsnitt skall vi definiera den beskrivande funktionen för en olinjär länk samt ange några förutsättningar för att metoden med beskrivande funktion skall gå att tillämpa. Vi börjar med att betrakta ett olinjärt återkopplat reglersystem vars blockschema framgår av fig. 3.1.

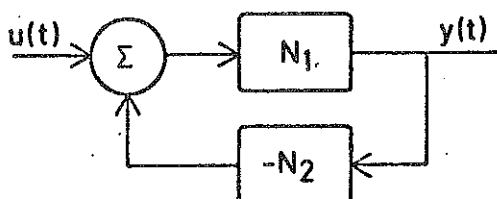
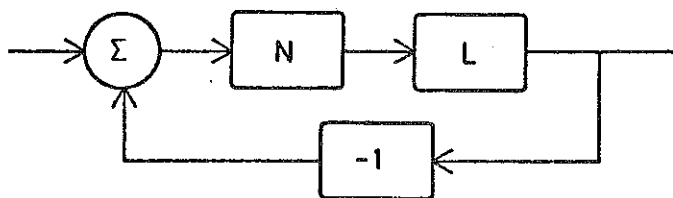
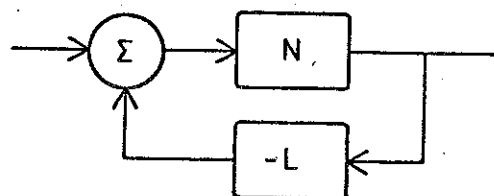


Fig. 3.1. Blockschema för olinjärt återkopplat reglersystem

Blocken N_1 och N_2 representerar dynamiska system, som får vara olinjära. Grundförutsättningen för att metoden med beskrivande funktion enkelt och med framgång skall gå att tillämpa på systemet i fig. 3.1 är att systemet kan uppdelas i ett olinjärt delsystem (N) och ett linjärt delsystem (L) enligt fig. 3.2. I fortsättningen skall vi anta att detta är möjligt. Vi skall huvudsakligen studera system, som har blockschema som visas i fig. 3.2 (a). Vid stabilitetsberäkningar med insignalen $u=0$ är dock alla system i fig. 3.2 ekvivalenta.



3.2(a)



3.2(c)

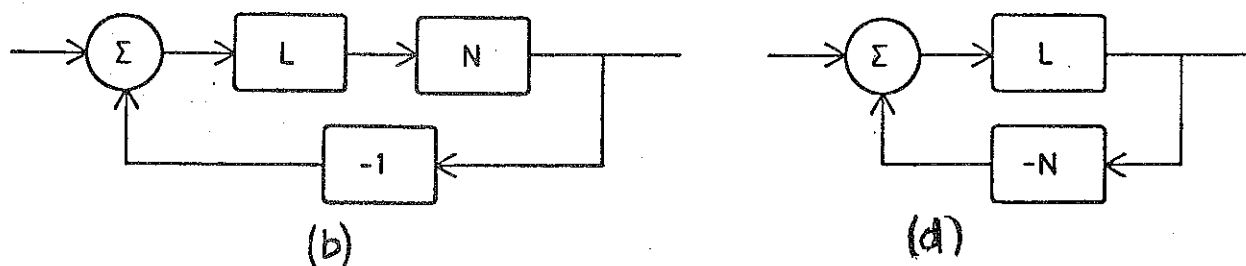


Fig. 3.2. Blockschema för olinjära system vars stabilitet går att undersöka med hjälp av metoden med beskrivande funktion.

Vidare förutsätter vi att länken N är tidsinvariant och ej ger upphov till subharmoniska svängningar. För att kunna tillämpa linjär teori önskar vi nu approximera den olinjära länken N i fig. 3.3 med ett linjärt uttryck, för en lämplig klass av insignaler till N .

Eftersom systemet N är olinjärt gäller ej superpositionssatsen och det är viktigt att noggrant specificera insignalen. Då vi i den fortsatta analysen huvudsakligen kommer att undersöka förutsättningarna för självsvängningar väljer vi en insignal av formen

$$x(t) = C \cdot \sin \omega t \quad (3.1)$$

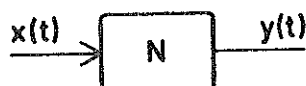


Fig. 3.3. Det olinjära systemet N , som skall approximeras.

Insignal-utsignal sambandet för systemet förutsättes känt och har utseende enligt fig. 3.4.

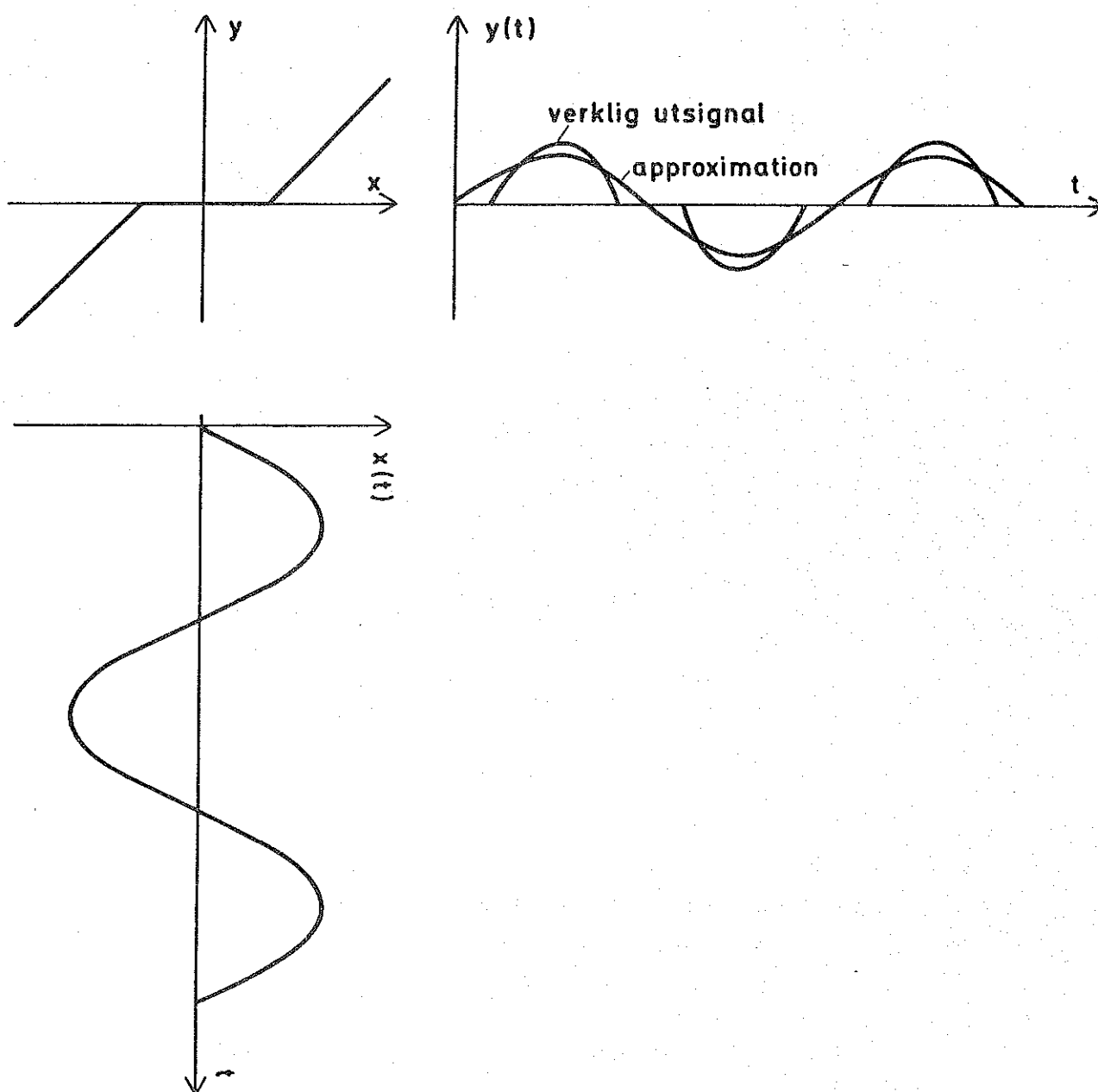


Fig. 3.4. Insignal-utsignal samband för det olinjära systemet samt en approximation av utsignalen.

Vi delar nu upp utsignalen i två delar, en sinusformad signal vars amplitud är beroende av insignal amplituden samt en fel-signal, dvs

$$y(t) = C \cdot K(C) \sin [\omega t + \psi(C)] + e(t) \quad (3.2)$$

Här önskar vi nu bestämma $K(C)$, en ekvivalent förstärkning som beror av insignal amplituden C , och $\psi(C)$ en ekvivalent fasförskjutning som också beror av C . Vi vill göra detta så att $e(t)$ blir så liten som möjligt i någon mening. Vi väljer att approximera $y(t)$ så bra som möjligt i medelkvadratmening, dvs

$$I = \int_0^{2\pi/\omega} e^2(t) dt \quad (3.3)$$

skall vara så liten som möjligt. Då följer av (2.7) att

$$\begin{aligned} C \cdot K(C) \cdot \sin[\omega t + \psi(C)] &= c_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin(\omega t + \varphi_1) \end{aligned}$$

där

$$\varphi_1 = \arctg(a_1/b_1)$$

Vi definierar nu den beskrivande funktionen $Y_N(C)$.

Definition 3.1

Med beskrivande funktion $Y_N(C)$ för det olinjära systemet i fig. 3.3 menas det komplexa talet $(b_1 + i a_1)/C$

$$Y_N(c) \triangleq (b_1 + i a_1)/C = c_1 e^{i\varphi} / C \quad (3.4)$$

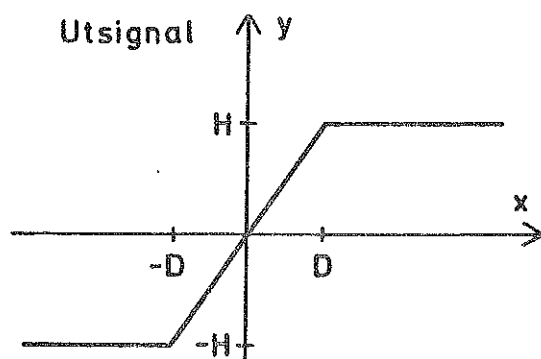
där a_1 och b_1 är koefficienterna i fourierserieutvecklingen av $y(t)$ då insignalen är $C \sin \omega t$.

Fysikalisk tolkning

Man kan tolka den beskrivande funktionen som en amplitudberoende överföringsfunktion från sinusformad insignal till grundtonen av den periodiska utsignalen. Den beskrivande funktionen anger således grundtonens amplitud och fasläge i förhållande till den sinusformade insignalen.

Exempel 3.1

Bestäm den beskrivande funktionen för en länk med mättning enligt fig. 3.5.



$$f(x) = \begin{cases} -H & x < -D \\ \frac{Hx}{D} & -D \leq x \leq D \\ H & x > D \end{cases}$$

Fig. 3.5. Karakteristik för mättning.

Insignalen är

$$x(t) = C \cdot \sin \omega t = C \cdot \sin \phi \quad (3.5)$$

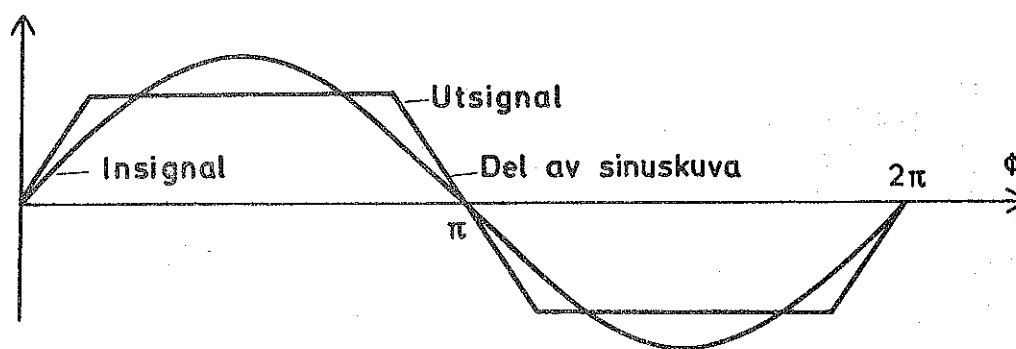


Fig. 3.6. In- och utsignal för länk med mättning.

Utsignalen blir då

$$y(\phi) = \begin{cases} \frac{H \cdot C}{D} \sin \phi & 0 < \phi < \phi_0 \\ H & \phi_0 < \phi < \pi - \phi_0 \\ \frac{H \cdot C}{D} \cdot \sin \phi & \pi - \phi_0 < \phi < \pi \end{cases}$$

där

$$\phi_0 = \arcsin D/C$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\phi) \cdot \cos \phi \, d\phi = 0$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\phi) \cdot \sin \phi \, d\phi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\phi) \sin \phi \, d\phi \\ &= \frac{4}{\pi \cdot D} \int_0^{\phi_0} \sin^2 \phi \, d\phi + \frac{4H}{\pi} \int_{\phi_0}^{\pi/2} \sin \phi \, d\phi \\ &= \frac{C \cdot H}{D \cdot \pi} \{2\phi_0 + \sin 2\phi_0\} \end{aligned}$$

Beskrivande funktionen är således

$$Y_N = \frac{H}{D\pi} \{2\phi_0 + \sin 2\phi_0\} \quad (3.6)$$

med

$$\phi_0 = \arcsin D/C \quad (3.7)$$

Observera att den beskrivande funktionen i detta fall är reell. Fig. 3.7 visar hur den beskrivande funktionen beror av insignalens amplitud. Vi observerar att för $C \ll D$ är den beskrivande funktionen H/D , dvs lutningen för karakteristikan inom det omätade området. Om $C > D$ avtar den ekvivalenta förstärkningen motont.

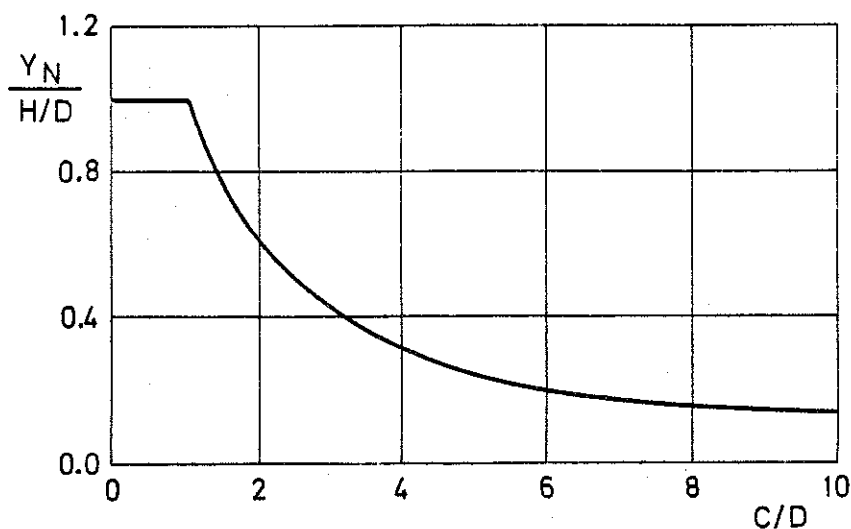


Fig. 3.7. Beskrivande funktionen för mättning.

Exempel 3.2

Bestäm den beskrivande funktionen för ett relä med hysteres, vars karakteristik visas i fig. 3.8.

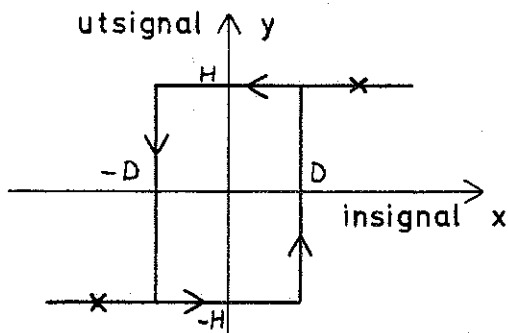


Fig. 3.8. Karakteristik för relä med hysteres.

Som tidigare är insignalen

$$x(t) = C \cdot \sin \omega t = C \cdot \sin \phi \quad (3.8)$$

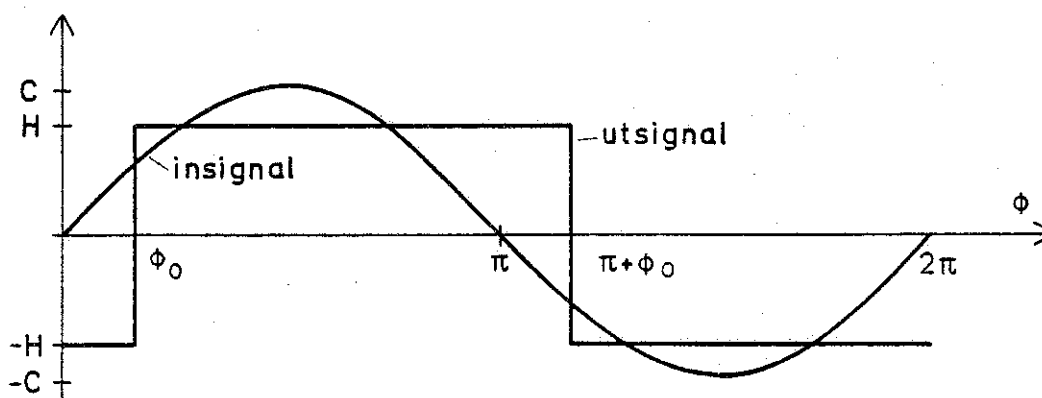


Fig. 3.9. Insignal och utsignal till relä med hysteres.

Utsignalen blir då (jämför fig. 3.9)

$$y(\phi) = \begin{cases} -H & 0 < \phi < \phi_0 \\ H & \phi_0 < \phi < \pi + \phi_0 \\ -H & \pi + \phi_0 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

där

$$\phi_0 = \arcsin D/C$$

Då blir

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\phi) \cos \phi \, d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\phi_0} (-H) \cos \phi \, d\phi \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\phi_0}^{\pi+\phi_0} (H) \cos \phi \, d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\phi_0}^{2\pi} (-H) \cos \phi \, d\phi \\
 &= -\frac{4H}{\pi} \sin \phi_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\phi) \sin \phi \, d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\phi_0} (-H) \sin \phi \, d\phi \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\phi_0}^{\pi+\phi_0} (H) \sin \phi \, d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\phi_0}^{2\pi} (-H) \sin \phi \, d\phi \\
 &= \frac{4H}{\pi} \cos \phi_0
 \end{aligned}$$

Således blir

$$\begin{aligned}
 Y_N &= \frac{4H}{\pi C} (\cos \phi_0 - i \sin \phi_0) = \\
 &= \frac{4H}{\pi C} e^{-i\phi_0} \quad (C > D) \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

där

$$\phi_0 = \arcsin (D/C) \quad (3.10)$$

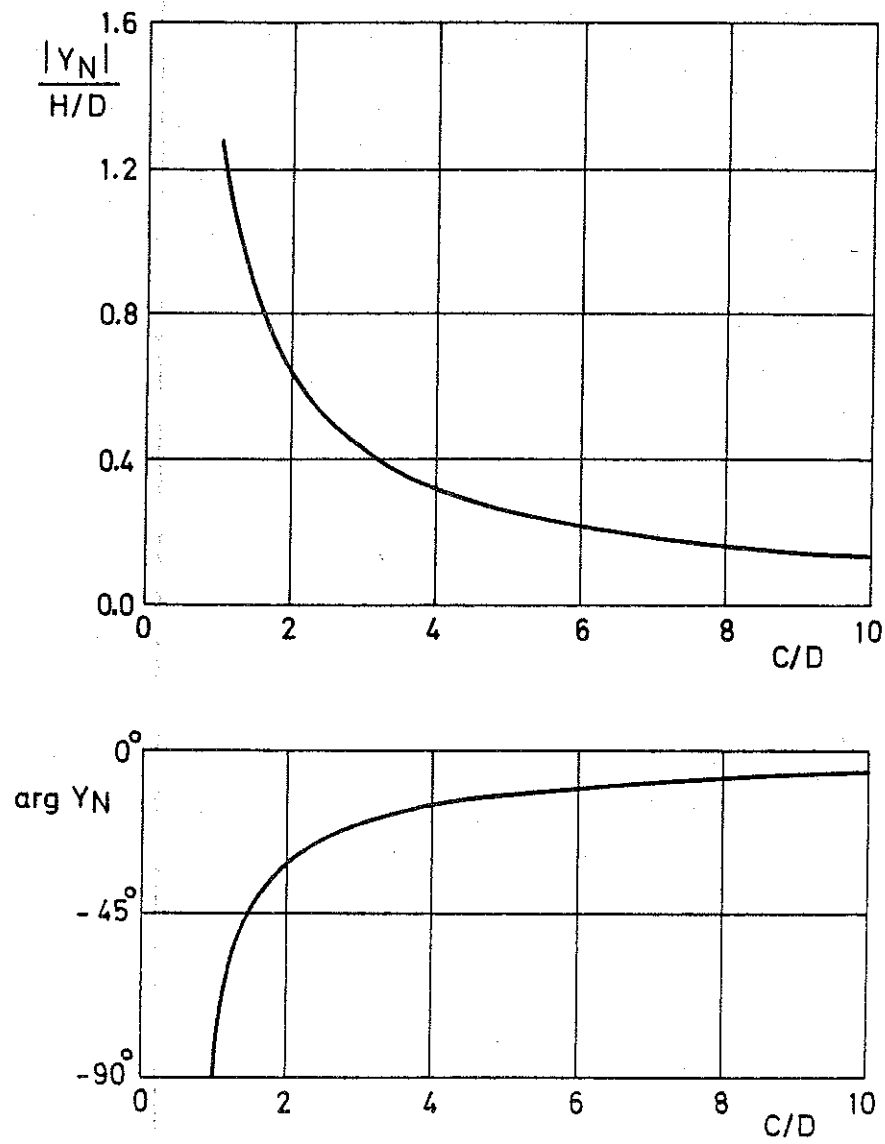


Fig. 3.10. Beskrivande funktion för relä med hysteres.

4. OLINJÄRITETEN BEHANDLAD SOM VARIABEL FÖRSTÄRKNING

I avsnitt 3 fann vi att den beskrivande funktionen i ett fall blev reell. Vi anar här en möjlighet att utnyttja delar av stabilitetsteorin för linjära system (se t.ex. K.J. Åström, Reglerteori, kap 5) genom att ersätta kretsförstärkningen K i den linjära teorin med $Y_N(C) \cdot K_L$, förutsatt att $Y_N(C)$ är reell. K_L betecknar här kretsförstärkningen för den linjära delen av det olinjära reglersystemet. Först skall vi ge ett tillräckligt villkor för att den beskrivande funktionen skall vara reell. Detta inträffar om olinjäriteten är entydig och udda, dvs

$$f(x) = -f(-x) \quad (4.1)$$

Bevis

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(C \cdot \sin \phi) \cdot \cos \phi \, d\phi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(C \cdot \sin \phi) \cdot \cos \phi \, d\phi \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(C \cdot \sin \phi) \cos \phi \, d\phi = 0 \end{aligned}$$

Då blir

$$Y_N = \frac{b_1}{C} \quad (\text{reell})$$

Vi illustrerar detta med ett exempel.

Exempel 4.1

Betrakta det reglersystem vars blockschema visas i fig. 4.1.

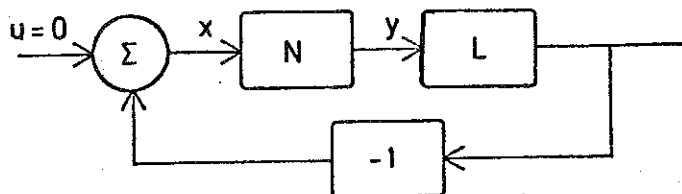


Fig. 4.1. Blockschema

Låt den linjära delen L ha överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)} \quad (4.2)$$

och låt den olinjära delen N bestå av en mättande förstärkare enligt fig. 4.2.

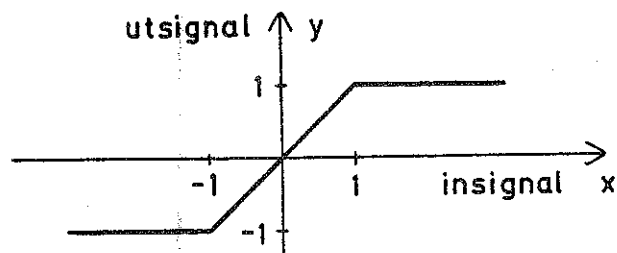


Fig. 4.2. Karakteristik för mättande förstärkare

Låt oss nu behandla systemet i fig. 4.1, som om det vore linjärt med kretsförstärkningen

$$K = Y_N(C) \cdot 10 \quad (4.3)$$

Vi vill nu avgöra om systemet är stabilt och ritar därför rotorten (jämför K.J. Åström, Reglerteori, exempel 5.5.1)

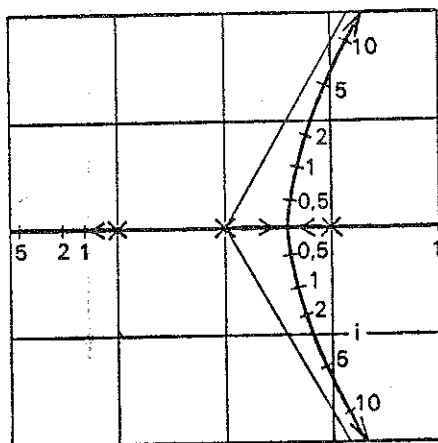


Fig. 4.3. Rotorten för ekvationen $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$ då parametern K antar positiva reella värden

Antag nu att $x(t) = C \cdot \sin \omega t$, $0 < C < 1$. Vi vet då från exempel 3.1 att $Y_N = 1$, vilket medför att $K = 10$. För $K = 10$ har karakteristiska ekvationen rötter i högra halvplanet, systemet instabilt och svängningens amplitud växer. Om nu å andra sidan $x(t) = C \cdot \sin \omega t$ $C > 2$ så gäller $Y_N < 0.6$ och $K < 6$.

