

Numerisk Analys av Spjälkning i Betong

En jämförelse mellan FEM och svenska standarder

Sofia Lindblad

3 juli 2026

Abstract

Splitting refers to cracking in concrete caused by transverse tensile stresses and is typically mitigated through reinforcement of the concrete. In *Boverkets handbok om betongkonstruktioner*, *BBK04*, threshold values are provided for when splitting is expected to occur and when splitting reinforcement is required. In 2011, Swedish design practice transitioned to *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner*, in which guidance and design requirements regarding the phenomenon of splitting are not explicitly provided. Furthermore, experience regarding the numerical modelling of splitting remains limited.

The aim of this study is to evaluate the threshold values presented in *BBK04* regarding when splitting cracks are expected to occur, as well as the influence of the reinforcement prescribed by the strut-and-tie models in Eurocode on the cracking behaviour and load-bearing capacity of concrete. To enable this analysis, modelling choices affecting the propagation of splitting cracks are evaluated. In addition, a method for modelling the bond-slip between concrete and reinforcement using springs is developed and assessed.

The analysis comprised three finite element models assembled in the software *Brigade/Plus* using a parametric Python script. Initially, a reinforced deep beam reinforced was evaluated with respect to flexural cracking. The results were compared with an established strut-and-tie model in order to validate the modelling approach. The remaining two models were analysed with respect to splitting cracks and the influence of reinforcement designed according to Eurocode strut-and-tie models. The reinforcement was modelled both with and without bond-slip behaviour.

The analyses demonstrated that modelling splitting failure is associated with significant complexity. The modelling choices found to have the greatest influence on the splitting crack propagation were the width of the loaded area, the choice of boundary conditions and the bond-slip behaviour. The analyses indicated that the *BBK04* guidelines for when splitting is expected to occur are conservative. The ductility of the studied reinforced concrete structure increased when splitting reinforcement was introduced. The splitting reinforcement also influenced the crack propagation. Regarding the modelling approach for the bond between concrete and reinforcement, the results indicate that more realistic behaviour is achieved by connecting the reinforcement to the concrete using springs, as compared to an approach where the reinforcement is fully constrained to the concrete. The stiffness and anchorage of the springs had a significant influence on the results.

Sammanfattning

Spjälkning avser uppsprickning i betong pågrund av tvärgående dragpänningar, vilket hanteras genom att armera betongen. I *Boverkets handbok om betongkonstruktioner, BBK04* återfinns gränsvärden för när spjälkning förväntas ske, och när spjälkarmering erfordras. År 2011 övergick svensk praxis istället till *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner*, där specifika anvisningar och riktlinjer avseende spjälkning inte finns beskrivna. Vidare finns behov av mer kunskap om numeriks modellering av spjälkning.

Arbetet syftar till att med numerisk modellering utvärdera de gränsvärden som återfinns i BBK04 gällande när spjälksprickor förväntas uppstå, samt vilket inverkan den av Eurokods fackverksmodellers föreskrivna armeringen har på uppsprickningen och bärformågan. För att möjliggöra analysen utvärderas de modelleringsval som har inverkan på propagering av spjälksprickor. Vidare utvecklas och evalueras en metod för att modellera vidhäftningen mellan betong och armering med hjälp av fjädrande upplag.

Analysen omfattade tre finita element-modeller som assemblerades i mjukvaran Brigade/Plus med hjälp av en parametrisk Pythonkod. Inledningsvis utvärderades en armerad hög balk med avseende på böjsprickor. Resultatet jämfördes med en etablerad fackverksmodell i syfte att utvärdera modelleringsmetoden. De andra två modellerna baserades på Eurokods standardiserade fackverksmodeller och analyserades med hänsyn till spjälksprickor samt inverkan av armering enligt Eurokods fackverksmodeller. Armeringen modellerades både med fixt kopplad till betongen samt med hänsyn till vidhäftningsglidning.

Analyserna visade att modellering av spjälkbrott i betong är förknippat med en betydande komplexitet. Modelleringsvalen som visade sig ha störst inverkan på uppkomsten av spjälksprickor var tryckytans bredd samt val av randvillkor. Analyserna indikerade att BBK04s riktlinjer för när spjälkning förväntas uppstå är konservativa. För de analyserade lastfallen erhöles även en mer duktil respons när spjälkarmering lades in. Spjälkarmeringen hade även inverkan på uppsprickningen. Vad gäller val av metod vid modellering av vidhäftningen mellan betong och armering uppvisade koppling med fjäderelement ett mer realistiskt beteende hos armeringen än vid fullständig samverkan. Fjädrarnas styvhet och förankring hade stor inverkan på resultatet.

Förord

Detta examensarbete omfattar 30 högskolepoäng och har utförts som ett samarbete mellan Institutionen för Byggnadsmekanik vid LTH, och ELU Konsult AB i Malmö. Examensarbetet är det avslutande kapitlet på mina studier till Civilingenjör i Väg- och Vattenbyggnad vid Lunds Tekniska Högskola. Jag kommer alltid att minnas mina studier och studentengagemang på *V-Sektionen* med värme.

Tack till min handledare *Linus Andersson* (LTH), för din stöttning och aldrig sinande idérikedom kring hur modelleringarna kunnat förbättras. Ett särskilt stort tack vill jag också rikta till min handledare *Per Benner* (ELU) för ditt tålamod, nyfikenhet och oändliga engagemang. Detta examensarbete hade aldrig varit möjligt utan dig!

Slutligen vill jag tacka min familj, mina vänner och min sambo för all stöttning genom studierna, samt ge en homage till min farfar *Göran Lindblad*, och min morfar *Ulf Ekström*, som är mina största ingenjörs-förebilder!

Malmö, maj 2026

Notation

Latinska bokstäver

a	Förskjutning
$\dot{a}$	Hastighet
b	Bredd
b	Kraft per volymenhet
$\dot{b}$	Kraft per volymenhet beroende av tiden
B	Kontinuitetszon
B	Derivatan av formfunktionen
c	Godtycklig viktfunktion
d	Diameter
d_t	Skadefaktor i drag
d_c	Skadefaktor i tryck
D	Diskontinuitetszon
D	Styvhetsmatris
D^{ep}	Styvhetsmatrisen när materialet beter sig plastiskt
D_t	Styvhetsmatrisen beroende av tiden
E	Elasticitetsmodul
E_0^{el}	Initiell oskadad elasticitetsmodul
f	externa krafter
f_{cd}	Dimensionerande värde för tryckhållfasthet i betong
f_{ck}	Karakteristiskt värde för betongens cylindertryckhållfasthet (28 dagar)
f_i	funktion som rymmer fördefinierade parametrar i CDP
f_{int}	interna krafter
f_{cm}	Medelvärde för betongens tryckhållfasthet
f_{ctd}	Dimensionerade värde för draghållfasthet i betong
f_t	Betongens draghållfasthet
f_{yk}	Flytgräns för stål
F	Kraft
g	Funktion
G_f	sprickbildningsenergi
H	Höjd
i	Iteration
I_1	Första invarianten av spänningstensorerna
J_2	Andra invarianten av den deviatoriska spänningen
k	Koefficient; faktor; hårdningsparameter
K_c	Formfunktion för flytytan i det deviatoriska planet
K_t	Tangentiell styvhetsmatris
l	Längd

$\mathbf{M}$	Massmatris
n	Laststeg
$\mathbf{N}$	Formfunktion
s_1	maximal Glidning mellan armering och betong
S	Yta
$\mathbf{t}$	Ytkraftsvektor
$\dot{\mathbf{t}}$	Ytkraftsvektorn beroende av tiden
T	Dragkraft i dragstag
$\mathbf{u}$	Förskjutning
$\ddot{\mathbf{u}}$	Acceleration
w_c	Spricköppningsdeformation
$\mathbf{v}$	Godtycklig viktfunktion
V	Volym
x	Förskjutning
z	Inre hävarm

Grekiska bokstäver

α	Materialparameter
β	Materialparameter
Δ	Differens
ε	Töjning; eccentricitet
ε_c	Töjning i tryck
ε_{cu}	Töjning vid ultimat spänning
ε^{el}	Elastisk töjning
ε^{pl}	Plastisk töjning
ε_t	Töjning i drag
$\dot{\varepsilon}_t^{pl}$	Hårdningsparameter i drag
$\dot{\varepsilon}$	Töjningen beroende av tiden
θ	Temperatur; vinkel mellan trycksträva och dragstag
$\dot{\lambda}$	Plastisk skalfaktor
μ	Viskositet
ν	Poissons tal
ν'	Reduktionsfaktor för hållfastheten hos betong med skjuvsprickor
ρ	Densitet
σ	Spänning
σ_{cu}	Ultimat spänning
σ_{Rd}	Dimensionerande tvärgående dragspänning i betong
σ_{y0}	Flytspänning
$\dot{\sigma}$	Spänningen beroende av tiden
$\bar{\sigma}_c$	Ansatt provlösning för effektivspänning i tryck
$\bar{\sigma}_t$	Ansatt provlösning för effektivspänning i drag
τ_{max}	Maximal skjuvspänning
ψ	Dilationsvinkel
$\boldsymbol{\psi}$	Residualvektor

Förkortningar

BBK04	Boverkets handbok om beotngkonstruktioner, BBK 04
BKR	Boverkets konstruktionsregler
CDP	Concrete Damage Plasticity
FEM	Finita Elementmetoden
PEEQT	Plastiska deformationer i drag

Innehåll

Abstract	I
Sammanfattning	III
Förord	V
Notation	VII
Innehåll	XI
1 Introduktion	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Syfte	1
1.3 Metod	2
1.3.1 Felkällor	3
1.4 Avgränsningar	3
1.5 Användning av AI	3
2 Spjälkning av betong	5
2.1 Spjälkning	5
2.2 Regelverk	5
2.2.1 Spjälkning enligt BBK04	5
2.2.2 Dimensionering av spjälkarmering enligt Eurokod 2	7
3 Materialmodellering för betong	9
3.1 Allmänt om betong	9
3.1.1 Brottmoder i betong	10
3.2 Linjärelastisk modellering av betong	10
3.3 Icke-linjär modellering av betong	11
3.3.1 Plasticitetsteorin	11
3.3.2 Flytvillkor och flytyta	12
3.3.3 Härdning och mjukning	13
3.4 Betongens beteende i drag	14
3.5 Betongens beteende i tryck	16
3.6 Materialmodellering i Brigade/Plus	17
3.6.1 Kopplingar och kopplingsvillkor	17
3.6.2 Gränsvärde för sprickbildning	18
3.6.3 Hantering av konvergensproblem	18
3.6.4 Vidhäftning mellan armering och betong	18

4	Numeriska beräkningsmodeller	21
4.1	Fackverksanalogi	21
4.1.1	Fackverksmodeller enligt Svenska Betongföreningen	21
4.1.2	Fackverksmodeller i Eurokod	22
4.1.3	Armeringsberäkningar	24
4.2	Finita Elementmetoden	24
4.2.1	Linärelastiska material i FEM	25
4.2.2	Ickelinjära elastoplastiska material i FEM	26
4.3	Concrete Damage Plasticity	26
4.3.1	Newton Raphsonmetoden	28
5	Numerisk analys av Spjälkning och Parameterstudie	31
5.1	Introduktion och Arbetsgång	31
5.1.1	Hög balk	31
5.1.2	Modell 1 och Modell 2	31
5.1.3	Pseudokod	33
5.1.4	Hantering av konvergensproblem i Brigade/Plus	33
5.2	Materialparametrar i CDP	34
5.2.1	Betong	34
5.2.2	Armeringsstål	35
5.2.3	Fjädrar mellan betong och armering	36
5.3	Hög balk	36
5.3.1	Analysresultat	36
5.4	Modell 1	38
5.4.1	Simuleringar i oarmerat tillstånd	38
5.4.2	Spjälkning enligt BBK04	44
5.4.3	Simuleringar i armerat tillstånd	44
5.4.4	Jämförelse	51
5.5	Modell 2	54
5.5.1	Simuleringar i oarmerat tillstånd	54
5.5.2	Spjälkning enligt BBK04	57
5.5.3	Simuleringar i armerat tillstånd	57
5.5.4	Jämförelse	65
6	Diskussion	69
6.1	Spjälkning i oarmerade provkroppar	69
6.2	Modelleringsval	69
6.2.1	Propagering av spjälksprickor	69
6.2.2	Modellering av vidhäftningsglidning mellan armering och betong med fjädrar	71
6.3	Jämförelse med BBK04	71
6.4	Inverkan av armering	72
6.4.1	Hög balk	72
6.4.2	Bärförmåga	72
6.4.3	Uppkomsten av spjälksprickor	73
6.4.4	Spänningsfördelning mellan betong och armering	75
6.4.5	Fackverksmodeller	76

7	Slutsats och fortsatta studier	77
7.1	Slutsats	77
7.2	Fortsatta studier	78
	Litteratur	79
A	Beräkningar	81
A.1	Gränsvärde för sprickvidd	81
A.2	Beräkning av fjäderstyvhet	81
B	Pythonkod	83
B.1	Main	83
B.2	Model Builder	86

1 Introduktion

1.1 Bakgrund

Enligt *Boverkets handbok om betongkonstruktioner, BBK04* definieras spjälkning som ”Uppsprickning i betongen på grund av tvärgående dragspänningar på visst avstånd från tryckkraften”. Spjälkning hanteras genom att lägga in spjälkarmering, som i sin tur avlastar betongen från dragspänningar. I BBK04 återfinns gränsvärden som reglerar när spjälkarmering erfordras.

År 2011 ersattes BBK04 av *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner*, (SS-EN 1992-1-1:2004), vilket därefter har utgjort svensk praxis för dimensionering av betongkonstruktioner. I Eurokod 2 finns inte specifika riktlinjer och anvisningar för hantering av fenomenet spjälkning. Istället anger Eurokod de maximala tryck- och dragkrafter som betongen ska dimensioneras för. Detta har lett till förvirring hos konstruktörer, gällande när spjälkarmering erfordras. I dagsläget väljer vissa konstruktörer att lägga in spjälkarmering, och andra inte.

Numeriska analyser i detta arbete har utförts med finita elementmetoden i beräkningsprogrammet Brigade/Plus. Brigade/Plus motsvarar mjukvaran Abaqus med tillägg för bro-analys. Trots tidigare omfattande numeriska analyser av olika uppsprickningsfenomen, såsom skjuvsprickor och böjsprickor, saknas något liknande för spjälkning. Därför syftar detta arbete till att utvärdera vilka modelleringsval som har inverkan på propageringen av spjälksprickor, samt analysera huruvida de lastnivåer där spjälkning uppkommer stämmer överrens med BBK04s gränsvärden. Dessutom evalueras inverkan av den av Eurokod föreskrivna armeringen.

I ‘Design and verification of discontinuity regions in reinforced concrete structures with the strut and tie method’ presenteras underlag som tyder på att modellering av vidhäftningsglidning mellan armering och betong kan utgöra en viktig aspekt vid modellering av uppsprickning med finita elementmetoden. Kempengren (2023) föreslår modellering av vidhäftningen med hjälp av fjädrar. Denna metod har därför översiktligt utvärderats.

1.2 Syfte

Syftet med examensarbetet är att med hjälp av numeriska FE-analyser samt handberäkning med fackverksmodeller bringa klarhet i huruvida BBK04s riktlinjer är fortsatt brukbara vid spjälkbrott, samt undersöka numerisk modellering av spjälkning. Vidare syftar rapporten även till att undersöka inverkan av armering, samt koppling mellan armering och betong på uppkomsten av spjälksprickor.

Examensarbetet kommer att besvara följande frågeställningar:

- Går det att modellera spjälkning i oarmerad betong med hjälp av icke-linjära modeller i Brigade/Plus?
- Om det går att modellera spjälkning med hjälp av icke-linjära modeller i Brigade/Plus, vilka modelleringsval har inverkan på uppkomsten av spjälksprickor?
- Hur väl överensstämmer numeriska analysresultat med de riktlinjer som återfinns i BBK04?
- Hur påverkas bärförmågan i betongen vid numerisk modellering om spjälk-
armering läggs in?
- Hur påverkar modelleringen av kopplingen mellan armering och betong spjälk-
beteendet i numeriska analyser?

1.3 Metod

Frågeställningen besvaras genom numerisk analys av ickelinjära FE-modeller i mjukvaran Brigade/Plus. För att möjliggöra effektiv och flexibel utvärdering av olika geometrier och modelleringsval utvecklades en Python-kod för modelluppbyggnad. Kodens funktion beskrivs i pseudokod i avsnitt 5.1.3, medan den fullständiga koden återfinns i appendix B.1.

Betongen modellerades med materialmodellen *Concrete Damage Plasticity* (CDP). Teori och modelleringsval redovisas i kapitel 3, och materialparametrar för betong, stål och fjädrar i avsnitt 5.2. Samtliga modeller var tvådimensionella deformerbare element i plant spänningstillstånd.

Den första analysen omfattade en hög balk med avseende på böjsprickor, med syfte att utvärdera CDP-modellens tillförlitlighet. Samverkan mellan betong och armering modellerades med fjädrar, och resulterande spänningar jämfördes med en etablerad fackverksmodell.

Därefter etablerades Modell 1 och Modell 2, vilka presenteras i avsnitt 5.4 och 5.5. Modellerna analyserades med avseende på uppsprickning och bärförmåga.

Inledningsvis analyserades modellerna i oarmerat tillstånd med hänsyn till randvillkor och modellering av yttre last. Det modelleringsstrategi som bedömdes ge mest realistisk sprickpropagering användes därefter i analyserna av armerad betong. Den uppsprickning och kapacitet som erhöles ur de oarmerade analyserna jämfördes med BBK04:s föreskrifter avseende den tryckkraft där spjälkning förväntas inträffa.

I analyserna av armerad betong undersöktes armeringens inverkan på spjälksprickor och bärförmåga. Armeringen dimensionerades baserat på fackverksmodeller. Vidare jämfördes resultat från analyser med full samverkan mellan armering och betong samt där vidhäftningsglidning modellerades med linjära fjäderelement.

1.3.1 Felkällor

Den modellering som utfördes i Brigade/Plus syftade till att återspegla verkligheten, även om vissa diskrepanser mellan verklighet och modell är oundvikliga. Detta avsnitt behandlar de felkällor som identifierades under modelleringen. Felkällornas potentiella inverkan på resultatet behandlas i rapportens diskussion, kapitel 6.

Betong modellerades som isotrop med homogena egenskaper i drag- och tryckriktningarna. I verkligheten är betong ett ohomogent material, där faktorer såsom lokala svagheter, bindemedel och ballastkornens storlek kan ha stor inverkan på betongens hållfasthet. Vidare genomfördes samtliga analyser och beräkningar med medelvärde på betongens materialparametrar, vilket också har inverkan på hållfastheten i analyserna.

linitalt modellerades kopplingen mellan betong och armering med fullständig samverkan. Därefter modellerades samverkan punktvis med fjäderelement mellan betongens och armeringens noder, vilket tillät vidhäftningsglidning. Mer om de två alternativen för modellering av vidhäftning återfinns i avsnitt 3.6. Ingen av dessa modelleringsalternativ kan återge samverkan på ett helt verklighetstroget sätt.

Ett flertal åtgärder vidtogs i syfte att få analyserna att konvergera. Dessa åtgärder återges i 5.1.4.

1.4 Avgränsningar

Ett flertal förenklingar gjordes i Brigade/Plus med syfte att förenkla simuleringarna och förebygga konvergensproblem i de icke-linjära analyserna.

Samma materialinput för stål, betong och fjäderelement användes i alla analyser, och återfinns i avsnitt 5.2. Rapporten genomförde inga undersökningar av huruvida en ändring av dessa parametrar påverkar resultatet.

Stålet modellerades som linjärelastiskt. Även fjäderelementen modellerades som linjärelastiska.

Simuleringarna har avgränsats till tvådimensionella modeller.

1.5 Användning av AI

AI-verktyget ChatGPT har använts i arbetet för att felsöka de DAT-filer som erhålls ur analyserna i Brigade/Plus. DAT-filer ger error-meddelanden och information om varför analyser avbryts men är långa och svårtolkade, varför AI har använts för att kortfattat förklara vad som behöver åtgärdas i modellen.

All Pythonkod som utvecklats som input till modellen i Brigade/Plus har skrivits för hand utifrån Macro-inspelningar i Brigade/Plus. AI har använts för att ge förslag på förbättringar när koden parametriserades. AI har även använts för att korrekturläsa

och säkerställa att den Pythonkod som skrivits som input till Brigade/Plus följer stilguiden PEP8 för Python.

2 Spjälkning av betong

2.1 Spjälkning

Enligt *Boverkets handbok om betongkonstruktioner, BBK04* definieras spjälkning som ”Uppsprickning i betongen på grund av tvärgående dragspänningar på visst avstånd från tryckkraften”. Spjälkning kan förhindras genom att armera betongen där dragspänningarna blir så stora att de överstiger styrkan hos betongen.

2.2 Regelverk

Boverkets handbok om betongkonstruktioner, BBK04, härafter benämnt som BBK04, var Boverkets tillämpningshandbok till *Boverkets konstruktionsregler, BKR* för betongkonstruktioner, och innehöll kommentarer och beräkningsexempel. Sedan 2010 har BKR och BBK04 ersatts av Eurokod, där Eurokod 2 (SS-EN 1992-1-1:2004) utgör grund för svensk praxis för dimensionering av betongkonstruktioner via Svenska Institutet för Standarder, SIS. Eurokod 2 uppdaterades år 2023 till SS-EN 1992-1-1:2023.

2.2.1 Spjälkning enligt BBK04

Enligt BBK04 förväntas spjälkning inträffa om tryckkraften överstiger en kapacitet F_R som ges av det största värdet av ekvation 2.1 och ekvation 2.2.

$$F_R = 0,75 a b f_{ctd} \quad (2.1)$$

$$F_R = (0,5 + \beta) A f_{cd} \quad (2.2)$$

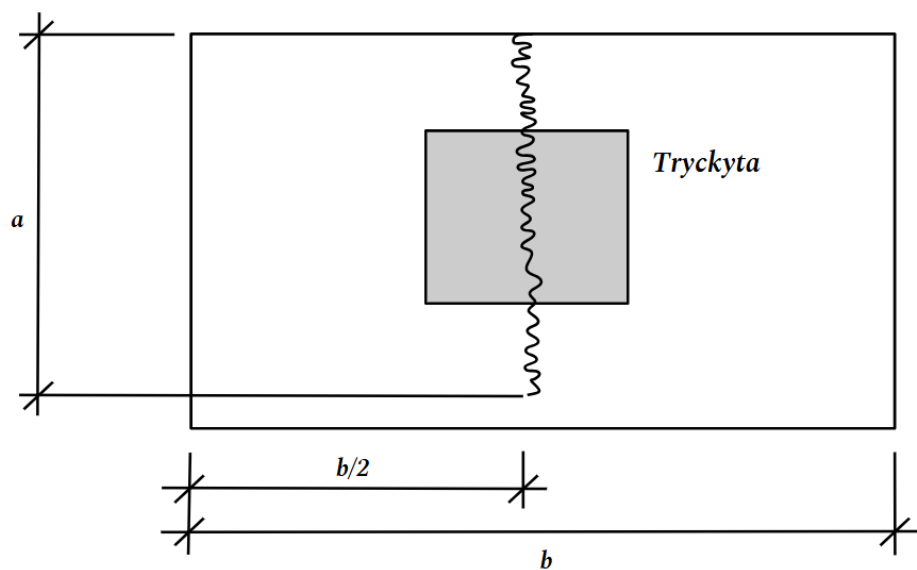
De okända parametrarna definieras av Boverket (2004) enligt följande.

a är längden av den kortaste spjälksprickan genom tyngdpunkten för tryckytan, se exempel i figur 2.1.

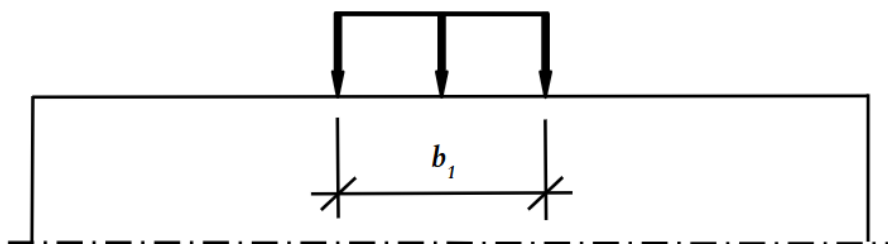
b är dubbla avståndet från tryckytans tyngdpunkt till konstruktionens närmaste kant, se 2.1. Avståndet mäts vinkelrätt mot spjälksprickan genom tryckytan. Dock behöver inte b i formel 2.1 ges mindre värde än 8 gånger tryckytans längd b_1 i samma riktning, se 2.2. Dessutom gäller att b inte bör sättas in med större värde än $30b_1$ i ekvation 2.1.

A är tryckytans storlek.

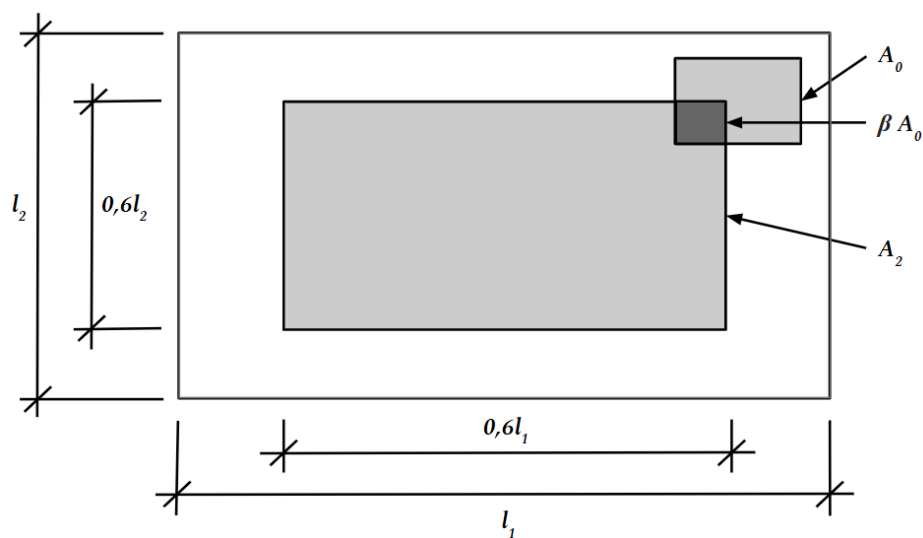
β är den andel av tryckytan som faller innanför en symmetrisk placerad yta A_2 , vars sidor har en längd av 0,6 gånger längden av konstruktionsytans sidor, se figur 2.3. Dock får β högst sättas lika med 0,5.



Figur 2.1: Spjällspricka i konstruktionsyta med definition av måtten a och b . Baserat på *Boverkets handbok om betongkonstruktioner, BBK04*.



Figur 2.2: Tryckytans bredd b_1 . Baserat på *Boverkets handbok om betongkonstruktioner, BBK04*.



Figur 2.3: Definition av faktorn β vid excentrisk tryckyta. Baserat på *Boverkets handbok om betongkonstruktioner, BBK04*.