För $K < 6$ har karakteristiska ekvationen alla rötter i vänstra halvplanet, systemet är stabilt och svängningens amplitud avtar. Vi har således anledning anta att systemet självsvänger med en sådan amplitud, C , att $Y_N \cdot 10 = 6$, dvs $Y_N = 0.6$. Ur fig. 3.7 kan vi då avläsa $C \approx 2.0$. Vi finner att $\omega = 1.4$ rad/sek och då blir

$$x(t) = 2 \cdot \sin 1.4t \quad (4.4)$$

I fig. 4.4 visas resultat av simulering på analogmaskin.

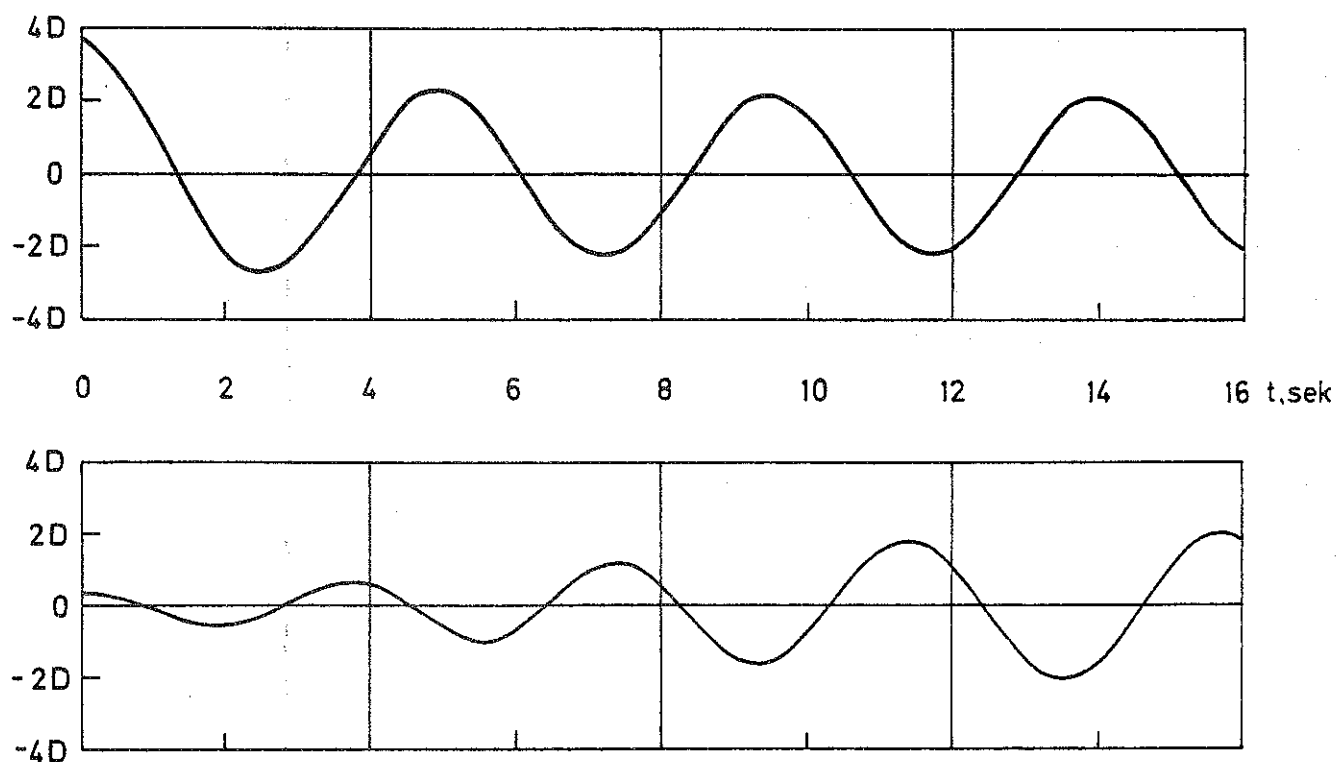


Fig. 4.4. Utsignalen från systemet. Den övre kurvan visar start med stort värde på utsignalen medan den undre visar start med litet värde på utsignalen.

5. STABILITETSUNDERSÖKNING MED HJÄLP AV BESKRIVANDE FUNKTION

Vi skall nu undersöka stabiliteten för ett system vars blockschema visas i fig. 5.1. Grundprincipen är att man antar att en periodisk lösning finns. Genom att följa grundtonen runt i kretsen kan man sedan undersöka om en svängning kan upprätthållas. I så fall kan man slutligen beräkna svängningens frekvens och amplitud.

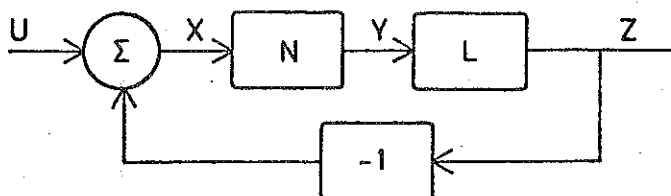


Fig. 5.1. Blockschema för olinjärt reglersystem.

För att vi enkelt och med framgång skall kunna undersöka stabiliteten skall vi göra följande förutsättningar:

- 1) Den linjära länken är av lågpasstyp och har överföringsfunktionen $G(s)$.
- 2) Den olinjära länken N är tidsinvariant och dess beskrivande funktion oberoende av frekvensen ω .
- 3) Den olinjära länken N riktar ej in signalen eller ger upphov till subharmoniska svängningar.

Det tredje antagandet innebär att det ej får finnas komponenter med lägre frekvens än ω i utsignalen.

Vi antar nu att det existerar en sinusformad signal på den olinjära länkens ingång

$$x(t) = C \cdot \sin \omega t$$

Den olinjära länkens utsignal är då periodisk och har periodtiden $2\pi/\omega$. Utsignalens grundton har amplitud och fasläge relativt insignalen som ges av den beskrivande funktionen. Då $G(s)$ är av lågpass typ blir $z(t)$ nästan sinusformad och det är en god approximation att räkna som om endast grundtonen finnes.

Då den beskrivande funktionen $Y_N(C)$ är en komplex storhet, som i likhet med en vanlig överföringsfunktion anger amplitudändring och fäsvridning för sinusformad insignal och är definierad för alla ω men oberoende av ω , räknar vi formellt med $Y_N(C)$ som om den vore en överföringsfunktion och får

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{Y_N(C) \cdot G(s)}{1 + Y_N(C) \cdot G(s)} = \frac{G(s)}{1/Y_N(C) + G(s)} \quad (5.1)$$

För att avgöra om systemet är stabilt använder vi nu kriterier liknande argumentvariationsprincipen och Nyquistteoremet.

Nyquistteoremet

Om $G_O(s)$ i fig. 5.2 ej har några poler i det område i s -planet som omslutes av Γ i fig. 5.3, och om bilden av Γ i G_O -planet ej omsluter punkten -1 så har den karakteristiska ekvationens ($1 + G_O(s) = 0$) alla rötter negativ realdel.

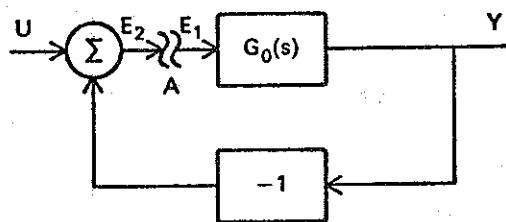


Fig. 5.2. Blockschema för enkelt återkopplat system.

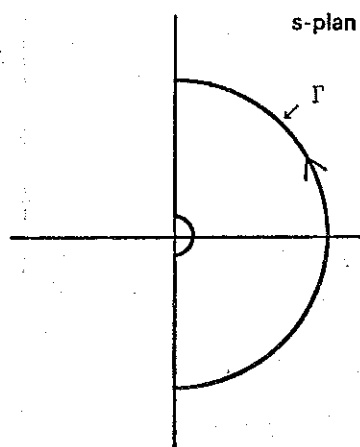


Fig. 5.3. Konturen Γ som används vid formulering av Nyquistteoremet.

Vi önskar nu för varje C undersöka om karakteristiska ekvationen

$$G(s) + 1/Y_N(C) = 0 \quad (5.2)$$

har rötter med positiv realdel. I analogi med Nyquistteoremet säger vi:

Om $G(s)$ i fig. 5.1 ej har några poler i det område i s -planet som omsluts av kurvan Γ i fig. 5.3, och om bilden av Γ i G -planet ej omsluter punkten $-1/Y_N(C)$ så minskar svängningens amplitud. Om bilden av Γ omsluter punkten $-1/Y_N(C)$ så ökar svängningens amplitud.

Vi kan avgöra stabiliteten med en grafisk metod. I det komplexa G -planet ritar vi

- 1) Bilden av kurvan Γ i fig. 5.3 vid avbildningen $G(s)$
- 2) $-1/Y_N(C)$ som funktion av amplituden C .

Nedan visas några typiska fall som kan inträffa.

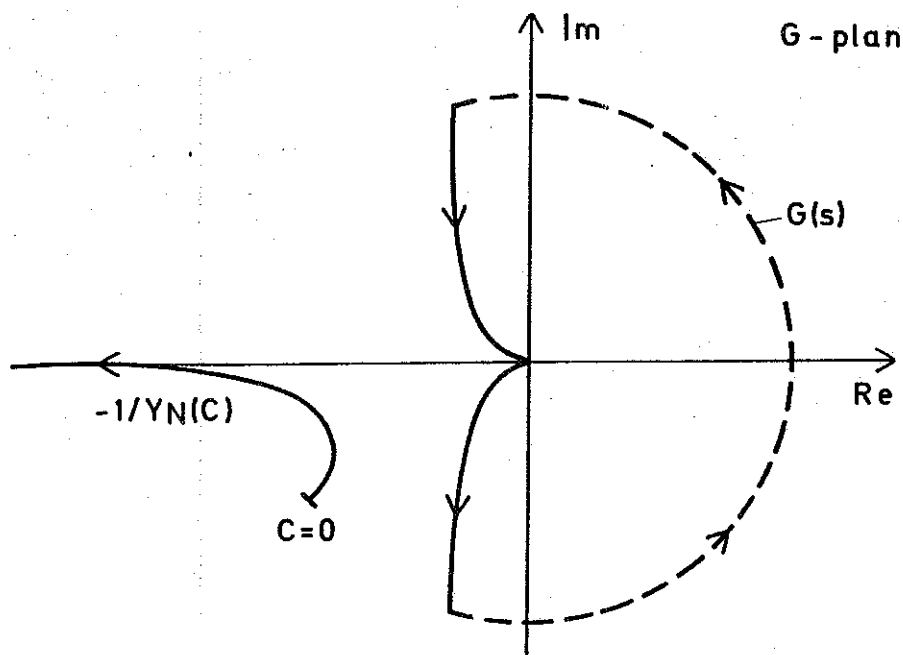


Fig. 5.4. Nyquistdiagram

I fig. 5.4 omsluter bilden av F i s -planet aldrig någon punkt på kurvan $-1/Y_N(C)$ och eventuellt uppkomna svängningar kommer att dämpas ut. Vi säger att vi har stabilitet för alla amplituder.

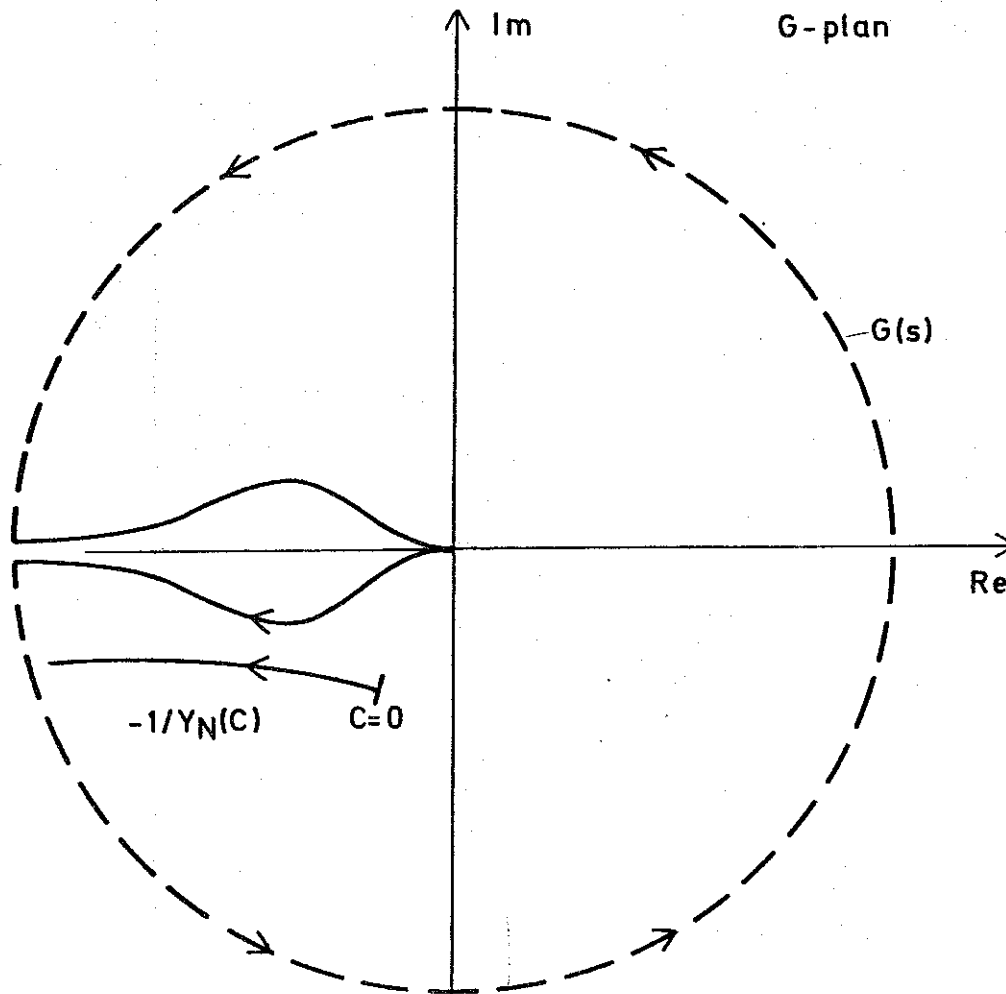


Fig. 5.5.

I fig. 5.5 omsluter bilden av Γ i s -planet varje punkt på kurvan $-1/Y_N(C)$ för ändliga värden på C . Amplituden på svängningar som uppkommer kommer att växa. Vi säger att vi har instabilitet för alla amplituder.

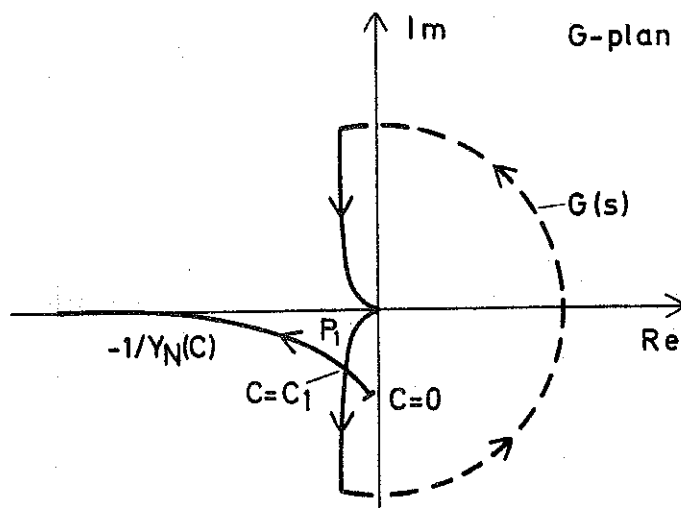


Fig. 5.6.

I fig. 5.6 kommer svängningar med amplituden C ($C < C_1$) att växa ty för dessa C -värden omsluter bilden av Γ i s -planet punkterna på kurvan $-1/Y_N(C)$. Däremot för $C > C_1$ kommer eventuella svängningar att dämpas och systemet ställer in sig så att det svänger med amplituden C_1 och vinkelfrekvensen ω_1 . P_1 kallas konvergent punkt. Fenomenet att en självsvängning växer upp från ett lågt värde på C kallas i amerikansk litteratur "soft-self excitation".

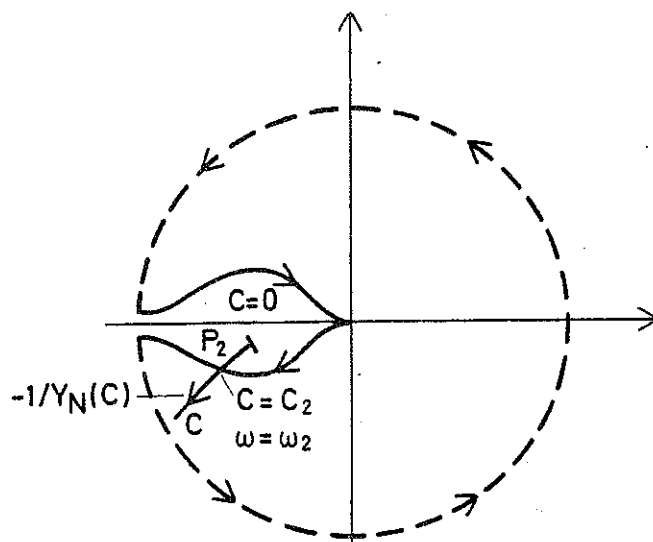


Fig. 5.7.

I fig. 5.7 kommer eventuella svängningar med amplituden C ($C < C_2$) att dämpas ut ty för dessa värden på C omsluter bilden av Γ i s -planet ej punkterna på kurvan $-1/Y_N(C)$. Om däremot det finns en svängning med amplituden C ($C > C_2$) kommer amplituden att växa. Punkten P_2 kallas divergent punkt. Förhållandet att systemet måste ges en tillräckligt kraftig störning innan svängningar erhålles kallas i amerikansk litteratur "hard-self excitation".

Exempel 5.1

Betrakta systemet vars blockschema visas i fig. 5.8. Vi vill undersöka om villkoren för en stabil självsvängning är uppfyllda.

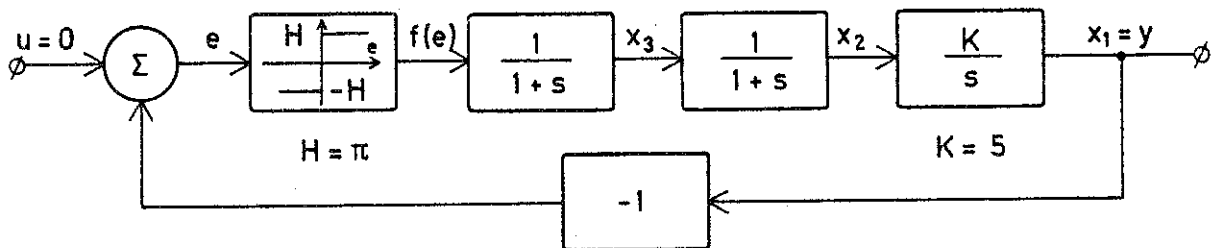


Fig. 5.8. Reläservo.

Vi beräknar först beskrivande funktionen för ett relä med $H = \pi$.

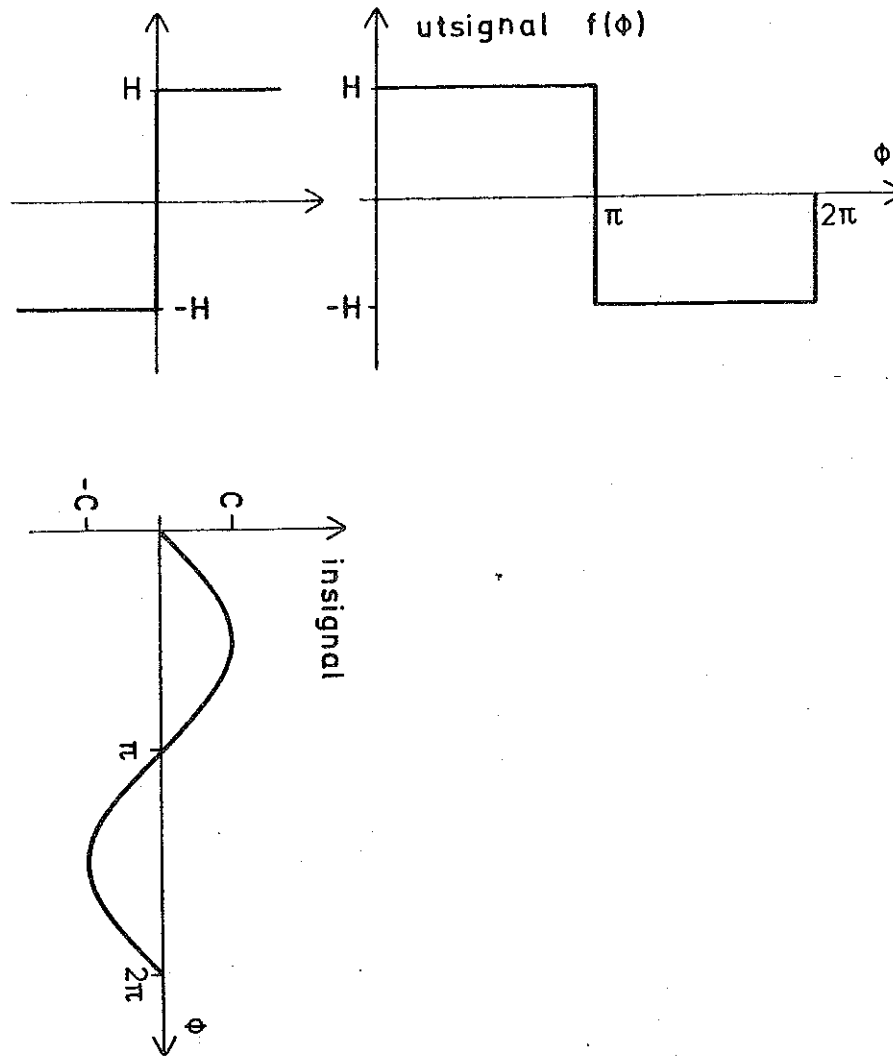


Fig. 5.9. In- och utsignal till relä.

Fourierkoefficienterna

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cdot \cos \phi \, d\phi = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cdot \sin \phi \, d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H \cdot \sin \phi \, d\phi$$

$$= \frac{4H}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \, d\phi = \frac{4H}{\pi} [-\cos \phi]_0^{\pi/2} = \frac{4H}{\pi}$$

Beskrivande funktionen blir då

$$Y_N = \frac{4H}{\pi C}$$

$$-1/Y_N = -\frac{\pi C}{4H} = -\frac{C}{4}$$

Villkoret för självsvängning är uppfyllt då

$$-1/Y_N = G(j\omega)$$

$$-\frac{C}{4} = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)^2} \quad \text{vilket ger}$$

$$C = 4 \cdot K/2 = 10 \quad \text{och} \quad \omega = 1.0$$

För att undersöka om den funna svängningen är stabil eller instabil studerar vi bilden av Γ i s-planet vid avbildningen $\frac{K}{s(1+s)^2}$.

För $C > 10$ har ekvationen $1/Y_N(C) + G(s) = 0$ en rot med positiv realdel och svängningens amplitud ökar. För $A > 10$ har ekvationen $1/Y_N + G(s) = 0$ rötter med negativ realdel och svängningens amplitud minskar. Den funna svängningen är således stabil.

Med hjälp av beskrivande funktion kan vi således förutse en stabil svängning med amplituden $C = 10$ och vinkelfrekvensen $\omega = 1.0$ rad/sek.

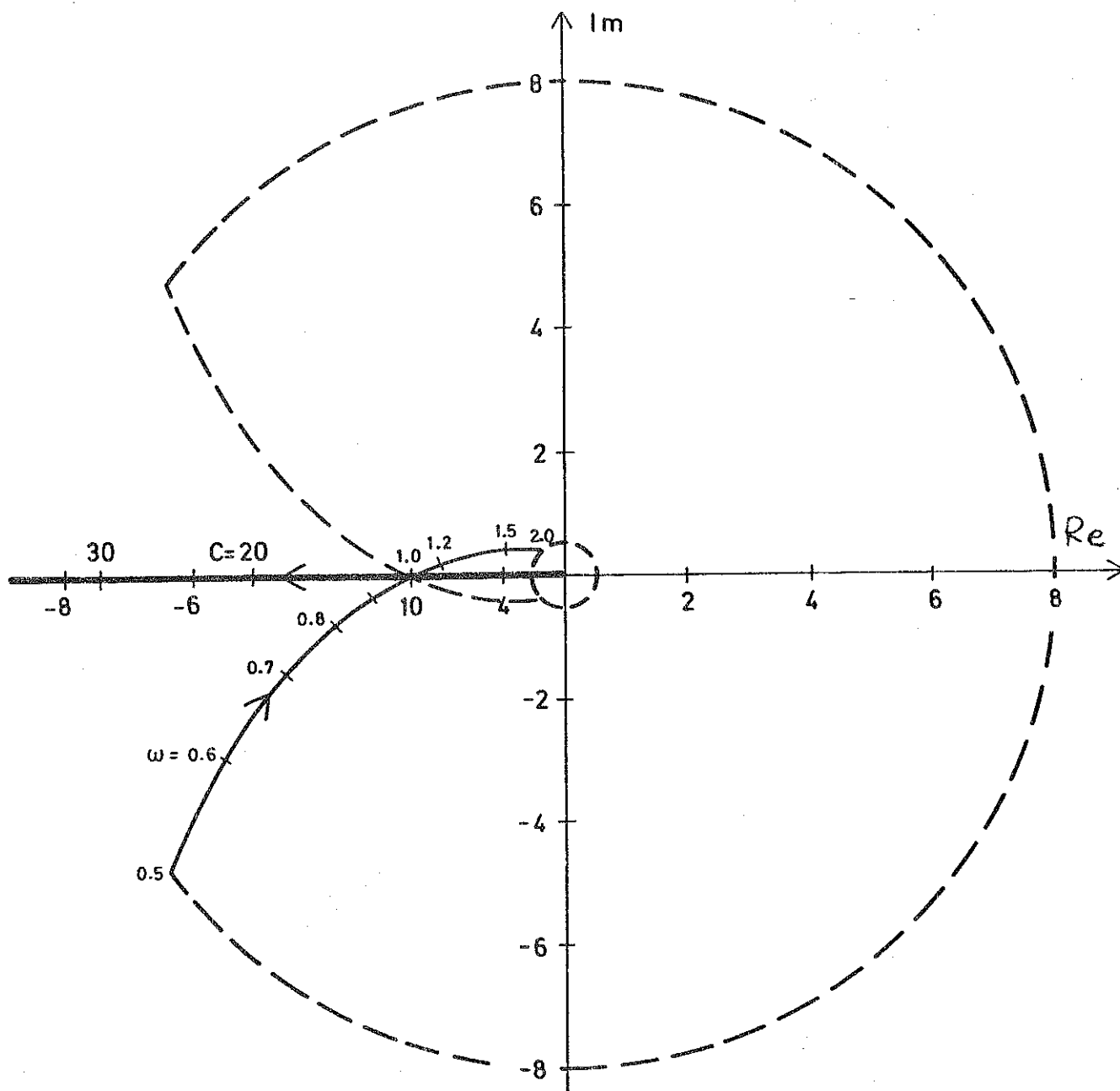


Fig. 5.10. Nyquistdiagram för $G(s) = \frac{5}{s(s+1)^2}$ och beskrivande funktionen för relä.

Exakt lösning av differentialekvationen ger en svängning med amplituden $A = 10.33$ och en vinkelfrekvens $\omega = 1.023$ rad/sek.

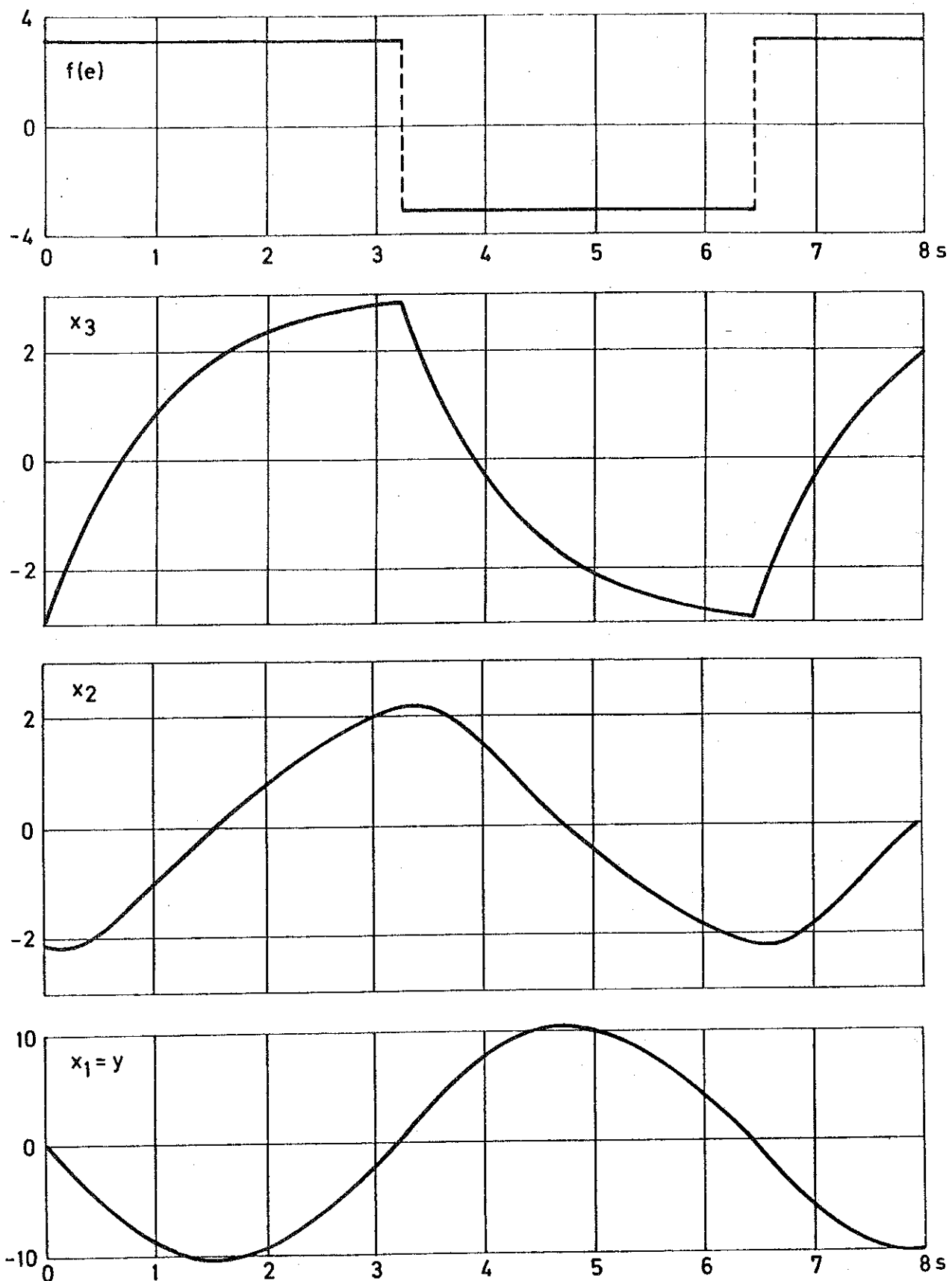


Fig. 5.11. Kurvformer i några olika punkter i blockschemat enligt fig. 5.8.

Med hjälp av beskrivande funktioner var det således möjligt att förutsäga en stabil självsvängning samt att noggrant bestämma dennas frekvens och amplitud.

6. KOMPENSERING MED HJÄLP AV BESKRIVANDE FUNKTION

I vissa fall kan man med hjälp av beskrivande funktionen få upplysning hur man skall kompensera ett system med stabil självsvängning så att självsvängningen upphör. Vi illustrerar detta med ett exempel.

Exempel 6.1

Betrakta ett tredje ordningens servo system med blockschema enligt figur 6.1. Det linjära systemet L har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{4.0}{s(1+s)(1+0.1s)}$$

Den olinjära länken N är en glappande kuggväxel med karakteristik enligt fig. 6.2, där $D = 1$.

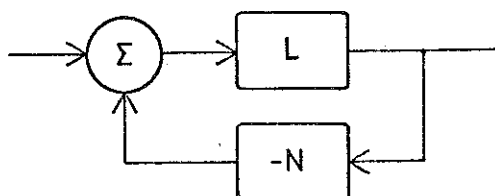


Fig. 6.1

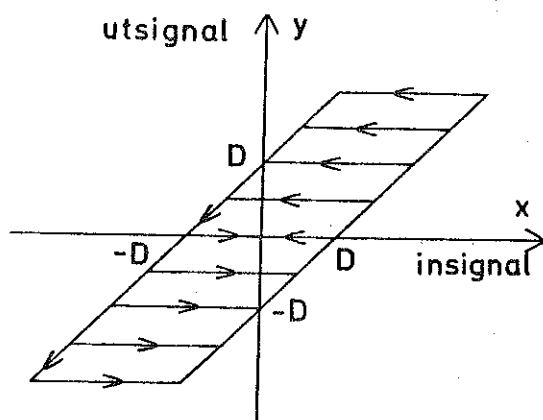


Fig. 6.2. Karakteristik för glapp

Vi ritar $|G(i\omega)|$ och $-1/Y_N(C)$ i ett Nicholsdiagram, se fig. 6.3. Utan kompensering har vi två skärningspunkter P_1 och P_2 mellan de båda kurvorna. Här är P_1 en konvergent punkt medan P_2 är en divergent punkt. Vi förutsäger således en självsvängning med amplituden $C_1 = 2.5 D$ och vinkelfrekvensen $\omega_1 = 1.5$ rad/sek.

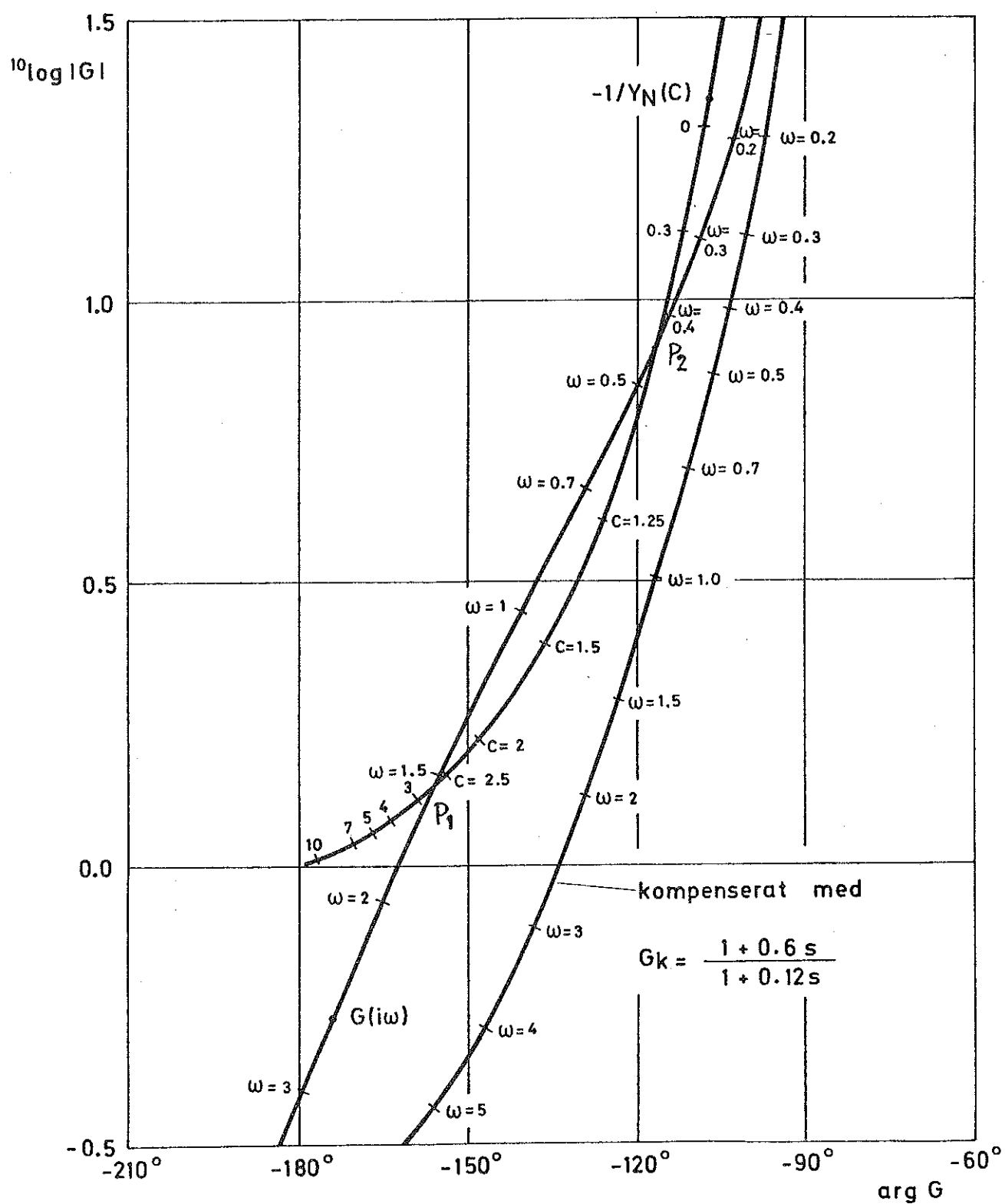


Fig. 6.3. Nicholsdiagram för okompenserat och kompenserat system samt $-1/Y_N(C)$ enligt exempel 6.1.

I fig. 6.4 visas kurvformen för utsignalen från det okompenserade systemet

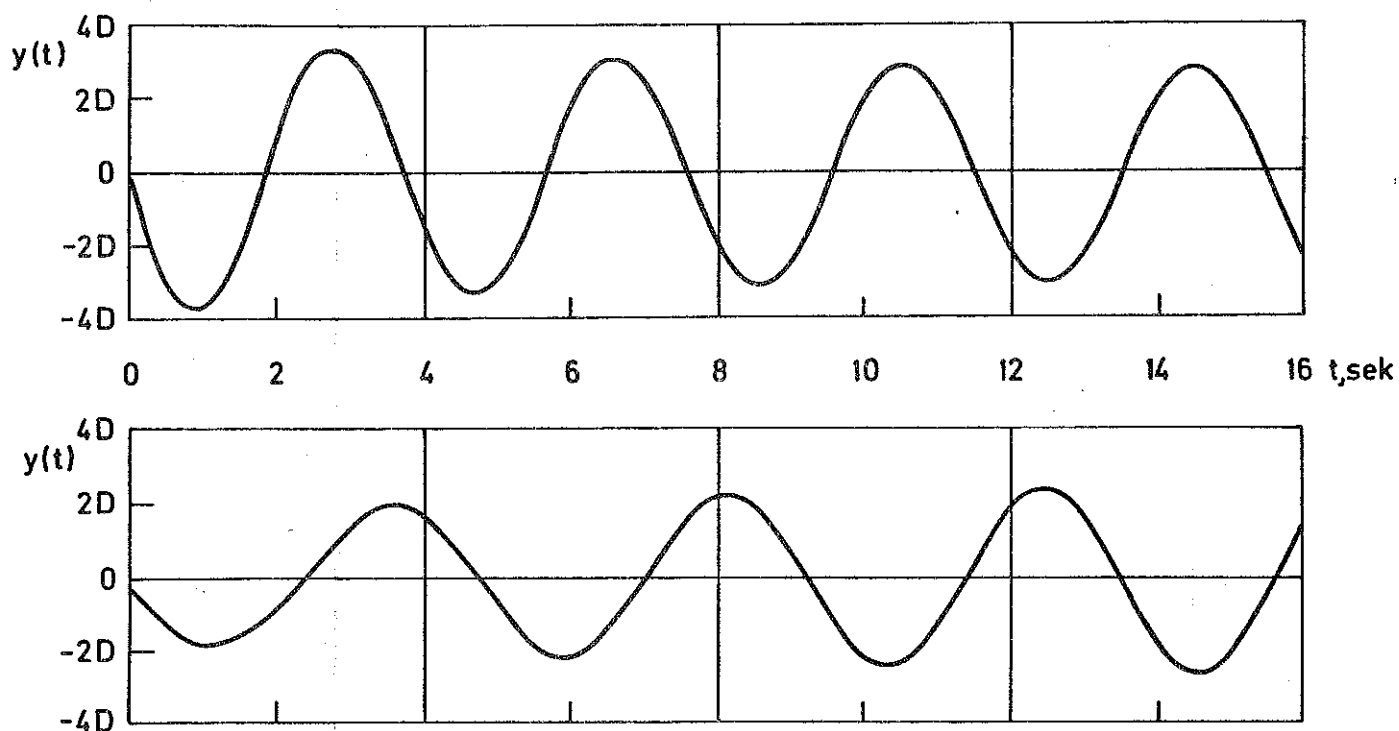


Fig. 6.4. Utsignalen från det okompenserade systemet. Den övre kurvan visar start med stort absolut värde på utsignalens derivata medan den undre visar start med litet absolut värde på utsignalens derivata.

Vi söker nu en kompenseringslänk som eliminerar självsvängningen. Hur skall en sådan kompenseringslänk förändra $G(i\omega)$ -kurvan i Nicholsdiagrammet? Vi ser att för $1.10 < C < 2.5$ ligger $-1/Y_N(C)$ inuti bilden av Γ i s -planet och för dessa C -värden ökar svängningens amplitud. Om vi förskjuter $G(i\omega)$ -kurvan åt höger i dia-

grammet kommer $-1/Y_N(c)$ alltid att ligga till vänster om $G(i\omega)$ -kurvan och vi har fått ett stabilt system.

En förskjutning av $G(i\omega)$ -kurvan åt höger åstadkommer vi med en fasavancerande länk

$$G_k(s) = \frac{s + b}{s + Nb} \quad N = \frac{1 + s/b}{1 + s/Nb}$$

Då den positiva fasvridning som behövs är av storleksordningen 20° - 30° och bör sättas in för $\omega = 0.5$ och uppåt väljer vi $N = 5$ och $1/b = 0.6$.

Det kompenserade systemets frekvenskurva visas även i fig. 6.3.

Det kompenserade systemets stegsvar visas i fig. 6.5.

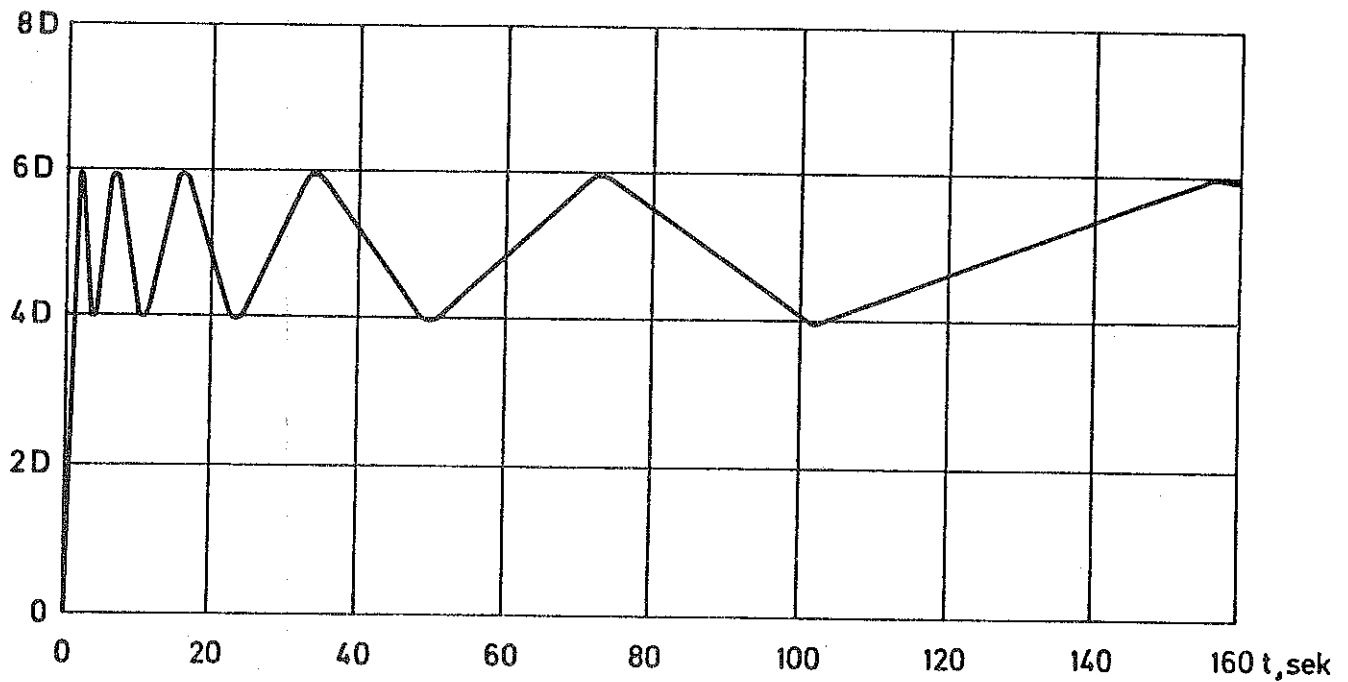


Fig. 6.5. Stegsvaret för det kompenserade systemet.

7. TILLÄMPNINGSSOMRÅDEN, NOGGRANNHET OCH KORREKTIONER

Inom reglertekniken har metoden med beskrivande funktion främst kommit att användas som ett approximativt stabilitetskriterium, medan inom den olinjära mekaniken har kommit att användas för att uppskatta periodtid och amplitud för periodiska förlopp. Eftersom metoden med beskrivande funktion är en första approximation är det naturligt försöka förbättra approximationen. Vi skall i detta avsnitt försöka belysa dessa frågeställningar och skall börja med att förteckna de frågeställningar som metoden med beskrivande funktion kan belysa:

- Stabilitet för sinusformiga förlopp i ett olinjärt tidsinvariant reglersystem, som kan uppdelas i en linjär och en olinjär del.
- Existensen av stabila självsvängningar samt vinkelfrekvens och amplitud för sådana självsvängningar.
- Val av kompensationslänk för eliminering av stabila självsvängningar.
- Uppskattning av "transienta egenskaper" är vansklig på grund av den ringa korrelationen mellan tids- och frekvensplanen.

Metodens fördel:

- En olinjäritets inverkan på ett i övrigt linjärt system kan snabbt bedömas. Nödvändig information är $G(i\omega)$ -kurvan för den linjära delen samt beskrivande funktionen för olinjäriteten. Beskrivande funktionen av ett antal enkla länkar finns tillgängliga i litteraturen.

Metodens nackdelar:

- Räkнемässiga svårigheter så snart olinjäriteten ej kan approximeras med rätlinjiga segment.
- Sambandet mellan in- och utsignalerna kan ej enkelt erhållas.
- Osäkerheten när den approximativa metoden ger riktigt resultat. När är t.ex. övertonerna försumbara? Hur stor får en eventuell resonanstopp vara?

Nedan följer ett tillämpningsexempel som belyser vad som sagts ovan.

Exempel 7.1

För stabilisering av ett flygplans rollrörelser används ett servosystem vars blockschema framgår av fig. 7.1. Servosystemet har dimensionerats med konventionella metoder så att $M_p \approx 2.0$. Om det finns glapp i roderöverföringen kan systemet bringas att oscillera. Diskutera betingelserna för självsvängning och ange några möjligheter att stabilisera systemet.

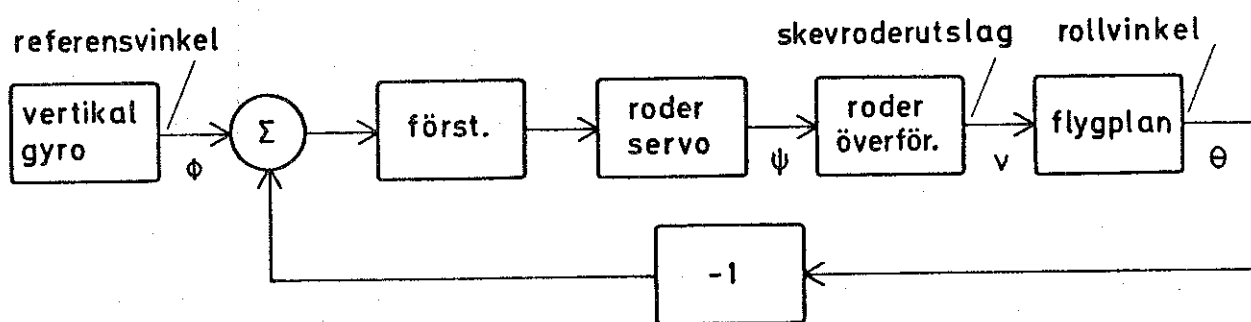


Fig. 7.1.

Momentekvation m.a.p. rollaxeln

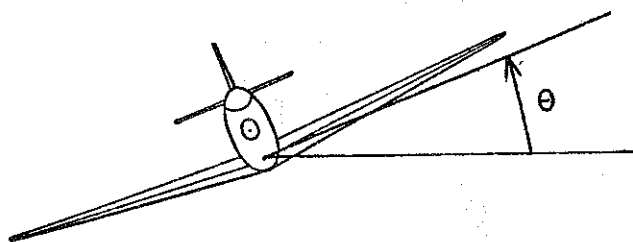


Fig. 7.2.

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} = M$$

(7.1)

Momentet M är proportionellt mot skevroderutslaget v , dvs

$$M = K \cdot v \quad (7.2)$$

Försummas tidsfördröjningen i förstärkare och roderservo erhålles

$$\psi = \phi - \theta \quad (7.3)$$

Roderöverföringen karakteriseras av den beskrivande funktionen Y_N .

Ekvationerna (7.1), (7.2), och (7.3) kan representeras med följande blockschema

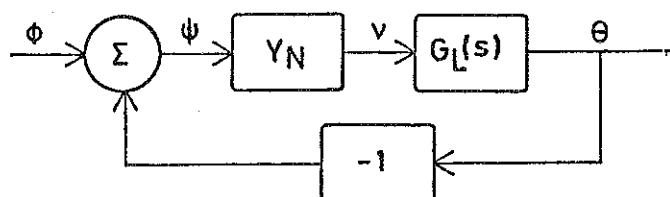


Fig. 7.3.

Av ekvationerna (7.1) och (7.2) erhålles

$$G_L(s) = \frac{K}{Js^2 + Ds} = \frac{K_V}{s(1 + sT)} \quad (7.4)$$

Om det ej finns glapp i roderöverföringen är $Y_N = 1$ och vi får

$$G_O(s) = \frac{K_V}{s(1 + sT)} \quad (7.5)$$

Det slutna systemets överföringsfunktion blir då

$$G(s) = \frac{K_V}{Ts^2 + s + K_V} = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2} \quad (7.6)$$

med $\omega_o^2 = K_V/T$ och $\zeta = 1/2 \cdot \sqrt{T \cdot K_V}$. Nu gäller för resonans-
toppen

$$M_P = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (7.7)$$

med $M_P = 2$ blir $\zeta = 0.25$ och vi väljer

$$K_V T = 4 \quad (7.8)$$

Om det finns glapp i roderöverföringen gäller ej längre $Y_N = 1$. Mellan v och ψ råder i stället det samband som anges i fig. 7.4. Glappets storlek är $2D$.