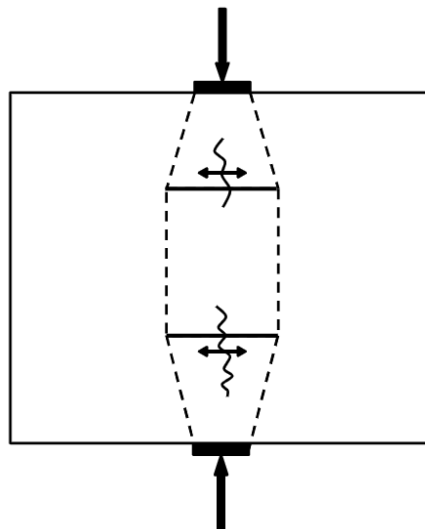
Spjälkning förutsätts inte heller inträffa om den beräknade sammanlagda dragspänningen, beräknad med antagande om linjärelastisk respons, understiger eller är lika med hälften av betongens dimensionerande draghållfasthet, $f_{ctd}/2$.

Det är först när ovan nämnda tryckkrafter och dragspänningar inte kan undvikas som Boverket (2004) föreskriver att konstruktionen armeras så att jämviktsvillkoren efter uppsprickning kan undvikas och eventuella spjälksprickor begränsas. Det kraftspel som gäller efter spjälkning kan åskådliggöras genom fackverksanalogi.

2.2.2 Dimensionering av spjälkarmering enligt Eurokod 2

I Eurokod 2 behandlas varken fenomenet spjälkning eller någon specifik metod för att bestämma vid vilka lastnivåer spjälksprickor kan förväntas uppstå (Betongföreningen, 2010). Istället anges de maximala tryck- och dragkrafter som betongen ska dimensioneras för att kunna motstå. Beräkningen av dessa krafter illustreras bland annat med hjälp av fackverksmodeller, där betongen representeras av trycksträvor och armeringen av dragstag, se figur 2.4. Den bakomliggande teorin för fackverksanalogi behandlas i avsnitt 4.1 i denna rapport. Där framgår även exempel på fackverksmodeller hämtade från *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner* och *Svenska betongföreningens guide till ek2, Volym II*.

I *Svenska betongföreningens guide till ek2, Volym I* diskuteras avsaknaden av en metod likt den i BBK04 för att bestämma lasten vid vilken spjälksprickor förekommer. Enligt Betongföreningen (2010) kan bärförmågan vid måttliga koncentrerade laster vara tillräcklig även om spjälksprickor uppstår, utan att någon spjälkarmering erfodras. Vid symmetriska, plana och flaskhalsformade tvärsnitt anger guiden att spjälksprickor förväntas uppstå vid en tryckspänning motsvarande ekvation 6.56 som återfinns i avsnitt 4.1.



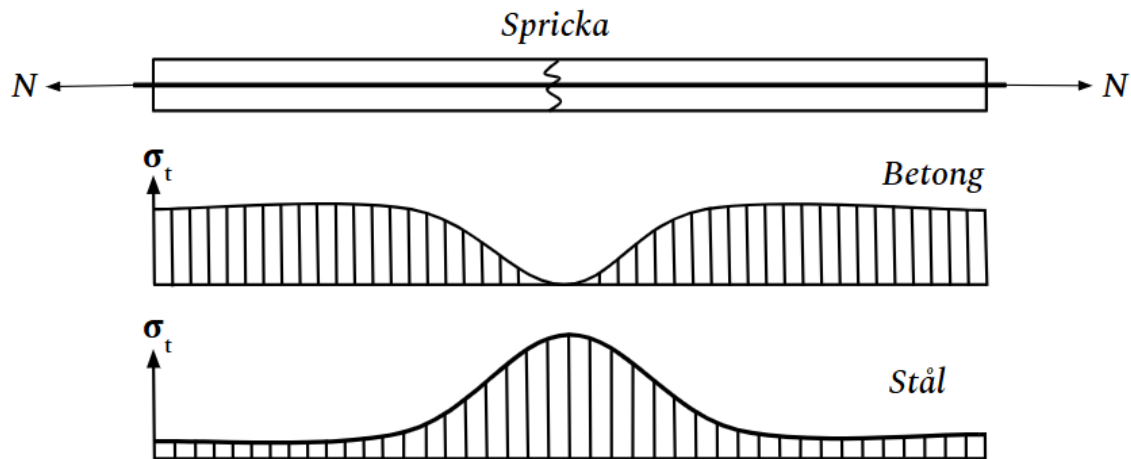
Figur 2.4: Exempel på fackverksmodell vid spjälkbrott.

3 Materialmodellering för betong

3.1 Allmänt om betong

Bortsett från ballast är betong det i särklass mest använda byggmaterialet. Med sin höga tryckhållfasthet kan betong nyttjas i en rad olika konstruktioner med höga krav på hållfasthet och beständighet (Svenska Betongföreningen, 2017). Eftersom betongens tryckhållfasthet är enkel att mäta, och dessutom visat sig ha en stor inverkan på ett flertal andra materialgenskaper, anses det vara den mest betydande materialparametern för konstruktionens bärförmåga (Isaksson et al. 2017).

Betongens draghållfasthet är dock väsentligt mycket lägre, oftast av en storleksordning 10% av tryckhållfastheten, varför man vanligtvis helt bortser från denna vid dimensionering (Isaksson et al. 2017). Den vanligaste lösningen på den låga draghållfastheten är att armera betongen, och på så sätt låta armeringsstänger av stål, glasfiber, kolfiber eller aramidfiber ta hand om dragkrafterna medans betongen själv hanterar tryckkrafterna. (Svenska Betongföreningen, 2017). I de fall då betongen är osprucken kan den hantera små dragspänningar, men så fort den spruckit upp tas alla dragspänningar av armeringen (Boverket, 2004).



Figur 3.1: Principskiss av dragspänningar hos stål och betong i samverkan vid uppsprickning i en balk.

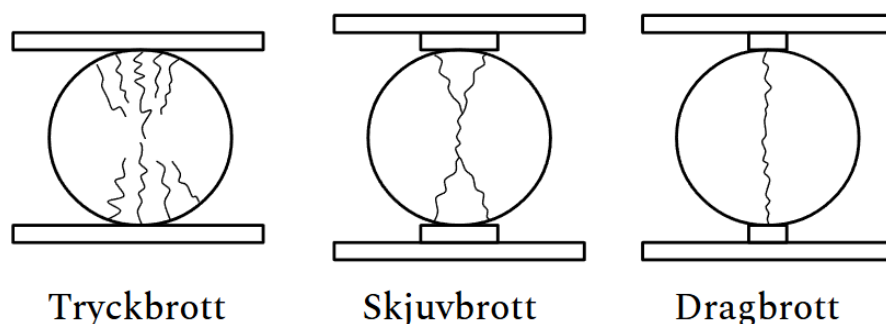
Vid bestämning av materialvärden kopplade till betongens hållfasthet talar man ofta om karakterisk-, dimensionerande- och medelhållfasthet. Det karakteristiska värdet är den hållfasthet 95% av provkropparna vid testning överstiger (WSP, 2026). Materialets dimensionerande värde beräknas från det karakteristiska värdet med hjälp av partialkoefficienten γ_M , som beaktar ytterligare osäkerheter i materialet (CEN, European Committee for Standardization, 2005). Medelvärde motsvarar 50-procentsfraktilen,

alltså den hållfasthet som 50% av provmaterialet överstiger (Isaksson et al. 2020).

3.1.1 Brottmoder i betong

Enligt *Betonghandbok Material Del 2* benämns betongens hållfasthet efter provnings-sätt och de spänningar som leder till brott. Då spjälkbrottet orsakas av dragspänningar går spjälkning under kategorin dragbrott. Således är draghållfastheten den avgörande brottsfaktorn.

Draghållfastheten och förmågan att motstå dragbrott beror bland annat på provkroppens geometri, ballastens sammansättning och temperaturen. För att säkerställa att det brott som observeras är just ett dragbrott kan även belastningens påförande tas i beaktning. På en cylinderprovkropp kan brottet regleras från tryckbrott till dragbrott genom att införa mellanlägg, se figur 3.2. Om mellanläggen väljs så att kontaktytan mellan provkroppen och mellanläggen är större än 0,12 gånger diametern uppstår skjuvbrott närmast lasten och dragbrott i provkroppens mitt (Svenska betongföreningen, 2021).

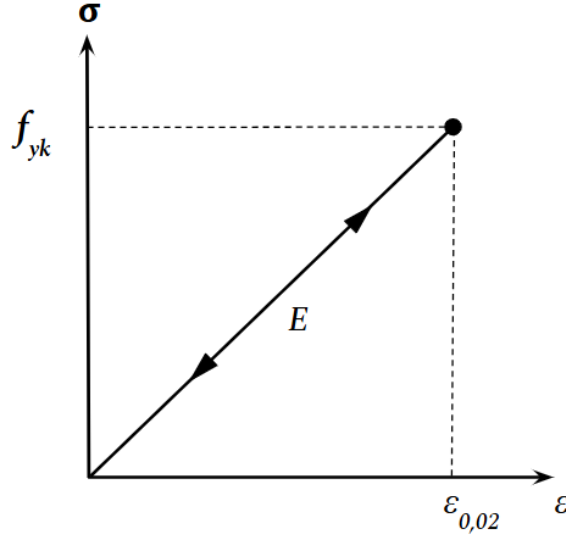


Figur 3.2: Brottyper hos en cylinderprovkropp beroende av belastningens påförande. Baserad på Svenska betongföreningen (2021).

3.2 Linjärelastisk modellering av betong

Vanligen antas betong vara ett homogent och isotropt material som i regel beter sig linjärelastiskt under last så länge det är osprucket. Då har armeringen en försumbar inverkan på strukturen (Engström, 2011). Vid linjärelasticitet ökar spänningen linjärt med deformationen, och vid avlastning kommer både spänningen och deformationen att återgå till noll utan att någon irreversibel skada uppstått, se figur 3.3. Ett linjärelastiskt och sprött material går till brott när spänningen når materialets draghållfasthet f_t , eller töjningen når gräntöjningen (Björnström et al. 2006).

Enligt *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner* beror betongens elastiska deformationer i hög grad på dess sammansättning, och framförallt på ballasten. Generellt beter sig betongen linjärelastiskt fram tills dess att den nått sin flytgräns f_{yk} (eller 0,2%-gränsen).



Figur 3.3: Arbetskurva hos ett linjärelastiskt material.

3.3 Icke-linjär modellering av betong

När betongen spricker förändras dess mekaniska beteende väsentligt. Materialet uppvisar då en icke-linjär respons, vilket får stor inverkan på spänningsfördelningen i konstruktionen. Spänningarna fortsätter att förändras i takt med att sprickorna växer (Engström, 2011).

3.3.1 Plasticitetsteorin

Att betongen i tryck och drag får delvis plastiska deformationer innebär att plasticitetsteorin kan tillämpas (Grassl et al. 2002). Plasticitetsteorin används generellt för att beskriva permanenta deformationer som kvarstår efter avlastning då spänningen överstigit materialets flytgräns, se figur 3.4 (Saabye Ottosen et al. 2005). Teorin är främst utvecklad för duktila material men kan även tillämpas på spröda material såsom betong inom FEM (Malm, 2006). Enligt plasticitetsteorin kan den totala deformationen delas upp i en elastisk och en plastisk del enligt ekvation 3.1.

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \quad (3.1)$$

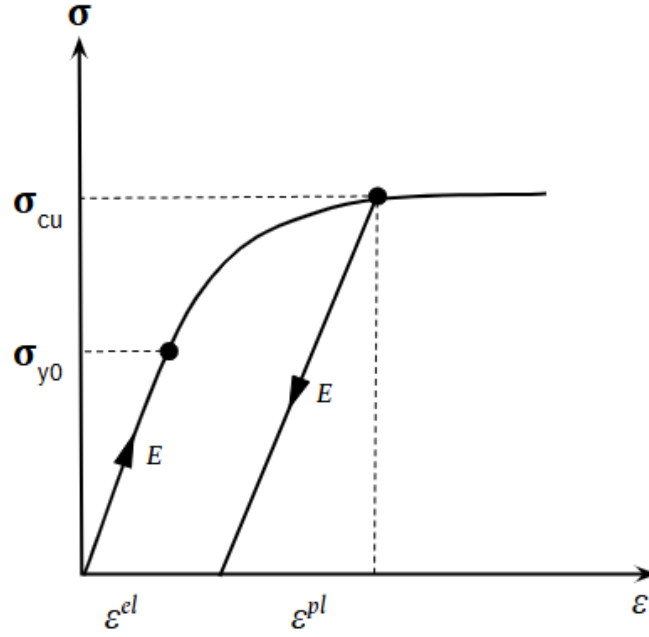
Där den elastiska deformationen vid enaxlig spänning kan beräknas enligt ekvation 3.2.

$$\varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{E} \quad (3.2)$$

Den plastiska töjningen kan däremot endast bestämmas inkrementellt med avseende på spänningen och den föregående lasthistorien (Plos, 2000). För att beskriva de inkrementella plastiska deformationerna kan en så kallad generaliserad *Flow Rule*, ekvation 3.3, användas.

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{dg}{d\sigma}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (3.3)$$

Där $\dot{\lambda}$ är en plastiska skalfaktor och $g = g(\sigma, k)$, där k är en hårdningsparameter. För den fulla härledningen av *Flow Rule*, se t.ex. Saabye Ottosen et al. 2005.



Figur 3.4: På- och avlastningsbeteende hos ett elastoplastiskt material. Baserad på Saabye Ottosen et al. (2005).

3.3.2 Flytvillkor och flytyta

Vid enaxiellt spänningstillstånd talar man om en flytgräns, och vid bi- och multiaxiella spänningstillstånd talar man istället om en flytyta. Flytytan illustrerar sambandet mellan huvudspänningarna och de punkter i det deviatoriska planet där materialet flyter. Vissa flytytor, såsom von Mises och Drucker-Prager, medför flytvillkor som resulterar i flytgränsspänningar där materialet förväntas övergå till ett icke-linjärt, plastiskt beteende (Saabye Ottosen et al. 2005). Man talar även om en brottyta, vilket definieras som de punkter där spänningen når dess maximala värden (Malm, 2006).

I plasticitetsbaserade modeller av betong används vanligtvis Drucker-Pragers flytvillkor med vissa modifikationer. Bland annat kombineras Drucker-Prager i vissa fall med Mohr-Coulombs flytkriterium för att uppnå en mer realistisk approximation av betongens duktila beteende (Malm, 2006). Drucker-Pragers flytkriterium ges av ekvation 3.4.

$$\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 - \beta = 0 \quad (3.4)$$

Där

$$J_2 = \left[\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} ; \quad I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

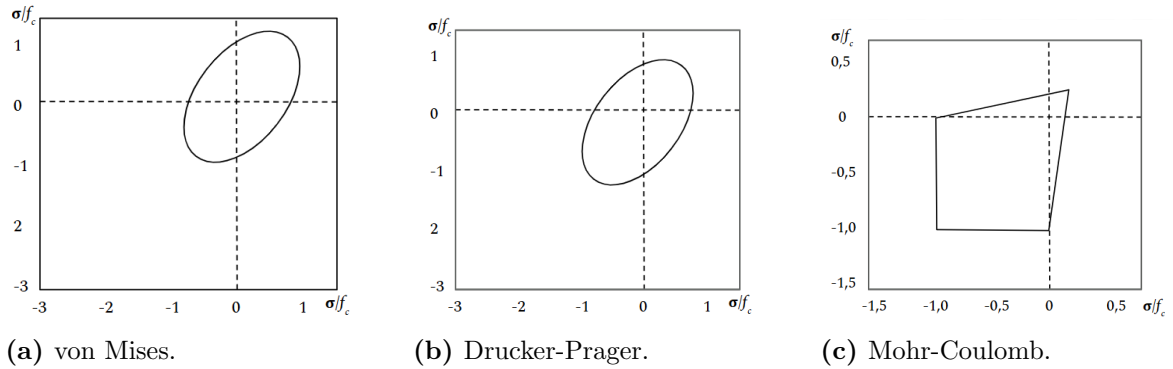
Där s_{ij} är spänningsdeviatorn beroende av de hydrostatiska- och deviatoriska spänningarna, σ_1 , σ_2 och σ_3 är huvudspänningarna och α och β är materialparametrar (Saabye Ottosen et al. 2005). Mohr-Coulombs flytvillkor ges av ekvation 3.5.

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \phi}{2 \cos \phi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{2 \cos \phi} = 1 \quad (3.5)$$

Där ϕ är den inre friktionsvinkeln (Plos, 2000). För stål i armeringsstänger används von Mises flytvillkor, se ekvation 3.6.

$$\sqrt{3J_2} - \sigma_{y0} = 0 \quad (3.6)$$

För mer om flytvillkor och flytytor, se Saabye Ottosen et al. 2005.



Figur 3.5: Flytytor för biaxialt plant spänningstillstånd. Baserad på Malm (2006).

Concrete Damage Plasticity, härfter benämnt som CDP, använder en flytfunktion utvecklad av Lubliner et al. (1989) som involverar modifikationer av Lee och Fenves (1998), och bygger på Drucker-Pragers flytvillkor. För mer om CDP, se avsnitt 3.6.

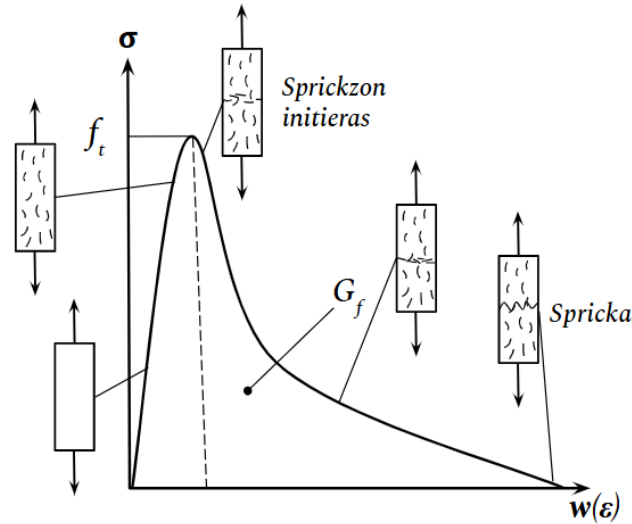
3.3.3 Hårdning och mjukning

Även när betongens spänningstillstånd har passerat flytgränsen och ickelinjära deformationer uppstått kan spänningarna fortsätta att utvecklas. Detta fenomen kallas hårdning (på engelska *hardening*). Flytytan hos betong är nämligen inte konstant, och den initiella flytytans utveckling beskrivs av följande generella hårdningsregel (ekvation 3.7), som beskriver flytytan som en funktion beroende av den aktuella spänningen σ , den plastiska deformationen ε^{pl} och en hårdningsparameter k .

$$f(\sigma, \varepsilon^{pl}, k) = 0 \quad (3.7)$$

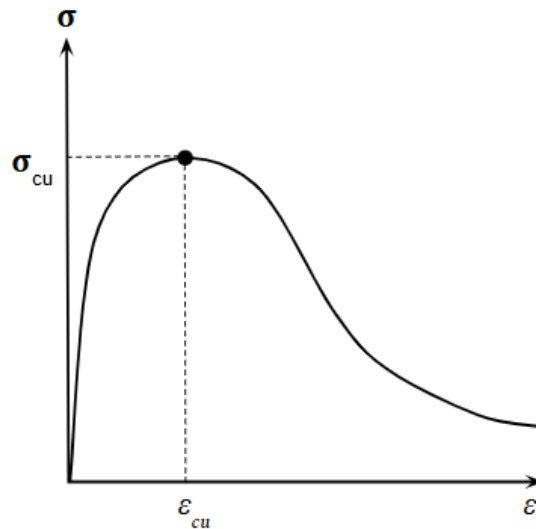
Det hårdnande beteendet hos ett specifikt material bestäms genom spännings-töjningskurvan vid enaxiell spänning. Flytytan kan både ändra form och orientering i spänningsplanet, så kallad isotropisk och kinematisk hårdning. När spänningen sedan sjunker kallas fenomenet istället mjukning (på engelska *softening*) (Plos, 2000).

Hos betong i drag uppstår mikrosprickor fördelade över hela volymen tills dess att dragkapaciteten uppnås. Detta sker under ett hårdnande förlopp. Därefter börjar mikrosprickorna slå samman till större sprickband och betongen får ett mjuknande beteende, se figur 3.6 (Malm, 2006).



Figur 3.6: Formation av mikrosprickor, sprickzon och makrosprickor vid prov med enaxiell dragspänning. Baserad på Malm (2006).

Även i tryck kännetecknas betongen först av ett hårdnande, och sedan ett mjuknande plastiskt beteende. (Saabye Ottosen et al. 2005)



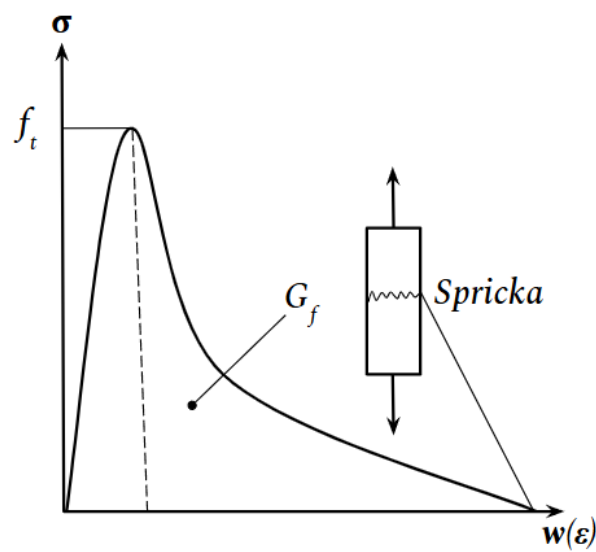
Figur 3.7: Betongens hårdnande och mjuknande beteende i tryck. Baserad på Malm (2006).

3.4 Betongens beteende i drag

Vid tester med enaxiella dragspänningar i betong initieras mikrosprickor, som i takt med att spänningen stiger bildar en sprickzon i betongens svagaste punkt. Efter att den maximala dragspänningen överskridits koncentreras spänningarna till sprickzonen. Slutligen spricker zonen upp, och makrosprickor med deformationen w bildas. Då

kan inga fler spänningar överföras över sprickan, se figur 3.6. Pågrund av de ojämna deformationerna delas betongens materialegenskaper upp beroende på huruvida den undersökta punkten befinner sig innanför eller utanför sprickzonen. De delar av betongen som befinner sig utanför sprickzonen kan fortsatt beskrivas med hjälp av rapportens tidigare etablerade samband. I dem delar som återfinns innanför sprickzonen beskrivs deformationerna istället med en spricköppningslag (på engelska *Crack opening law*), som beror av brottenergi (Plos, 2000).

Spricköppningslagen säger att det under belastning lagras energi i materialet fram tills dess att brottenergin har uppnåtts. När brottenergin har överskridits spricker materialet upp (Björnström et al. 2006). Brottenergin G_f bestäms av arean under grafen för enaxiell dragspänning då materialet mjuknar, se figur 3.8.



Figur 3.8: Definition av brottsenergi från integralen för enaxiell dragspänning. Baserad på Malm (2006).

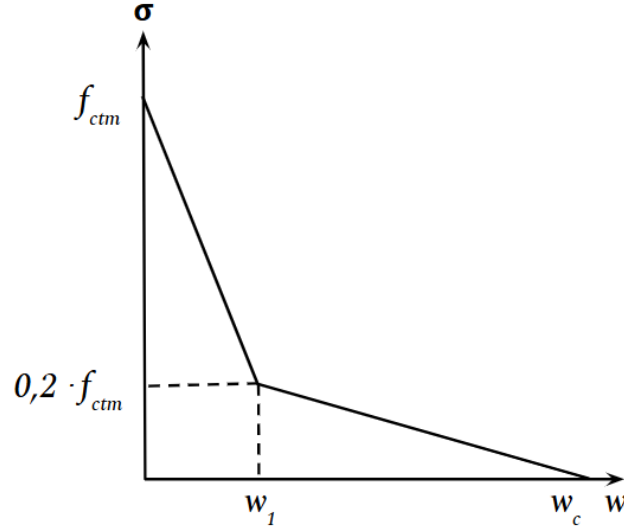
Vanligtvis förenklas integralen G_f till en bilinjär kurva mellan den spänningspunkt där betongen precis spruckit upp, den punkt där dragspänningen motsvarar 20 procent av den totala dragspänningen, samt den punkt där spänningen är noll, se figur 3.9 (Malm, 2006). Enligt den franska betongnormen *fib Model Code* kan brottenergin då beräknas enligt ekvation 3.8.

$$G_f = 73 \cdot f_{cm}^{0,18} \quad (3.8)$$

Därefter görs en bilinjär approximation av sprickbredden w då 20% av dragkapaciteten uppnåtts, samt vid den slutgiltiga sprickbredden enligt ekvation 3.9 och 3.10.

$$w_1 = \frac{G_f}{f_t} \quad (3.9)$$

$$w_c = 5 \frac{G_f}{f_t} \quad (3.10)$$



Figur 3.9: Förenkling av integralen G_f till bilinjär kurva. Baserat på Fédération Internationale du Béton (2010b).

3.5 Betongens beteende i tryck

Betongens spännings-töjnings-beteende i tryck kan approximativt beskrivas med hjälp av Ekvation 3.14 i *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner*.

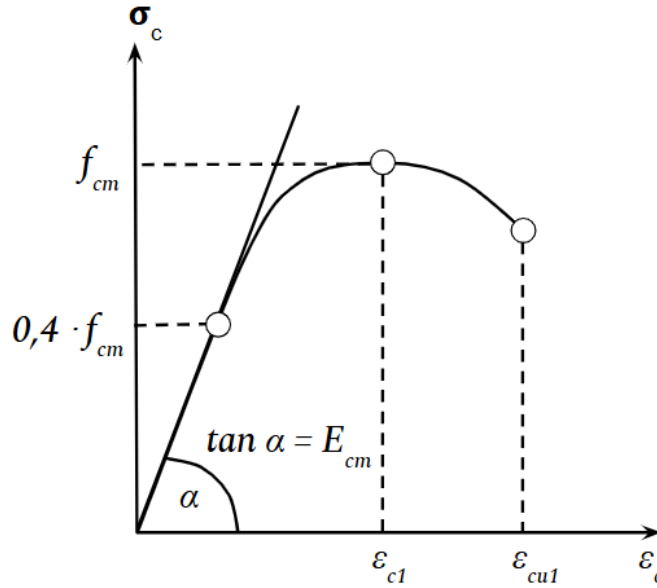
$$\sigma_c = f_{cm} \left(\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right) \quad (3.14)$$

Där f_{cm} är medelvärdet för betongens cylindertryckhållfasthet, och de enhetslösa parametrarna k och η beräknas enligt ekvation 3.11 och 3.12.

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (3.11)$$

$$k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}} \quad (3.12)$$

Där ε_{c1} är töjningen då spänningen uppnått sitt maximivärde, ε_c är den momentana töjningen och E_{cm} hämtas från tabell 3.1 i *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner*. Schematiskt gestaltas sambandet mellan spänningen och töjningen hos betong i tryck av figur 3.10.



Figur 3.10: Spänning-töjningskurva för dimensionering av töjning och spänning i tryck. Baserad på CEN, European Committee for Standardization (2005).

3.6 Materialmodellering i Brigade/Plus

För att modellera betong och andra kvasi-spröda material erbjuder Brigade/Plus modellen CDP. CDP anges som input när materialet skapas i Brigade/Plus, och modellerar betongen på ett sätt som överensstämmer med av rapporten tidigare etablerade samband. Utöver CDP gjordes ett flertal andra modelleringsval i Brigade/Plus. Teorin bakom modelleringsvalen behandlas i kommande avsnitt.