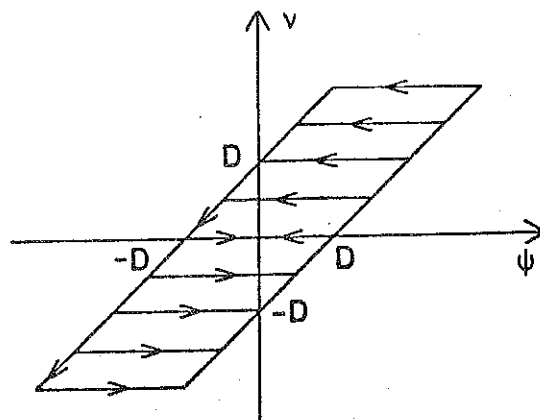


Fig. 7.4. Karakteristik för roderöverföring med glapp.

I Nicholsdiagrammet finner vi två skärningspunkter (p_1 och p_2) mellan $G(i\omega)$ -kurvan och kurvan $-1/Y_N(c)$.

$$P_1: \begin{cases} \omega T = 1.2 \\ C = 1.7D \end{cases} \quad P_2: \begin{cases} \omega T = 0.7 \\ C = 1.2D \end{cases}$$

Vi ser att P_1 är en konvergent punkt medan P_2 är en divergent punkt. Med beskrivande funktion förutsäger vi en stabil självsvängning

$$\psi(t) = C \cdot \sin \omega t$$

med $C = 1.7D$ och $\omega = 1.2/T$. Vi ser att systemet måste störas så att $C > 1.2 D$ för att självsvängningen skall starta och vi har ett exempel på "hard-self excitation". Av Nicholsdiagrammet framgår att systemet kan göras stabilt genom att minska K_v .

I fig. 7.5 visas Nicholsdiagrammet där $-1/Y_N(C)$ för glapp och

$$G(i\omega) = \frac{4}{i\omega T(1 + i\omega T)}$$

har ritats in.

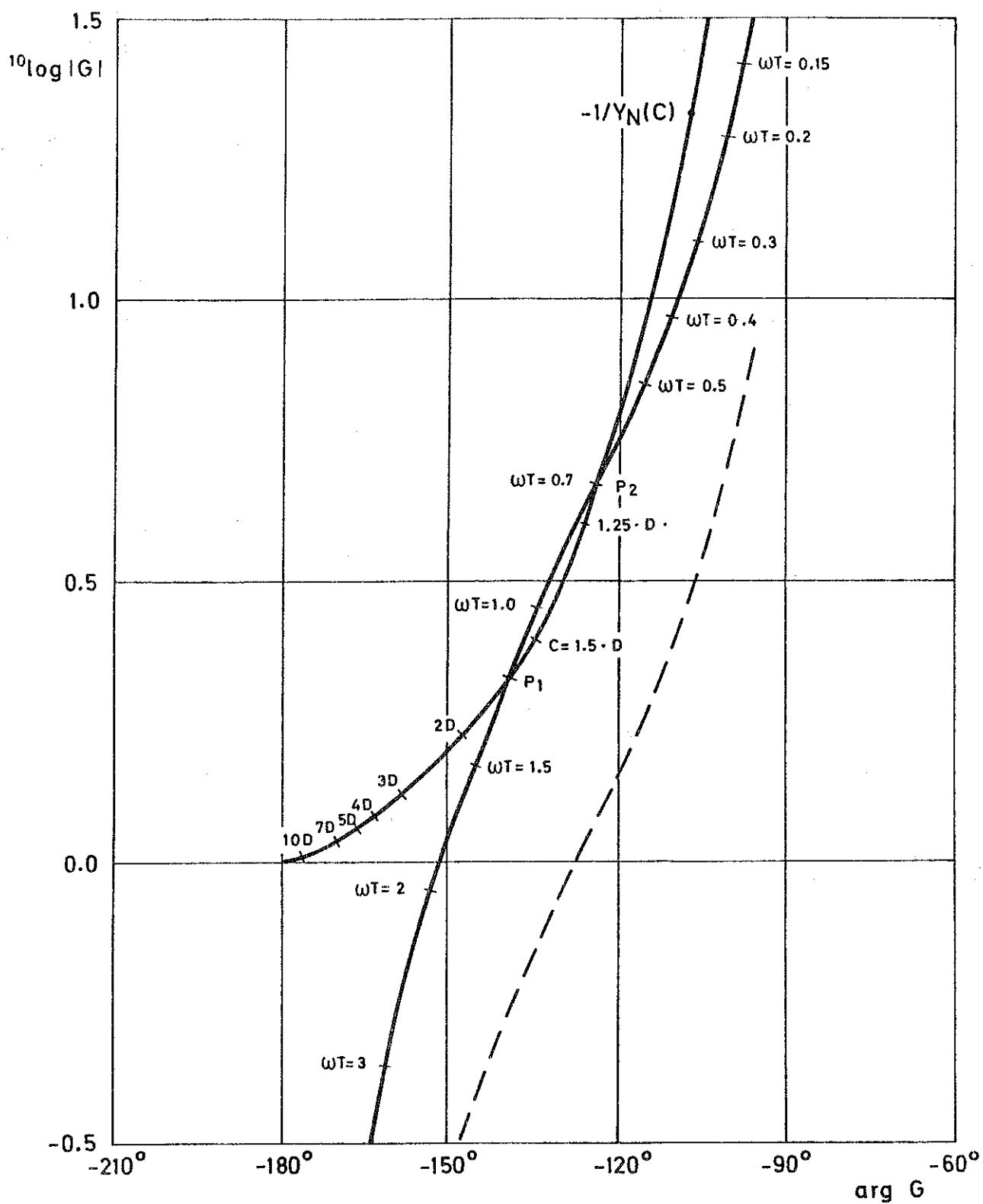


Fig. 7.5. Nicholsdiagram för den linjära delen av systemet samt $-1/Y_N(C)$.

En analys av systemet med beskrivande funktion visar således att systemets fasporträtt har den karaktär som visas i fig. 7.6 med två periodiska lösningar. Den inre är instabil och den yttre är stabil.

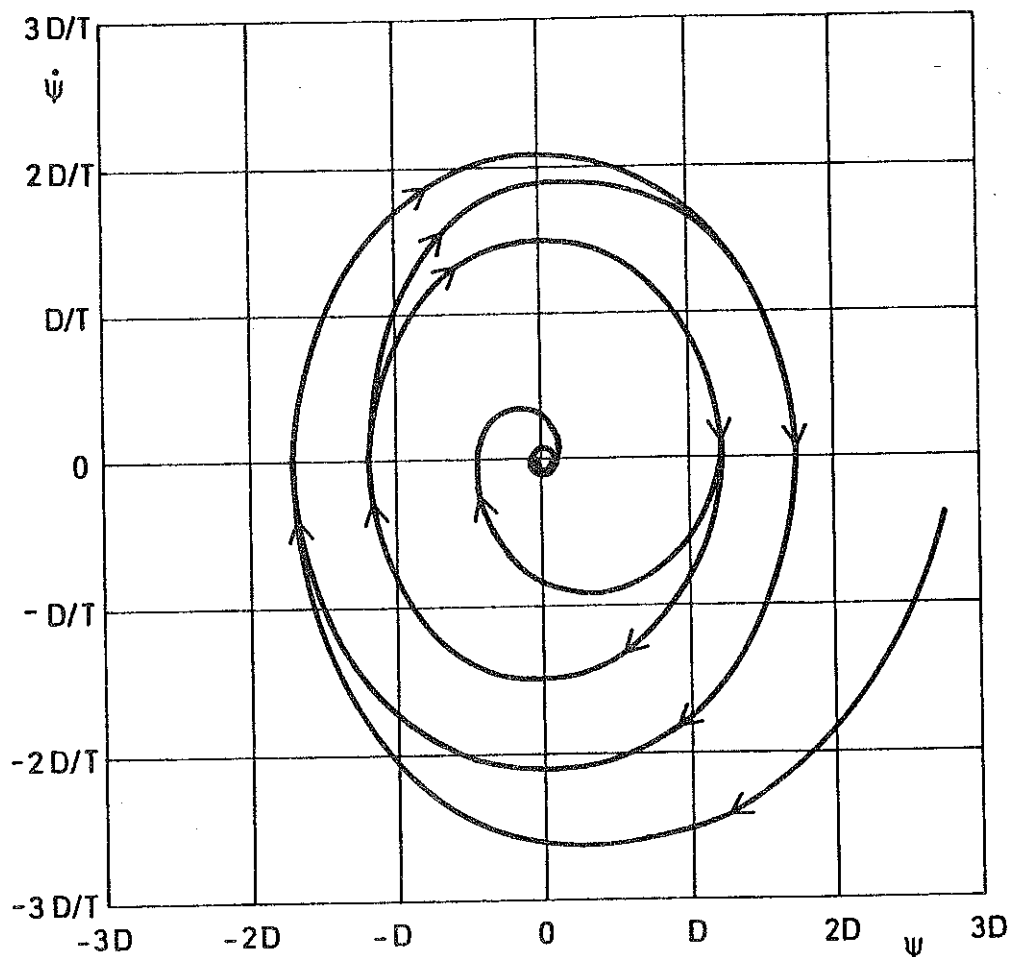


Fig. 7.6. Fasporträtt för systemet i exempel 7.1 baserad på analys med beskrivande funktion.

Systemet har simulerats och det exakta fasporträttet visas i fig. 7.7.

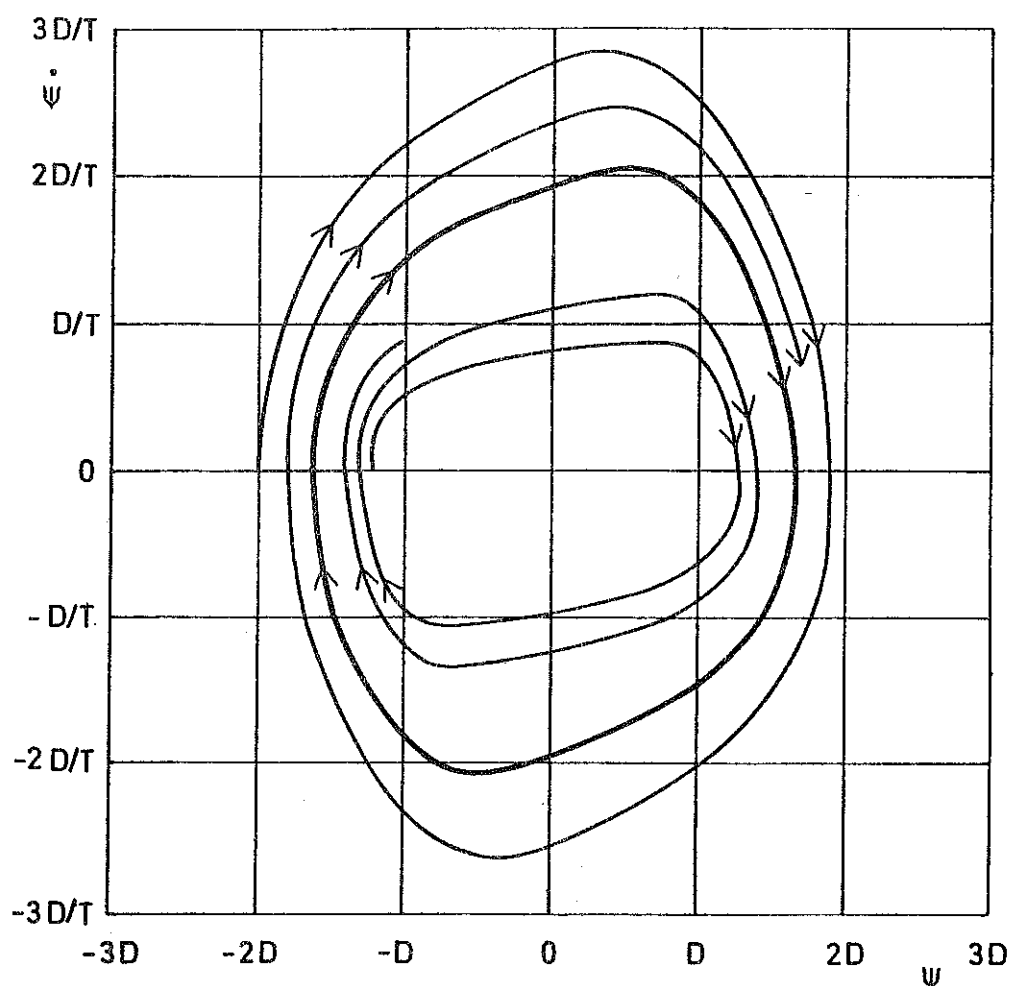


Fig. 7.7. Exakt fasporträtt för systemet i exempel 7.1.

Inom den olinjära mekaniken har metoden med beskrivande funktion, även kallad metoden med harmonisk linearisering, tillämpats på ett antal problem. Poincaré var den förste som tillämpade metoden vid beräkning av omloppstiden för planeter. Sedan har man tillämpat metoden på ett flertal ekvationer med periodiska lösningar. I sådana fall är uppskattningen av periodtid ofta god ($< \text{ca } 1\%$) och av amplitud relativt god ($< \text{ca } 5\%$). Vissa arbetssamma metoder för att förbättra uppskattningen av periodtid och amplitud finns redovisade i litteraturen.

Exempel 7.2

Betrakta den matematiska pendeln i fig. 7.8.

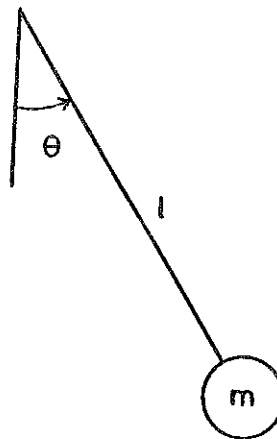


Fig. 7.8. Matematiska pendeln.

Vi antar att pendeln har massan m och längden L och förutsätter tyngdaccelerationen g . Låt pendelns upphängningspunkt vara fix och beräkna periodtiden för svängningen.

Motsvarande problem finns behandlat i K.J. Åström, Reglerteori, exempel 2:2.2 och grundekvationerna lyder:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x_1$$

$$y = x_1 \quad \theta = y \quad (7.10)$$

eller på differentialekvationsform

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

med

$$\omega_0^2 = g/l$$

vilket kan åskådliggöras i ett blockschema, se fig. 7.9 där

$$N = \sin \theta.$$

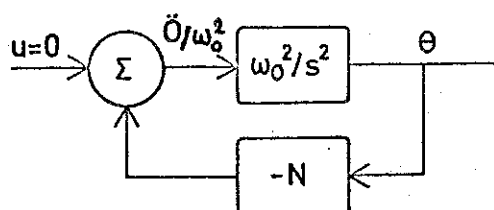


Fig. 7.9. Blockschema för den olinjära matematiska pendeln.

För mycket små utslag gäller $\theta \approx \sin \theta$, och vi har det välkända resultatet

$$T_L = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{l/g} \quad (7.11)$$

Från Appendix hämtar vi beskrivande funktionen för $\sin x$ och ritar in den i ett Nyquistdiagram (fig. 7.10).

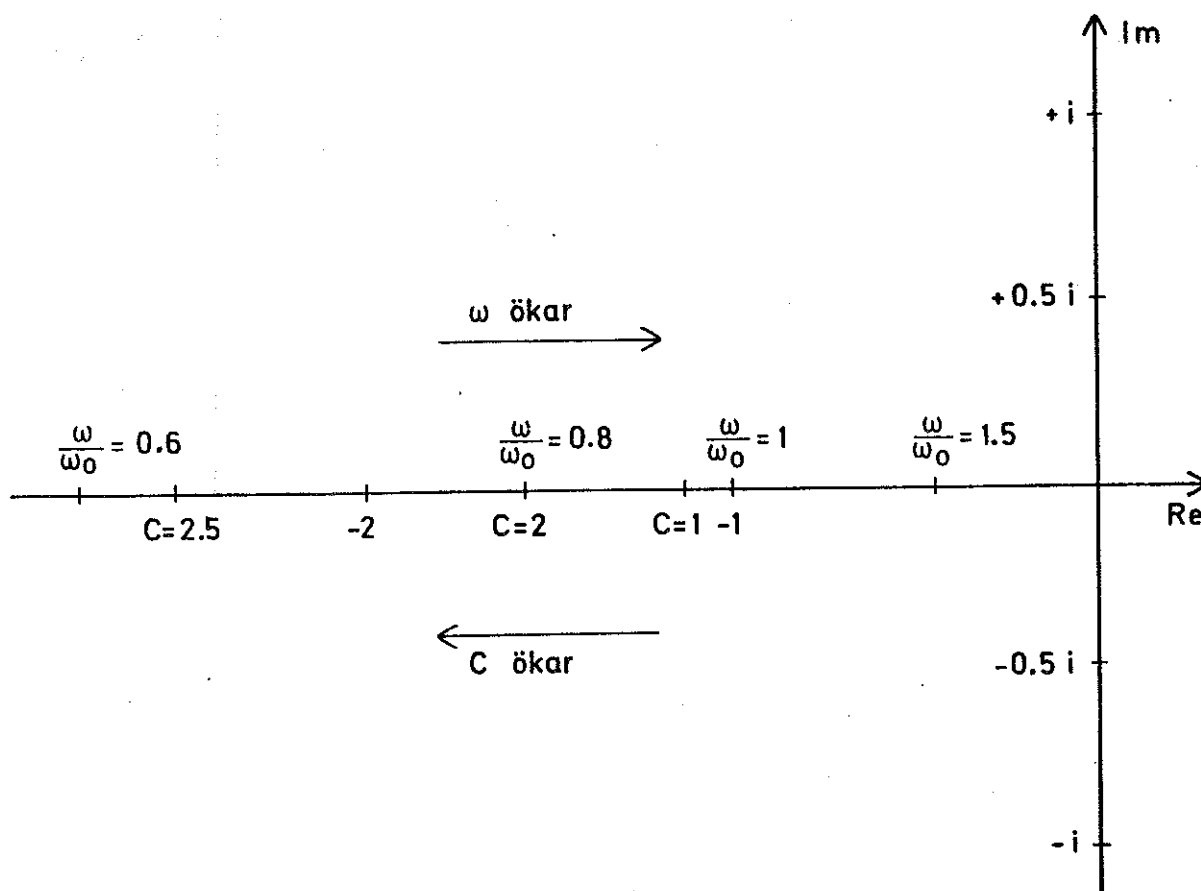


Fig. 7.10. Nyquistdiagram för $G(s) = \omega_0^2/s^2$ samt $-1/Y_N(C)$ för $\sin(x)$.

Vi ser att för varje värde på C finns en skärningspunkt mellan $-1/Y_N(C)$ och $G(i\omega)$. Detta indikerar att vilken som helst amplitud ger en självsvängning, vilket är fysikaliskt rimligt. Vinkelfrekvensen kommer att bli beroende av amplituden och en större amplitud svarar mot en lägre vinkelfrekvens. Detta innebär att periodtiden kommer att växa med amplituden. I fig. 7.11 visas periodtiden som funktion av svängningens amplitud θ_{\max} .

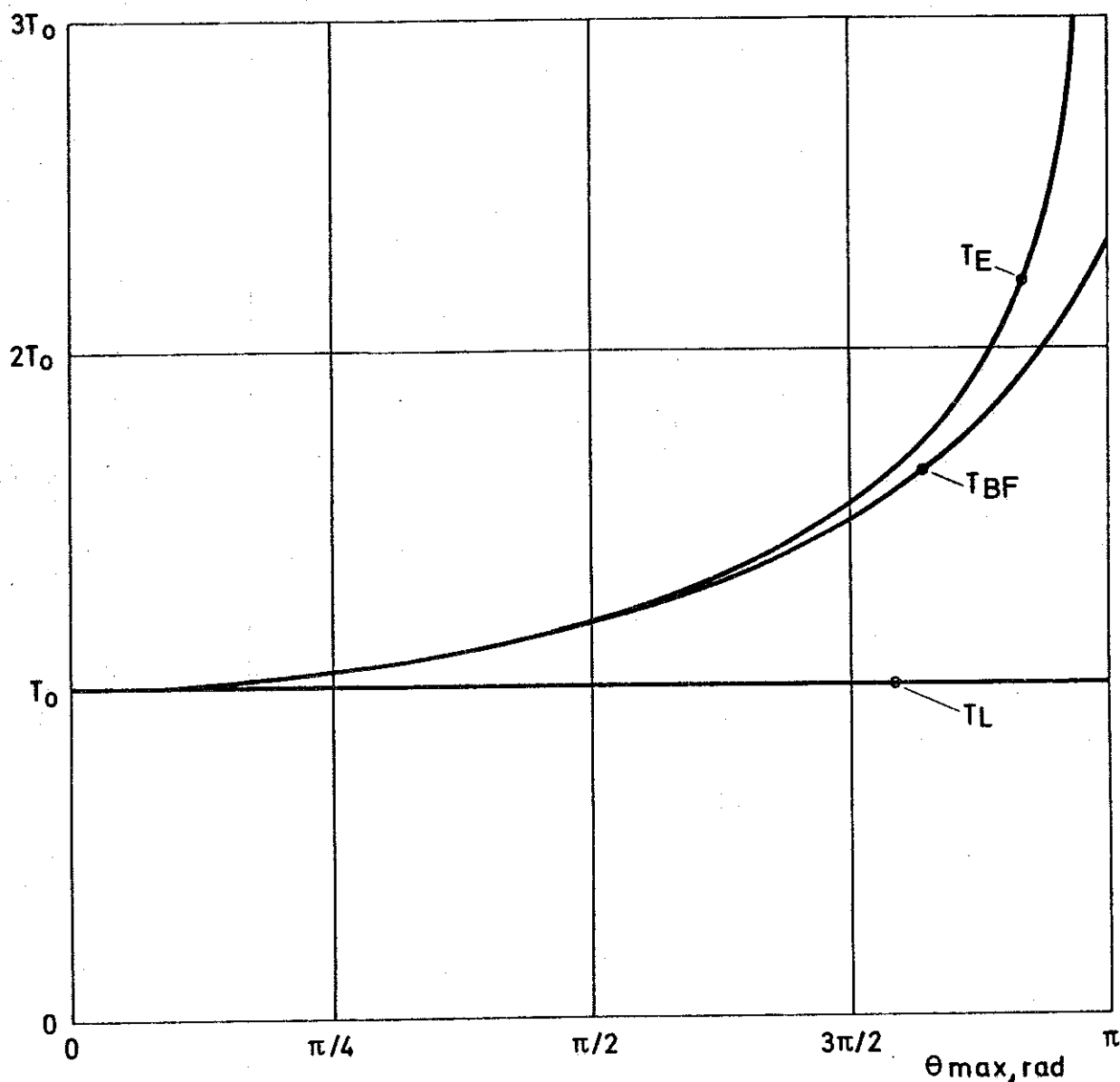


Fig. 7.11. Periodtiden för den matematiska pendeln (T_E) beräknad med hjälp av beskrivande funktion (T_{BF}) och genom konventionell linearisering (T_L). $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$.

I fig. 7.12 visas det relativa felet vid beräkning av periodtiden med hjälp av beskrivande funktion och genom konventionell linearisering.

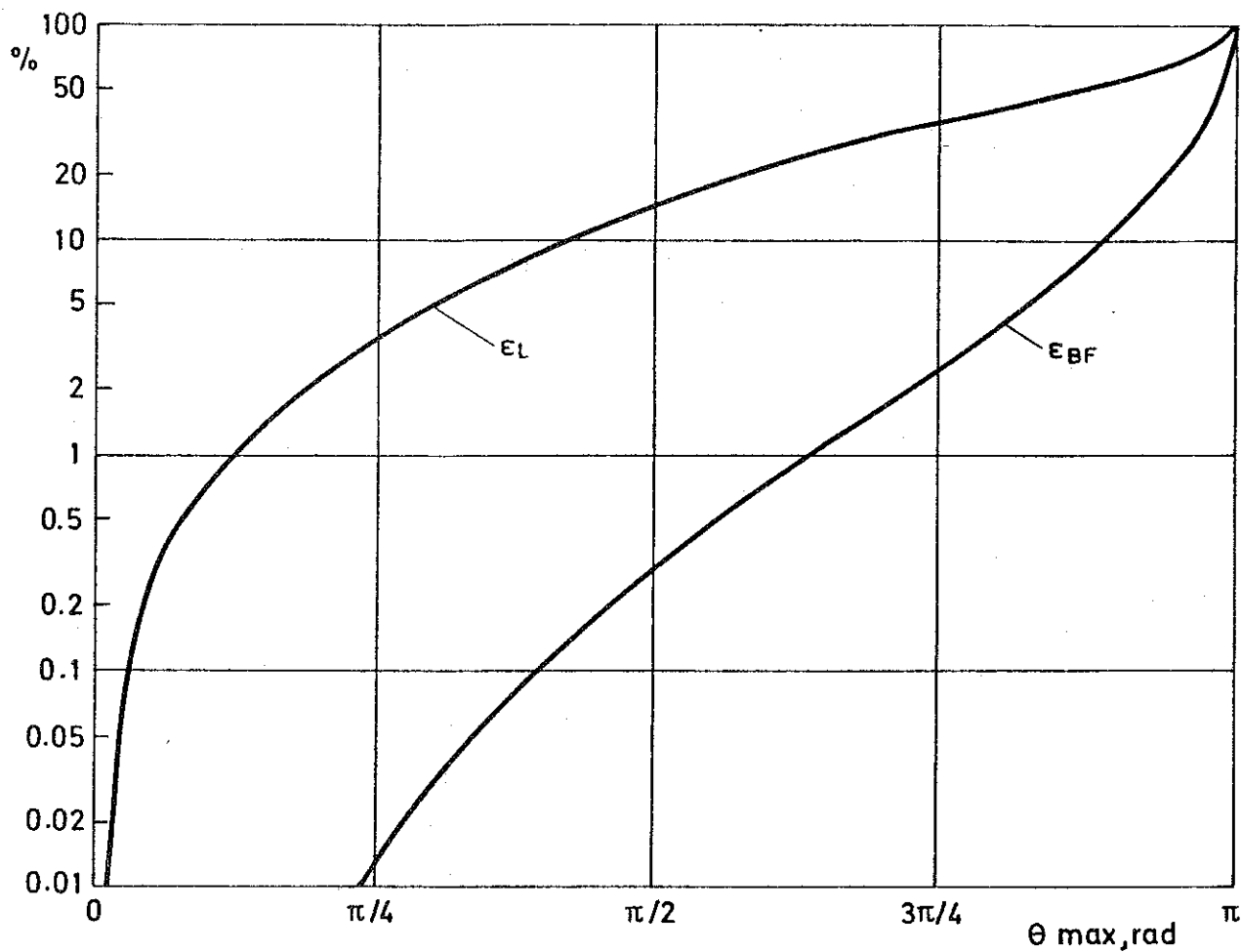


Fig. 7.12. Relativa felet i periodtid vid beräkning med hjälp av beskrivande funktion (ϵ_{BF}) och med hjälp av konventionell linearisering (ϵ_L).

$$\epsilon_{BF} = \frac{T_E - T_{BF}}{T_E} \quad \epsilon_L = \frac{T_E - T_L}{T_E}$$

Slutligen skall vi nämna något om principen för de metoder, som finns redovisade för korrektion av beskrivande funktion. Betrakta det reglersystem vars blockschema framgår av fig. 7.13.

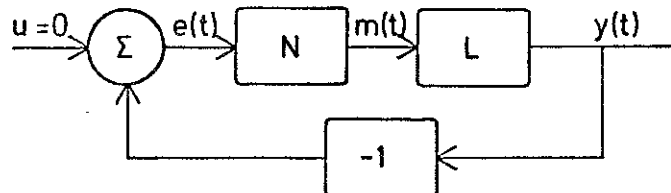


Fig. 7.13. Blockschema för olinjärt reglersystem.

Antag att

$$e(t) = C \cdot \sin \omega t \quad (7.12)$$

då är $m(t)$ en periodisk signal som kan utvecklas i fourierserie.

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t) \\ &= C \cdot Y_N(C) \sin \omega t + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Vi ersätter nu den olinjära länken N med en linjär länk med "överföringsfunktionen" $Y_N(C)$ och en restterm

$$r(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t) \quad (7.14)$$

enligt fig. 7.14.

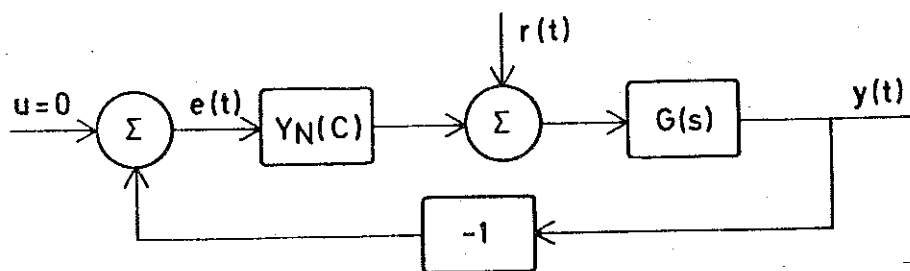


Fig. 7.14. Ekvivalent system.

I första approximationen sätter man $r(t) \equiv 0$, vilket är identiskt med den vanliga metoden med beskrivande funktion. Antag nu att villkoren för självsvängning är uppfyllda för $C = C^*$ och $\omega = \omega^*$.

För dessa värden på C och ω är $m(t) = m^*(t)$, som utvecklas i fourierserie

$$\begin{aligned} m^*(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cos(n\omega^* t) + b_n^* \sin(n\omega^* t) \\ &= C^* |Y_N(C^*)| \sin \omega^* t + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n^* \cos(n\omega^* t) + b_n^* \sin(n\omega^* t) \end{aligned}$$

Av denna fourierserie tar vi med två termer $n = 1$ och 2 . Efter att ha passerat den linjära länken L med överföringsfunktionen $G(s)$ har vi

$$\begin{aligned} y^*(t) &= C^* |Y_N(c^*)| \cdot |G(i\omega^*)| \sin[\omega^* t + \varphi_{L1} + \varphi_{N1}] \\ &\quad + \sqrt{a_2^{*2} + b_2^{*2}} |G(i2\omega^*)| \cdot \sin[2\omega^* t + \varphi_{L2} + \varphi_{N2}] \end{aligned}$$

där

$$\varphi_{L1} = \arg G(i\omega^*)$$

$$\varphi_{N1} = \arg Y_N(c^*)$$

$$\varphi_{L2} = \arg G(i2\omega^*)$$

$$\varphi_{N2} = \arctg(a_2^*/b_2^*)$$

I dessa uttryck är a_2^* och b_2^* fourierkoefficienter för utsignalen från den olinjära länken då insignalen är $C^* \sin \omega^* t$. Beräkna nu fourierkoefficienterna a_n^{**} och b_n^{**} då

$$e(t) = - \dot{r}^*(t)$$

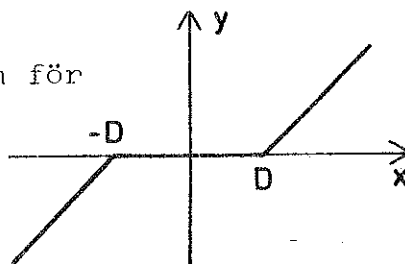
Genom att successivt ta med fler termer konvergerar, under vissa förutsättningar summan mot den approximativa lösningen.

8. ÖVNINGSEXEMPEL

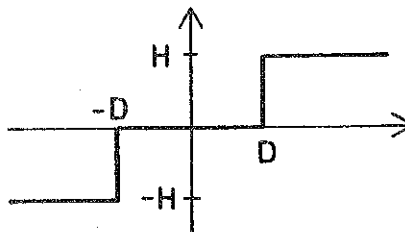
5.1

Bestäm den beskrivande funktionen för

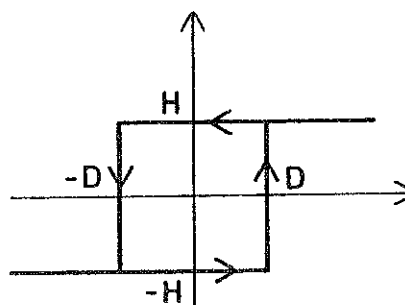
a) dödzon



b) relä med dödzon



c) relä med hysteres



5.2

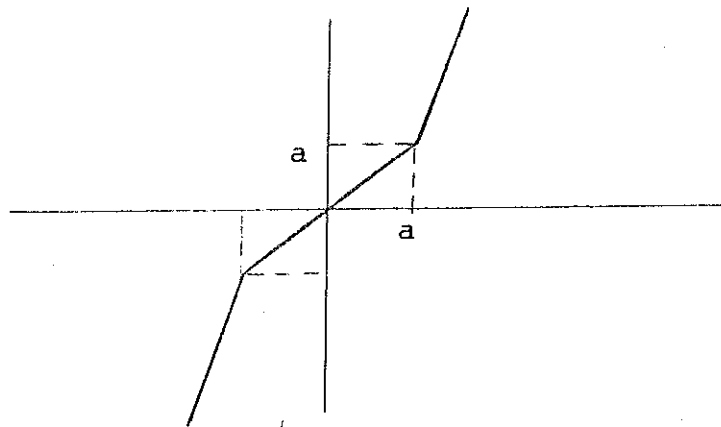
Bestäm beskrivande funktionen $Y_N(c)$ för en olinjär länk av typen

$$y(x) = k(x + ax^2 + bx^3)$$

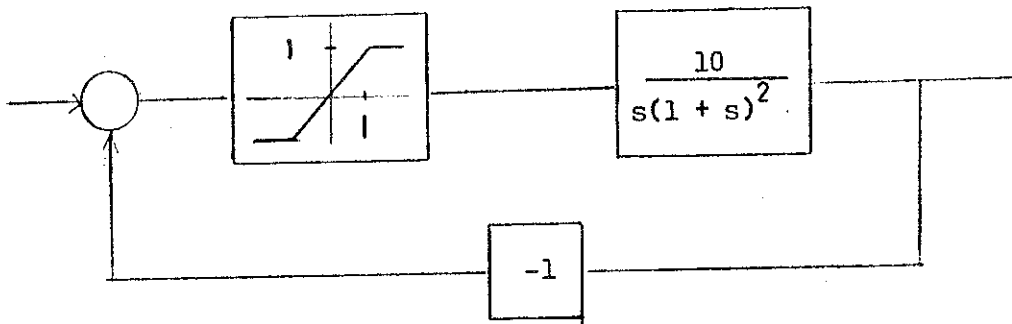
Hur inverkar termen ax^2 ?

5.3

Bestäm den beskrivande funktionen för olinjäriteten i figuren

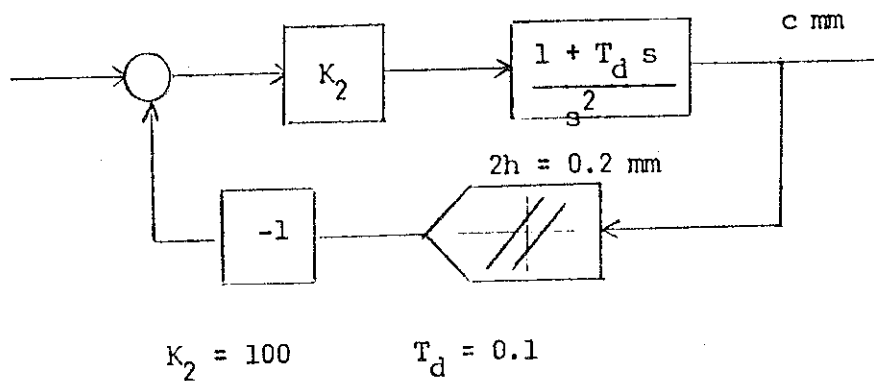


5.4



Undersök systemets stabilitet. Om en periodisk lösning existerar bestäm då frekvens och amplitud hos denna.

5.5



En servokrets av andra ordningen enligt ovanstående figur har i återföringen ett glapp, som totalt är $2h = 0.2$ mm. Beräkna ungefärlig frekvens och amplitud för glappsvängningens harmoniska grundkomponent.

5.6

Ett servosystem enligt figur 1 består av en linjär länk med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5}{s^2} \cdot \frac{1 + 0.6s}{1 + 0.2s}$$

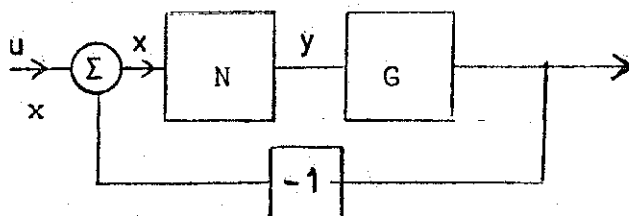


Fig. 1.

(amplitud- och fasvärden återges i tabell I) samt en olinjär länk vars karakteristik framgår av figur 2.

Beskrivande funktionen för den olinjära länken framgår av tabell II. Hur uppför sig systemet om $u = 0$?

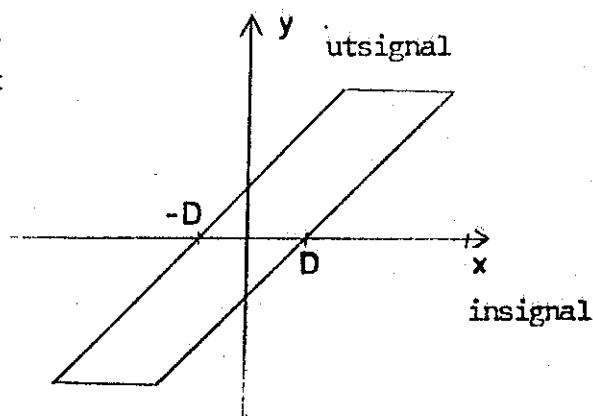


Fig. 2

Tabell I

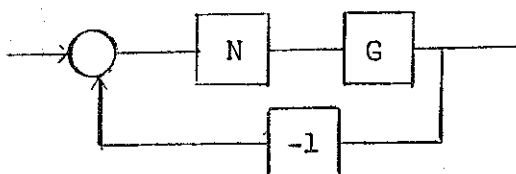
ω	$ G $	$\arg G$
1	5.71	-160°
1.5	2.86	-155°
2	1.81	-152°
3	0.98	-150°
4	0.635	-151°
5	0.447	-153°
6	0.332	-156°
7	0.256	-158°
10	0.136	-163°

Tabell II

$\frac{C}{D}$	$ Y_N $	$\arg Y_N$
1.00	0.00	-90°
1.11	0.12	-64°
1.25	0.24	-55°
1.4	0.37	-47°
1.7	0.48	-40°
2.0	0.59	-33°
2.5	0.70	-26°
3.3	0.80	-20°
5	0.88	-14°
10	0.96	-7°
∞	1	-0°

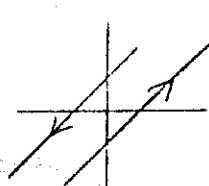
5.7

En reglerkrets med en icke-linjär länk N och en linjär länk G är given. Kopplingen framgår av nedanstående figur 1 :

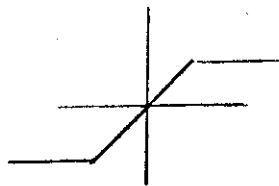


Figur 1.

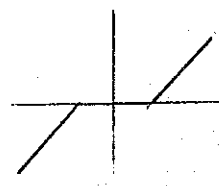
Beträffande den icke-linjära länken N finns följande tre alternativ:



a) Glapp



b) Mättning



c) Död zon

Den linjära länken G är i samtliga fall av följande typ :

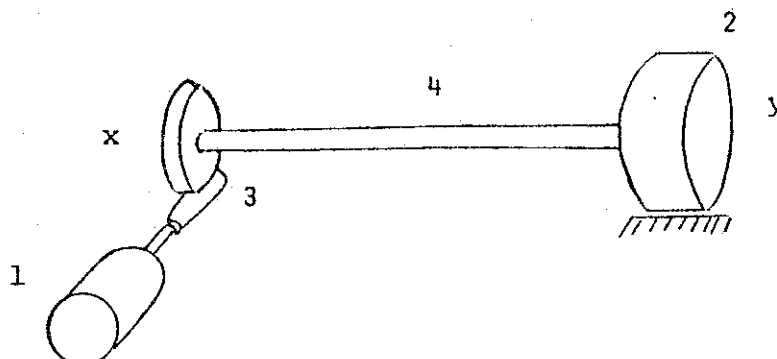
$$G(s) = \frac{(1 + Ts)^{n-1}}{s^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

I varje enskilt fall antages tidskonstanten T vara vald på ett med hänsyn till stabiliteten gynnsamt sätt.

Ange de värden på exponenten n som i de tre fallen ger ett system med kvarstående, stabil självsvängning.

Ledning: Det är inte nödvändigt att bestämma ett värde på T eller att noggrannt rita upp funktionen G(s). Det räcker att fastställa funktionens förlopp vid mycket låga och mycket höga frekvenser samt i närheten av punkten -1.

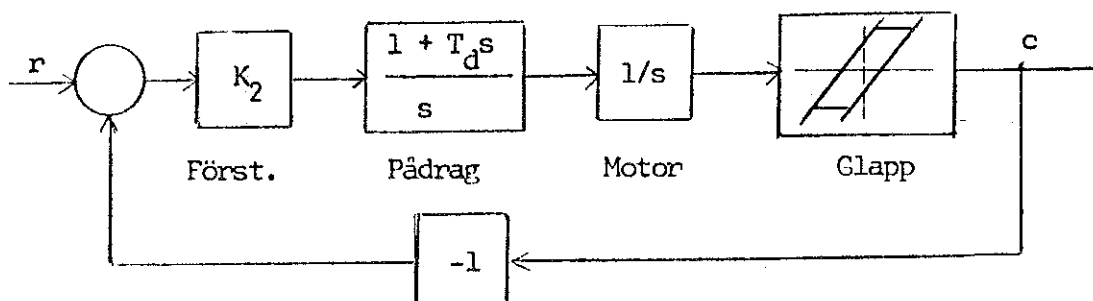
5.8



1 är en belastningsstyv servomotor som driver ett objekt 2 via en skruvväxel 3 med stor nedväxling och en vek axel 4. Objektet bromsas av ett friktionsmoment av följande karaktär: För att bringa objektet i rörelse från hastigheten noll erfordras ett drivande moment M_0 . Då objektet väl rör sig minskar friktionsmomentet till ett värde som är litet i förhållande till M_0 . Objektets tröghetsmoment försummas helt. Anordningen ingår i en sluten krets (ej utritad) i vilken "x till y" bildar en länk.

- a) Visa att, vid sinusformad variation av x, en negativ fasvridning kan uppkomma mellan x och grundsvängningen i y.
- b) Hur stor är den maximala fasvridningen mellan x och y.

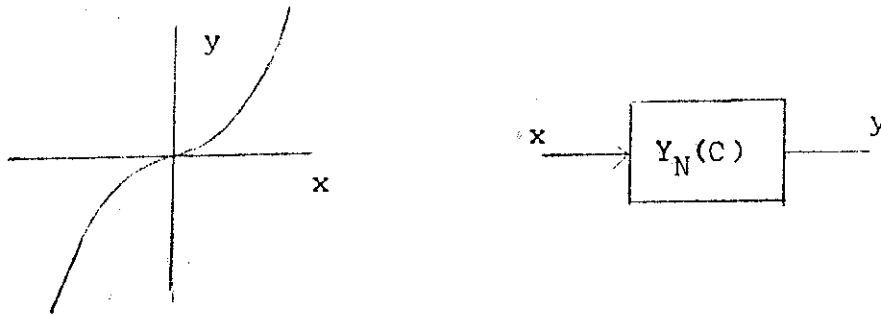
5.9



I en reglerkrets av andra ordningen finns det glapp i kugg-hjulstransmissionen efter motorn.

- Medför glappet i detta fall en periodisk självsvängning eller ej. Motivera svaret.
- Kan teoretiskt en eventuell glappsvängning i detta fall stoppas genom att glappet minskas under en viss gräns som är större än noll. (Det antas här att glappet inte helt kan elimineras).
- Är det möjligt att förändra överföringsfunktionen för pådraget så att en eventuell glappsvängning försvinner och i så fall, ge ett exempel på en sålunda förändrad överföringsfunktion. (Obs. att en hög kretsförstärkning är eftersträvarvärd).

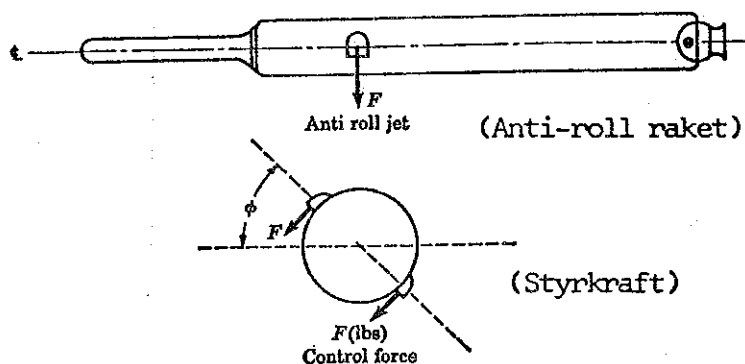
5.10



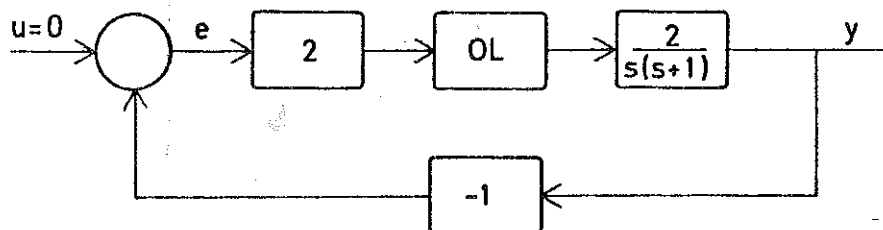
En olinjär länk med instorheten x och utstorheten y realiserar sambandet $y = (x/|x|) x^2$. För bestämning av länkens beskrivande funktion användes insignalen $C \cdot \sin \omega t$ och den utgående grundsvängningsamplituden betecknas C_1 . Beräkna den beskrivande funktionen $Y_N(C)$ och markera i ett Nyquistdiagram orten $-1/Y_N(C)$. Finns risk för självsvängning om den aktuella länken ingår i en reglerkrets av andra ordningen.

5.11

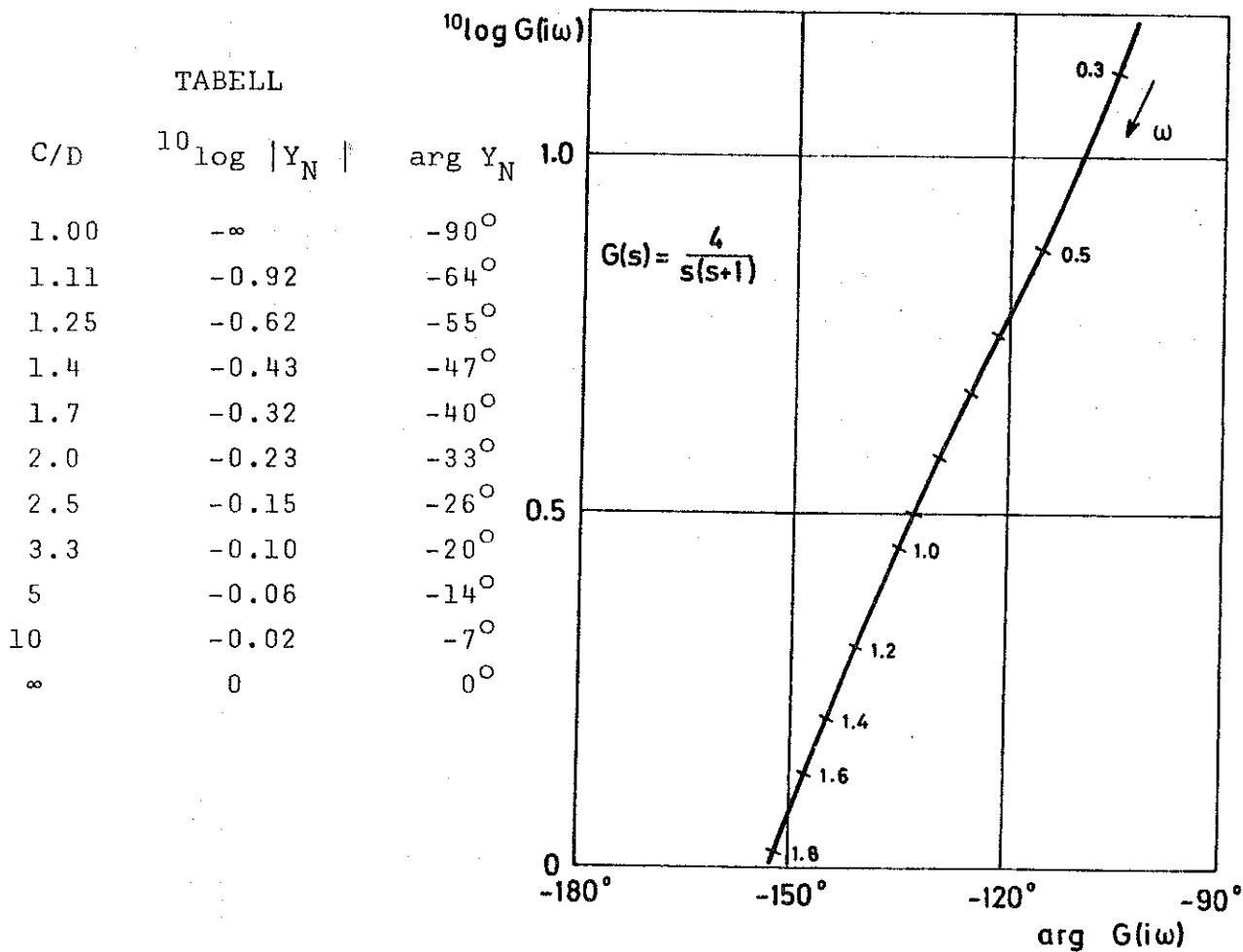
Figuren visar en robot med styrraketer för att förhindra rotation kring robotens axel. Båda raketerna kan inte avfyras samtidigt. Antag att styrkraften är F , momentarmen a och tröghetsmomentet kring roll-axeln J . Styr raketerna och tillhörande servo har hysteresebredden $2h$. Antag att den hydrauliska servoförstärkaren till styr raketerna har två tidsfördröjningar T_1 och T_2 . Rollhastigheten $\dot{\phi}$ återföres via en förstärkning $K_{\dot{\phi}}$ och rollvinkeln ϕ via en förstärkning K_{ϕ} . Upprita ett blockdiagram. Bestäm stabilitetsvillkoren för systemet och amplitud och frekvens av robotens oscillationer om systemet befinner sig i ett stabilt jämviktsläge.



5.12

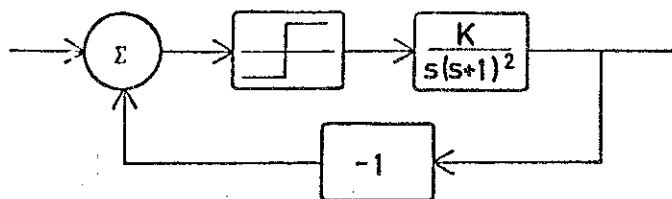


En servomekanism kan beskrivas med ett blockschema enligt figuren. Den olinjära delen (OL) är ett glapp av storleken $2D$. Den beskrivande funktionen för glapp ges i tabellen och i bifogade Nicholsdiagram är den linjära delen av systemet inritad. Angiv felets frekvens och amplitud vid eventuella periodiska lösningar. Skissera fasporträttet för systemet med e och \dot{e} som variabler.