3.6.1 Kopplingar och kopplingsvillkor

Kopplingsvillkor (Constraints) i Brigade/Plus används exempelvis för att tvinga en grupp noder, så kallade *slave nodes*, att följa en eller flera referensnoder rörelser. De underordnade noderna är belägna på en fördefinierad yta som således deformeras tillsammans med referenspunkten. Det finns två typer av kopplingsvillkor i Brigade/Plus, lastpåföring med stel lastyta (i Brigade/Plus benämnd som *Kinematic coupling*) och eller med jämnt fördelat tryck (i Brigade/Plus benämnt som *Continuum Distributing coupling*). All information om kopplingsvillkor hämtas från Mavrodontis (2026).

Lastpåföring med stel lastyta innebär att alla underordnade noder deformeras som en stel kropp. Detta innebär att alla noder på slavytan och dess frihetsgrader tvingas att följa referenspunktens deformation. I praktiken kan det liknas vid en stel platta som förskjuts i samma riktning som referenspunkten utan lokala deformationer eller böjningar.

Med en jämnt fördelad lastyta fördelas istället rörelsen över noderna, som tillåts förskjutas relativt varandra så att nodernas viktade medelförskjutning följer referensnodens rörelse. Kraften som överförs i respektive nod påverkas av olika vikt faktorer, vilket gör att ytan tillåts deformeras lokalt.

Vid lastpåföring med kopplingsvillkor applicerar Brigade/Plus en last i referenspunkten, vilket i sin tur resulterar i att de kopplade närliggande noderna följer dess deformation. Vid lastpåföring med kopplingsvillkor begränsas och styrs pålastningen av referenspunktens deformation. Detta i kontrast till kraftstyrning, då analysen slutar då ett angivet lastvärde uppnåtts.

3.6.2 Gränsvärde för sprickbildning

Vanligtvis modelleras sprickor i numeriska FEM-analyser med hjälp av en diskret eller en ”utsmetad” (på engelska *smeared crack approach*) sprickmodell. Den diskreta metoden gör det möjligt att lokalisera exakt var sprickor uppstår, men förutsätter att man fördefinierat de zoner där betongen kommer att spricka. Den utsmetade sprickmodellen å andra sidan förutsätter inte att sprickzonerna fördefinieras. Istället omvandlas sprickbredden till en ekvivalent spricktöjning som ”smetas ut” över en viss längd. I detta arbete används denna metod, ofta refererat till som *smeared length*, eller spricktöjning (Mathern et al. 2021).

Det finns olika metoder för att approximera spricktöjningen. Bland annat kan den längd som sprickan förväntas ”smetas ut över” kopplas till elementlängderna i meshen enligt ekvation 3.13, där ε_{cr} är spricktöjningen, w_{cr} är den initiala sprickbredden och L' är elementens längd (Malm, 2006).

$$\varepsilon_{cr} = \frac{w_{cr}}{L'} \quad (3.13)$$

3.6.3 Hantering av konvergensproblem

Förändringar i styvhet eller globala instabiliteter såsom deformationer kan leda till konvergensproblem i Brigade/Plus. Detta kan regleras genom att tillåta en viss andel dissiperad energi (i Brigade/Plus används funktionen *Dissipated Energy Fraction*), och på så vis tillåta Brigade/Plus att tillföra artificiell viskös dämpning för att stabilisera systemet. Fenomenet kan liknas vid att låta strukturen deformeras nedsänkt i en trögflytande vätska som dämpar instabiliteterna. Kvoten mellan den artificiella dämpningsenergi som Brigade/Plus tillför, ALLSD, och den fysiska energi som uppstår i materialet vid töjning, ALLIE, begränsas av den tillåtna andelen dissiperad energi enligt ekvation 3.14, vilket inte får överstiga ett av användaren angett maxvärde (Radhakrishnan, 2026).

$$\text{Dissiperad andel energi} = \frac{ALLSD}{ALLIE} \quad (3.14)$$

3.6.4 Vidhäftning mellan armering och betong

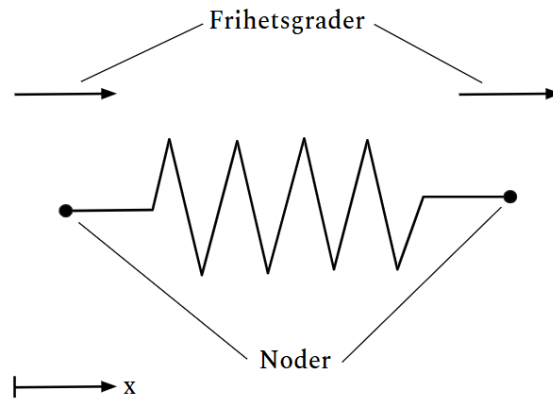
Vidhäftning beskriver interaktionen och överföringen av kraft mellan betong och armering, och påverkar armeringens förmåga att förstärka betongens kapacitet. Beträffande

sprickbildning i betongen har vidhäftningen inverkan på både sprickans bredd och placering. I verkligheten påverkas vidhäftningen av ett antal faktorer, exempelvis betongens hållfasthet, armeringens ribbor, spänningsfördelning och tjockleken på betongens täckskikt (Fédération Internationale du Béton, 2010a). Vid modellering av vidhäftning finns olika metoder för att simulera interaktionen mellan armeringen och betongen på ett så realistiskt sätt som möjligt.

Ett av alternativen för modellering av vidhäftning som erbjuds i Brigade/Plus är fullständig samverkan mellan betong och armering, i Brigade/Plus kallat *Embedded region*. Hos de noder i armeringen som ligger inuti betongen kommer alla translationella frihetsgrader att elimineras. Istället kopplas nodens frihetsgrader i x-, y- och z-led via interpolation till frihetsgraderna hos de intilliggande noderna i betongen. Rotationen hos armeringen förblir opåverkad (Massachusetts Institute of Technology, 2017).

Vidhäftningen kan även modelleras genom att sammanlänka varje nod i betongen med den närmast belägna stålnoten via ett fjäderelement. På så vis tillåts en viss vidhäftningsglidning mellan betong och armering. Motsvarande fjädersystem framgår av figur 3.11, där u är förskjutningen i respektive nods enstaka frihetsgrad, k är fjäderns styvhet och F är fjäderkraften. Fjäderkraften hos en linjär fjäder kan beskrivas med ekvation 3.15.

$$F = k \cdot \Delta u \quad (3.15)$$



Figur 3.11: Fjäderelement.

Vid simulering med vidhäftningsglidning motsvarar fjäderkraften den skjuvspänning som överförs mellan armeringen och betongen på den areaenhet som motsvarar arean av ett armeringselement enligt 3.16.

$$F_{spring} = n \cdot \tau_{bmax} \cdot d \cdot \pi \quad (3.16)$$

Där n är antalet armeringsstänger in i planet och d är armeringsstängernas diameter. τ_{bmax} är den maximala skjuvkraften mellan betongen och armeringen enligt ekvation

3.17 (Fédération Internationale du Béton, 2010b).

$$\tau_{bmax} = 2,5\sqrt{f_{cm}} \quad (3.17)$$

Således kan fjäderelementens styvhet beräknas enligt ekvation 3.18.

$$k = \frac{F_{spring}}{s_1} \quad (3.18)$$

Där s_1 är så kallad *bond slip*, dvs den glidning som sker mellan armeringen och betongen. s_1 hämtas från *fib Model Code for Concrete Structures 2010*.

Det finns även ett tredje sätt att modellera kopplingen mellan armering och betong, detta genom kontaktsformulering med friktion eller kohesion genom olinjära fjädrar. Denna metod kommer dock inte att behandlas i rapporten.

4 Numeriska beräkningsmodeller

4.1 Fackverksanalogi

Vid uppsprickning förändras betongens styvhet successivt i takt med att sprickorna växer, vilket får en betydande inverkan på spänningsfördelningen. För att på ett förenklat sätt kunna beskriva spänningsfältet i spruckna betongkonstruktioner används fackverksmodeller, vilka ligger till grund för dimensionering i både bruks- och brottgränstillståndet (Engström, 2011).

Fackverksanalogi är en accepterad beräkningsmetod för dimensionering i diskontinuitetszoner, exempelvis vid upplag, i närheten av koncentrerade laster eller vid plana spänningstillstånd. I modellen representeras betongen av trycksträvor och armeringen av dragstag (CEN, European Committee for Standardization, 2005). Eftersom systemet är statiskt obestämt kan flera olika modeller tillämpas, vilket leder till att samma problem kan ge upphov till ett flertal möjliga lösningar (Engström, 2011).

Detta delkapitel presenterar de fackverksmodeller som använts som komplement till de icke-linjära FE-modellerna, samt hur erforderad armeringsmängd beräknas utifrån den uppmätta dragkraften.

4.1.1 Fackverksmodeller enligt Svenska Betongföreningen

Enligt *Svenska betongföreningens guide till ek2, Volym II* kan kraftspelet i en hög balk med utbredd last åsynliggöras med en fackverksmodell enligt figur 4.1.

Med avstamp i modellen för en hög etableras följande modell, som framgår av figur 4.2, där lasten koncentreras till en enstaka punktlast. Beräkningarna från *Svenska betongföreningens guide till ek2, Volym II* kan fortsatt användas.

Halva den last P som appliceras i tryckpunkten förväntas gå ner i vardera upplag R_A och R_B . Kraften T i dragbandet beräknas enligt ekvation 4.1.

$$T = \frac{R_A}{\tan\theta} \quad (4.1)$$

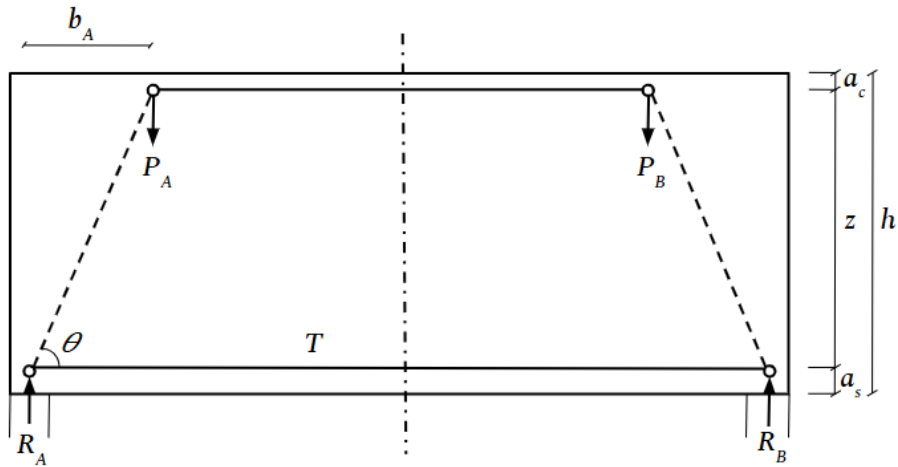
Där vinkeln θ beräknas enligt ekvation 4.2.

$$\theta = \arctan\left(\frac{z}{b_A}\right) \quad (4.2)$$

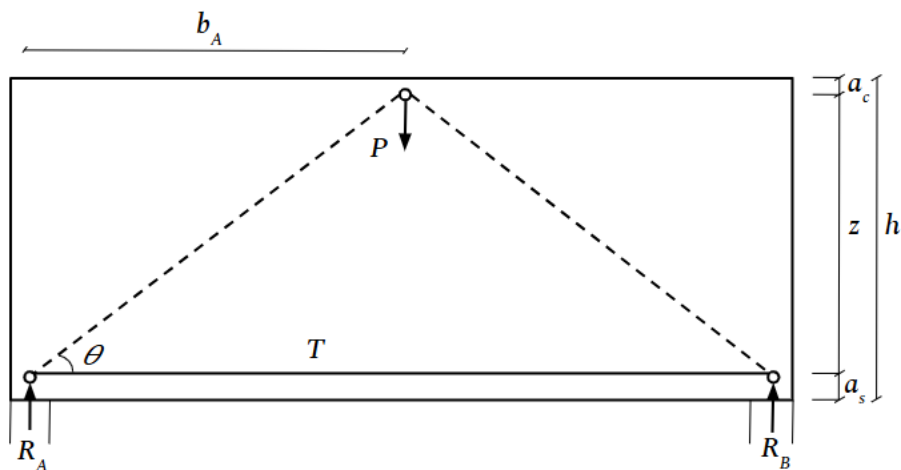
Där z är den inre hävarmen och b_A är det horisontella avståndet mellan fjärdedelspunkten och upplag A som framgår av figur 4.1. Den inre hävarmen z beräknas enligt ekvation 4.3.

$$z = h - a_c - a_s \quad (4.3)$$

Där a_c är halva tjockleken av den horisontella trycksträvan, h är balkens höjd och a_s är avståndet mellan nodpunkten och den understa dragsträvans kant.



Figur 4.1: Hög balk med två punktlaster. Baserad på Svenska Betongföreningen (2010).



Figur 4.2: Hög balk med en punktlast.

4.1.2 Fackverksmodeller i Eurokod

Enligt *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner* kan den dimensionerande tryckhållfastheten hos en betongtrycksträva utsatt för tvärgående dragspänning beräknas enligt uttryck 6.56.

$$\sigma_{Rd} = 0,6\nu'f_{cd} \quad (6.56)$$

där det rekommenderade värdet för ν' ges av ekvation 6.57N.

$$\nu' = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (6.57N)$$

I Eurokods kapitel 6 behandlas två exempel på dimensionering med fackverksmodeller, varav ett exempel med partiell diskontinuitet, se figur 4.3 och ett exempel med full

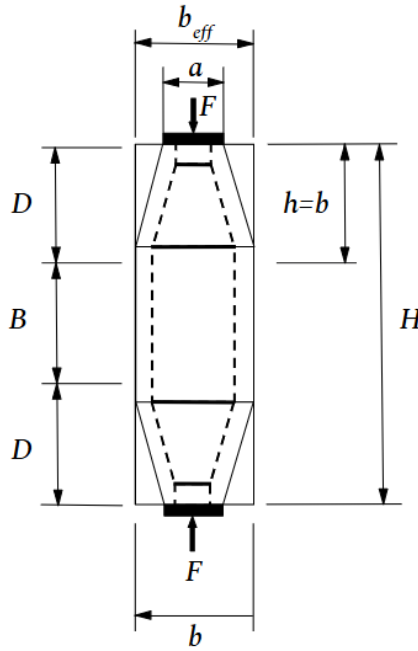
diskontinuitet, se figur 4.4. Vid partiell diskontinuitet gäller ekvation 4.4, och vid full diskontinuitet gäller ekvation 4.5, där b är strukturens bredd, och H dess höjd.

$$b \leq \frac{H}{2} \quad (4.4)$$

$$b > \frac{H}{2} \quad (4.5)$$

Den dimensionerande kraften i dragbanden i fackverksmodellen med partiell diskontinuitet ges av Eurokods ekvation 6.58.

$$T = \frac{1}{4} \left(\frac{b-a}{b} \cdot F \right) \quad (6.58)$$



Figur 4.3: Partiell diskontinuitet i fackverksmodell med $b = b_{eff}$.

I fackverksmodellen med full diskontinuitet ges den dimensionerande kraften i dragbanden av Eurokods ekvation 6.59.

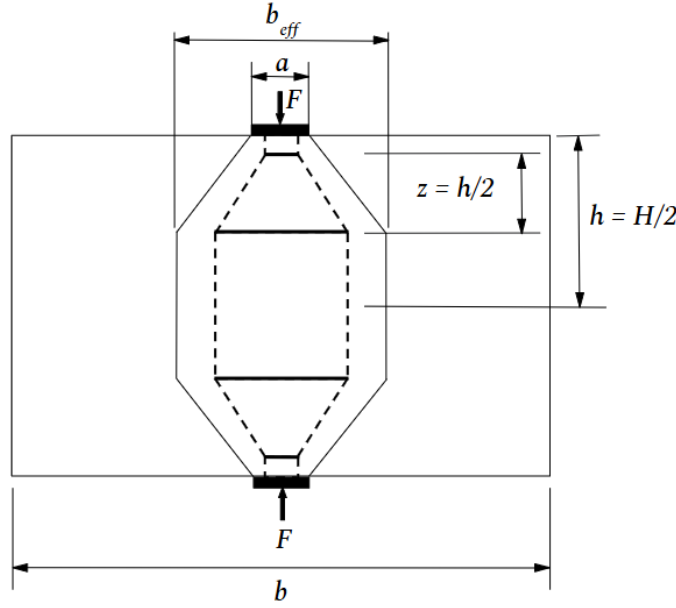
$$T = \frac{1}{4} \left(1 - 0,7 \frac{a}{h} \right) \cdot F \quad (6.59)$$

Eurokod anger även att noderna i fackverksmodellen ska kontrolleras för den dimensionerande kraften i ekvation 6.60-62.

$$\sigma_{Rd,max} = k_n \nu' f_{cd} \quad (6.60-62)$$

där det rekommenderade värdet på k_n väljs beroende på antalet drag- och tryckkrafter som verkar på noden enligt

- $k_1 = 1,0$ när endast trycksträvor är förankrade i noden
- $k_2 = 0,85$ när dragband är förankrade i noden i en riktning
- $k_3 = 0,75$ när dragband är förankrade i noden i mer än en riktning



Figur 4.4: Full diskontinuitet i fackverksmodell med $b_{eff} = 0,5H + 0,65a$; $a \leq h$.

4.1.3 Armeringsberäkningar

Den maximala kraft som förväntas i dragbanden enligt Eurokods fackverksmodeller används sedan för att beräkna den erforderade dragarmeringen enligt ekvation 4.6 (Isaksson et al. 2020).

$$T = f_{yd} \cdot A_s \quad (4.6)$$

Där f_{yd} är stålets dimensionerande flytgräns och A_s är den totala arean hos dragarmeringen och ges av ekvation 4.7, Där n är antalet armeringsstänger och d dess diameter.

$$A_s = n \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad (4.7)$$

4.2 Finita Elementmetoden

Icke-linjära problem är i allmänhet inte möjliga att lösa med analytiska metoder. Därför använder man istället numeriska metoder för att hitta en approximativ lösning, varpå Finita Elementmetoden, härafter benämnt som FEM, har visat sig vara en kraftfull metod för att lösa både elastoplastiska och icke-linjära problem (Saabye Ottosen et al. 2005).

Den starka formuleringen av rörelse-ekvationen i en solid kropp ges av ekvation 4.8.

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (4.8)$$

Genom att integrera över kroppens volym och yta, samt multiplicera med en godtyckligt vald viktfunction $v_i = v_i(x_i)$ ges den svaga formuleringen av rörelse-ekvationen av ekvation 4.9.

$$\int_V \rho v_i \ddot{u}_i dV + \int_V \varepsilon_{ij}^v \sigma_{ij} dV = \int_S v_i t_i dS + \int_V v_i b_i dV \quad (4.9)$$

Där t_i är randspänningsvektorn, b_i är kraften som verkar på ytan, och $\ddot{u}_i$ är accelerationen. ε_{ij}^v ges av ekvation 4.10.

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (4.10)$$

Genom omskrivning med matrisnotation fås ekvation 4.11.

$$\int_V \rho \mathbf{v}^T \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S \mathbf{v}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{b} dV \quad (4.11)$$

Matriserna definieras i (Saabye Ottosen et al. 2005). Genom Galerkins metod som ges av ekvation 4.12.

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{c} \quad (4.12)$$

Samt FE-approximationen 4.13.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a} \longrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (4.13)$$

Där $\mathbf{N}$ är de globala formfunktionerna, $\mathbf{B}$ dess derivata, $\mathbf{c}$ en godtycklig konstant och $\mathbf{a}$ en matris som innehåller kroppens förskjutningar i respektive nod, kan FE-formuleringen i ekvation 4.14 etableras.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{f}_{int} = \mathbf{f} \quad (4.14)$$

Där

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV; \quad \mathbf{f}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV; \quad \mathbf{f} = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV$$

Där $\mathbf{M}$ är kroppens mass-matris, $\mathbf{f}_{int}$ är kroppens interna krafter och $\mathbf{f}$ är de externa krafter som agerar på kroppen. Då kroppen är i vila och ingen acceleration sker kan $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}$ ansättas till noll. Då erhålls ekvation 4.15.

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \quad (4.15)$$

Härledningen ovan är en förenkling av beräkningsgången från den svaga formuleringen till FE-formuleringen av rörelse-ekvationen. För den fulla härledningen och mer om Finita Elementmetoden i solida kroppar se t.ex. Saabye Ottosen et al. 2005.

4.2.1 Linjärelastiska material i FEM

För ett linjärelastiskt material gäller Hookes generaliserade lag.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.16)$$

där $\mathbf{E}$ är elasticitetsmodulen och $\boldsymbol{\varepsilon}$ är deformationen (Insitutionen för Hållfasthetslära, 2018). Vid isotropisk elasticitet gäller den konstitutiva relation som ges av ekvation 4.17.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (4.17)$$

Där $\mathbf{D}$ är en konstant styvhet som beror av position, dvs $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x_i)$, inte av lasten (Saabye Ottosen et al. 2005).

Insättning i ekvation 4.14 för ett system i vila ger följande linjärelastiska FE-formulering, se ekvation 4.18.

$$\left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{a} = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \quad (4.18)$$

För den fulla härledningen av ekvation 4.18 se Ottosen et al. 1992.

4.2.2 Ickelinjära elastoplastiska material i FEM

När spänningarna i ett elastoplastiskt material överstiger flytgränsen går det inte längre att beskriva dessa med hjälp av den aktuella deformationen, istället gäller ekvation 4.19.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}_t \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}} \quad (4.19)$$

Där

$$\mathbf{D}_t = \begin{cases} \mathbf{D} & \text{ifall punkten beter sig elastiskt} \\ \mathbf{D}^{ep} & \text{ifall punkten beter sig plastiskt} \end{cases}$$

Vid differentiering med avseende på tiden gäller således följande ickelinjära FE-formulering i ekvation 4.20.

$$\left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} dV \right) \dot{\mathbf{a}} = \int_S \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{t}} dS + \int_V \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{b}} dV \quad (4.20)$$

För den fulla härledningen av 4.20 se Saabye Ottosen et al. 2005.

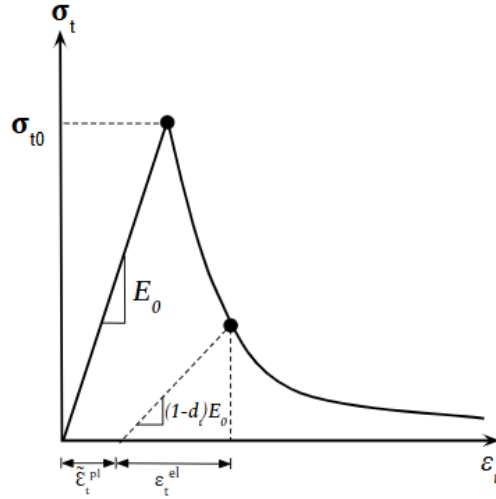
4.3 Concrete Damage Plasticity

CDP använder plasticitetsteorin för att modellera betong och andra quasi-spröda materials beteende. CDP förutsätter att betongen spricker i drag och krossas i tryck. Alla ekvationer och beskrivningar i detta avsnitt har hämtats från Dassault Systèmes (2006).

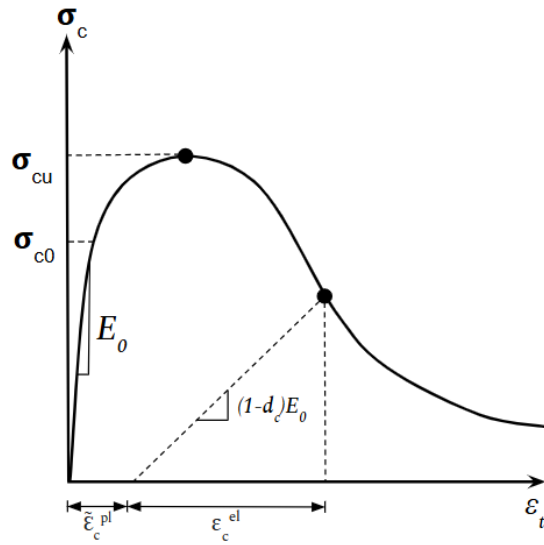
Flytytan hos betongen kan beskrivas med hjälp av två hårdningsparametrar, ε_t^{pl} i drag samt ε_c^{pl} i tryck, se figur 4.5. Vid enaxiellt drag förutsätter Brigade/Plus initieellt att betongen har ett linjärt beteende där mikrosprickor bildas. Efter att dragspänningen σ_t uppnåtts följer mjukning och makrosprickor framträder, se figur 4.5 a). Vid enaxiellt tryck förutsätts linjärt beteende till dess att flytspänningen σ_{y0} uppnåtts, och därefter följer hårdning, följt av mjukning efter att den ultimata spänningen σ_{cu} uppnåtts, se figur 4.5 b). Genom av användaren angiven data om sambandet mellan inelastiska spänningar och töjningar i materialet kan Brigade/Plus iterera fram spänning-töjningskurvor som betongen förväntas följa.

CDP i Brigade/Plus opererar genom att först ansätta en provlösning enligt ekvation 4.21 och 4.22.

$$\bar{\sigma}_t = E_0^{el} (\varepsilon_t - \varepsilon_t^{pl}) \quad (4.21)$$



(a) Tryck.



(b) Drag.

Figur 4.5: Betongens förutsatta beteende i drag (a), och tryck (b) i Brigade/Plus. Baserad på Dassault Systèmes (2006).

$$\overline{\sigma}_c = E_0^{el}(\varepsilon_c - \varepsilon^{pl}) \quad (4.22)$$

Lösningen är linjärelastisk och bygger på de startvärden för spänning och töjning som användaren redan angett. Därefter beräknas hårdningsvariablerna i tryck och drag. Hårdningsvariablerna kontrollerar flytytans utveckling och är kopplade till sprickenergin G_f .

Den ansatta provlösningen kontrolleras med avseende på flytytan. Den flytyta som används i CDP behandlas i rapportens kapitel 3.3.2. Ifall materialet uppfyller flytvillkoren och plastiska deformationer förväntas ske beräknas den plastiska deformationshastigheten i punkten med hjälp av *Flow rule*, ekvation 4.23

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{dg}{d\sigma} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (4.23)$$

Vidare används deformationshastigheten för att bestämma den plastiska deformationen i den aktuella punkten med avstamp i den tidigare, kända deformationen. Denna kan sedan användas för att bestämma skadefaktorerna i ekvation 4.24 och 4.25.

$$d_t = d_t(\tilde{\varepsilon}_t^{pl}, \theta, f_i) \quad (4.24)$$

$$d_c = d_c(\tilde{\varepsilon}_c^{pl}, \theta, f_i) \quad (4.25)$$

där θ är temperaturen och f_i är andra fördefinierade parametrar. Skadefaktorerna d_t och d_c bestämmer hur mycket styvheten i tryck och drag minskat på grund av krossning respektive uppsprickning. Värdena för skadeparametern varierar mellan noll och ett beroende på hur nedsatt betongens lastbärande förmåga blivit. Därefter kan spänningen beräknas genom att korrigera de först ansatta provlösningarna enligt 4.26 och 4.27.

$$\sigma_t = (1 - d_t)\overline{\sigma}_t = (1 - d_t)E_0^{el}(\varepsilon_t - \tilde{\varepsilon}_t^{pl}) \quad (4.26)$$

$$\sigma_c = (1 - d_c)\overline{\sigma}_c = (1 - d_c)E_0^{el}(\varepsilon_c - \tilde{\varepsilon}_c^{pl}) \quad (4.27)$$

Vid mjukning av materialet kan det uppstå konvergensproblem i Brigade/Plus. Detta kan regleras med hjälp av en viskositetsparameter μ som stabiliserar iterationerna.