5.13

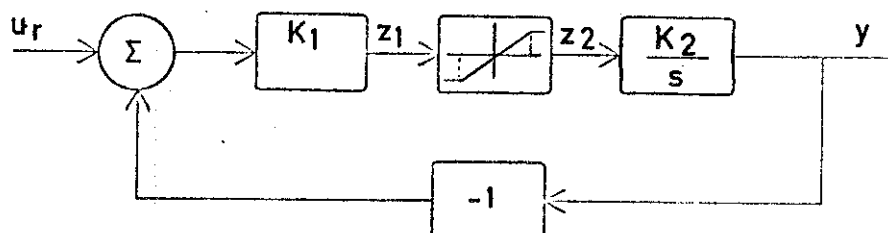
Ett relästyrt servo åskådliggöres i figuren



Visa att systemet har periodiska svängningar. Sök sedan en sådan linjär kompenseringsslänk, som skall placeras mellan reläet och linjära systemet så att periodiska svängningar helt undviks för alla $K \leq 10$.

5.14

Ett servo innehåller en mättning som visas i blockschemat



Karakteristiken för det olinjära elementet är:

$$z_2 = z_1 \quad \text{då} \quad -\delta \leq z_1 \leq \delta$$

$$|z_2| = \delta \quad \text{annars}$$

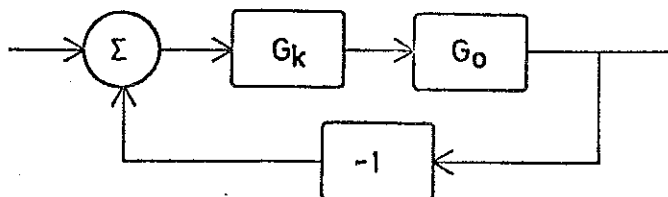
Bestäm analytiskt, när $u_r = A \sin \omega t$, för vilken frekvens ω som systemet går i mättning ($|z_1| > \delta$) när

$$A = \frac{\delta}{2} \quad K_1 = 10 \quad K_2 = 2$$

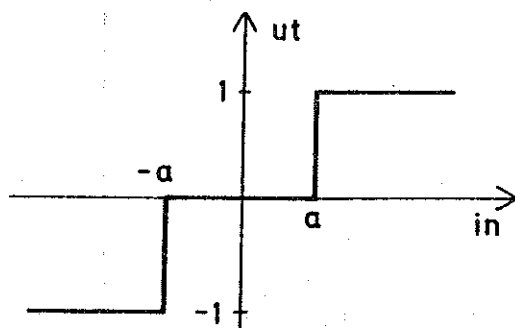
5.15

Man har givet ett positionsservo

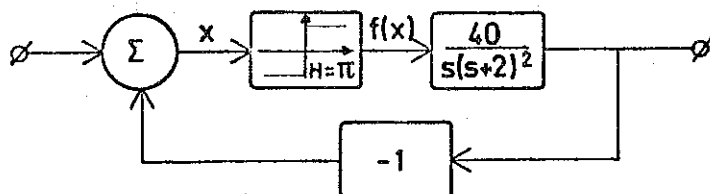
$$G_o(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$



Man skulle vilja kompensera detta med en billig reläförstärkare med karakteristik enligt figuren. Hur stor måste död-zonen a väljas för att man skall helt undvika periodiska svängningar?



5.16



Bestäm den periodiska lösningens frekvens och amplitud med hjälp av beskrivande funktionsmetoden. Det olinjära elementets karakteristik har följande utseende.

$$f(x) = \pi \quad x > 0$$

$$f(x) = -\pi \quad x < 0$$

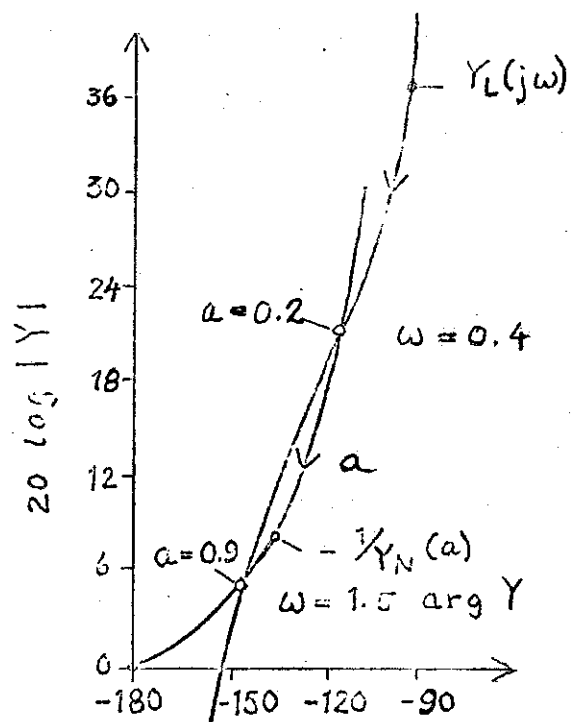
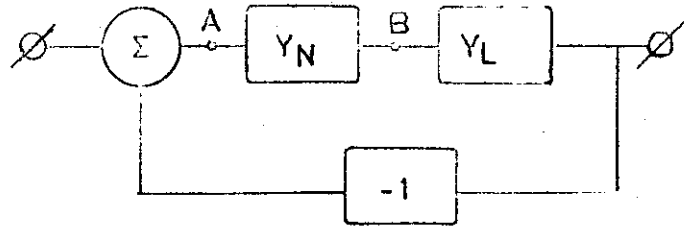
9. FLERVALSFRÅGOR

5.1

Ett system med block-schema enligt figuren är givet. I Nichols-diagrammet har man ritat in

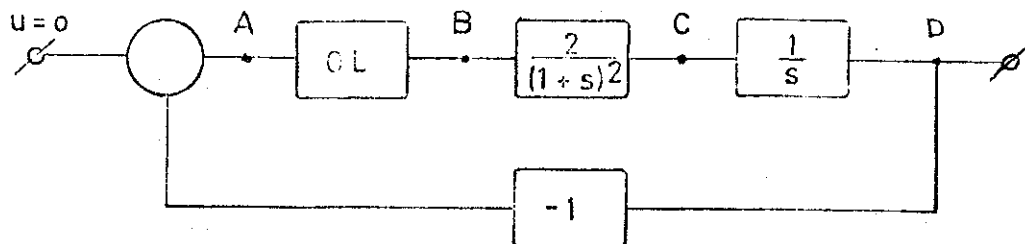
$$Y_L(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+j\omega)}$$

samt $-1/Y_N$, där Y_N är den beskrivande funktionen för den olinjära länken. Systemet har en stabil periodisk lösning. Med användande av metoden med beskrivande funktion kan lösningens frekvens och amplitud uppskattas. Vilket eller vilka av följande påståenden är alltid sanna?

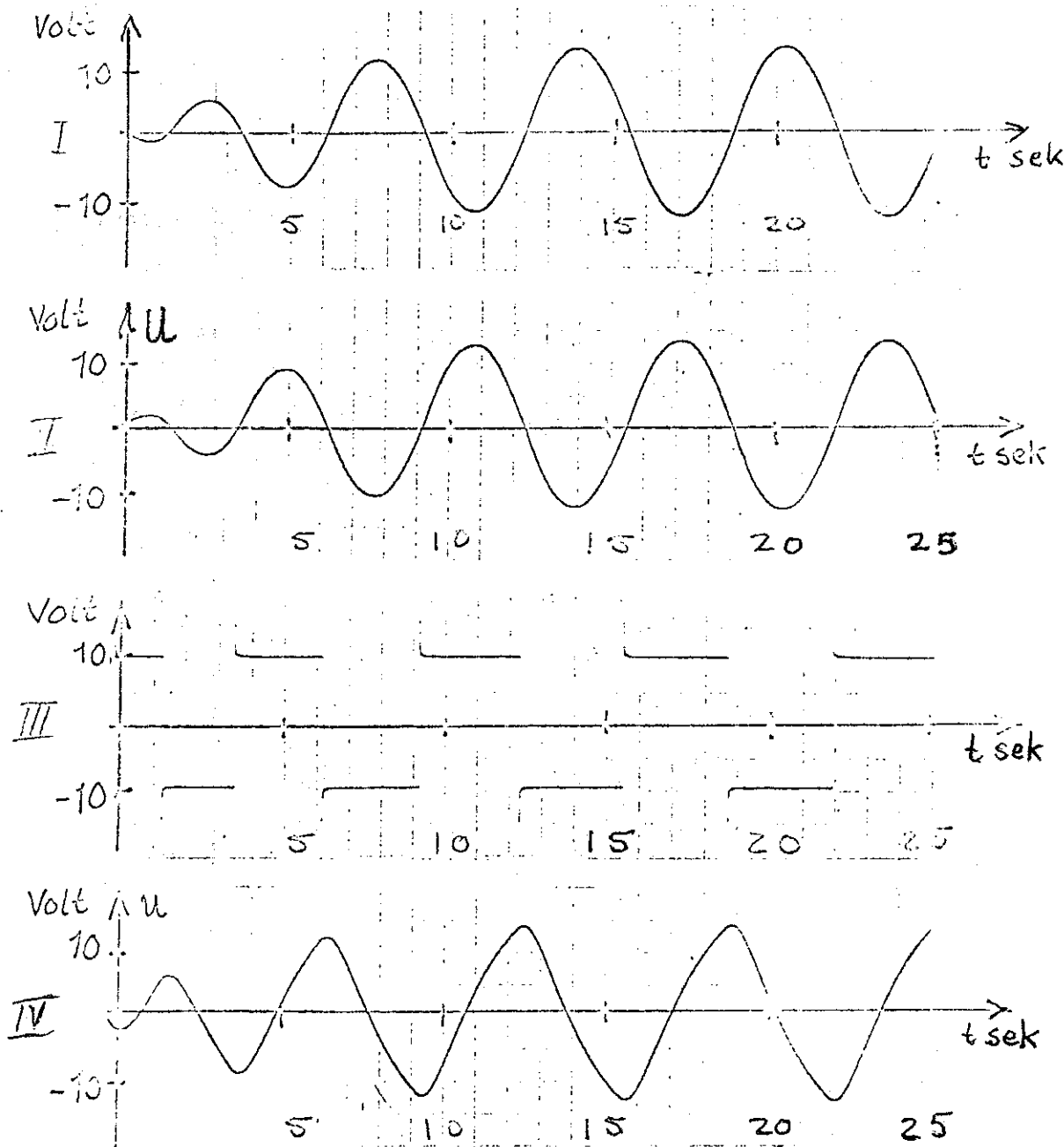


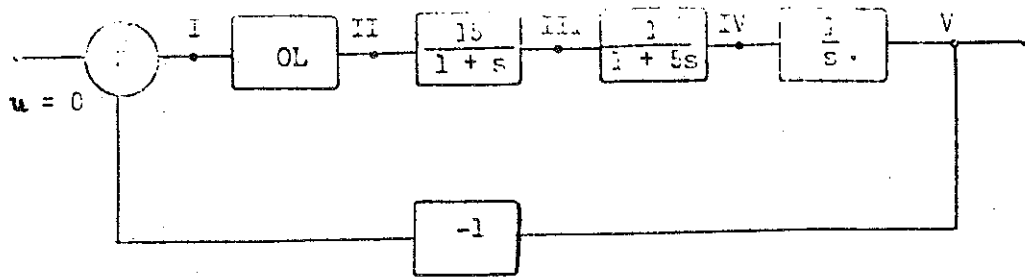
- A Den stabila periodiska lösningen har frekvensen $\omega = 0.4$
- B Amplituden i punkten A i blockschemat är 0.2
- C Amplituden i punkten A i blockschemat är 0.9
- D Amplituden i punkten B i blockschemat är 0.2

5.2

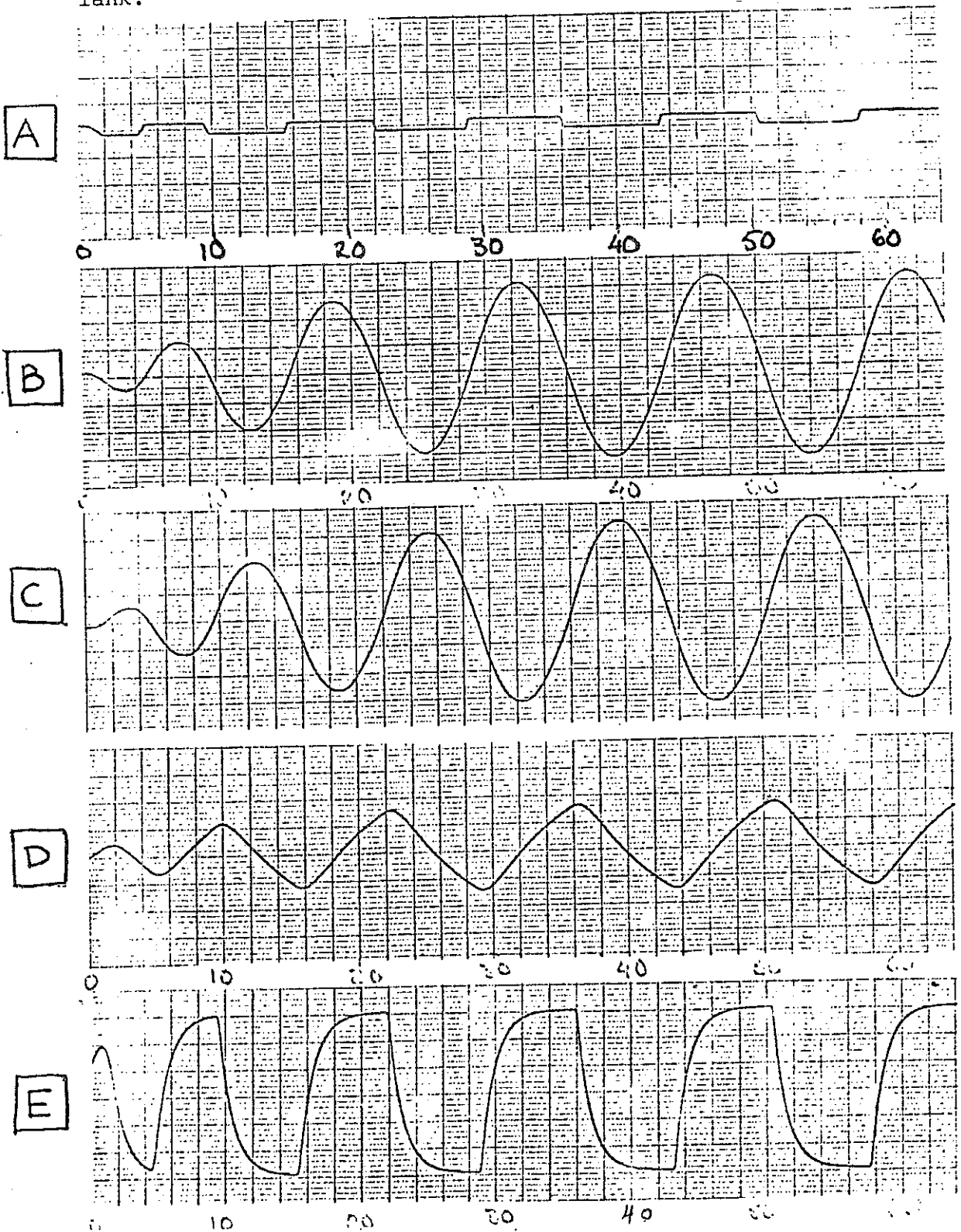


I ett system med ovanstående kopplingsschema har man registrerat signalerna i fyra punkter A, B, C och D. Nedanstående kurvformer har erhållits. Ange i tabellen nedan vilka av kurvorna som motsvarar signaler i de olika punkterna.





I ett system med ovanstående blockschema har man registrerat signalerna i fem olika punkter. Ange vilka kurvformer som hör till punkterna I, II, III, IV och V. OL betecknar en olinjär länk.



APPENDIX I

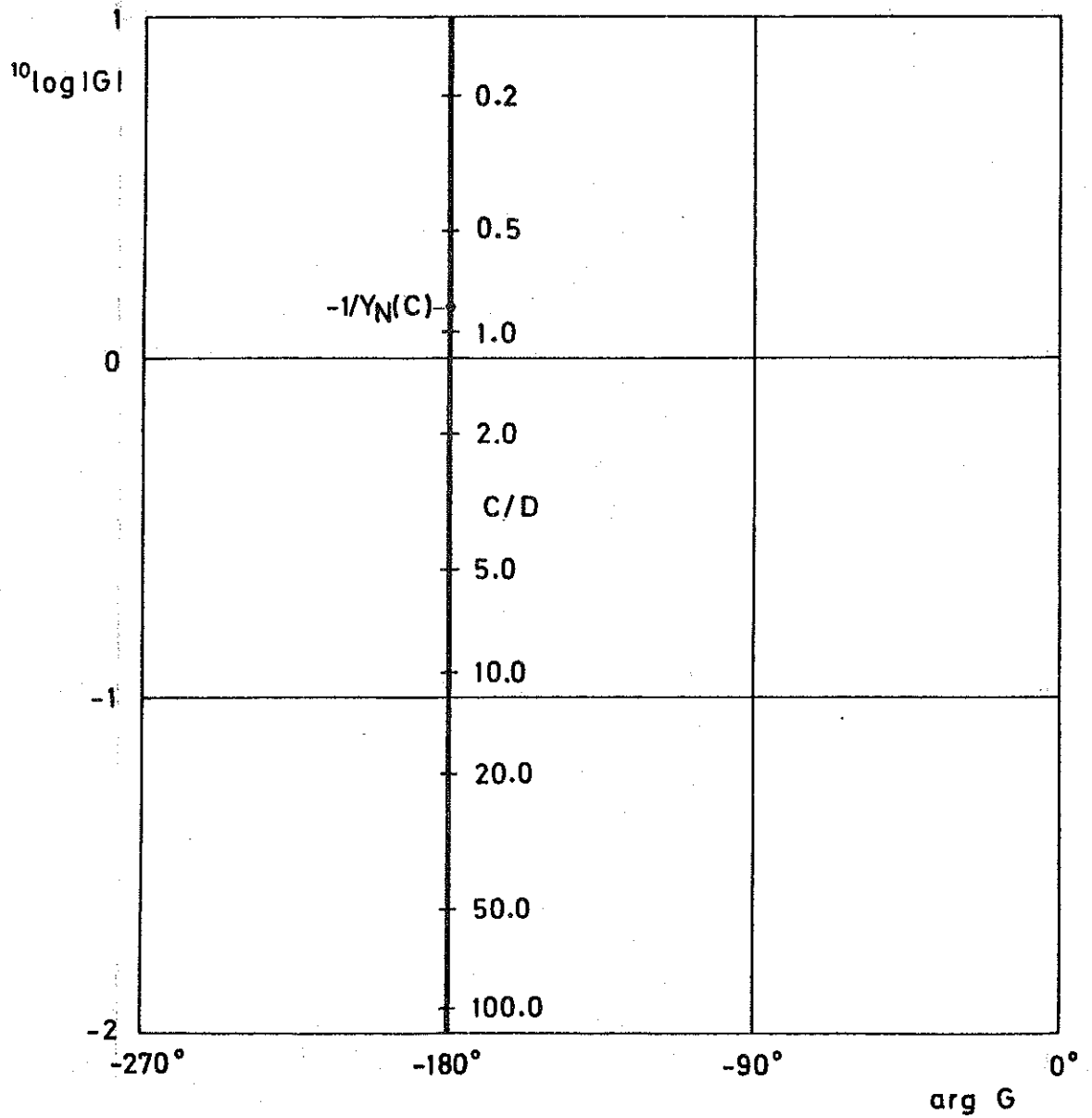
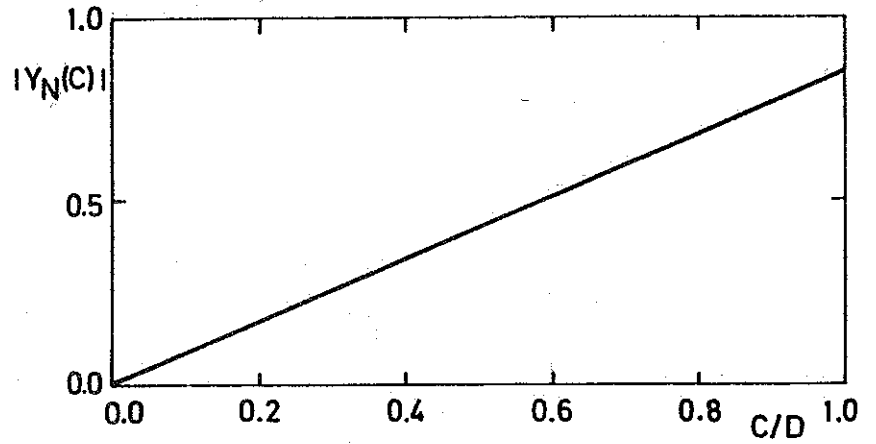
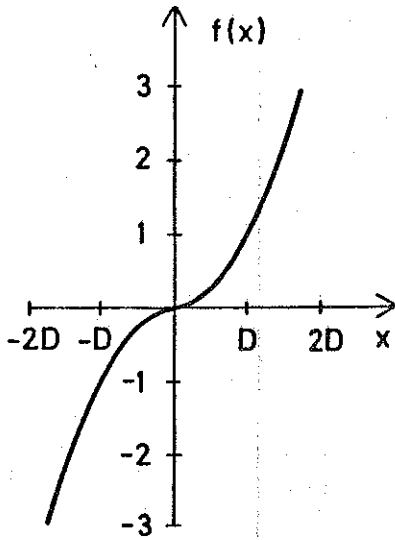
Beskrivande funktion för några olinjäriteter

$x x /D^2$	sid A:1
x^3/D^3	sid A:2
$\sin(x/D)$	sid A:3
Mättning	sid A:4
Dödzon	sid A:5
Relä	sid A:6
Relä med dödzon	sid A:7
Relä med hysteres	sid A:8
Glapp	sid A:9

Olinjäritet: $f(x) = x|x|/D^2$

$\text{Re}\{Y_N(C)\} = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{C}{D}$

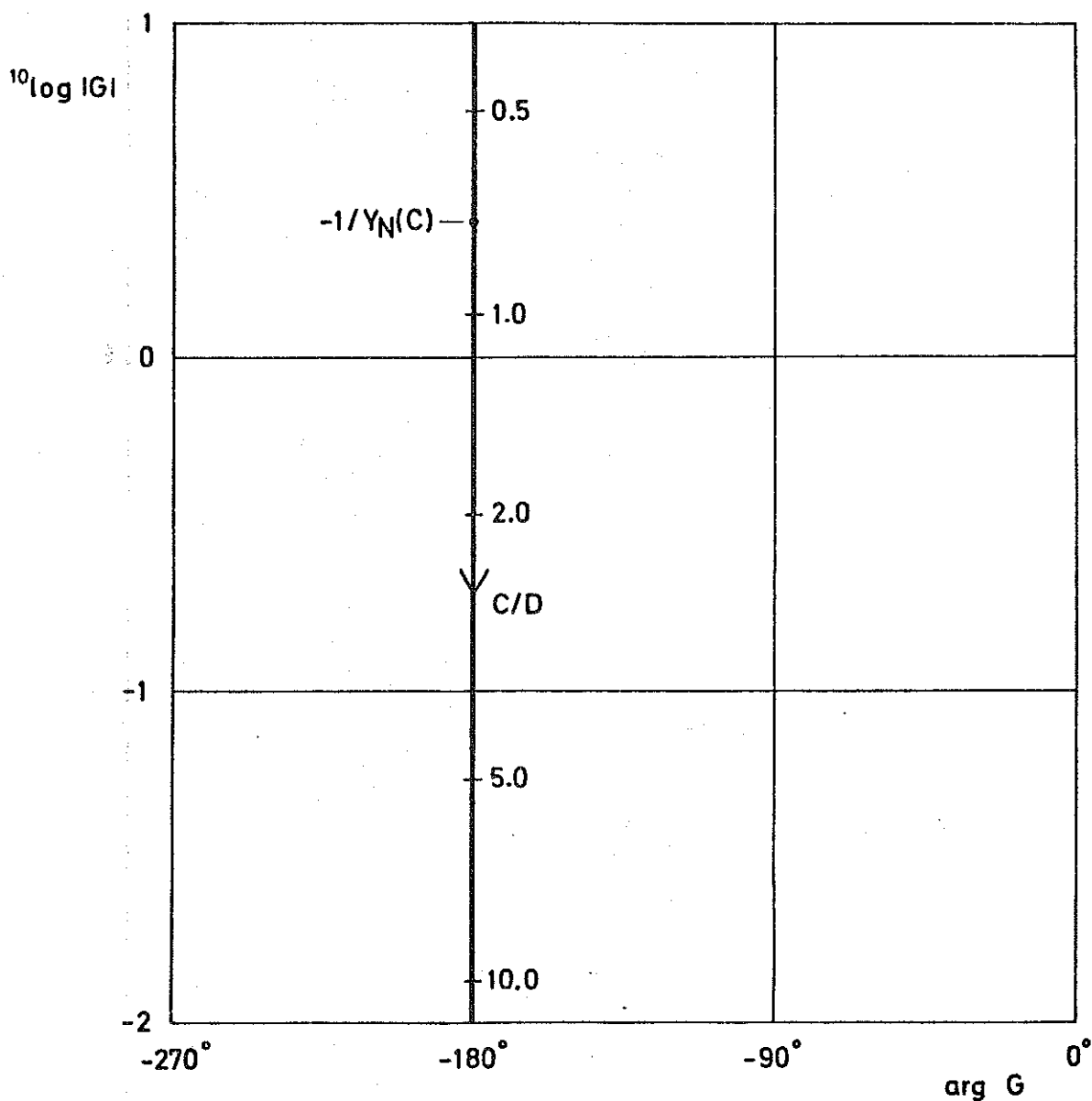
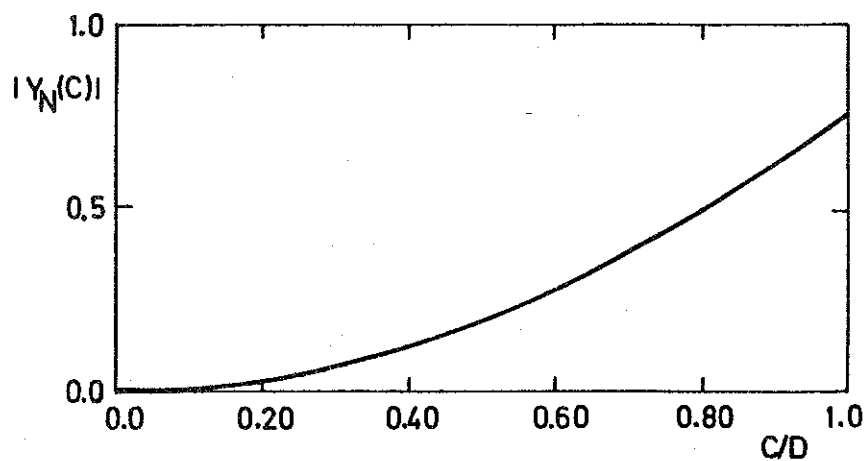
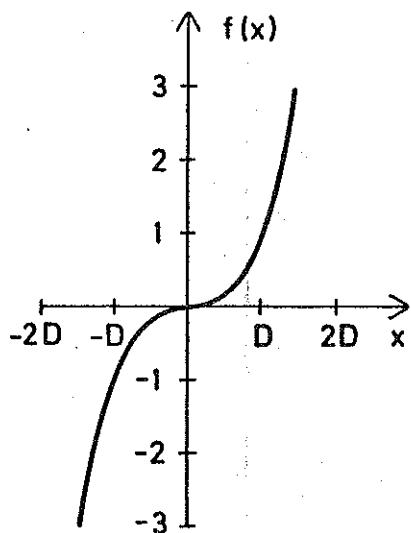
$\text{Im}\{Y_N(C)\} \equiv 0$



Olinjäritet: $f(x) = x^3/D^3$

$$\operatorname{Re}\{Y_N(C)\} = \frac{3}{4} \left(\frac{C}{D}\right)^2$$

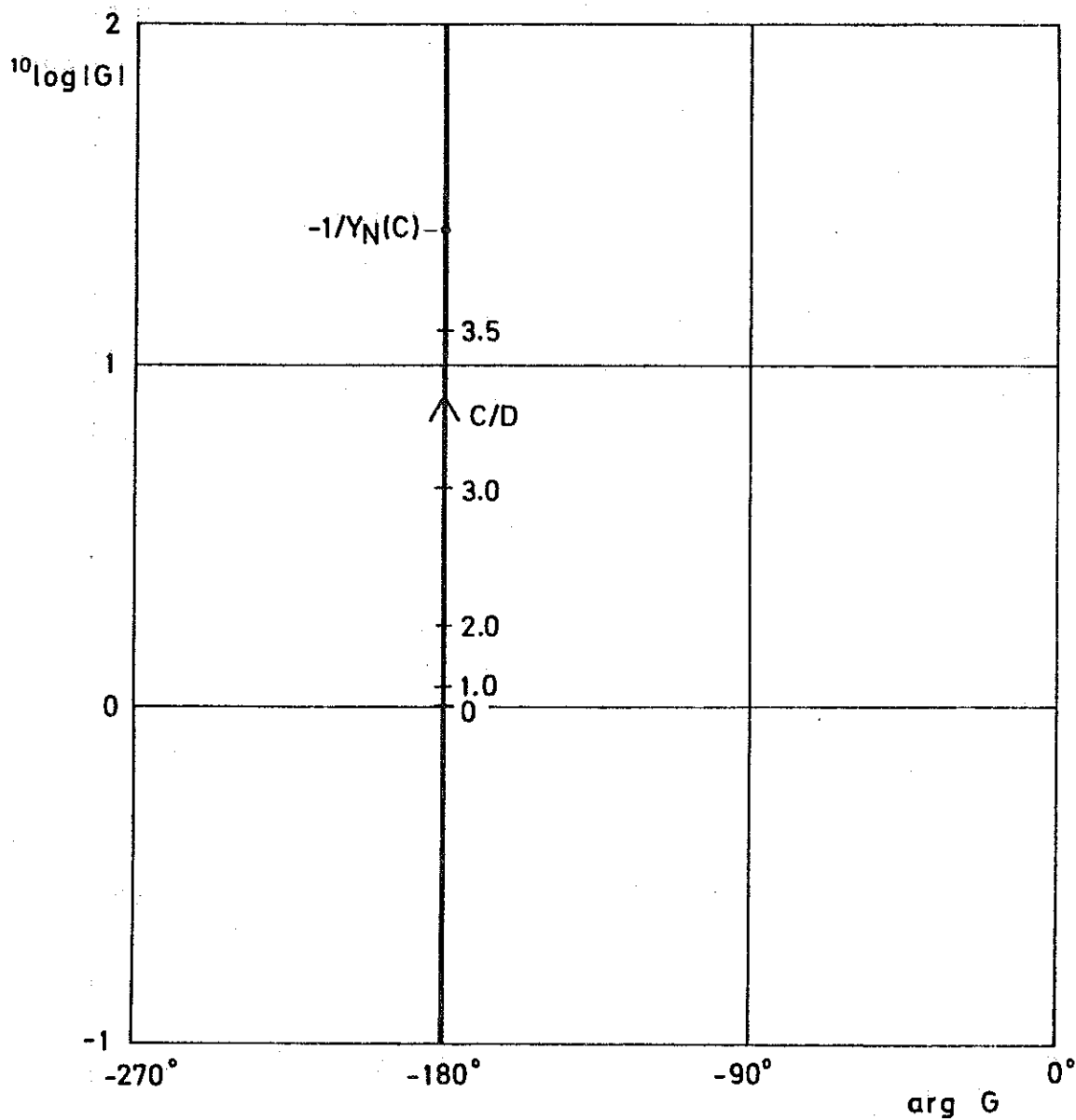
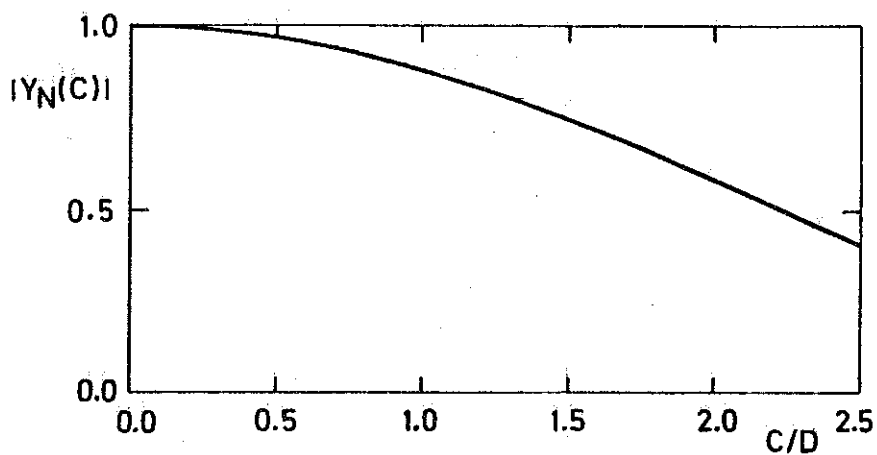
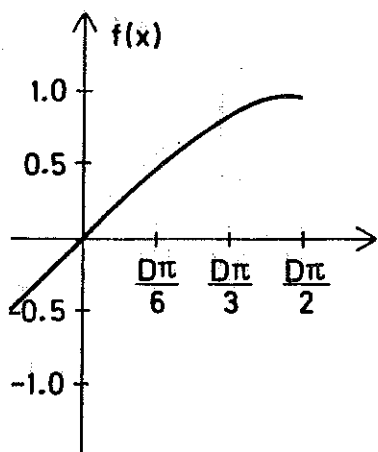
$$\operatorname{Im}\{Y_N(C)\} \equiv 0$$



Olinjäritet: $f(x) = \sin(x/D)$

$$\text{Re}\{Y_N(C)\} = 2Y_1(C/D) \cdot D/C = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{C}{D}\right)^2 + \frac{1}{192} \left(\frac{C}{D}\right)^4 \dots$$

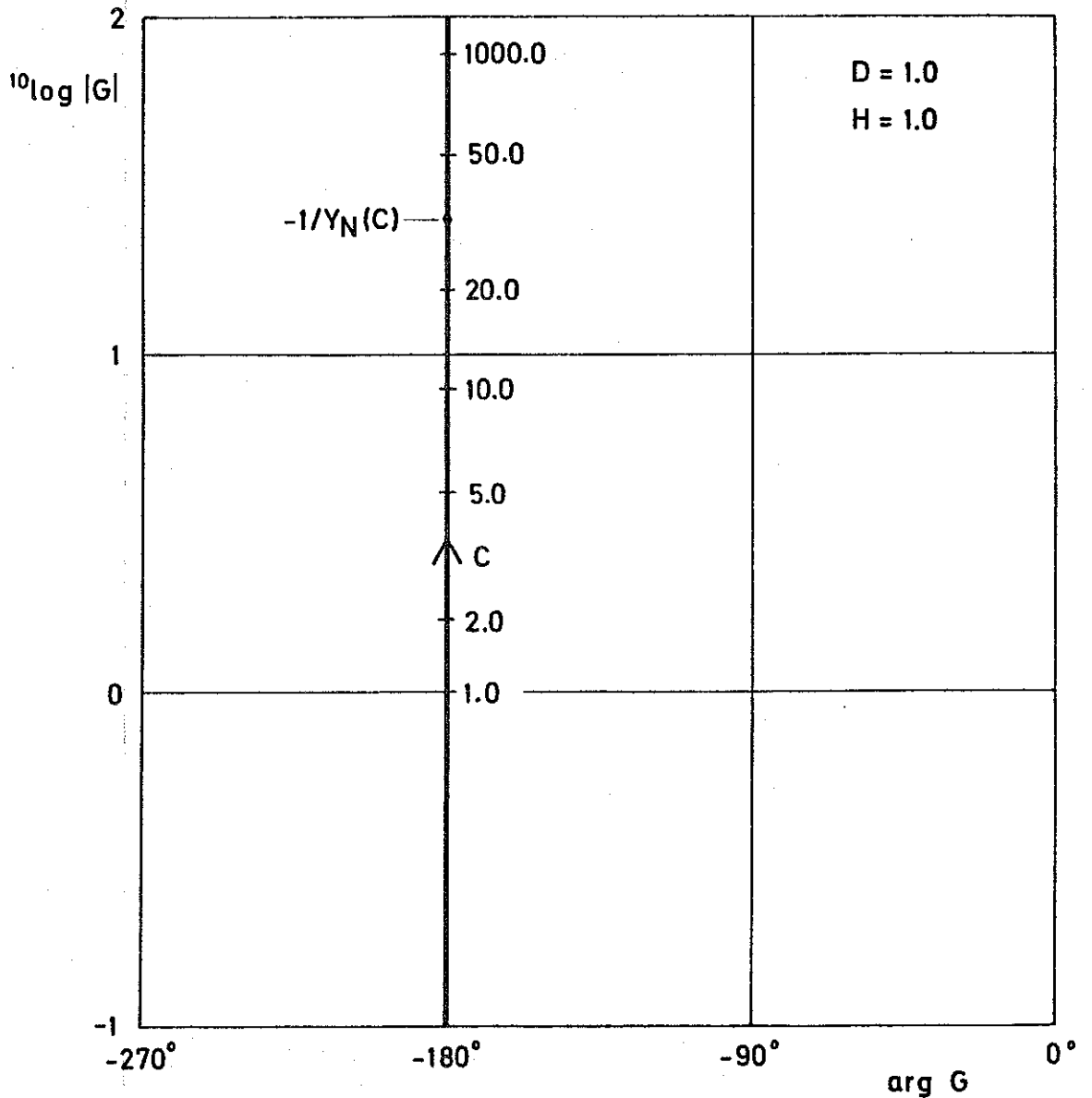
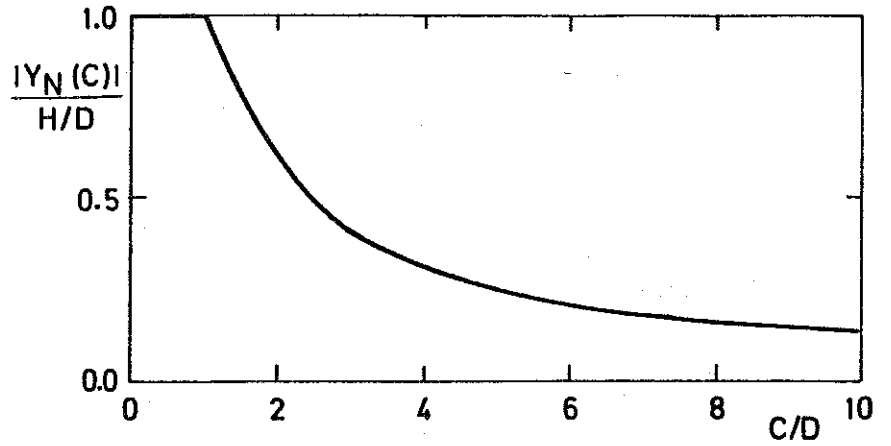
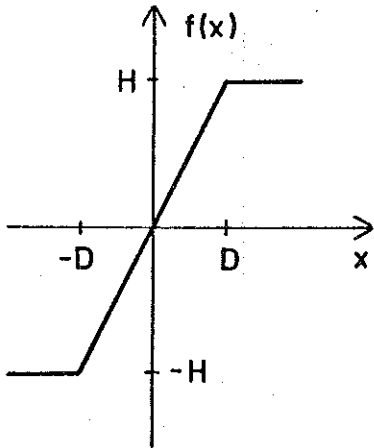
$$\text{Im}\{Y_N(C)\} = 0$$



Olinjäritet: Mättning

$$\text{Re}\{Y_N(C)\} = \frac{2H}{\pi \cdot D} [\text{arc sin } (D/C) + \frac{D}{C} \sqrt{1 - D^2/C^2}] ; C \geq D$$

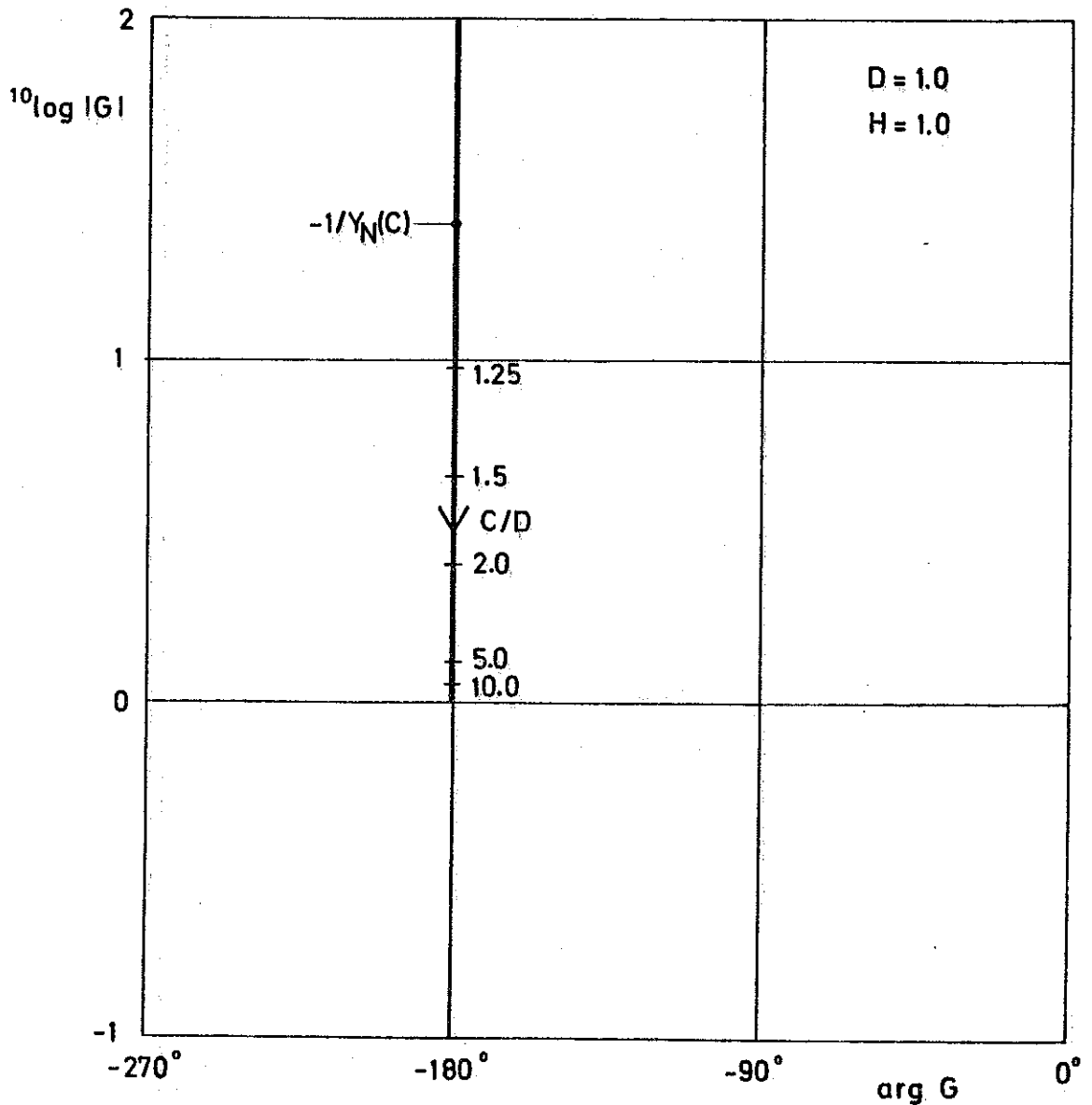
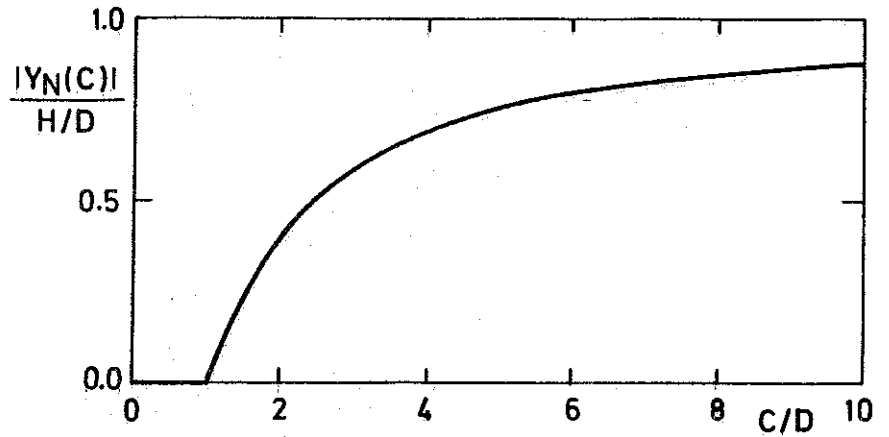
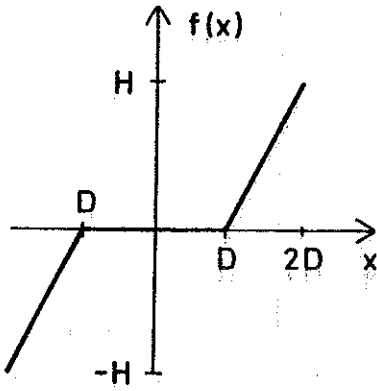
$$\text{Im}\{Y_N(C)\} \equiv 0$$



Olinjäritet: Dödzon

$$\text{Re}\{Y_N(C)\} = \frac{H}{D} - \frac{2 \cdot H}{\pi \cdot D} \left[\arcsin(D/C) + \frac{D}{C} \sqrt{1 - D^2/C^2} \right]; \quad C \geq D$$

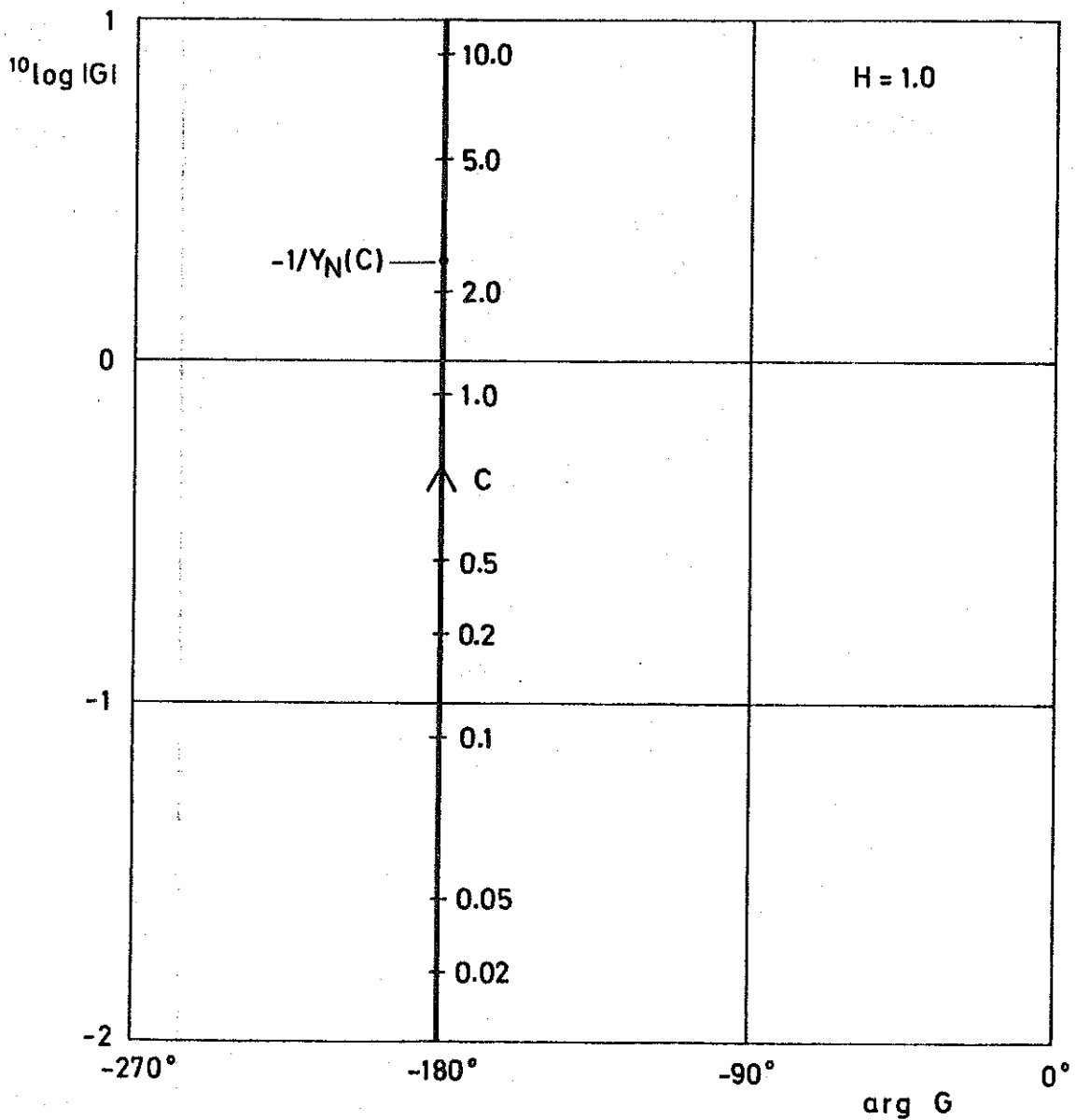
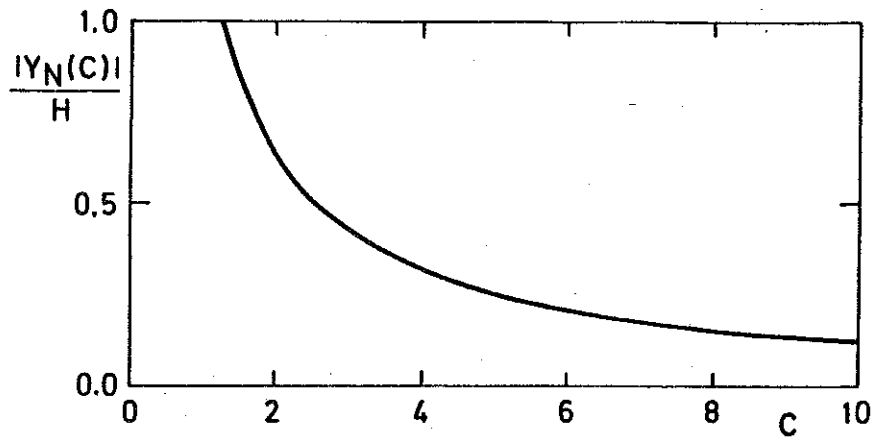
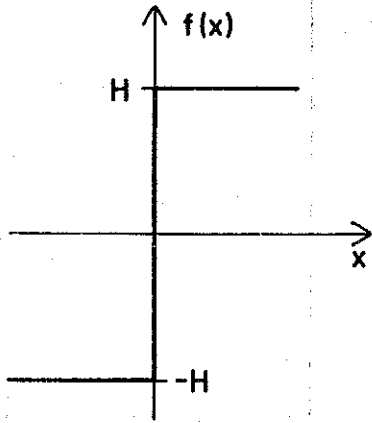
$$\text{Im}\{Y_N(C)\} \equiv 0$$