De sprickor som bildas i materialet löper parallellt med tryckkraften och vinkelrätt mot dragkraften. Sprickorna resulterar i en minskning av den lastbärande arean inuti betongen, vilket i sin tur resulterar i en ökning av effektivspänningar runt omkring sprickzonerna. De lokala spänningarna används sedan för att beräkna den globala responsen i systemet med hjälp av Newton Raphsonmetoden.

4.3.1 Newton Raphsonmetoden

För att lösa icke linjära problem använder Abaqus Newton Raphsonmetoden, även kallad Newtons metod (Systèmes, 2015), vilket är en av de mest frekvent använda metoderna för att lösa icke linjära problem då den snabbt konvergerar. Newton Raphson bygger på upprepade iterationer av Euler Forwardmetoden. Mer om Euler Forward återfinns i *The Mechanics of Constitutive Modeling*.

Lösning av icke linjära problem med FEM och Newton Raphsonmetoden bygger på jämvikt mellan de interna och externa krafterna i systemet. Skillnaden mellan dessa

krafter beskrivs av ekvation 4.28.

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f} \quad (4.28)$$

Där de externa krafterna $\mathbf{f}$ är kända och fixerade, och $\boldsymbol{\sigma}$ beror av förskjutningarna $\mathbf{a}$. När jämvikt mellan krafterna råder uppfylls följande jämviktsekvation 4.29, och kraftresidualen blir noll.

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

Newton Raphsonmetoden bygger på att residualen linjäriseras kring den aktuella lösningen och att en korrigering av förskjutningarna beräknas iterativt. Index n betecknar laststeg medan i betecknar iteration inom ett givet laststeg.

Vid laststeg n och iteration i kan kraftresidualen approximeras med hjälp av en linjärisering. Detta ger sambandet i ekvation 4.30.

$$\mathbf{K}_t^{i-1} (\mathbf{a}^i - \mathbf{a}^{i-1}) = -\boldsymbol{\psi}^{i-1} \quad (4.30)$$

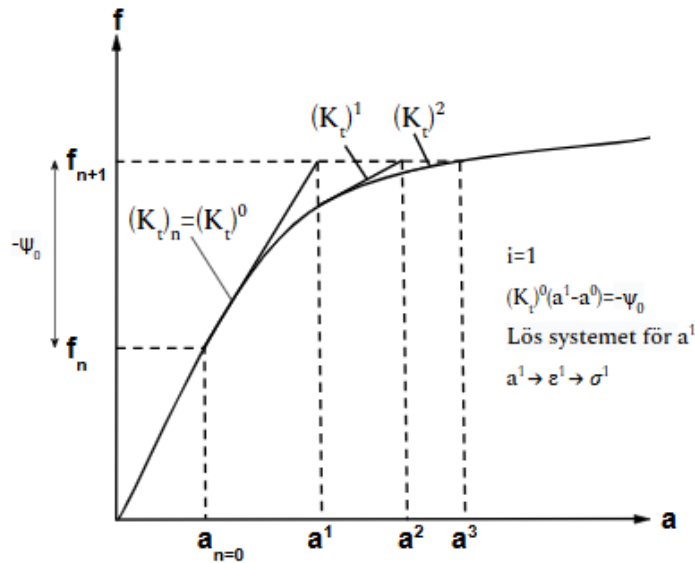
Där i är iterationsindex och $\mathbf{K}_t$ är den tangentiella styvhetsmatrisen, definierad som derivatan av de interna krafterna med avseende på förskjutningarna, och ges av ekvation 4.31.

$$\mathbf{K}_t^{i-1} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t^{i-1} \mathbf{B} dV \quad (4.31)$$

Genom att lösa ekvation 4.30 med de kända parametrarna $\mathbf{K}_t^{i-1}$ och kraftresidualen $\boldsymbol{\psi}^{i-1}$ kan uppdateringen av förskjutningarna bestämmas enligt ekvation 4.32.

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{a}^{i-1} + \Delta \mathbf{a}^i \quad (4.32)$$

När förskjutningarna är kända kan även töjningar, spänningar och interna krafter beräknas. Dessa används sedan som utgångspunkt för nästa iteration. Iterationerna fortsätter tills dess att jämviktsekvationen 4.29 uppfylls, eller tills dess att $\|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a})\|$ understiger ett angivet toleransvärde. Mer detaljerad läsning om Newton–Raphsons metod återfinns i *The Mechanics of Constitutive Modeling*.



Figur 4.6: Newton Raphsonmetoden över flera iterationer i i laststeget n . Baserad på Saabye Ottosen et al. (2005).

5 Numerisk analys av Spjälkning och Parameterstudie

5.1 Introduktion och Arbetsgång

Den numeriska analysen omfattade tre finita elementmodeller som modellerades och simulerades i Brigade/Plus. Alla modeller var tvådimensionella deformerbara solidelement som analyserades i plant spännings- och töjningstillstånd med deformationsstyrd pålastning med kopplingsvillkor. Modellerna genererades med hjälp av en parametrisk Pythonkod. Pseudokod återfinns i rapportens avsnitt 5.1.3 och den fullständiga koden återges i appendix B.1.

5.1.1 Hög balk

Parameterstudien inleddes med en analys av böjsprickor i en hög balk. Analysen genomfördes i syfte att utvärdera CDP-modellen och kopplingen mellan betong och armering med fjäderelement, mot en etablerad fackverksmodell med tydligt kraftspel. Fackverksmodellen visas i rapportens avsnitt 4.1.1.

De dragspänningar som uppstår i armeringen i simuleringar med fjäderelement och tillåten vidhäftningsglidning kontrolleras mot dragspänningar enligt fackverksmodellen med avseende på placering och magnitud. När dragspänningarna i simuleringarna överensstämde med resultaten från fackverksmodellen ansågs modelleringen med koppling med fjäderelement tillförlitlig och därmed lämplig för användning i resterande modeller.

De böjsprickor som uppstod i CDP-modellen analyserades med avseende på sprickmönster och placering. Böjbrott studerades eftersom det är enklare att propagera och förutse sprickmönster. Även kraftens storlek i dragbanden kontrollerades.

5.1.2 Modell 1 och Modell 2

När modelleringsstrategi utvärderats utifrån den höga balken upprättades två modeller för modellering av spjälkning. Modell 1 representerade det fall av full diskontinuitet som återfinns i rapportens kapitel 4.1.2 om fackverksmodeller i *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner*. Modell 2 representerade det fall av partionell diskontinuitet som återfinns i samma kapitel.

Inledningsvis analyserades Modell 1 och Modell 2 med avseende på kopplingsvillkor, där de två alternativen jämnt fördelad och kinematisk koppling jämfördes. Det kopplingsvillkor som resulterade i mest trovärdig uppsprickning med avseende på spjälkning

i oarmerat tillstånd användes sedan för att genomföra efterföljande analyser med armering. För att verifiera att brottet var ett dragbrott analyserades det spänningsfält som uppstod i betongen i det tidsinkrement då betongen nådde sin maximala belastning innan den förlorade sin hållfasthet.

Efterföljande analyser skedde med hänsyn till armerat tillstånd. Initialt modellerades armeringen med fullständig samverkan, sedan modellerades vidhäftningen mellan betongen och armeringen med tillåten vidhäftningsglidning med fjäderelement. Den erforderade armeringsmängden dimensionerades enligt Eurokods fackverksmodeller som återfinns i rapportens kapitel 4.1 för den maximala uppmätta kraften i oarmerat tillstånd. Fackverksmodellen bestämde även armeringens placering. Därefter genomfördes analyser där armeringsmängden dubblades, femfaldigades och tiofaldigades.

För att beräkna den maximala tryckkraften som kan verka på tryckytan innan spjälkning förväntas ske enligt BBK04 användes Ekvation 2.1 och 2.2. För att vara jämförbart med de simuleringar som utförs i Brigade/Plus användes medelvärdet för betongens drag- och tryckhållfasthet, vilket även användes vid modelleringen.

5.1.3 Pseudokod

Algorithm 1 Generering av FE-modell i Abaqus

Input: Material-, geometri- och lastparametrar

Output: Färdig FE-modell med randvillkor och interaktioner

Skapa ny Abaqus-modell

Rensa tidigare delar och instanser

Initiera parameterobjekt för:

 betong

 armering

 last

Skapa betongdel

if *armering används* **then**

 └ Skapa ståldel

Tilldela material- och sektionsdata till betong

if *armering används* **then**

 └ Tilldela material- och sektionsdata till stål

Skapa assembly och instanser

Skapa icke-linjärt analyssteg

Identifiera:

 lastyor

 upplag

Skapa referenspunkter för last och stöd

Koppla referenspunkter till motsvarande ytor

Applicera randvillkor

Generera mesh för betong

if *armering används* **then**

 └ Generera mesh för stål

Regenerera assembly

if *interaktionstyp = EMBEDDED* **then**

 └ Definiera *Embedded* armering

else if *interaktionstyp = SPRINGS* **then**

 └ Koppla stål- och betongnoder med fjäderelement

return färdig FE-modell

5.1.4 Hantering av konvergensproblem i Brigade/Plus

För att undvika instabilitet och för att få modellen att konvergera i Brigade/Plus vidtogs ett flertal åtgärder som alla listas nedan.

Vid deformationsstyrd pålastning med kopplingsvillkor antar betongen ett stabilare mjuknande beteende än vid kraftstyrd lastpåföring. Detta resulterade i att analyserna konvergerade mer stabilt.

Då det icke-linjära steget initerades i Brigade/Plus applicerades automatisk stabilisering med hjälp av Dissipated Energy Fraction. Alla värden avseende detta behölls som standardvärden i Brigade/Plus. Mer om Dissipated Energy Fraction återfinns i

rapportens avsnitt 3.6.3.

Vid val av parametrar i CDP i Brigade/Plus valdes viskositetsparametern μ till ett högre värde än det standardvärde som återfinns i Brigade/Plus. Detta gjordes för att modellen enklare ska konvergera.

Den koppling som ansattes i tryckytan ansattes även i upplaget. Detta för att göra modellen symmetrisk med avseende på last, kopplingsvillkor och randvillkor. Däremot gjordes ingen symmetrimodell, eftersom sprickmönstret antogs bli icke-symmetriskt.

Vid koppling med fjäderelement mellan armering och betong med ökades meshstorleken från 0,03 m, som används i övriga analyser, till 0,05 m eftersom det gav ett jämnt antal element på både höjden och bredden. Detta för att meshen mellan armeringsjärnen och betongen skulle bli densamma, vilket gjorde att inga noder blev kopplade med flera eller sneda fjädrar.

5.2 Materialparametrar i CDP

5.2.1 Betong

Vid modellering med CDP i Brigade/Plus föreskrevs alla materialparametrar för betong hållfasthetsklassen C35/45. De materialparametrar som användes för att beskriva betongen i Brigade/Plus återfinns i detta avsnitt.

Eftersom både Eurokod och *fib* föreskriver användning av medelvärde vid beräkning av betongens beteende i drag- och tryck, har även rapporten använt medelhållfastheten vid bestämning av CDP-indata i Brigade/Plus. Betongens mekaniska och elastiska egenskaper återfinns i Tabell 5.1 och 5.5 och hämtades från *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner*.

Tabell 5.1: Betongens mekaniska egenskaper.

f_{ctm} [MPa]	f_{cm} [MPa]
3,2	43

Tabell 5.2: Betongens elastiska egenskaper i Brigade/Plus.

Densitet ρ [kg/m^3]	Elasticitetsmodul E_{cm} [GPa]	Poissons tal ν [-]
2500	34	0.2

Vid modellering med CDP sattes alla materialparametrar till de standardvärden som anges i *Abaqus Analysis User's Manual*, förutom viskositetsparametern μ som höjdes enligt rapportens avsnitt 5.1.4.

Tabell 5.3: Materialparametrar med hänsyn till plastiskt beteende i betong i Brigade/Plus.

Dilation angle ψ	Eccentricity ε	$\frac{f_{b0}}{f_{c0}}$	K_c	Viskositet μ
37°	0,1	1.16	0,667	10^{-6}

Tabell 5.4 presenterar den indata som användes för att beskriva betongens beteende i tryck i Brigade/Plus. Värdena hämtades från Olofsson et al. (2023).

Tabell 5.4: Betongens beteende i tryck i Brigade/Plus.

Yield stress [MPa]	Inelastic strain [%]
17,2	0,0
21,8	0,1
36,3	0,3
42,8	0,9
40,0	1,6
26,5	2,7

Tabell 5.5 presenterar den indata som användes för att beskriva betongens beteende i drag i Brigade/Plus. Värdena hämtades från Olofsson et al. (2023).

Tabell 5.5: Betongens beteende i drag i Brigade/Plus.

Flytspänning [MPa]	Sprickbredd [m]
3,2	0,0
0,64	$4,5 \cdot 10^{-5}$
0,32	$1,3 \cdot 10^{-4}$

5.2.2 Armeringsstål

Följande materialparametrar användes för armeringsstålet i Brigade/Plus. Vid modellering användes stålets karakteristiska hållfasthet. Eftersom stålet endast modellerades elastiskt behövdes ingen indata som beskriver dess mjuknande och hårdnande beteende. Armeringsstålet var av typen K500B-T med konstant diameter. Alla värden hämtas från *Byggkonstruktion, Regel- och formelsamling*.

Tabell 5.6: Stålets flytspänning.

Flytspänning f_{yk} [MPa]
500

Tabell 5.7: Materialparametrar för armeringsstål.

Diameter d [mm]	Elasticitetsmodul E [GPa]	Poissons tal ν [-]
20	200	0,3

5.2.3 Fjädrar mellan betong och armering

Den maximala skjuvkraft, τ_{max} , och glidningen, s_1 som uppstår till följd av vidhäftning mellan armering och betong hämtas från tabell 6.1-1 i *fib Model Code for Concrete Structures 2010* för goda vidhäftningsförhållanden. Värdena återges i Tabell 5.8.

Tabell 5.8: Skjuvkraft och glidning mellan betong och armering.

τ_{max} [MPa]	s_1 [mm]
16,394	1,0

För att få armeringen och betongen att deformeras tillsammans behövde armeringens ändpunkter fästas i betongen. Förankringen modellerades genom att tilldela den enstaka fjäder som löpte mellan betongens kant och armeringens ände mycket hög styvhet.

5.3 Hög balk

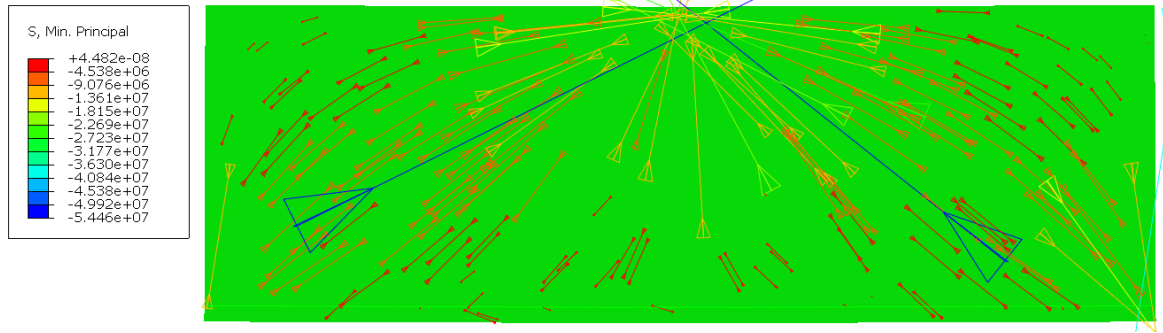
Den höga balken var sex meter lång och två meter hög med en tjocklek på en meter. Tryckytorna och upplagen var 0,2 meter breda. Balken simulerades endast i armerat tillstånd med vidhäftningsglidning. Balken armerades med 80 stänger för att förhindra att armeringen flyter innan betongen gått till brott. Armeringen låg 100 milimeter över betongens undre kant. Kopplingsvillkoret jämnt fördelad koppling användes vid koncentrerade laster och upplag.

5.3.1 Analysresultat

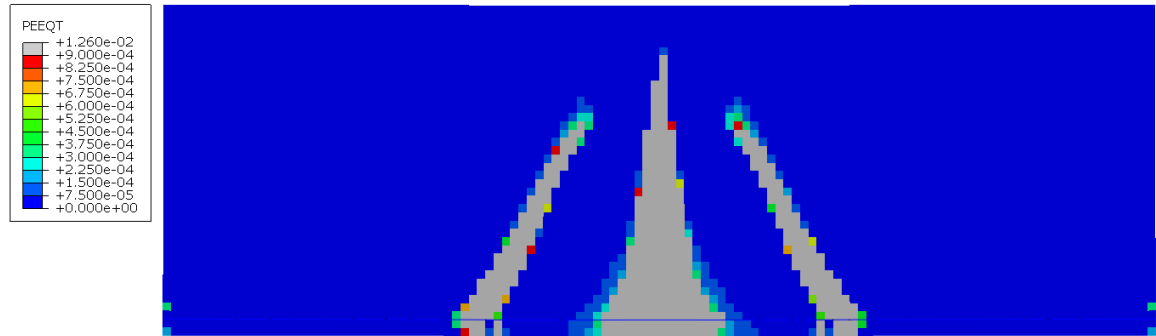
De drag- och tryckspänningar som uppstod i den höga balken vid pålastning i ett bestämt tidsinkrement framgår av figur 5.1 och figur 5.2. Uppsprickningen presenteras i figur 5.3.



Figur 5.1: Dragspänningar i den höga vid initiering av böjsprickor.



Figur 5.2: Tryckspänningar i den höga balken vid initiering av böjsprickor.



Figur 5.3: Böjsprickor i den höga balken vid sista analysinkrementet.

Kontroll av dragspänning i armering

En approximation av den inre hävarmen z gjordes till 1,83 meter baserat på den inre hävarmen i exemplet med en hög balk med låg höjd som återfinns i *Svenska betongföreningens guide till ek2, Volym II*. Den yttre hävarmen b_A mellan den höga balkens mittlinje och upplagen sattes till 2,9 meter, vilket motsvarade avståndet mellan upplagets mittpunkt och den applicerade tryckkraftens verkningslinje. Vinkeln θ mellan trycksträvan och dragstaget beräknades med hjälp av ekvation 4.1.

$$\theta = \arctan\left(\frac{1,83}{2,9}\right) = 32,25^\circ$$

Därefter beräknades den dragkraft T som uppstår i armeringen med hjälp av ekvation 4.6. Reaktionskraften R_A hämtades från simuleringarna.

$$T = \frac{4,98 \cdot 10^6}{\tan 32,25} = 15,79 \text{ MN}$$

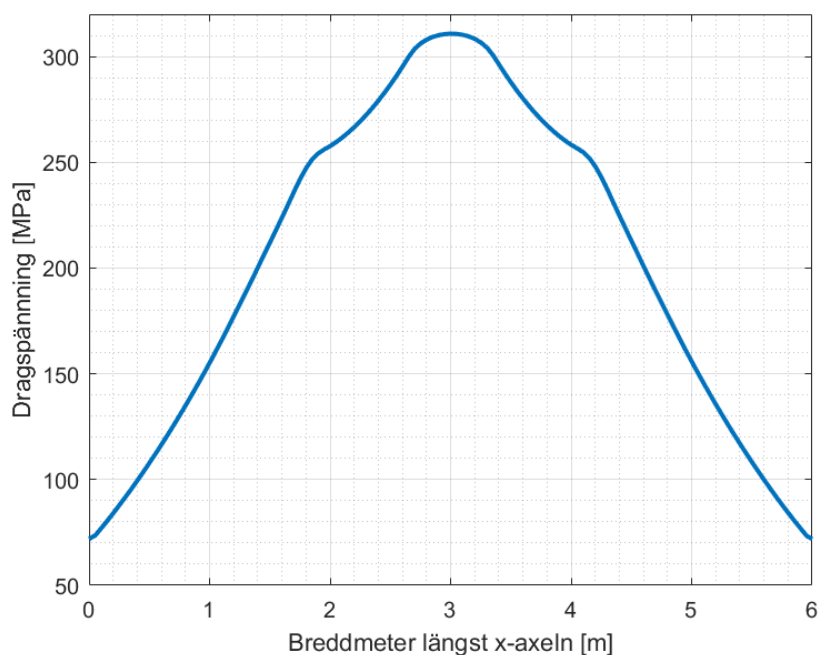
Ur dragkraften kan dragspänningen i armeringen beräknades med ekvation 4.6, där armeringens area beräknades enligt 4.7.

$$A_s = 80 \cdot \pi \cdot \left(\frac{20 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2 = 0,0251 \text{ m}^2$$

$$\sigma_t = \frac{15,79 \cdot 10^6}{0,0251} = 314,55 \text{ MPa}$$

Den dragspänning som uppstod längs med armeringen i simuleringar av den höga balken framgår av figur 5.4. Den maximala dragspänningen i armeringen i simulering-

arna uppgick till 311 MPa . Således blev felmarginalen mellan handberäkningarna med fackverksmodellen och resultatet av simuleringen ca 1%.



Figur 5.4: Dragspänning längs med armeringen.

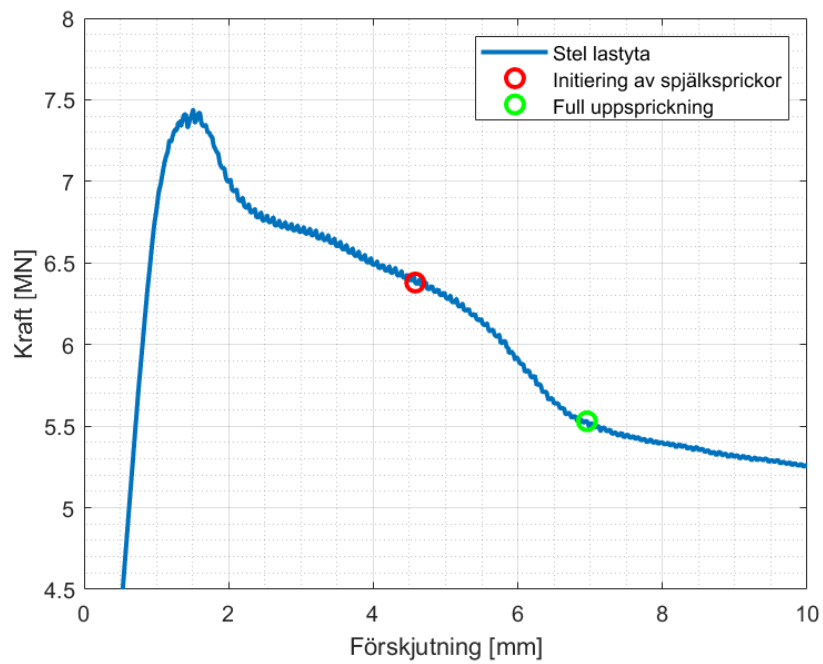
5.4 Modell 1

Modell 1 var fyra meter bred och två meter hög med en tjocklek på en meter. Lasten hade en 0,1 meter bred tryckyta som placerades i mittpunkten av elementets övre kant.

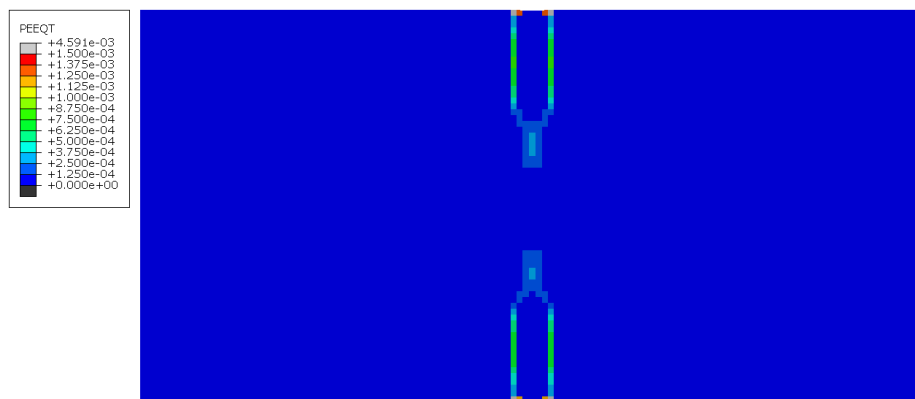
5.4.1 Simuleringar i oarmerat tillstånd

Belastning med stel lastyta

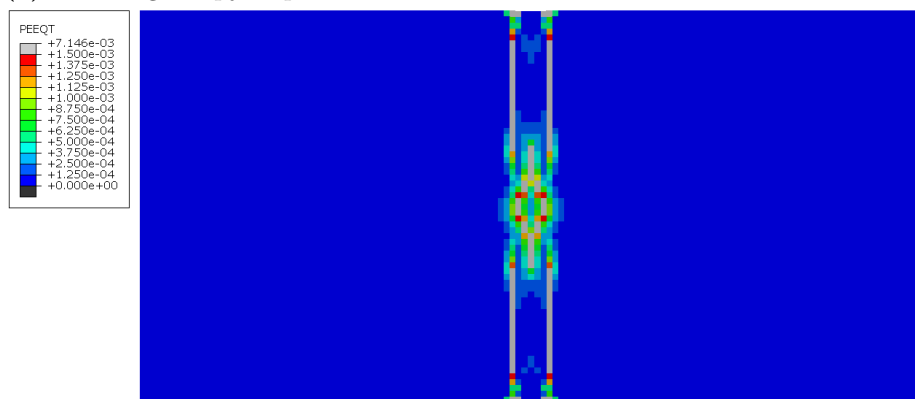
Den kraft och deformation som uppmättes i en referenspunkt mitt på tryckytan på Modell 1 vid simuleringar med lastpåföring med stel lastyta i oarmerat tillstånd framgår av figur 5.5. Den initiala och den fulla uppsprickningen vid de markerade tidpunkterna i arbetskurvan framgår av 5.6. Det spänningsfält som erhålls ur analysen vid maximal pålastning framgår av figur 5.7.



Figur 5.5: Kapacitet i Modell 1 vid lastpåföring med stel lastyta.

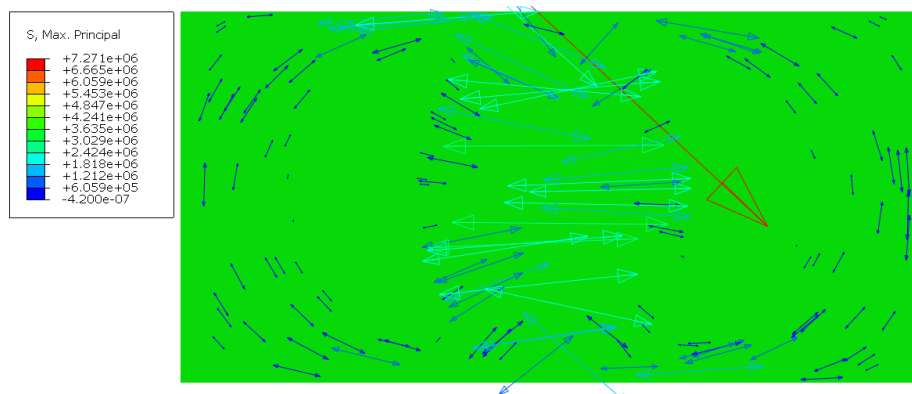


(a) Initiering av spjälksprickor.

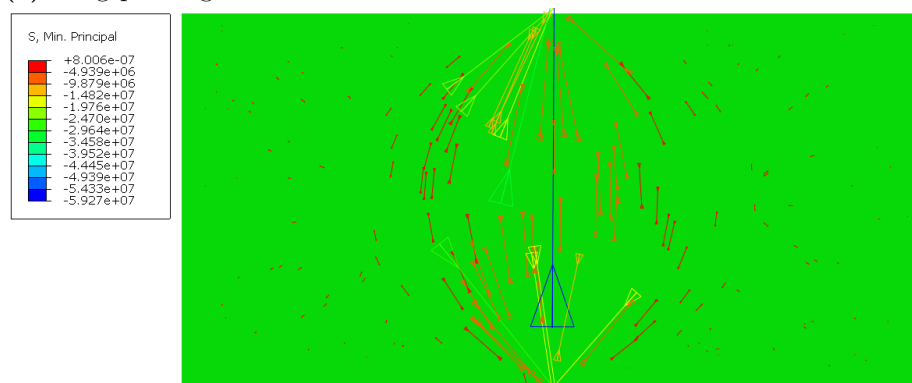


(b) Fullt utvecklad spjälkning.

Figur 5.6: Initial och fullt utvecklad spjälkning i Modell 2 vid lastpåföring med stel lastyta.



(a) Dragspänningar.

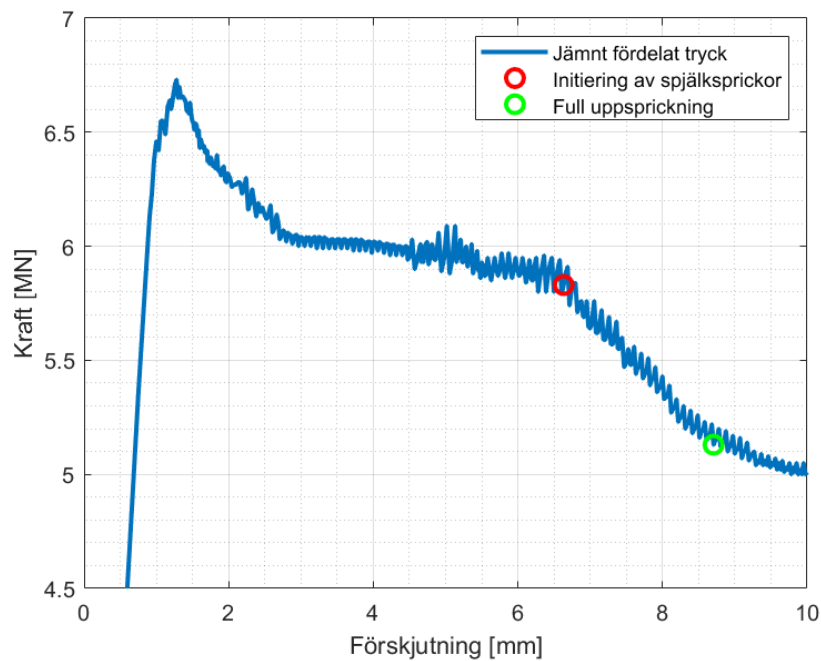


(b) Tryckspänningar.

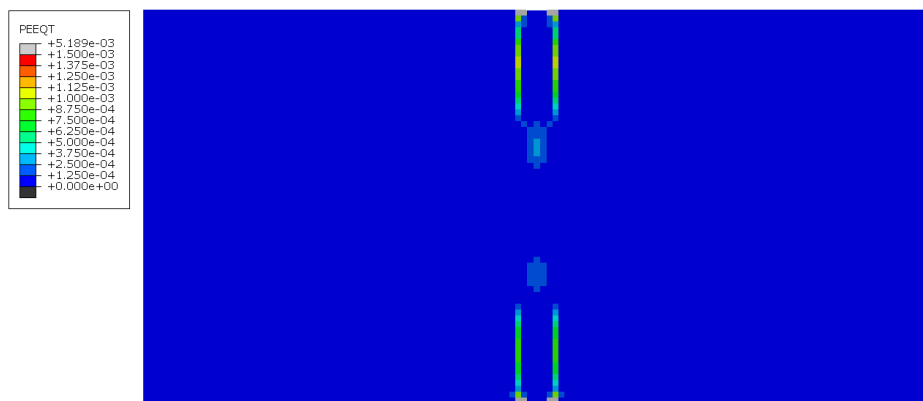
Figur 5.7: Spänningsfält i Modell 1 vid maximal pålastning vid lastpåföring med stel lastyta.

Belastning med jämnt fördelat tryck

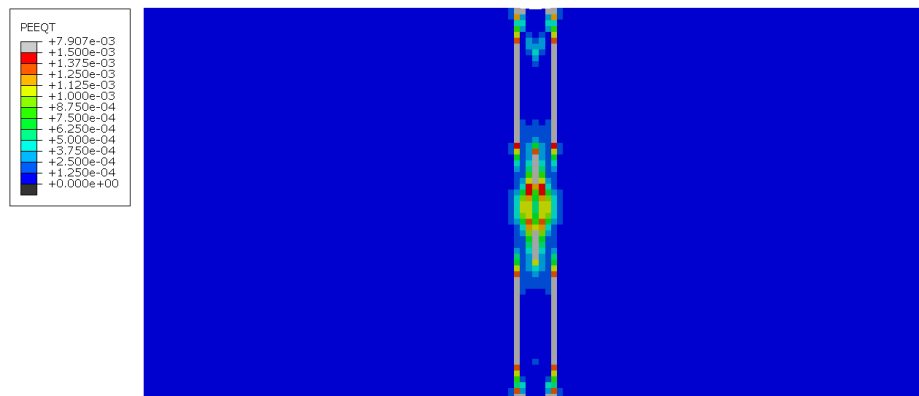
Den kraft och deformation som uppmättes i en referenspunkt mitt på tryckytan på Modell 1 vid simuleringar med jämnt fördelat tryck vid lastpåförning i oarmerat tillstånd framgår av figur 5.8. Den initiala och den fulla uppsprickningen vid de markerade tidpunkterna i arbetskurvan framgår av 5.9. Det spänningsfält som erhöles ur analysen vid maximal pålastning framgår av figur 5.10.



Figur 5.8: Kapacitet i Modell 1 vid lastpåföring med jämnt fördelat tryck.

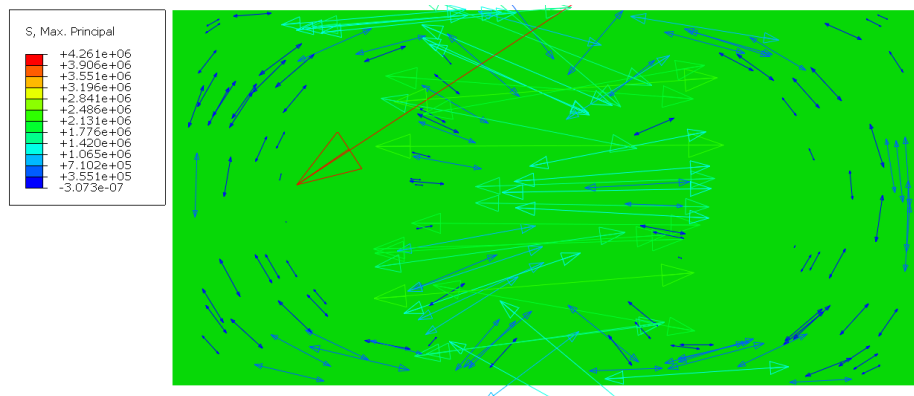


(a) Initiering av spjälksprickor.

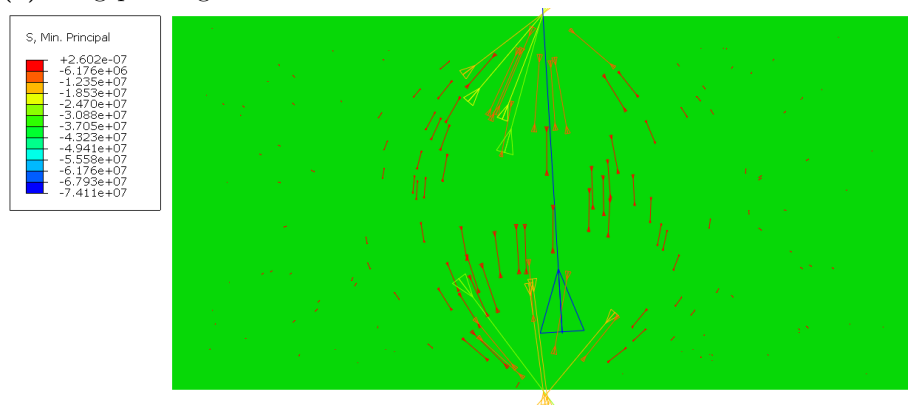


(b) Fullt utvecklad spjälkning.

Figur 5.9: Initial och fullt utvecklad spjälkning i Modell 1 vid lastpåföring med jämnt fördelat tryck



(a) Dragspänningar.



(b) Tryckspänningar.

Figur 5.10: Spänningsfält i Modell 1 vid maximal pålastning vid lastpåföring med jämnt fördelat tryck.

5.4.2 Spjälkning enligt BBK04

Den maximala tryckkraften som kunde verka på Modell 1 i oarmerat tillstånd innan spjälkning förväntades uppstå enligt BBK04 beräknades med hjälp av ekvation 2.1 och 2.2.

$$\max = \begin{cases} F_R = 0,75 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3,2 = 9,6 \text{ MN} & \text{Fall 1} \\ F_R = (0,5 + 0,5) \cdot 0,1 \cdot 43 = 4,3 \text{ MN} & \text{Fall 2} \end{cases}$$

Vid de inkrement då tryckkraften motsvarade den kraft som beräknades i BBKs Fall 1 och Fall 2 hade inga plastiska deformationer skett i analyserna.

5.4.3 Simuleringar i armerat tillstånd

Analys av Modell 1 i oarmerat tillstånd visade att lastapplicering med jämnt fördelat tryck gav mest trovärdiga resultat vid simulering av spjälksprickor. Därmed användes även jämnt fördelat koppling vid simuleringar av Modell 1 i armerat tillstånd. Modellen analyserades med avseende på kraft och deformation i en referenspunkt placerad mitt i tryckytan. Analysen avsåg olika armeringsmängd vid modellering med fullständig samverkan samt tillåten vidhäftningsglidning mellan armeringen och betongen med hjälp av fjädrar.

Armeringsberäkningar

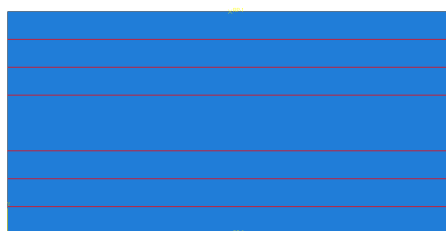
Först kontrollerades geometrins proportioner enligt rapportens avsnitt 4.1.2. Kontroll av dimensionerna gav

$$4 > \frac{2}{2} \Rightarrow \text{Full Diskontinuitet}$$

Armeringens avstånd från tryckytan, z , beräknades enligt figur 4.4.

$$z = \frac{\left(\frac{2}{2}\right)}{2} = 0,5m$$

Dessutom placerades ett lager armering på avstånd $\frac{z}{2}$ ovanför och under mittenraden. Armeringens position framgår av figur 5.11.



Figur 5.11: Armeringsjärnens position i betongen.

Eftersom full diskontinuitet gällde användes ekvation 6.59 för att beräkna den dimensionerande kraften i dragarmeringen. För att beräkna armeringsarean användes

ekvation 4.6 och 4.7.

$$T = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - 0,7 \cdot \frac{0,1}{1}\right) \cdot 6,74 \cdot 10^6 = 1567050N$$

$$A_s = \frac{1567050}{500 \cdot 10^6} = 0,0031341m^2$$

Erfodrad armering per rad (3 rader)

$$A_s = \frac{0,0031341}{3} = 0,0010447m^2$$

$$n = \frac{0,0010447}{\pi \cdot \left(\frac{20 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2} = 3,33 \Rightarrow \text{Avrundas till 4 stänger per rad}$$

Därefter beräknades den exakta armeringsarean med minimiarmering om med 4 stänger.

$$A_s = 4 \cdot \left(\frac{20 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2 \cdot \pi = 0,00126m^2$$

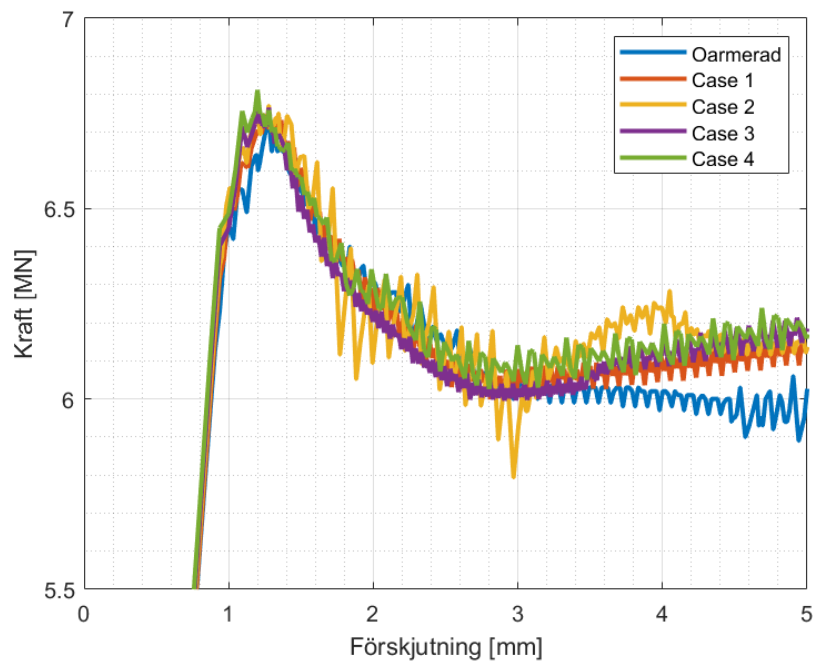
Inledningsvis analyserades strukturen med minimiarmering. Med avstamp i minimiarmeringen gjordes ytterligare tre analyser där armeringen dubblades, femfaldigades och tiofaldigades. De armeringsmängder som simulerades presenteras i tabell 5.9, och avser antal armeringsstänger in i planet i vardera av de sex armeringslager som visas i figur 5.11.

Tabell 5.9: Simulerade armeringsmängder i Modell 1.

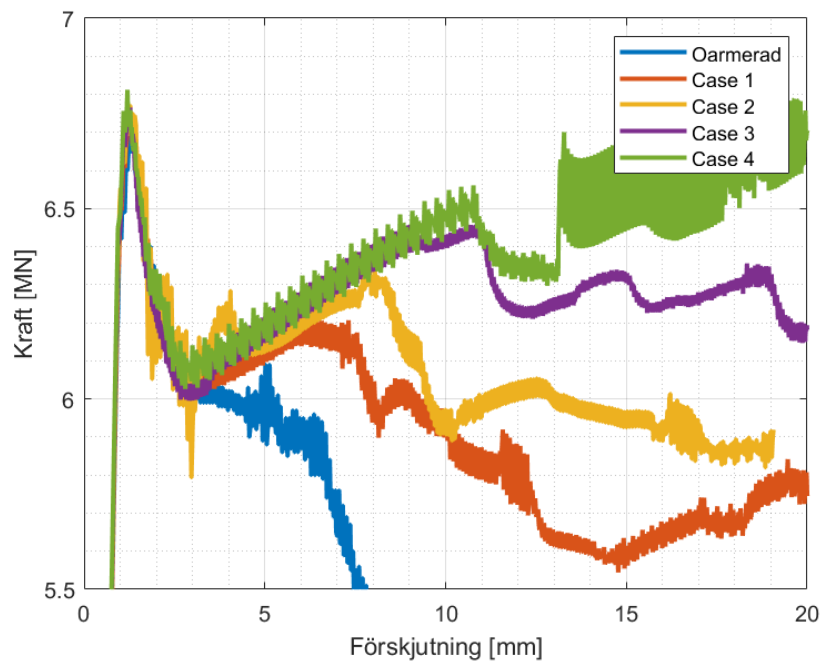
Case	Armeringsmängd
Case 1	4 stänger
Case 2	8 stänger
Case 3	20 stänger
Case 4	40 stänger

Armerad med fullständig samverkan

Den kraft och förskjutning som erhöles i en referenspunkt placerad mitt på tryckytan på Modell 1 i armerat tillstånd med fullständig samverkan framgår av figur 5.12. Brottet verifierades som ett dragbrott och uppsprickningen i Modell 1 vid respektive Case presenteras i figur 5.13.

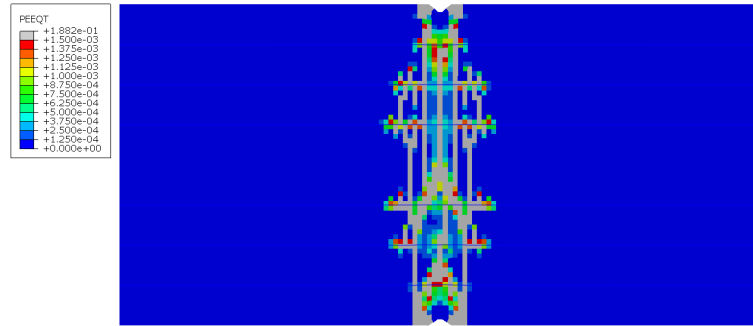


(a) Initialt.

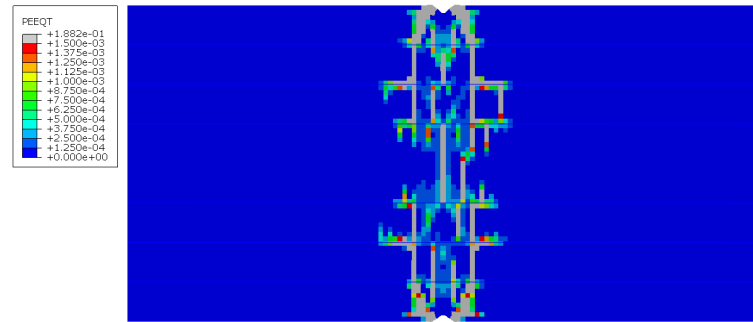


(b) Över stora deformationer.

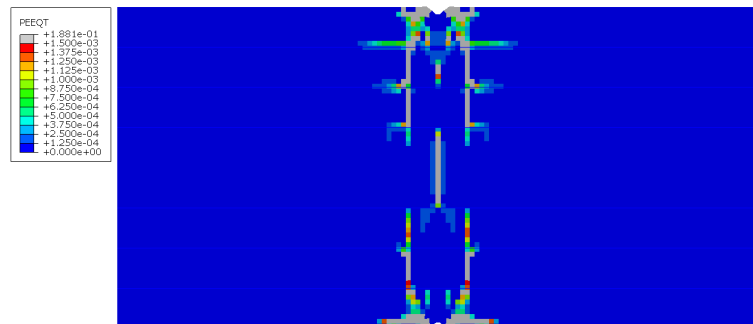
Figur 5.12: Kraft och förskjutning vid simuleringar med olika armeringsmängd.



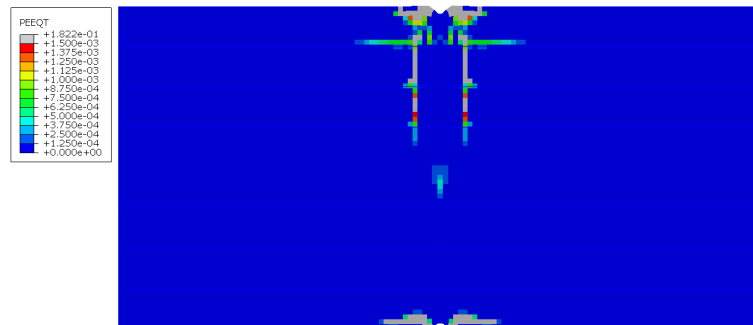
(a) Case 1: 4 armeringsstänger.



(b) Case 2: 8 armeringsstänger.



(c) Case 3: 20 Armeringsstänger.

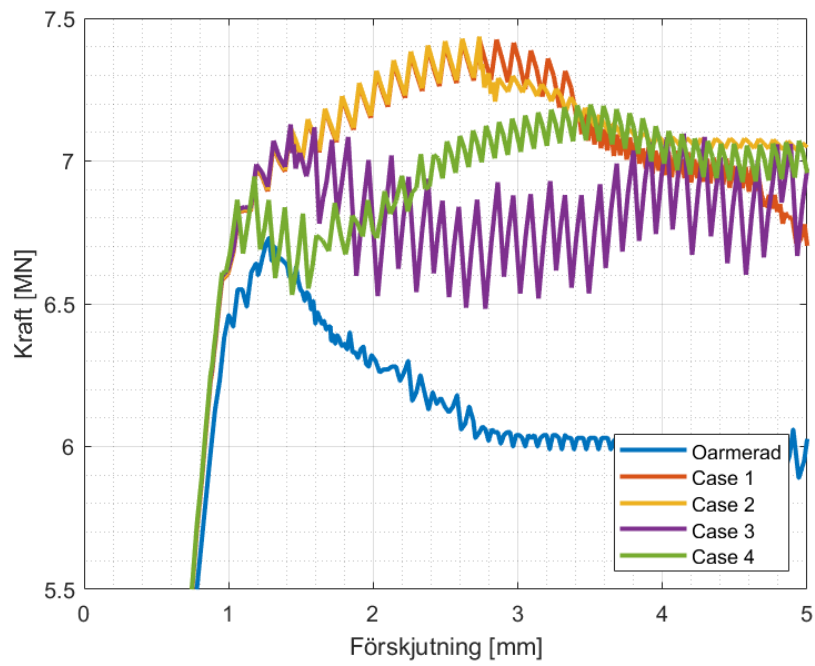


(d) Case 4: 40 armeringsstänger.

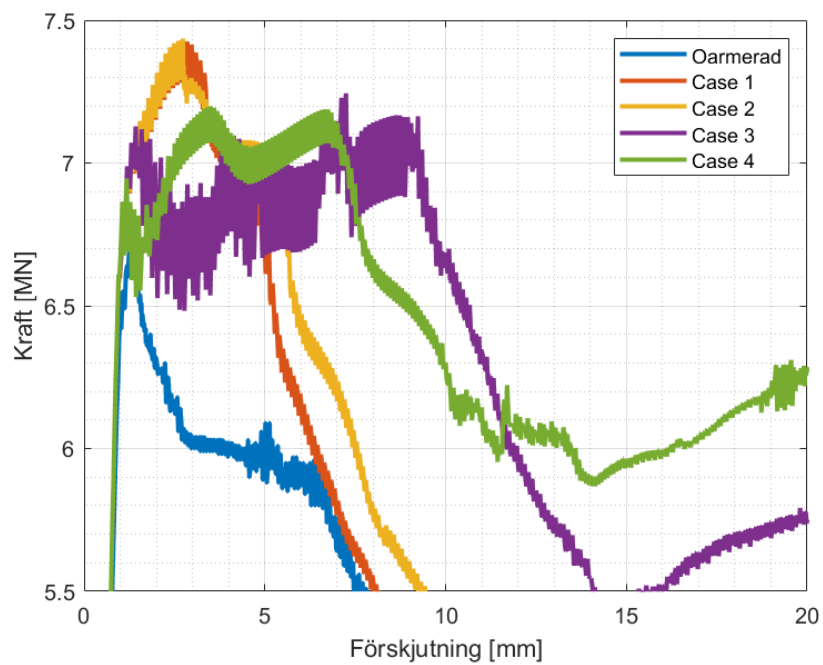
Figur 5.13: Uppsprickning för respektive Case vid fullständig samverkan mellan betong och armering.

Vidhäftningsglidning mellan betong och armering med fjädrar

Den kraft och förskjutning som erhöles i en referenspunkt placerad mitt på tryckytan på Modell 1 i armerat tillstånd med tillåten vidhäftningsglidning mellan armering och betong med fjädrar framgår av figur 5.14. Brottet verifierades som ett dragbrott och uppsprickningen i Modell 1 vid respektive Case presenteras i figur 5.15.

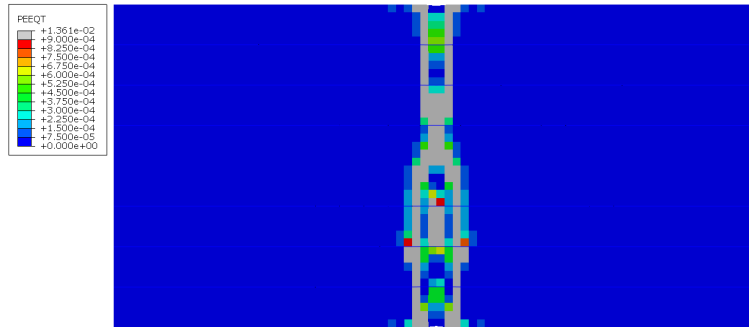


(a) Initialt.

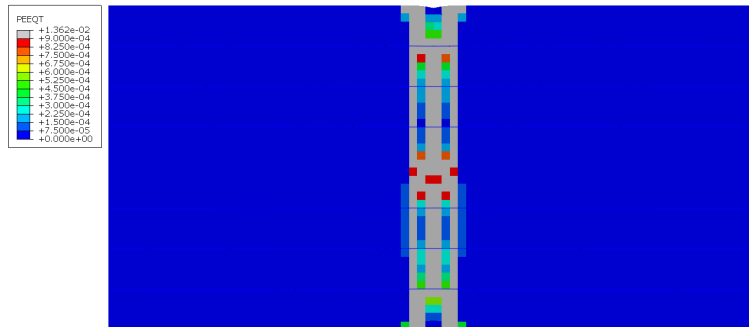


(b) Över stora deformationer.

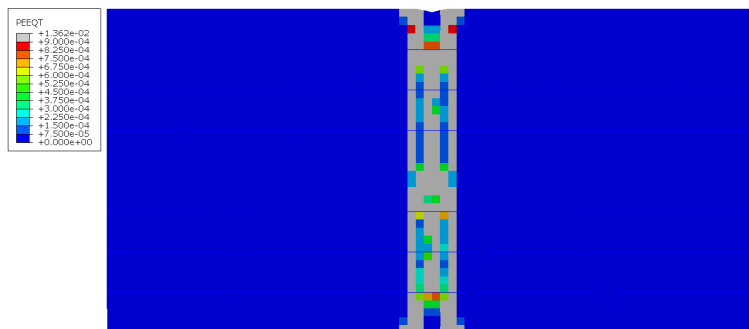
Figur 5.14: Kraft och förskjutning vid simuleringar med olika armeringsmängd.



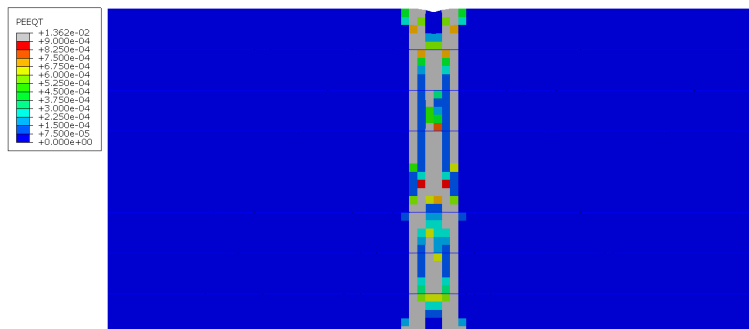
(a) Case 1: 4 armeringsstänger.



(b) Case 2: 8 armeringsstänger.



(c) Case 3: 20 Armeringsstänger.