Olinjäritet: Relä

$$\operatorname{Re}\{Y_N(C)\} = \frac{4H}{\pi \cdot C}$$

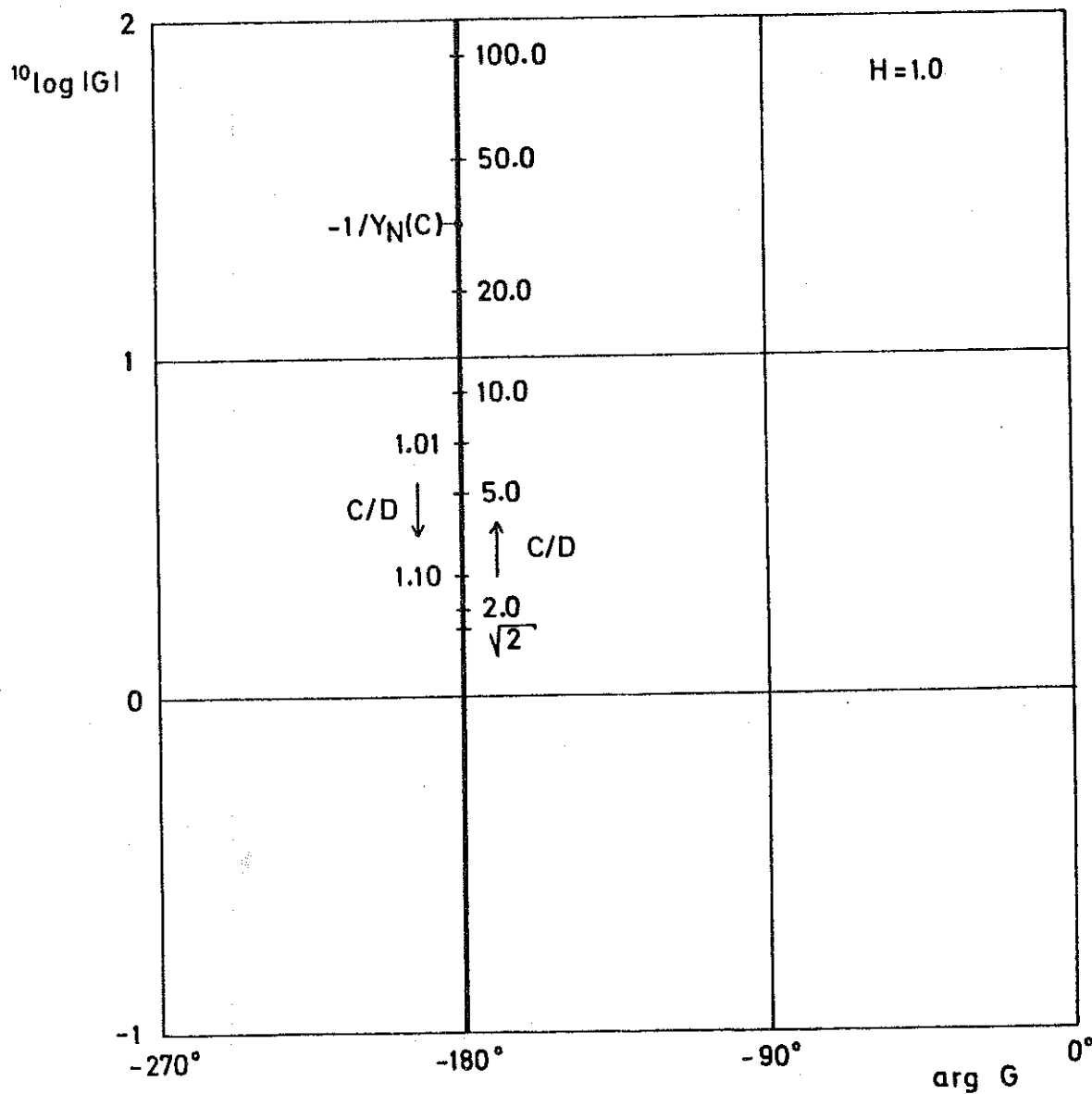
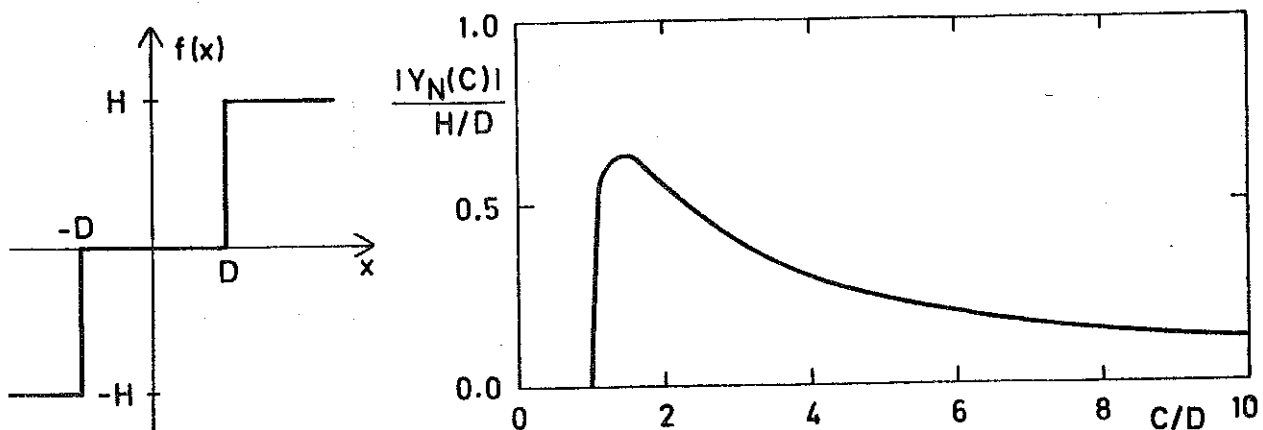
$$\operatorname{Im}\{Y_N(C)\} = 0$$



Olinjäritet: Relä med dödzon

$$\operatorname{Re}\{Y_N(C)\} = \frac{4H}{\pi \cdot C} \sqrt{1 - D^2/C^2} \quad ; \quad C \geq D$$

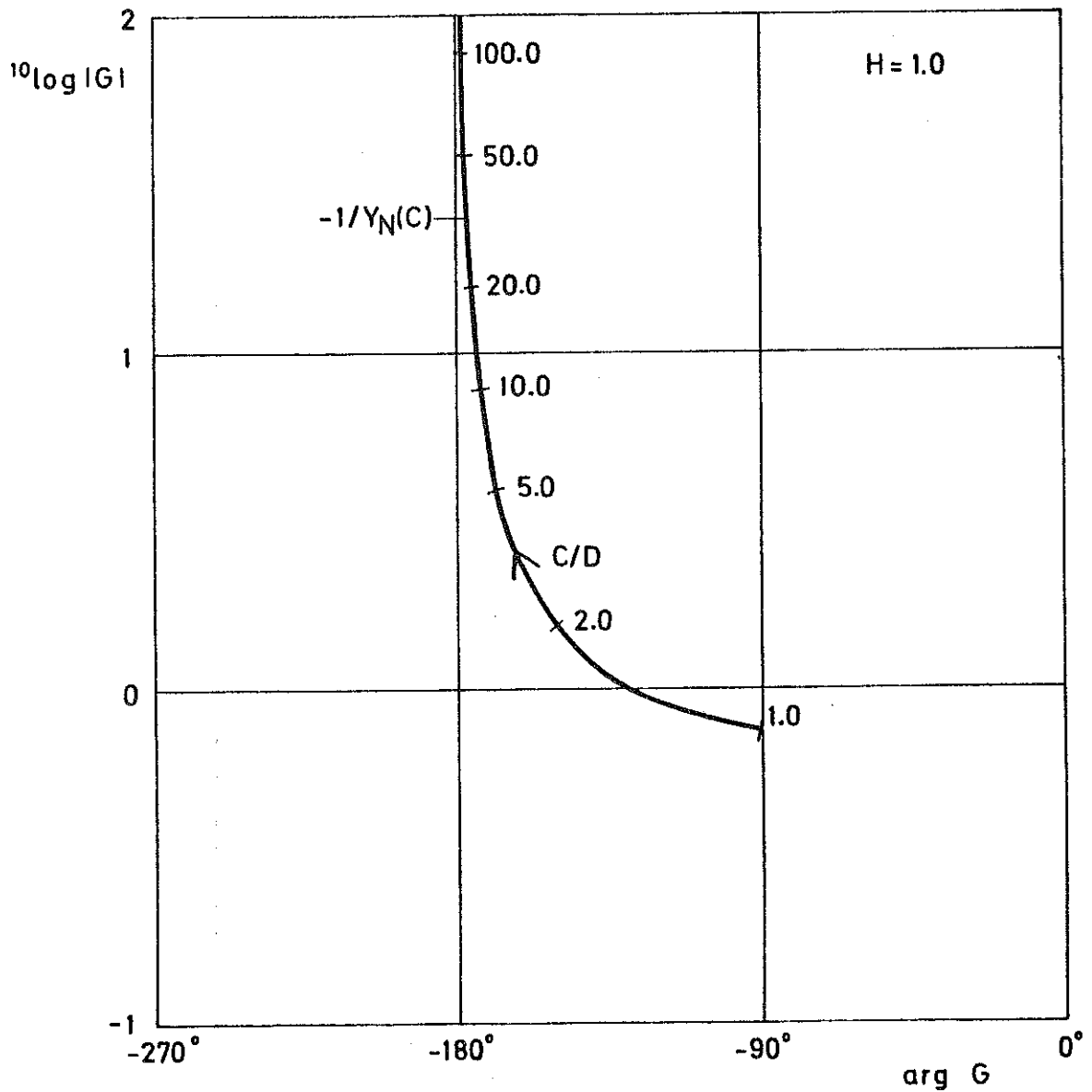
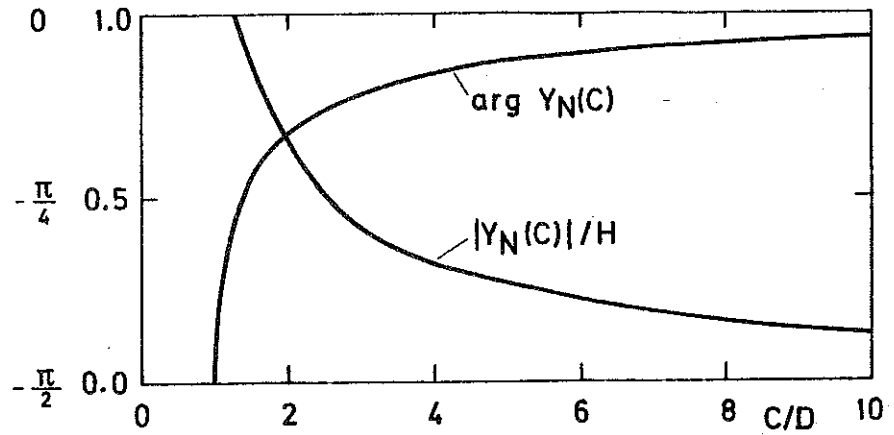
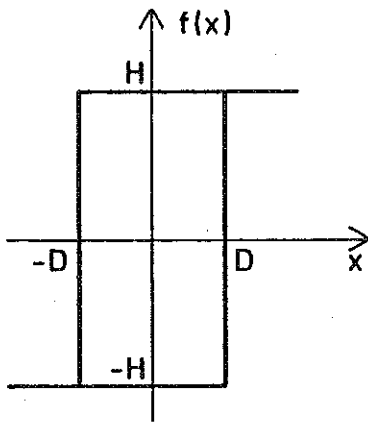
$$\operatorname{Im}\{Y_N(C)\} \equiv 0$$



Olinjäritet: Relä med hysteres

$$\operatorname{Re}\{Y_N(C)\} = \frac{4H}{\pi C} \sqrt{1 - D^2/C^2} \quad ; \quad C \geq D$$

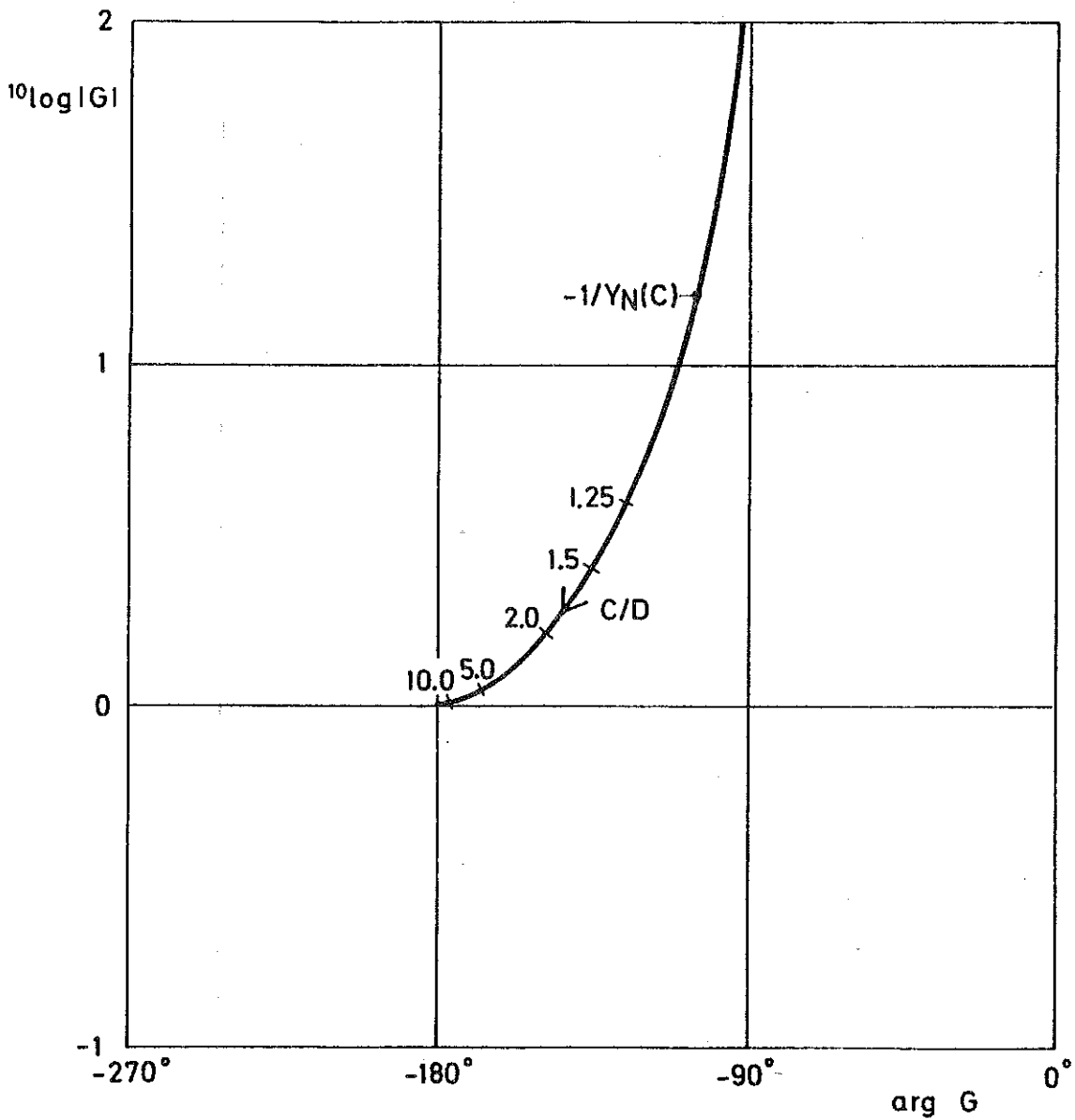
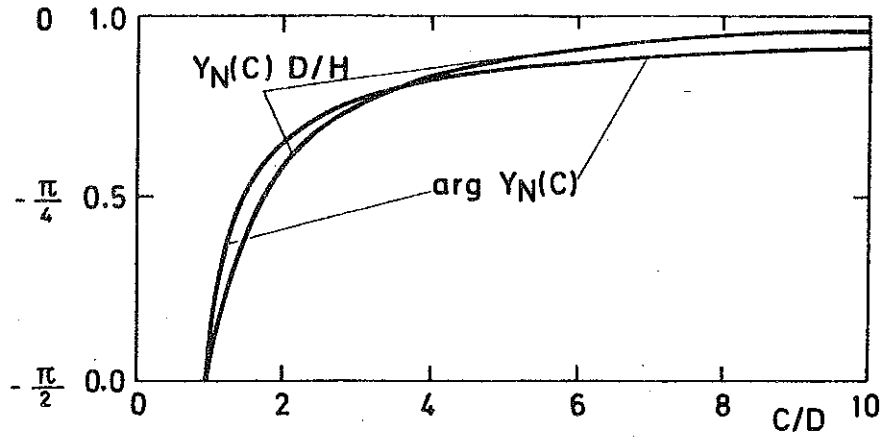
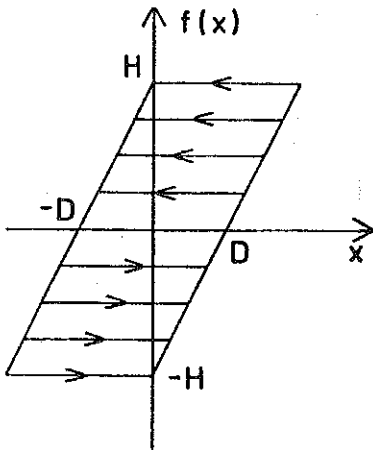
$$\operatorname{Im}\{Y_N(C)\} = -\frac{4HD}{\pi C^2}$$



Olinjäritet: Glapp

$$\text{Re}\{Y_N(C)\} = \frac{H}{\pi D} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin(1-2D/C) + 2(1-2D/C) \sqrt{\frac{D}{C} \left(1 - \frac{D}{C}\right)} \right\}$$

$$\text{Im}\{Y_N(C)\} = -\frac{4H}{\pi C} \left(1 - \frac{D}{C}\right) \quad C \geq D$$



Kap VI - REFERENSER

Detta kapitel innehåller ett antal referenser till läroböcker och artiklar för vidare studium. De flesta givna referenserna innehåller ytterligare referenser. Listan är försedd med några korta orienterande kommentarer.

Kap II

Teorin för ordinära differentialekvationer behandlas i t.ex.:

- II.1 Coddington & Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1955
- II.2 Bellman, R: Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1953.
- II.3 Lefschetz, S: Differential Equations: Geometric Theory, Interscience Publishers, New York.

En bra och grundläggande framställning ges i:

- II.4 Pontryagin, L.S.: Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1962.

Ett omfattande tabellverk över lösningsmetoder och lösningar till differentialekvationer är:

- II.5 Kamke, E: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Chelsea Publishing Company, N.Y., 1959.

Kap III

Fasplanmetoden behandlas i de flesta läroböcker om olinjära reglersystem. Kompletterande framställningar till detta kompendium kan man finna i:

III.1 Cunningham, W I: Nonlinear Analysis, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1958.

III.2 Gibson, J: Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1963.

Dessa båda böcker beskriver även andra metoder än isoklinmetoden för konstruktion av det totala fasporträttet. Trevliga framställningar av olinjära system och fasplan ges även i:

III.3 Graham, McRuer: Analysis of Nonlinear Control Systems, John Wiley & Sons, N.Y., 1961.

III.4 Thaler, Pastel: Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1962.

Andra användbara metoder vid konstruktion av fasporträtt presenteras i:

III.5 Szegö, G P: A New Procedure for Plotting Phase-Plane Trajectories, AIEE Trans., pt 2, July, 1962, pp 120 - 125.

III.6 Deekshatulu, Murthy: Generalized Isocline Method of Plotting Phase-Plane Trajectories, IEEE Trans AC, Jan., 1965, pp 90 - 92.

Singulära punkter behandlas även i böcker om ordinära differentialekvationer, se t.ex. II.3 och II.4.

Kap IV

Lyapunovs mycket betydelsefulla resultat inom stabilitetsteori för differentialekvationer publicerades 1892 i en rysk tidskrift. De finns tillgängliga på franska i:

- IV.1 Lyapunov, A M: Problème général de la stabilité du mouvement, Am. Fac. Sci., Toulouse, vol. 9, 1907, pp 203 - 473. Omtryckt i Am. Math. Study. No. 17, 1949, Princeton University Press.

En modern framställning av Lyapunovs resultat finns i:

- IV.2 Malkin, I G: Theory of Stability of Motion, AEC Translation 3352, Dept. of Commerce, USA, 1958.
- IV.3 Hahn, W: Stability of Motion, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

En sammanfattning av Lyapunov-teorin och dess användning vid analys och syntes av reglersystem ges i:

- IV.4 Kalman, R E, Bertram, J E: Control System Analysis and Design Via the "Second Method" of Lyapunov.

För en mer omfattande presentation av olika metoder att generera Lyapunov-funktioner, även för tidsvarianta system, hänvisas till:

- IV.5 Schultz, D G: The Generation of Liapunov Functions, Advances in Control Systems, Volume 2, Academic Press, N.Y., 1965.

Popovs stabilitetskriterium behandlas mycket utförligt i:

- IV.6 Aiserman, M A, Gantmacher, F R: Die absolute Stabilität von Regelsystemen, R Oldenbourg Verlag, München, 1965.

En fullständig referens är

Narendra/Taylor: Frequency Domain Criteria for Absolute Stability. Academic Press 1973.

Framställningen är helt baserad på Ljapunovteorin. Alternativt kan man bygga en stabilitetsteori på teorin för begränsade operatorer i Banach- eller Hilbert-rum. Ett sådant funktionalanalytiskt betraktelsesätt användes i

Desoer/Vidyasagar: Feedback Systems: Input - Output Properties. Academic Press 1975.

Kap V

Metoden med harmonisk linjärisering förekommer första gången i:

V.1 Poincaré, M: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

En tidig reglerteknisk tillämpning finns i:

V.2 Tusin, A: The Effects of Backlash and of Speed Dependent Friction on the Stability of Closed-Cycle Control Systems, Journal IEEE, Pt II a, vol. 94 (1947), pp 143 - 151.

De flesta läroböcker om olinjära reglersystem innehåller en uttömmande framställning av metoden med beskrivande funktion. Se t.ex. III.2, III.3 och III.4. Referens III.3 innehåller också en introduktion till analys med beskrivande funktion av olinjära system, vars insignal är en stokastisk process.

REGISTER

Benämning	Sid.	Benämning	Sid.
Adaptivt system	IV:43	Jämviktspunkter	III:2
Algebraisk ekvation	IV:12	Karakteristisk ekvation	III:4
Argumentvariationsprincipen	V:18	Konvergent punkt	V:22
Attraktionspunkt	III:36	Krassovskys metod	IV:22
Autonom	III:1	Lagranges sats	IV:2
	III:5	Lienards ekvation	IV:38
Bana	III:1	Lipschitz-villkor	II:2
Bendixons sats	III:58	Lyapunov	III:3
Beskrivande funktion	V:1	Lyapunovs andra metod	IV:1
	V:5	Lyapunovs första metod	IV:1
Center, se centrum		Lyapunov-Poincarés sats	III:30
Centrum	III:3	Lyapunov-funktion	IV:4b
	III:15	Lågpasstyp	V:17
	III:36	Matematisk pendel	V:38
Cirkelkriteriet	IV:2	Modifierad frekvenskurva	IV:54
	IV:57,58	Mättande förstärkare	V:9
Cylindrisk fasrum	III:50	Nichols diagram	V:28
Definit, negativ	IV:4b	Nod	III:3,4, 6, 11, 36
positiv	IV:4b	entangent	III:12
semi-	IV:4b	instabil	III:9
Delsumma	V:2	instabil, tvåtangent	III:9
Determinant	III:17	k-tangent	III:36
Divergent punkt	V:22	mångtangent	III:11
Egenvektor	III:6	stabil, tvåtangent	III:6
instabil	III:10	stjärna	III:11,36
långsam	III:8	Nyqvist-teoremet	IV:2, V:18
snabb	III:8	Optimeringsteori	IV:48
stabil	III:10	Ostörda lösningen	IV:3
Egenvärde	III:4	Periodiska koefficienter	III:28
Ekvivalent fasförskjutning	V:8	Periodisk lösning	III:3,56
Ekvivalent förstärkning	V:8	stabil	III:56
Entydighetssats	II:2	Poincaré	III:3
Existenssats	II:2	Popov	IV:2,56
Faslösning	III:47	Produktrum	III:1
Fasplananalys	III:1	Radiellt obegränsad	IV:36
Fasplankurva	III:1	Reguljär matris	III:5
Fasporträtt	III:1	Relä	V:23
Fasrum	III:1	med hysteres	V:11
Flygplan, roder-servo	V:32	-servo	IV:41
Fokus	III:3	Restterm	III:30
	III:13	Sadelpunkt	III:3,4, 9 och 36
	III:15	Sektor	IV:52
Fourierserie	V:2	Semidefinit	IV:4b
Fyrkantvåg	V:3	Simulering	I:11
Förlustfunktion	IV:48	Singulära punkter	II:5, III:2
Glapp	V:27	Soft-self excitation	V:21
Grundton	V:8	Spiral	III:15
Hard-self excitation	V:22	Spår	III:17
Harmoniska svängningar	I:9	Starkt nät	III:42
Hoppresonans	I:8	Stabilitet	I:4
Instabil	IV:3	Stabil	IV:3
Integral ekvation	III:32		
Isokliner	III:51		
Isoklinmetoden	III:3		
	III:51		
Isolerad singularitet	III:18		

<u>Benämning</u>	<u>Sid.</u>	<u>Benämning</u>	<u>Sid.</u>
Stabil, asymptotisk	III:3	Trajektoria	III:1
	IV:4	Triodoscillator	III:66
globalt	IV:37	Van der Pool's ekvation	III:68
Stabilitetsområde	IV:36		IV:38
Stick-slip rörelse	III:59	Variabla gradientmetoden	IV:26
Styckvis linjär	III:3	Ventilkaraktistik	
	III:19	Verktygsmaskin	III:60
Subharmoniska svängningar	I:9	Whitakers modell ref.metod	IV:43
Superpositionsprincipen	I:4	Virtuell singularitet	III:19,63
Synkronmaskin	III:41	Ändlig explosionstid	II:4