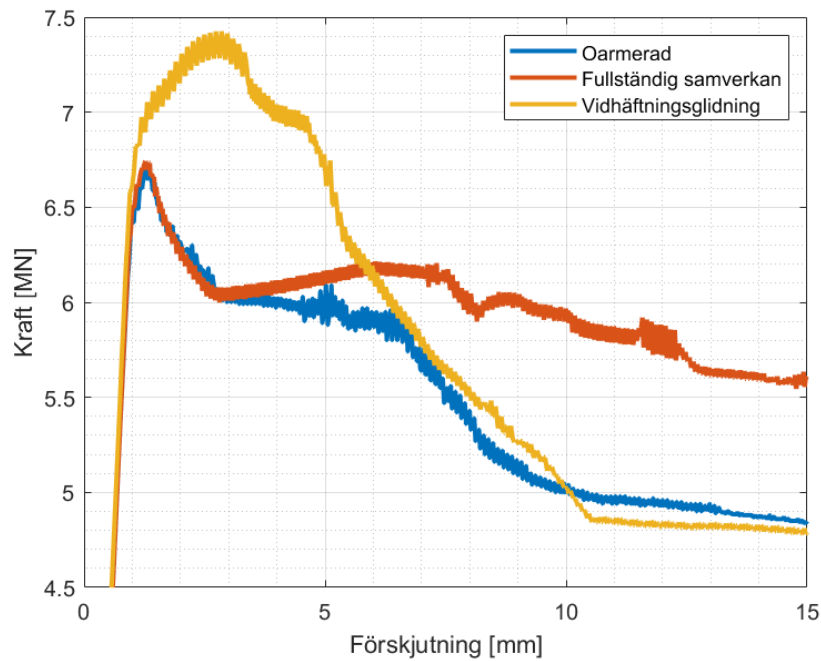
(d) Case 4: 40 armeringsstänger.

Figur 5.15: Uppsprickning för respektive Case med vidhäftningsglidning mellan betong och armering.

5.4.4 Jämförelse

Case 1

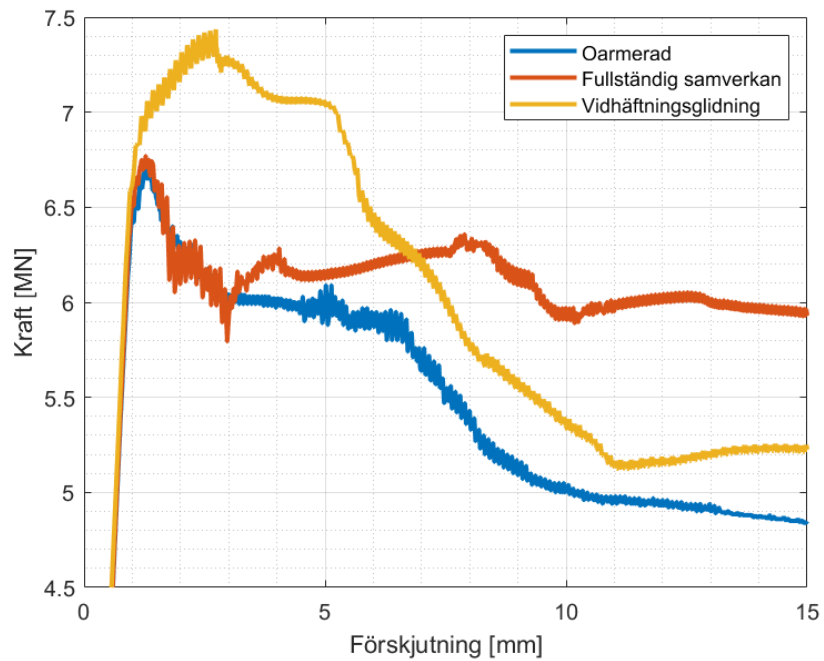
Den kraft och förskjutning som erhöles i referenspunkten i Modell 1 Case 1 armerat med fyra armeringsstänger erhålls ur 5.16.



Figur 5.16: Kraft och förskjutning i Modell 1 Case 1.

Case 2

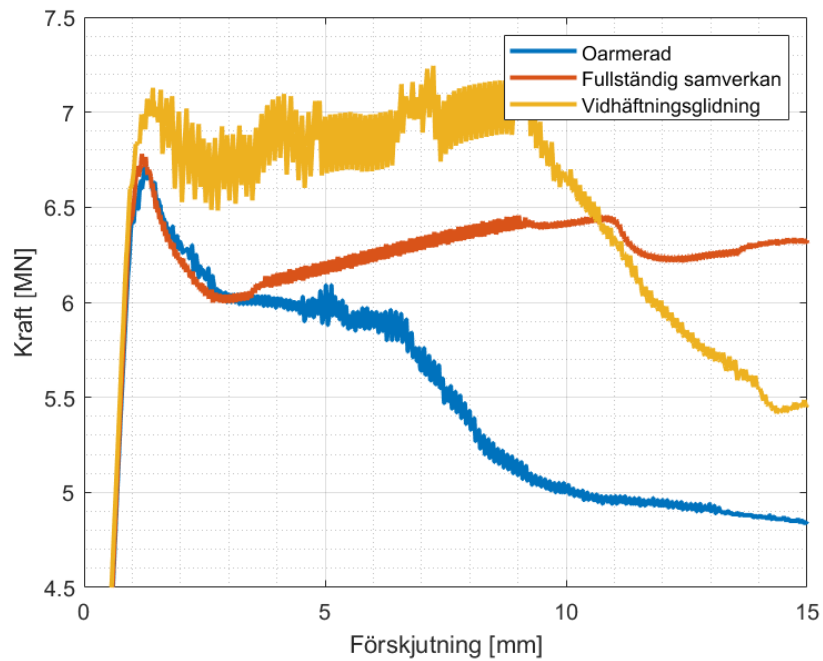
Den kraft och förskjutning som erhöles i referenspunkten i Modell 1 Case 2 armerat med åtta armeringsstänger erhålls ur 5.17.



Figur 5.17: Kraft och förskjutning i Modell 1 Case 2.

Case 3

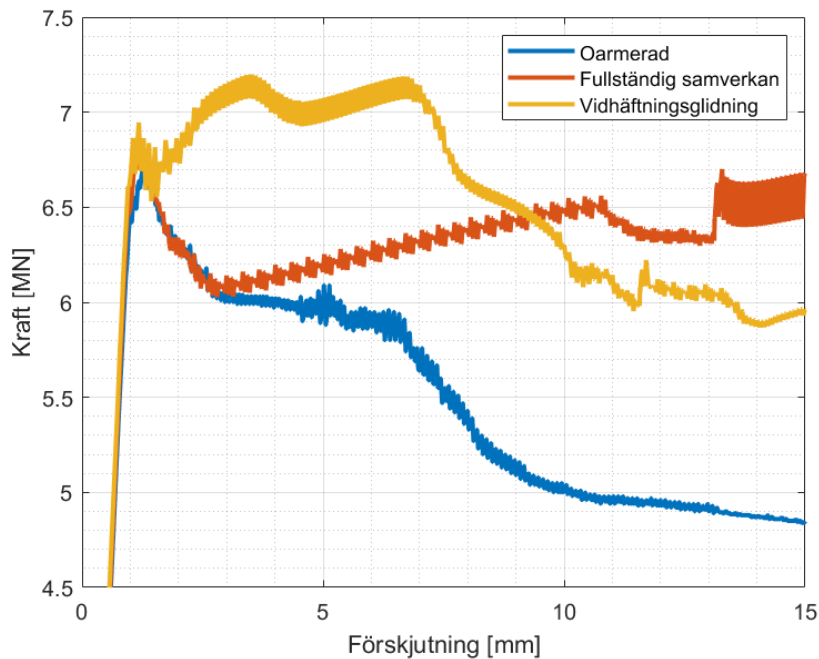
Den kraft och förskjutning som erhöles i referenspunkten i Modell 1 Case 3 armerat med åtta armeringsstänger erhålls ur 5.18.



Figur 5.18: Kraft och försjutning i Modell 1 Case 3.

Case 4

Den kraft och försjutning som erhöles i referenspunkten i Modell 1 Case 4 armerat med åtta armeringsstänger erhålls ur 5.19.



Figur 5.19: Kraft och förskjutning i Modell 1 Case 4.

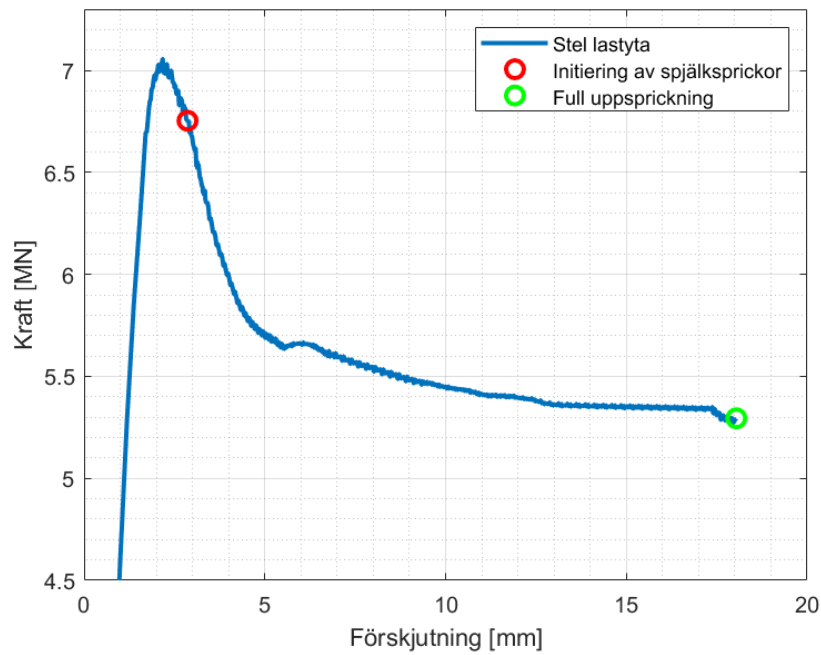
5.5 Modell 2

Modell 2 var en meter bred och fem meter hög med en tjocklek på en meter. Lasten hade en 0,1 meter bred tryckyta som placerades i mittpunkten på elementets övre kant.

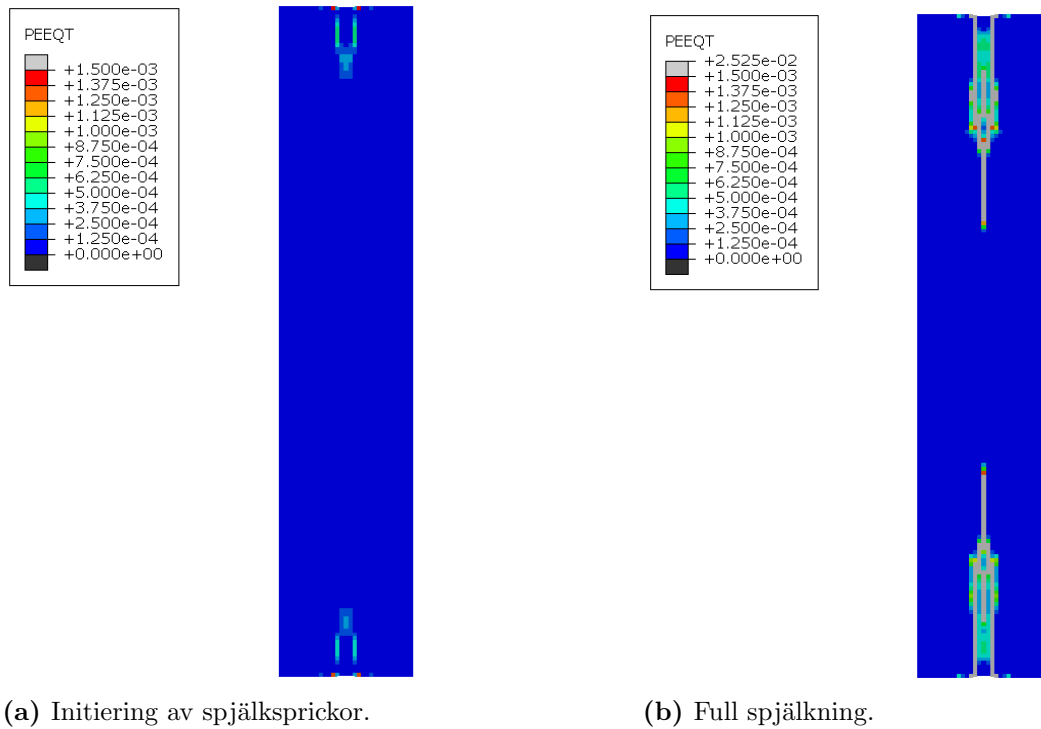
5.5.1 Simuleringar i oarmerat tillstånd

Belastning med stel lastyta

Den kraft och deformation som uppmättes i en referenspunkt mitt på tryckytan på Modell 2 vid simuleringar med lastpåföring med stel lastyta i oarmerat tillstånd framgår av figur 5.20. Den initiala och den fulla uppsprickningen vid de markerade tidpunkterna framgår av 5.21. Det observerade spänningsfältet verifierade att det brott som uppstod var ett dragbrott. Deformationen framgår av figur 5.21. Kraft och förskjutning i referenspunkten vid den initiala och fullt utvecklade spjälkningen framgår av figur 5.21.



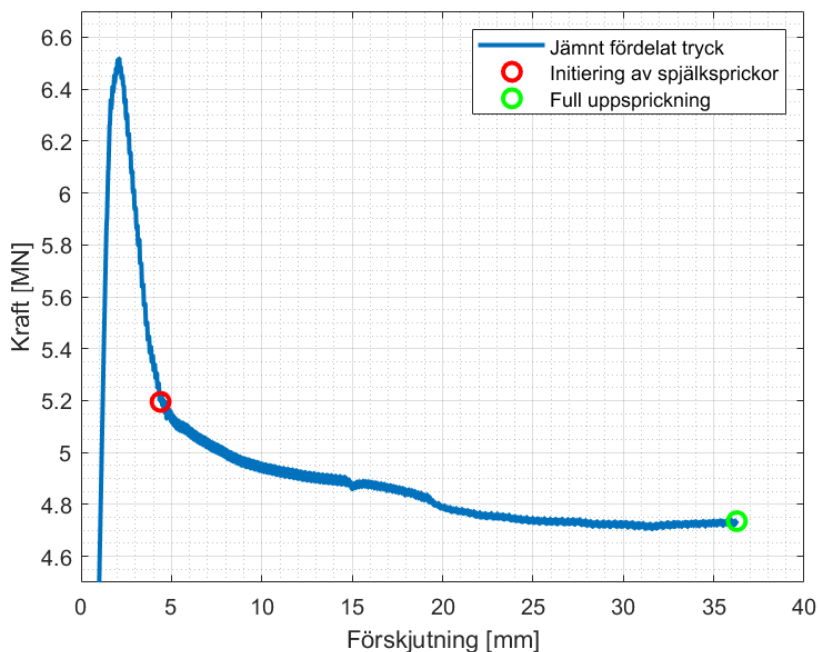
Figur 5.20: Kapacitet i Modell 2 vid lastpåföring med stel lastyta.



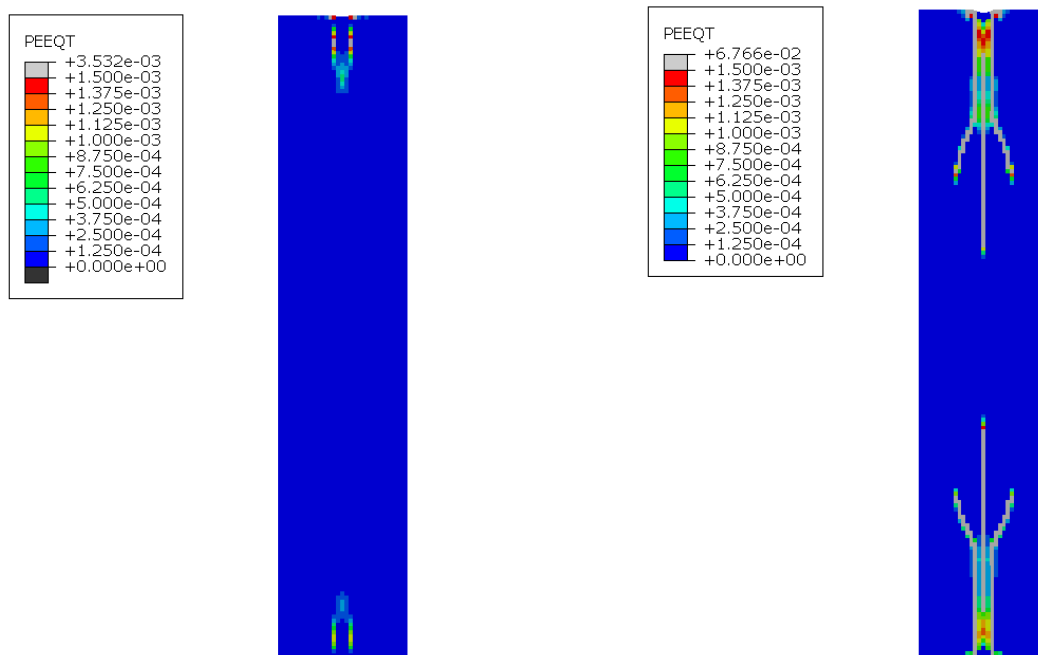
Figur 5.21: Initial och fullt utvecklad spjälkning i Modell 2 vid lastpåföring med stel lastyta.

Belastning med jämnt fördelat tryck

Den kraft och deformation som uppmättes i en referenspunkt mitt på tryckytan på Modell 2 vid simuleringar med jämnt fördelat tryck vid lastpåföring i oarmerat tillstånd framgår av figur 5.22. Den initiala och den fulla uppsprickningen vid de markerade tidpunkterna framgår av 5.23. Det observerade spänningsfältet verifierade att det brott som uppstod var ett dragbrott. Deformationen framgår av 5.23. Kraft och förskjutning i referenspunkten vid den initiala och fullt utvecklade spjälkningen framgår av 5.23.



Figur 5.22: Kapacitet i Modell 2 vid lastpåföring med jämnt fördelat tryck.



(a) Initial uppsprickning.

(b) Full spjälkning.

Figur 5.23: Initial och fullt utvecklad spjälkning i Modell 2 vid lastpåföring med jämnt fördelat tryck.

5.5.2 Spjälkning enligt BBK04

Den maximala tryckkraften som kunde verka på Modell 2 i oarmerat tillstånd innan spjälkning förväntades uppstå enligt BBK04 beräknades med hjälp av ekvation 2.1 och 2.2.

$$\max = \begin{cases} F_R = 0,75 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3,2 = 2,4 \text{ MN} & \text{Fall 1} \\ F_R = (0,5 + 0,5) \cdot 0,1 \cdot 43 = 4,3 \text{ MN} & \text{Fall 2} \end{cases}$$

Vid de inkrement då tryckkraften motsvarade den kraft som beräknades i BBKs Fall 1 och Fall 2 hade inga plastiska deformationer skett i analyserna.

5.5.3 Simuleringar i armerat tillstånd

Analys av Modell 2 i oarmerat tillstånd visade att lastapplicering med jämnt fördelat tryck gav mest trovärdiga resultat vid simulering av spjälksprickor. Därmed användes även jämnt fördelad koppling vid simulering av Modell 2 i armerat tillstånd. Modellen analyserades med avseende på kraft och deformation i en referenspunkt placerad mitt i tryckytan. Analysen avsåg olika armeringsmängd vid modellering med fullständig samverkan samt tillåten vidhäftningsglidning mellan armeringen och betongen.

Armeringsberäkningar

Kontroll av dimensionerna ger

$$1 < \frac{5}{2} \Rightarrow \text{Partiell Diskontinuitet}$$

Avståndet z mellan armeringen mittersta lager och närmaste kant sattes till 1,5 meter, och armeringen placerades i tre lager med 0,5 m mellanrum. Armeringens position framgår av 5.24.



Figur 5.24: Armeringens placering i Modell 2.

Eftersom partiell diskontinuitet gällde användes ekvation 6.58 för att beräkna den dimensionerande kraften i dragarmeringen. För att beräkna armeringsarean användes ekvation 4.6 och ekvation 4.7.

$$T = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1 - 0,1}{1} \cdot 6,51 \cdot 10^6 \right) = 14647560 N$$

$$A_s = \frac{1464750}{500 \cdot 10^6} = 0,0029295 m^2$$

Erfodrad armering per rad (3 rader)

$$A_s = \frac{0,0029295}{3} = 0,0009765 m^2$$

$$n = \frac{0,0009765}{\pi \cdot \left(\frac{20 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2} = 3,1 \Rightarrow \text{Avrundas till 4 stänger per rad}$$

Därefter beräknades den exakta armeringsarean om med 4 stänger.

$$A_s = 4 \cdot \left(\frac{20 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 \cdot \pi = 0,00126 m^2$$

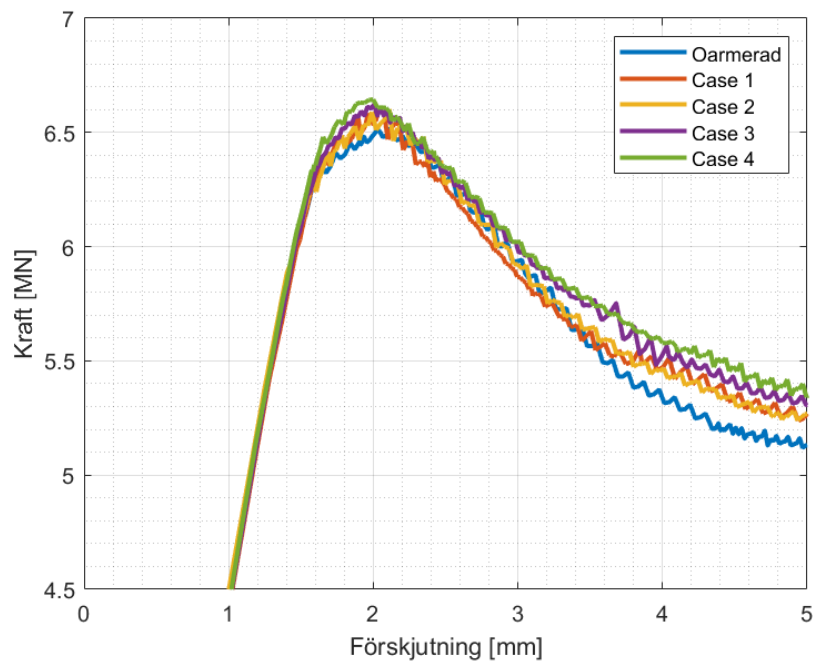
Inledningsvis analyserades strukturen med minimiarmering. Med avstamp i minimiarmeringen gjordes ytterligare tre analyser där armeringen dubblades, femfaldigades och tiofaldigades. De armeringsmängder som simulerades presenteras i tabell 5.10, och avser antal armeringsstänger in i planet i vardera av de sex armeringslager som visas i figur 5.24.

Tabell 5.10: Simulerade armeringsmängder i Modell 2.

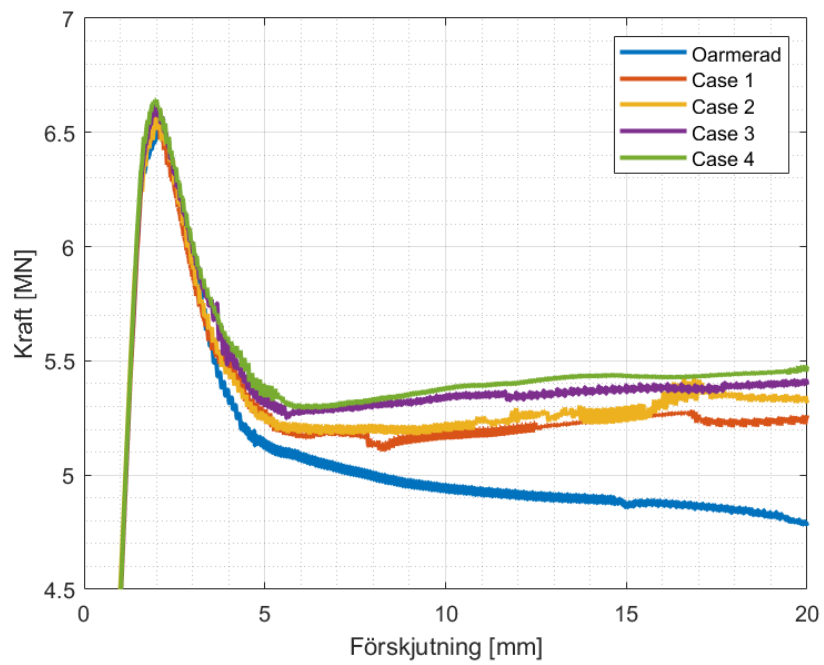
Case	Armeringsmängd
Case 1	4 stänger
Case 2	8 stänger
Case 3	20 stänger
Case 4	40 stänger

Armerad med fullständig samverkan

Den kraft och förskjutning som erhöles i en referenspunkt placerad mitt på tryckytan på Modell 2 i armerat tillstånd med fullständig samverkan framgår av figur 5.25. Brottet verifierades som ett dragbrott och uppsprickningen i Modell 2 vid respektive Case presenteras i figur 5.26.

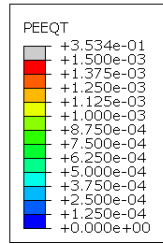


(a) Initialt.

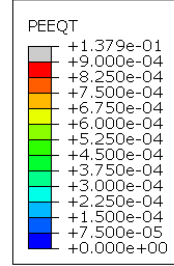


(b) Över stora deformationer.

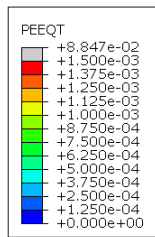
Figur 5.25: Kraft och förskjutning vid simuleringar med olika armeringsmängd.



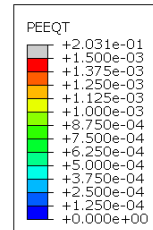
(a) Case 1: 4 armeringsstänger.



(b) Case 2: 8 armeringsstänger.



(c) Case 3: 20 Armeringsstänger.

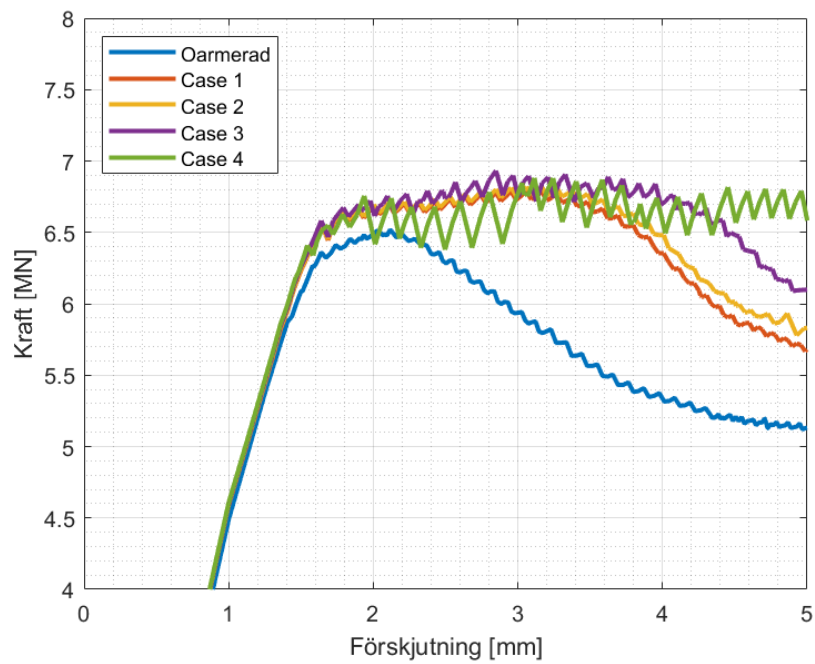


(d) Case 4: 40 armeringsstänger.

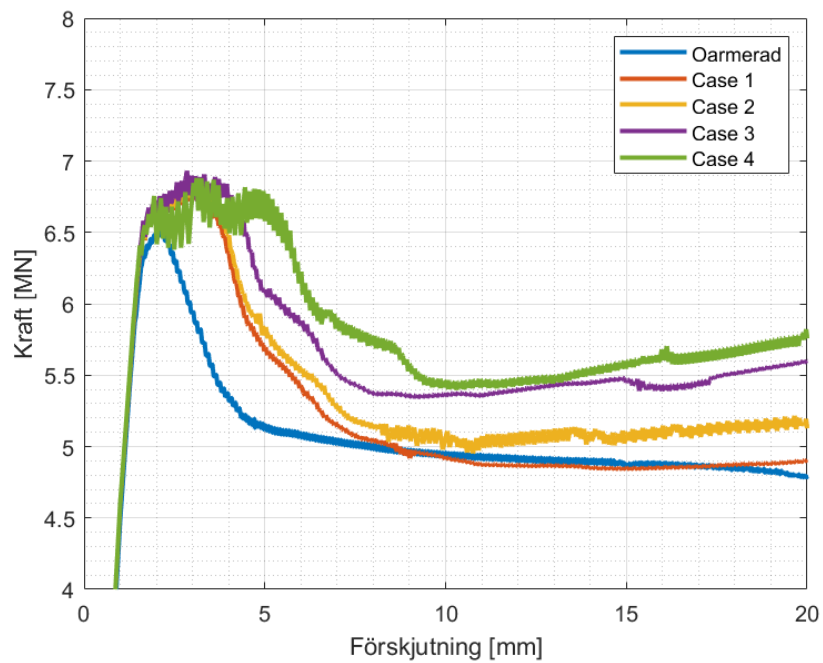
Figur 5.26: Uppsprickning för respektive Case vid fullständig samverkan mellan betong och armering.

Vidhäftningsglidning mellan betong och armering med fjädrar

Den kraft och förskjutning som erhöles i en referenspunkt placerad mitt på tryckytan på Modell 2 i armerat tillstånd med tillåten vidhäftningsglidning mellan armering och betong med fjädrar framgår av figur 5.27. Brottet verifierades som ett dragbrott och uppsprickningen i Modell 2 vid respektive Case presenteras i figur 5.28.

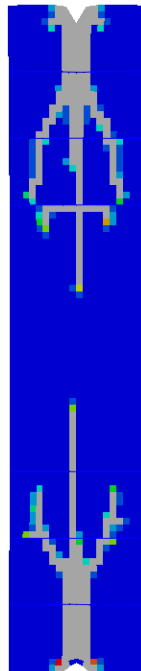
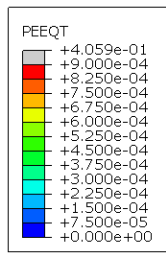


(a) Initialt.

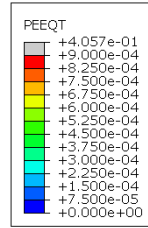


(b) Över stora deformationer.

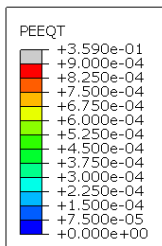
Figur 5.27: Kraft och förskjutning vid simuleringar med olika armeringsmängd.



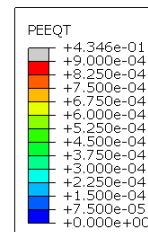
(a) Case 1: 4 armeringsstänger.



(b) Case 2: 8 armeringsstänger.



(c) Case 3: 20 Armeringsstänger.



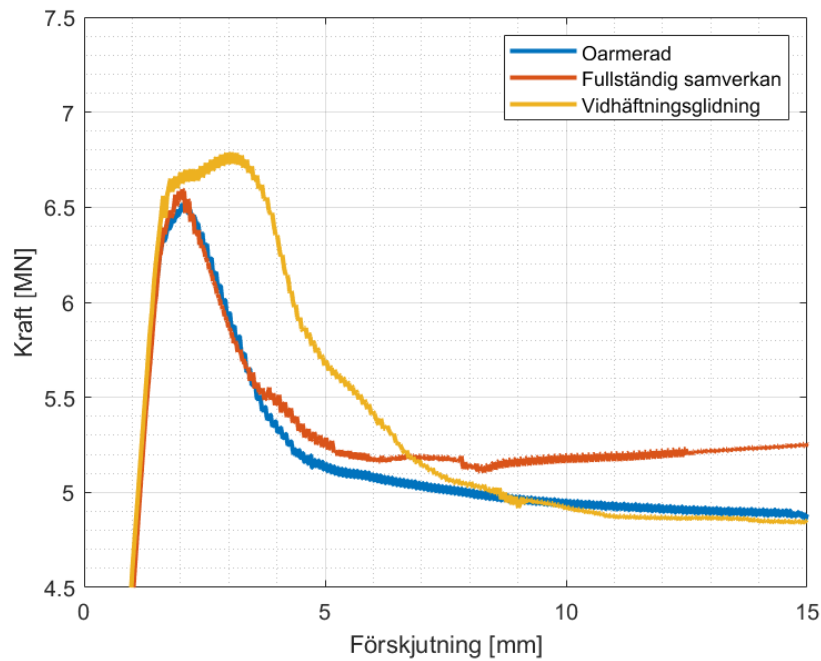
(d) Case 4: 40 armeringsstänger.

Figur 5.28: Uppsprickning för respektive Case med tillåten vidhäftningsglidning mellan armering och betong.

5.5.4 Jämförelse

Case 1

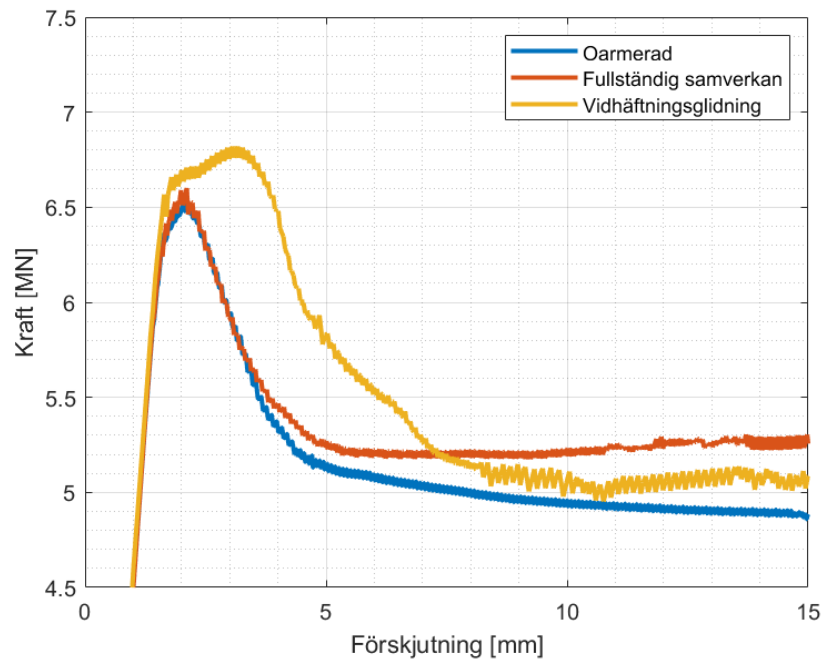
Den kraft och förskjutning som erhöles i referenspunkten i Modell 2 Case 1 armerat med fyra armeringsstänger erhålls ur 5.29.



Figur 5.29: Kraft och förskjutning i Modell 2 Case 1.

Case 2

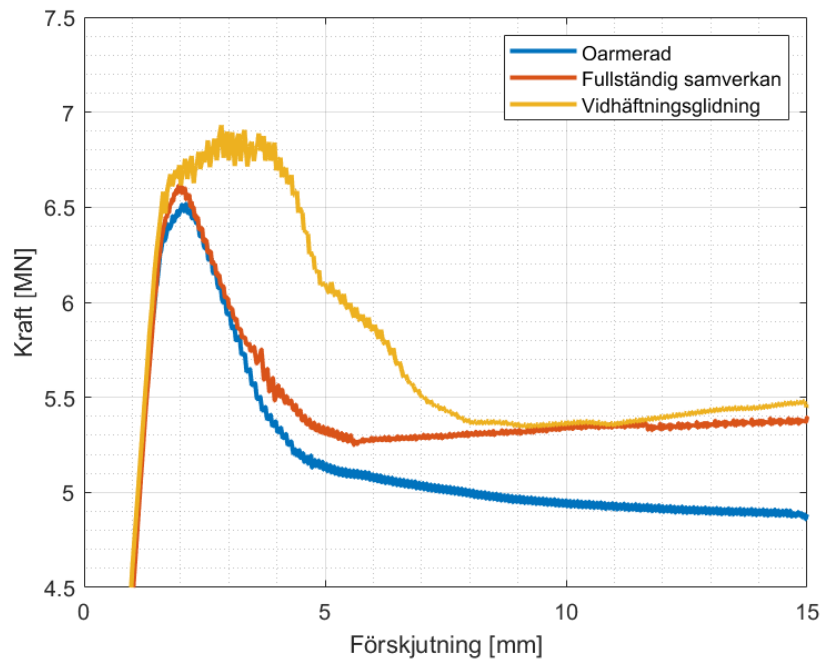
Den kraft och förskjutning som erhöles i referenspunkten i Modell 2 Case 2 armerat med åtta armeringsstänger erhålls ur 5.30.



Figur 5.30: Kraft och förskjutning i Modell 2 Case 2.

Case 3

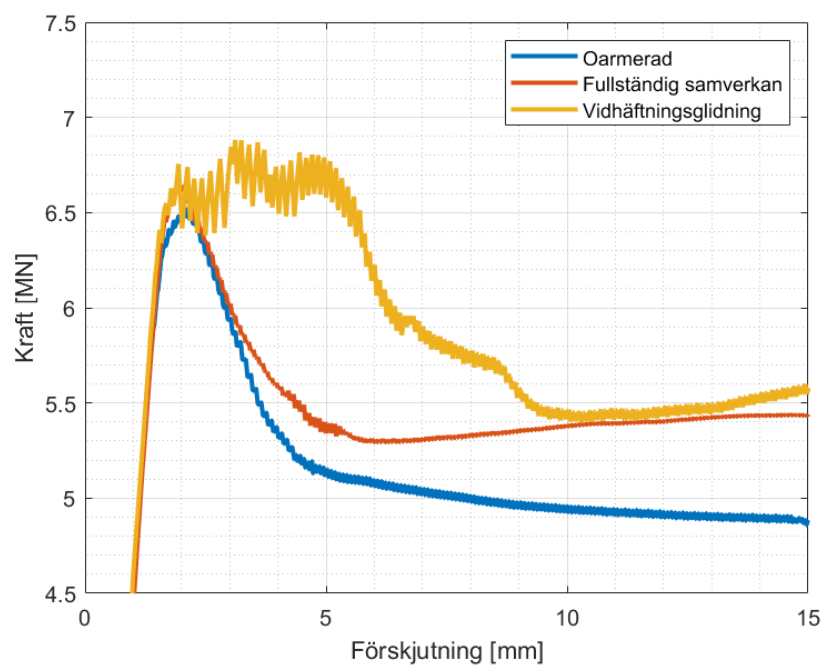
Den kraft och förskjutning som erhöles i referenspunkten i Modell 2 Case 3 armerat med åtta armeringsstänger erhålls ur 5.31.



Figur 5.31: Kraft och försjutning i Modell 2 Case 3.

Case 4

Den kraft och försjutning som erhöles i referenspunkten i Modell 2 Case 4 armerat med åtta armeringsstänger erhålls ur 5.32.



Figur 5.32: Kraft och försjutning i Modell 2 Case 4.

6 Diskussion

6.1 Spjälkning i oarmerade provkroppar

Att simulera dragbrott i allmänhet och spjälkning i synnerhet är förknippat med betydande komplexitet. Eftersom CDP-modellen modellerades med hög detaljnivå fångade den även andra brottmoder, såsom krossnings- och förankringsbrott. Detta medförde svårigheter att verifiera att det dimensionerande brottet var ett dragbrott. För att hantera osäkerheten kontrollerades det att de spänningar som uppstod i området där sprickbildning initierades var dragspänningar.

Ett flertal åtgärder undersöktes i simuleringarna i syfte att begränsa brottmoden till dragbrott. För att motverka det krossbrott som uppstod som en följd av kopplingsvillkorens kraftapplikation genomfördes försök där ett styvt så kallat “dummy-material” placerades ovanpå betongen. Vidare modellerades styva ändplåtar på armeringens ändar i den höga balken för att reducera risken för förankringsbrott. Ingen av dessa modelleringsstrategier visade sig dock effektiv i att begränsa brottet till enbart drag- eller böjbrott, varför de exkluderades från de slutgiltiga simuleringarna.

En ytterligare utmaning vid simulering av sprickbildning med FEM var att sprickor representerades genom en så kallad utsmetning över elementen. Detta hanterades genom att införa en approximativ skalfaktor för visualisering av spricktöjning i Brigade/Plus. Skalfaktorn var beroende av meshstorleken, vilket beskrivs i kapitel 3.6.2. Denna faktor blev även avgörande för valet av iterationer vid presentationen av sprickbildningen i rapporten. Val av grövre respektive finare mesh kunde således ha påverkat både initiering och visualisering av sprickor, dock inte var sprickorna uppstod.

6.2 Modelleringsval

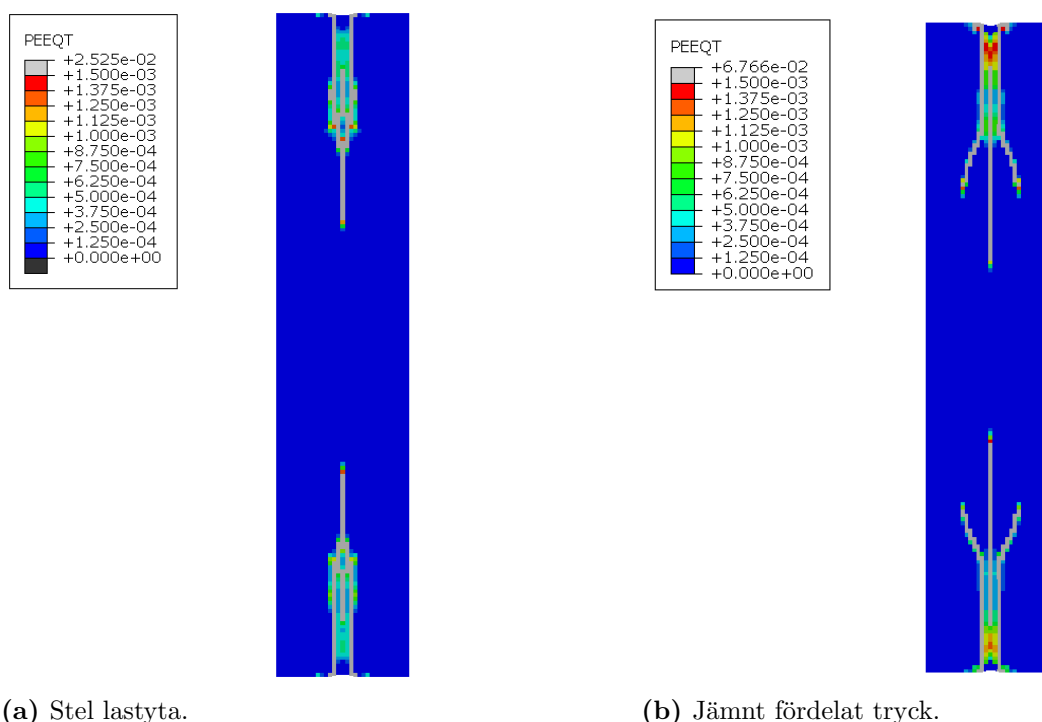
6.2.1 Propagering av spjälksprickor

Analyserna visade att tryckytans bredd hade stor inverkan på spjälksprickans uppkomst. Då tryckytan modellerades som bredare triggades istället ett krossbrott. Ju smalare tryckzon, desto tydligare uppträdde en vertikal spjälkspricka. Detta stöds även av Svenska Betongföreningens uppfattning om lastpåföringens inverkan på brottstypen i enaxiella cylindertester. Det kunde dock konstateras att det var komplicerat att trigga en vertikal spricka som inte initierades från krosszonen. Krossbrottet kom i sin tur från kopplingsvillkoren, som kan liknas vid en styv platta.

Vid deformationsstyrd lastpåföring användes kopplingsvillkor som medförde stel lastyta respektive jämnt fördelat tryck. Medan kraftstyrd kraftpåföring påför last upp till ett begränsat angivet värde är kopplingsvillkor begränsade av deformation. Deforma-

tionsstyrningen resulterade i ett stabilare mjuknande beteende i materialet, vilket var viktigt då majoriteten av uppsprickningen skedde när betongen mjuknade. Kopplingsvillkor medförde även att de icke-linjära analyserna konvergerade enklare. Dessutom gav kopplingsvillkoren upphov till den av fackverksmodellen föreskrivna symmetrin mellan tryckzon och upplag, då de applicerades i båda ändar.

Vidare visade analyserna att valet av kopplingsvillkor hade inverkan på spjälksprickornas uppkomst och spridning. Tydligast framgick detta i Modell 2, där jämnt fördelad koppling gav det mest gynnsamma resultatet eftersom det inte enbart resulterade i en vertikal spricka, utan även i sprickförgreningar, se figur 6.1. Detta var förväntat då trycksträvorna i en fackverksmodell kan liknas vid interna, mindre fackverksmodeller, där dragspänningar ger upphov till spjälksprickor. Vid analys med kopplingsvillkoret stel lastyta koncentrerades sprickan till en smal zon, vilket medförde att de dragspänningar som uppstod mot strukturens kanter negligerades.



Figur 6.1: Spjälkning i oarmerad Modell 2 med olika kopplingsvillkor.

Vidare var den jämnt fördelade lastytan mer realistisk ur ett teoretiskt perspektiv, eftersom alla noder i tryckytan tilläts deformeras relativt varandra. Den kinematiska kopplingen tvingade däremot samtliga noder att deformeras gemensamt, vilket kan liknas vid en styv platta och således resulterade i ett mer framträdande krossbrott vid tryckzonens kanter.

Analysen undersökte även modellering med flera upplag, vilket hade en positiv inverkan på propageringen av spjälksprickor. För att spjälksprickor skulle uppstå krävdes dock att en tryckzon per upplag ansattes, eftersom modelleringen annars resulterade i kross- eller böjebrott. Beroende på det horisontella avståndet mellan tryckzon och upplag uppstod antingen flera parallella spjälkzoner, vilka motsvarade de resultat som erhöles i Modell 1 och Modell 2, eller en enskild spjälkzon som inte kunde åtgärdas med armering enligt en etablerad fackverksmodell.

6.2.2 Modellering av vidhäftningsglidning mellan armering och betong med fjädrar

Simuleringarna med vidhäftningsglidning mellan betongen och armeringen visade att fjädrarnas styvhet hade stor inverkan på resultaten. Initiala försök med mjukare fjädrar, där styvheten fördelades över längden på respektive element i betongen och armeringen, resulterade i orealistiskt låga dragspänningar i armeringen i den höga balken. En möjlig förklaring till de låga dragspänningarna är den stora relativa glidning som uppstod mellan armering och betong när fjädrarna var för mjuka. Detta medförde att betongen och armeringen deformerades olika, och den begränsade samverkan mellan materialen inte möjliggjorde fullständig kraftöverföring.

Vidare visade simuleringarna att armeringens förankring hade stor inverkan på resultaten. Förankringen modellerades genom att ge fjädrarna längst ut i vardera änden av armeringsjärnen mycket hög styvhet, vilket förankrade armeringen i betongen. Genom att omöjliggöra glidning mellan betong och armering i ändfjädrarna kunde de två materialen deformerats tillsammans. Det genomfördes dock inga försök med varierande förankringslängder, förankringsstyvheter eller alternativa förankringsmetoder, bortsett från ändplatår som nämns ovan.

Eftersom fjäderelementen opererade genom att binda samman noderna i stålet med de närmast belägna noderna i betongen, behövde materialens meshstorlek vara densamma.

6.3 Jämförelse med BBK04

De numeriska analyserna indikerade att betongen hade en högre kapacitet att motstå spjälkbrott än vad BBK04 anger. I de flesta sammanhang tillgodoses dock endast en begränsad del av denna kapacitet. I BBK04 begränsas spjälkningsberäkningarna till betongens dimensionerande värden för tryck- och draghållfasthet, f_{cd} och f_{ctd} . Detta förutsätter att betongen har en avsevärt lägre kapacitet jämfört med beräkningar baserade på betongens karakteristiska eller medelvärden. Skillnaden tydliggörs i Tabell 6.1, där den enligt BBK04 föreskrivna tryckkraften vid förväntad spjälkning presenteras för Fall 1 och Fall 2 i Modell 1, beräknad med dimensionerande, karakteristiska respektive medelvärden för hållfastheten.

Tabell 6.1: Tryckkraft i Modell 1 enligt BBK04 beräknat med dimensionerande-, karakteristisk- och medelhållfasthet för betong av klass C35/45.

	f_{ctd}	f_{ctk}	f_{ctm}
Fall 1 [MN]	4,41	6,6	9,6
	f_{cd}	$f_{ck,0,05}$	f_{cm}
Fall 2 [MN]	2,33	3,5	4,3

Med utgångspunkt i Eurokod och fibs riktlinjer valdes medelvärdet vid modelleringen. Detta kan å ena sidan motiveras av att det ger en mer representativ bild av en

genomsnittlig provkropp, men å andra sidan är det inte direkt användbart för dimensionering där säkerhetsmarginaler krävs. Samtidigt visade resultaten att BBK04 ligger på en tydligt konservativ nivå. I både Fall 1 och Fall 2, för såväl Modell 1 som Modell 2, överskreds riktlinjerna med god marginal i analyserna. Även efter att spjälksprickor uppstod kunde betongen enligt modellerna bära betydligt högre last, vilket tydde på en kvarvarande kapacitet som inte beaktas vid dimensionering.

Gällande betongens draghållfasthet så förutsätter BBK04 att den beräknas elasticitetsteoriteriskt och i osprucket tillstånd. Analyserna tyder dock på att spjälksprickor initialt uppstod långt efter att flytgränsen uppnåtts, och att de härstammade ur krossprickor. BBK04:s metod verkar vara konservativ eller mindre representativ för just dessa modeller, eftersom den förutsätter ett tidigare dragbrott än vad analyserna faktiskt visade. Eftersom studien bygger på numeriska analyser behöver dock resultaten verifieras mot experimentella försök för att säkerställa att de stämmer överrens med betongens verkliga beteende.

6.4 Inverkan av armering

6.4.1 Hög balk

Simuleringar av den höga balken, armerad och med vidhäftningsglidning mellan betongen och armeringen, visade att CDP-modellen gav realistiska resultat. Pålastningen gav upphov till tydliga böjsprickor, vilka i sin tur begränsades av armeringen, vilket var förväntat. Skillnaden mellan den dragkraft i armeringen som beräknades med hjälp av en etablerad fackverksmodell och den dragkraft som uppstod i simuleringarna översteg knappt en procent. Denna felmarginal bedömdes vara godtagbar, och modellen ansågs därmed tillförlitlig för fortsatta analyser.

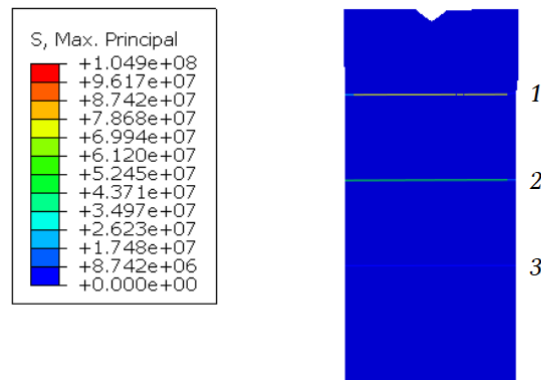
Den dragspänning som uppmättes längs armeringen i den höga balken, se figur 5.4, visade på ett verklighetstroget kraftspel mellan armering och betong. Spänningen i armeringen byggdes successivt upp och nådde sitt maximala värde vid den punkt där den mittersta böjsprickan uppträdde. Dessutom kunde två ”platåer” i dragspänningen identifieras vid de punkter där de två mindre framträdande sprickorna uppstod, se figur 5.3.

6.4.2 Bärförmåga

Med bärförmåga åsyftas i följande avsnitt den kapacitet provkroppen har att motstå den tryckkraft som appliceras från kopplingsvillkoret i en referenspunkt placerad mitt på tryckytan. Maximal bärförmåga avser den högsta uppmätta kraften i punkten.

Simuleringar i Modell 1 och Modell 2 tyder på att fullständig samverkan mellan betong och armering resulterade i ett realistiskt kraftspel, där armeringen inte hade någon inverkan på bärförmågan hos betongen initialt. Det var först när mycket stora deformationer redan skett som armeringen blev verksam, se figur 5.12 och 5.25. Vid den tidpunkten hade spjälksprickor redan uppstått.

En potentiell förklaring till den låga ökningen av bärförmågan vid fullständig samverkan var att den armeringen deformerades gradvis beroende på dess placering i betongen, se figur 6.2. Armeringslager 1 beläget närmast tryckzonen uppmätte höga dragspänningar, medan armeringslager 3, beläget längst ifrån tryckzonen knappt uppmätte några dragspänningar alls. Det var först när armeringslager 1 uppnått stora deformationer som armeringslager 2 fick betydande inverkan på bärförmågan, varvid stora plastiska deformationer i betongen redan skett. I analyserna med vidhäftningsglidning var alla armeringslager aktiva i att hantera dragspänningar.



Figur 6.2: Dragspänningar i olika armeringslager i Modell 1 Case 1.

När armeringen väl blev verksam i analyserna med fullständig samverkan hade mängden armering en försumbar inverkan på bärförmågan. I Modell 1 resulterade en ökad armeringsmängd snarare i att betongen fick ett mer duktilt beteende. I Modell 2 var skillnaden mellan strukturen i oarmerat tillstånd och med armering med fullständig samverkan nästintill obefintlig. Även detta kunde förklaras av att armeringsjärnen plasticerade ett i taget.

Analyserna med armering med vidhäftningsglidning resulterade i ett mer realistiskt kraftspel, där armeringen blev verksam i att bibehålla provkropparnas bärförmåga redan vid små deformationer. Analyserna i Modell 1 och Modell 2 med vidhäftningsglidning visade att mängden armering hade godtycklig påverkan på den maximala bärförmågan. Istället gjorde armeringen att betongen fick ett mer duktilt beteende. Ju mer armering som lades in, desto segare blev betongen.

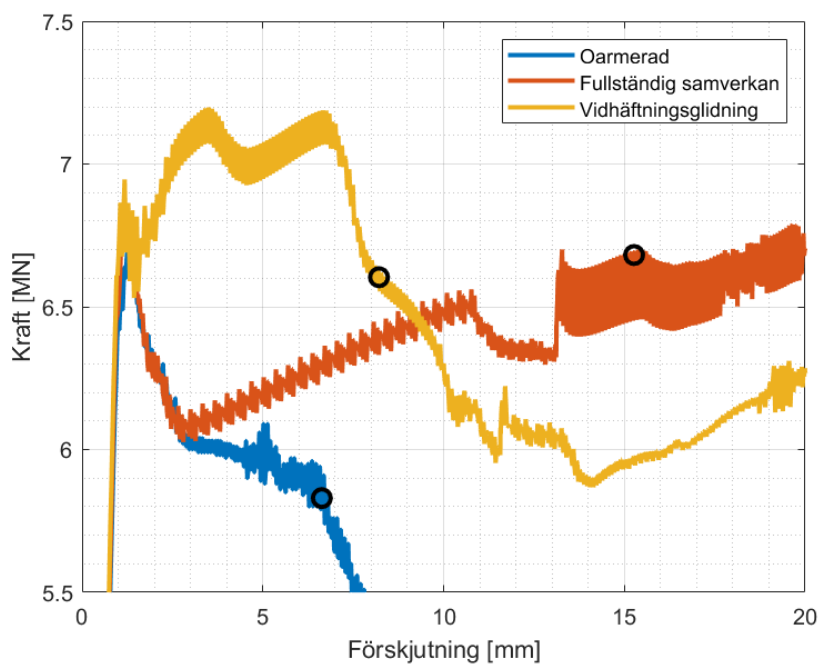
6.4.3 Uppkomsten av spjälksprickor

Analysen med fullständig samverkan indikerade att spjälkarmering var verksam för att förebygga uppkomsten av spjälksprickor, se figur 5.13 och 5.26. Däremot resulterade en ökad armeringsmängd i att sprickorna, istället för en vertikal uppsprickning, spreds ut horisontellt längs med armeringen. Det är rimligt att anta att den fullständiga samverkan mellan armering och betong gav upphov till höga skjuvkrafter i gränssnittet mellan de två materialen. Dessa skjuvkrafter kan i sin tur leda till att sprickorna ändrar riktning.

Vid simuleringar med tillåten vidhäftningsglidning var sprickmönstret snarlikt det sprickmönster som framträdde i de oarmerade analyserna. Till skillnad från armeringen

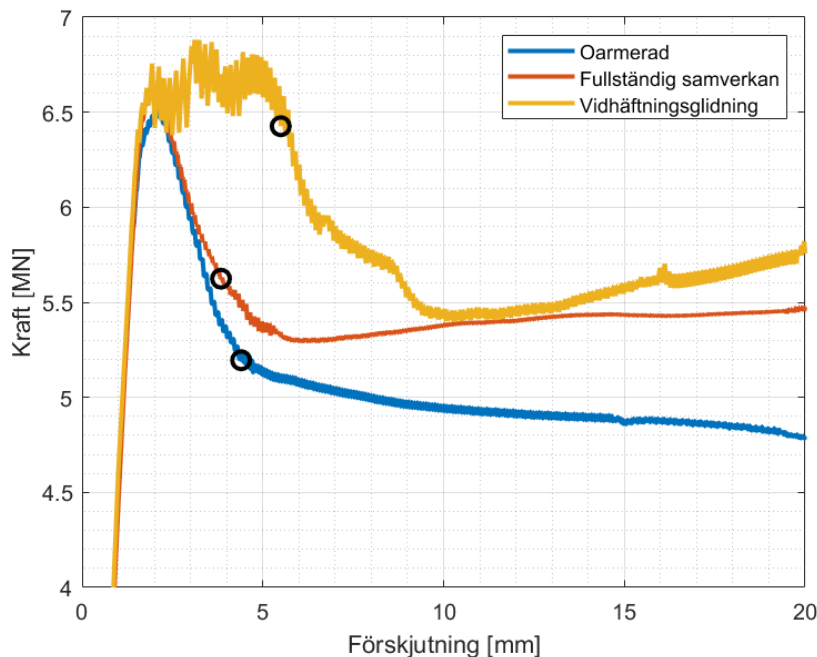
med fullständig samverkan hade armeringen med tillåten vidhäftningsglidning ingen inverkan på sprickmönstret. Armeringen med tillåten vidhäftningsglidning hade större inverkan på uppsprickningen i Modell 2 än i Modell 1. Detta berodde förmodligen på kortare avstånd till armeringens förankring, vilket resulterade i en styvare samverkan mellan betong och armering.

I figur 6.3 markeras kraftspelet i den punkt där initial uppsprickning av spjälksprickor skedde i Case 4 för Modell 1. I både det oarmerade fallet och med vidhäftningsglidning hade den maximala bärförmågan redan överstigits, och betongen hade ett mjuknande beteende när spjälksprickor uppstod. Det tyder på att spjälksprickorna inte hade någon påverkan på bärförmågan innan stora deformationer redan skett. Detta kan förklaras av att krossbrottet förmodligen hade störst inverkan på bärförmågan i Modell 1. Vad gäller armering med fullständig samverkan ökade bärförmågan efter att spjälksprickor uppstått, vilket tyder på att armering med fullständig samverkan inte återgav ett realistiskt kraftspel.



Figur 6.3: Initial uppsprickning av spjälksprickor i Case 4.

I figur 6.4 markeras kraftspelet i den punkt där initial uppsprickning sker i Case 4 för Modell 2. I Modell 2 skedde uppsprickningen av spjälksprickor i analysen med tillåten vidhäftningsglidning i samband med att betongens bärförmåga sjönk. Detta tyder på att spjälkbrottet var dimensionerande. Efter att spjälksprickorna uppstod sjönk bärförmågan drastiskt. Med fullständig samverkan armering skedde uppsprickningen av spjälksprickor vid lägre deformationer än i det oarmerade provet. Detta kan vara ett resultat av de höga skjuvkrafterna som uppstod i gränssnittet mellan armering och betong vid full samverkan.



Figur 6.4: Initial uppsprickning av spjälksprickor i Case 4.

6.4.4 Spänningsfördelning mellan betong och armering

Analyserna med fullständig samverkan i Modell 1 tyder på en delvis realistisk spänningsfördelning i armeringen. Armeringen bar dragspänningar på de platser där betongen sprack. I samma element föll dragspänningen i betongen. Däremot fanns det element längs armeringens längd där både armeringen och betongen bar dragspänningar, och drag-spänningarna var anmärkningsvärt låga, vilket tyder på att kraftspelet inte var helt verklighetstroget.

Stålet belastades enbart av dragspänningar i ett fåtal centrala element, vilka inte överensstämde med de element där betongen spruckit. Dragspänningsfältet i de oarmerade analyserna indikerade att dragspänningar bör uppstå i fler noder längs stålet.

Analyserna med vidhäftningsglidning i Modell 1 gav mer verklighetstroga resultat, där stålet bar dragspänningar längs hela sin längd. Även de perifera dragspänningarna nära betongens kant, som kunde urskiljas i analysen av spänningsfältet i de oarmerade proverna, togs upp av stålet. Vidare framgick av analyserna att en ökning av dragspänningen i betongen sammanföll med en minskning av dragspänningen i stålet, vilket överensstämde med det observerade sprickmönstret, och tydde på att materialet samverkade. I det fall när full uppsprickning rådde tog stålet alla dragspänningar i de punkter där betongen spruckit. De yttre dragspänningarna kunde förklaras av de styva ändförankringarna.

I Modell 2 gav armering med fullständig samverkan, och armering med vidhäftningsglidning likartade resultat avseende dragspänningsfördelningen mellan betong och armering. Dragspänningarna bars huvudsakligen av stålets centrala del. En möjlig förklaring till detta är att armeringens längd var otillräcklig för att högre dragspänningar skulle hinna utvecklas. Dragspänningarna var högre i armeringen med vidhäftningsglid-

ning, vilket kan förklaras av den styva ändförankringen, som även gav utslag i stålets ändar.

6.4.5 Fackverksmodeller

Generellt verkade den av fackverksmodellerna föreskrivna armeringens förmåga att öka betongens kapacitet vara mer påtaglig i Modell 1 än i Modell 2. Detta gällde både vid fullständig samverkan och vidhäftningsglidning. En anledning kan vara armeringens placering i betongen, där Modell 1 har fler armeringslager per höjdmeter. Detta indikerade att Eurokods fackverksmodell i fallet med full diskontinuitet var mer relevant än fackverksmodellen för partionell diskontinuitet, för att höja bärförmågan vid spjälkning.

Eftersom fackverksmodeller inte är statiskt bestämda kan de varieras i princip obegränsat. De modeller som hämtas från Eurokod utgör därför endast exempel och kan i praktiken anpassas ytterligare för att bättre förebygga spjälksprickor. Som tidigare nämnts kan dragspänningar även uppstå till följd av tryck i trycksträvorna, vilket innebär att varje trycksträva i teorin kan betraktas som uppdelad i mindre interna fackverk. Detta gör det svårt att fastställa i vilken utsträckning armering bör dimensioneras eller betraktas som tillräcklig.

7 Slutsats och fortsatta studier

7.1 Slutsats

Detta kapitel syftar till att besvara följande frågeställningar, som etablerades i rapportens avsnitt 1.2:

- Går det att modellera spjälkning i oarmerad betong med hjälp av icke-linjära modeller i Brigade/Plus?
- Om det går att modellera spjälkning med hjälp av icke-linjära modeller i Brigade/Plus, vilka modelleringsval har inverkan på uppkomsten av spjälksprickor?
- Hur väl överensstämmer numeriska analysresultat med de riktlinjer som återfinns i BBK04?
- Hur påverkas bärförmågan i betongen vid numerisk modellering om spjälkarmering läggs in?
- Hur påverkar modelleringen av kopplingen mellan armering och betong spjälkbeteendet i numeriska analyser?

Det var mycket komplicerat att modellera spjälkning med hjälp av icke-linjära CDP-modeller i Brigade/Plus. Komplexiteten låg framförallt i att fastställa att det brott som uppstod var just ett dragbrott, och att brottet var dimensionerande för strukturen. Analysen försvårades även eftersom sprickorna smetades ut över elementen.

De modelleringsval som hade störst inverkan på uppkomsten av spjälksprickor i betongen var upplagens och tryckytans bredd, val av kopplingsvillkor, där en smal tryck- och upplagsyta och lastpåföring med en jämnt fördelad tryckyta var mest gynnsamma. Även modellering av vidhäftning hade stor påverkan på propageringen av spjälksprickor.

Analyserna indikerade att de av BBK04 föreskrivna riktlinjerna gällande när spjälkning förväntades uppstå är konservativa. Analyserna visade att spjälkning uppstod efter att betongen hade uppnått sin flytgräns och krossprickor hade uppkommit.

Vid armering med koppling med fjäderelement blev betongen mer duktil när den av Eurokods fackverksmodellers föreskrivna armering lades in. Duktiliteten ökade med ökad armeringsmängd. Armeringen med full samverkan mellan betong och armering blev först verksam efter att stora deformationer redan skett. Spjälksprickor uppstod i alla armerade analyser efter att den maximala bärförmågan uppnåts.

Valet av koppling mellan betong och armering hade betydande påverkan på bärförmågan och uppkomsten av spjälksprickor. Armering med koppling med fjäderelement

påvisade ett mer realistiskt beteende med avseende på sprickmönster och dragspänningsfördelning mellan armering och betong. Trots att dragspänningen i armeringen verifierades mot en etablerad fackverksmodell i en hög balk finns fortsatt osäkerhet kring fjädrarnas styvhet.

7.2 Fortsatta studier

För att verifiera de numeriska analyserna behöver experimentella försök genomföras, både i armerat och i oarmerat tillstånd, där modellerna testas och jämförs med resultatet i FE-analyserna.

Gällande BBK04s föreskrifter rörande spjälkning behövs ytterligare studier, både numeriska och experimentella, innan de kan försummas som konservativa. Framförallt bör bakomliggande studier till BBK04s normer studeras och jämföras med erhållna analysresultat.

Uppbyggnad av den parametriska CDP-modellen med beräkningsprogrammering har varit avgörande för att möjliggöra antalet genomförda simuleringar. Fortsatt användning och utveckling av koden rekommenderas. Framtida studier kan inkludera simuleringar med fler upplag och ytterligare variation i geometri. Vidare förbättring av koden kan vara att implementera en funktion som beräknar betongens beteende i drag och tryck som input till CDP-modellen från av användaren angivna värden.

För att utveckla metoden med vidhäftningsglidning mellan betong och armering kan inverkan av förankringslängd, förankringsstyvhet och typ av förankring undersökas. Vidare behöver fler analyser med varierad fjäderstyvhet genomföras för att kunna fastställa en styvhet som medför helt realistiska resultat.

Litteratur

- Betongföreningen, Svenska (2010). *Svenska betongföreningens guide till ek2, Volym I*. Tekn. rapport. Svenska Betongföreningen.
- Björnström, Jonas, Tomas Ekström och Manouchehr Hassanzadeh (2006). ‘Dammsäkerhet: spruckna betongdammar: översikt och beräkningsmetoder’. I: *Elforsk rapport* 06:29.
- Boverket (2004). *Boverkets handbok om betongkonstruktioner, BBK04*. Boverket.
- CEN, European Committee for Standardization (2005). *Eurokod 2: Dimensionering av betongkonstruktioner*. Svenska Institutet för Standarder.
- Dassault Systèmes (2006). *Abaqus Analysis User’s Manual*. Tillgänglig online.
- Engström, Björn (2011). *Design and analysis of deep beams, plates and other discontinuity region*. Tekn. rapport. Division of Structural Engineering, Concrete Structures, CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY.
- Fédération Internationale du Béton (2010a). *fib Model Code*. International Federation for Structural Concrete.
- (2010b). *fib Model Code for Concrete Structures 2010*. International Federation for Structural Concrete.
- Grassl, Peter, Karin Lundgren och Kent Gylltoft (2002). ‘Concrete in compression: A plasticity theory with a novel hardening law’. I: *International Journal of Solids and Structures* 39:20.
- Insitutionen för Hållfasthetslära (2018). *Handbok och formelsamling i Hållfasthetslära*. KTH.
- Isaksson, Tord och Annika Mårtensson (2020). *Byggkonstruktion, Regel- och formelsamling*. Studentlitteratur AB Lund.
- Isaksson, Tord, Annika Mårtensson och Sven Thelandersson (2017). *Byggkonstruktion*. Studentlitteratur.
- Kempengren, Kent (2023). ‘Design and verification of discontinuity regions in reinforced concrete structures with the strut and tie method’. Diss. LTH.
- Malm, Richard (2006). ‘Shear cracks in concrete structures subjected to in-plane stresses’. Diss. KTH.
- Massachusetts Institute of Technology (2017). *Embedded Elements*. Tillgänglig online.
- Mathern, Alexandre och Jincheng Yang (2021). *A Practical Finite Element Modeling Strategy to Capture Cracking and Crushing Behavior of Reinforced Concrete Structures*. Tekn. rapport. Division of Structural Engineering, Concrete Structures, CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY.
- Mavrodontis, Nikolaos (2026). *Kinematic vs Distributed Coupling Constraints in Abaqus*. Tillgänglig online.
- Olofsson, Hugo och William Olsson (2023). ‘Modellering av Vindkraftsfundament’. Examensarb. Lunds Tekniska Högskola.
- Ottosen, Niels och Hans Petersson (1992). *Introduction to the Finite Element Method*. Pearson Education.
- Plos, Mario (2000). *Finite element analyses of reinforced concrete structures*. Chalmers University of Technology.

- Radhakrishnan, Vikram (2026). *Stabilization strategies for nonlinear static Abaqus models*. Tillgänglig online.
- Saabye Ottosen, Niels och Matti Ristinmaa (2005). *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier Science Ltd.
- Svenska Betongföreningen (2010). *Svenska betongföreningens guide till ek2, Volym II*. Tekn. rapport. Svenska Betongföreningen.
- (2017). *Betonghandbok Material Del 1*. Svensk Byggtjänst.
- Svenska betongföreningen (2021). *Betonghandbok Material Del 2*. Svensk Byggtjänst.
- Système, Dassault (2015). *ABAQUS Theory Manual*. Tillgänglig online.
- WSP (2026). *Bärande konstruktioner med EPS - Beräkningsprinciper*. Tillgänglig online.

Bilaga A

Beräkningar

A.1 Gränsvärde för sprickvidd

Gränsvärdet som används för sprickornas deformation i Brigade Plus beräknas för den initiala sprickvidden hämtad från tabell 5.5, samt en elementstorlek på 0.03 m.

$$\varepsilon_{spricka} = \frac{4,5 \cdot 10^{-5}}{0,03} = 0,0015$$

I de fall armeringen modellerades med fjädrande upplag användes en annan meshstorlek på 0,05 m.

$$\varepsilon_{spricka} = \frac{4,5 \cdot 10^{-5}}{0,05} = 0,0009$$

A.2 Beräkning av fjäderstyvhet

Fjäderstyvheten i vidhäftningen mellan armering och betong beräknas enligt rapportens avsnitt 3.6.4 för en rad med fyra armeringsstänger in i planet.

$$\begin{aligned} f_{cm} &= 35 + 8 = 43 MPa \\ \tau_{bmax} &= 2,5\sqrt{43} = 16,4 MPa \\ k &= \frac{4 \cdot 16,4 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 0,03}{1 \cdot 10^{-3}} = 123,7 MN/m \end{aligned}$$

Bilaga B

Pythonkod

B.1 Main

```
from abaqus import mdb
from abaqusConstants import *
from abaqus import session
import model_builder as m
import imp

class ConcreteParams:
    def __init__(self):
        """ Assign Concrete dimensions and parameters """

        # --- Geometry ---
        self.width = 6.0 # m
        self.height = 2.0 # m
        self.thickness = 1.0 # m

        # --- Material Parameters ---
        self.rho = 2400 # kg/m3
        self.E = 34e9 # Pa
        self.nu = 0.2 # Poisson's ratio
        self.f_ck = 35e6 # Pa

        # --- Mesh size ---
        self.elem_size = 0.05 # m

class SteelParams:
    def __init__(self):
        """ Assign Reinforcement location and parameters """

        # --- Define if and how reinforcement is implemented ---
        self.include_reinforcement = True # True or False
        self.num_rebars = 4 # number of rebars in plane
        self.interaction = 'SPRINGS' # SPRINGS or EMBEDDED

        # --- Rebar Coordinates and Dimensions ---
        self.coord = [ # (x1, y1, x2, y2),
            ]
```

```

# --- Geometry ---
self.diameter = 20e-3 # m

# --- Material Parameters ---
self.rho = 8000 # kg/m3
self.E = 200e9 # Pa
self.nu = 0.3 # Poisson's ratio
self.f_yk = 500e6 # Pa

# --- Mesh size ---
self.elem_size = 0.05 # m

class LoadParams:
    def __init__(self):
        """ Define Constraint """

        # --- Define load case ---
        self.load_case = 2 # 1 = splitting, 2 = bending

        # --- Constraint control ---
        self.coupling_type = DISTRIBUTING # DISTRIBUTING or KINEMATIC
        self.displacement = -0.2 # m Allowed displacement

        # --- Constraint distribution width ---
        self.load_distribution = [
            ,
        ]

        # --- x-coordinates for load Constraints ---
        self.load_points = [
            ,
        ]

        # --- x-coordinates for support Constraints ---
        self.support_points = [
            ,
        ]

        # --- Support distribution width ---
        self.support_distributions = [
            ,
        ]

class ModelParams:
    def __init__(self):
        self.concrete = ConcreteParams()
        self.steel = SteelParams()
        self.load = LoadParams()

```

```

def main():
    """ Initialize new Abaqus model database and clean previous model """
    Mdb()
    model = mdb.models['Model-1']

    for part_name in ['Concrete', 'Steel']:
        if part_name in model.parts:
            del model.parts[part_name]

    for inst_name in ['ConcreteInstance', 'SteelInstance']:
        if inst_name in model.rootAssembly.instances:
            model.rootAssembly.InstanceFromBooleanMerge.clear()
            del model.rootAssembly.instances[inst_name]

    params = ModelParams()

    # --- Parts ---
    concrete_part = m.part_concrete(model, params.concrete, params.load)
    steel_part = m.part_steel(model, params.steel)

    # --- Materials & Sections ---
    concrete_part, concrete_faces = \
        m.property_concrete(model, concrete_part, params.concrete)

    steel_part = \
        m.property_steel(model, steel_part, params.steel)

    # --- Assembly ---
    assem, concrete_instance, steel_instance = \
        m.assembly(model, steel_part, concrete_part)

    # --- Step ---
    m.step(model)

    # --- Create concrete edges and load surface ---
    bottom_surfaces, valid_indices, load_surfaces = \
        m.edges(assem, concrete_instance, params.concrete, params.load)

    # --- Create Reference Points ---
    rp_top_regions, rp_bottom_regions =
    m.refpt(assem, params.load, params.concrete, valid_indices)

    # --- Create Coupling Constraints ---
    m.coupling(model, rp_top_regions, rp_bottom_regions, load_surfaces,
    bottom_surfaces, params.load)

    # --- Boundary Conditions ---
    m.bc(model, rp_top_regions, rp_bottom_regions, params.load)

```

```

for partName, partObj in model.parts.items():
    vp=session.viewports['Viewport: 1']
    vp.setValues(displayedObject=model.rootAssembly)

    # --- Mesh ---
    m.concrete_mesh(concrete_part, params.concrete, concrete_faces)
    m.steel_mesh(steel_part, params.steel)

    assem.regenerate()

    # --- Interaction ---
    if params.steel.interaction == 'EMBEDDED':
        if steel_instance is not None:
            m.interaction(model, assem, concrete_instance, steel_instance)
    elif params.steel.interaction == 'SPRINGS':
        if steel_instance is not None:
            m.spring_interaction( assem, steel_instance, concrete_instance,
                                params.steel, params.concrete)

if __name__ == "__main__":
    imp.reload(m)
    main()

```

B.2 Model Builder

```

import regionToolset
import mesh
import math
from abaqusConstants import *

def part_concrete(model, concrete, load):
    """Create 2D concrete deformable shell part"""

    # Import parameters
    width = concrete.width
    height = concrete.height

    load_points = load.load_points
    load_distributions = load.load_distribution

    support_points = load.support_points
    support_distributions = load.support_distributions

    if len(load_points) != len(load_distributions):
        raise ValueError("load_points and load_distribution must have
                           same length")

```

```

if len(support_points) != len(support_distributions):
    raise ValueError("support_points and support_distribution must
        have same length")

# Create 2D sketch
sketch = model.ConstrainedSketch(name='__Concrete_profile__',
    sheetSize=200.0)
sketch.setPrimaryObject(option=STANDALONE)

# Define top segment
top_x = [0.0]

for x_center, load_width in zip(load_points, load_distributions):
    x1 = max(0.0, x_center - load_width / 2.0)
    x2 = min(width, x_center + load_width / 2.0)
    top_x.extend([x1, x2])

top_x.append(width)

# Sort and remove duplicates
top_x = sorted(list(set(top_x)))

# Define bottom segment
bottom_x = [0.0]

for x_center, support_width in zip(support_points, support_distributions):
    x1 = max(0.0, x_center - support_width / 2.0)
    x2 = min(width, x_center + support_width / 2.0)
    bottom_x.extend([x1, x2])

bottom_x.append(width)

# Sort and remove duplicates
bottom_x = sorted(list(set(bottom_x)))

# Build closed polygon (ensures valid sketch)
points = []

# Bottom (left to right)
for x in bottom_x:
    points.append((x, 0.0))

# Right side
points.append((width, height))

# Top (right to left)
for x in reversed(top_x):
    points.append((x, height))

```

```

# Left side back to origin
points.append((0.0, 0.0))

# Draw continuous boundary
for i in range(len(points) - 1):
    sketch.Line(point1=points[i], point2=points[i+1])

# Create 2D deformable part
concrete_part = model.Part(
    name='Concrete',
    dimensionality=TWO_D_PLANAR,
    type=DEFORMABLE_BODY
)
concrete_part.BaseShell(sketch=sketch)

# Exit sketch
sketch.unsetPrimaryObject()
del model.sketches['__Concrete_profile__']

return concrete_part

def part_steel(model, steel):
    """Create 2D deformable steel wire part"""
    if not steel.include_reinforcement == True:
        return None

    # Create 2D steel rebar
    sketch = model.ConstrainedSketch(name='__Steel_profile__',
        sheetSize=200.0)
    sketch.setPrimaryObject(option=STANDALONE)

    # Sketch steel rebars
    for bar in steel.coord:
        start = bar[:2]
        end = bar[2:]
        sketch.Line(point1=start, point2=end)

    # Create 2D deformable wire
    steel_part = model.Part(name='Steel', dimensionality=TWO_D_PLANAR,
        type=DEFORMABLE_BODY)
    steel_part.BaseWire(sketch=sketch)

    # Exit sketch
    sketch.unsetPrimaryObject()
    del model.sketches['__Steel_profile__']

    return steel_part

```

```

def property_concrete(model, concrete_part, concrete):
    """Create and assign Concrete Material properties"""

    # Import parameters
    rho = concrete.rho
    E = concrete.E
    nu = concrete.nu
    thickness = concrete.thickness

    # Create material
    if 'Concrete' not in model.materials.keys():
        model.Material(name='Concrete')
        material = model.materials['Concrete']

        # Define concrete features
        material.Density(table=((rho, ), ))
        material.Elastic(table=((E, nu), ))

        # CDP parameters according to Lubliner et al.
        / Abaqus manual calibration
        material.ConcreteDamagedPlasticity(
            table=((30.0, 0.1, 1.16, 0.667, 0.000001), ))

        material.concreteDamagedPlasticity.ConcreteCompressionHardening(
            table=(
                (17200000.0, 0.0),
                (21800000.0, 0.0001),
                (36300000.0, 0.0003),
                (42800000.0, 0.0009),
                (40000000.0, 0.0016),
                (26500000.0, 0.0027)
            )
        )

        material.concreteDamagedPlasticity.ConcreteTensionStiffening(
            table=(
                (3200000.0, 0.0),
                (640000.0, 4.5e-05),
                (320000.0, 0.00013)
            ),
            type=DISPLACEMENT
        )

    else:
        material = model.materials['Concrete']

    # Create section
    if 'ConcreteSection' not in model.sections.keys():
        model.HomogeneousSolidSection(name='ConcreteSection',

```

```

        material='Concrete', thickness=thickness)

concrete_faces = concrete_part.faces
concrete_region = concrete_part.Set(faces=concrete_faces,
name='ConcreteRegion')

# Assign section
concrete_part.SectionAssignment(
    region=concrete_region,
    sectionName='ConcreteSection',
    offset=0.0,
    offsetType=MIDDLE_SURFACE,
    offsetField='',
    thicknessAssignment=FROM_SECTION
)

return concrete_part, concrete_faces

def property_steel(model, steel_part, steel):
    """Create and assign steel material properties"""
    if not steel.include_reinforcement == True:
        return None, None

    # Import parameters
    rho = steel.rho
    E = steel.E
    nu = steel.nu
    f_yk = steel.f_yk

    n = steel.num_rebars
    d = steel.diameter

    # Calculate steel area
    area = 20 * n * ( (d/2)**2 * math.pi )

    # Create material
    if 'Steel' not in model.materials.keys():
        model.Material(name='Steel')
        material = model.materials['Steel']
        material.Density(table=((rho, ), ))
        material.Elastic(table=((E, nu), ))
        material.Plastic(table=((f_yk, 0.0), ))
    else:
        material = model.materials['Steel']

    # Create section
    if 'SteelSection' not in model.sections.keys():
        model.TrussSection(name='SteelSection', material='Steel', area=area)

```

```

steel_region = steel_part.Set(edges=steel_part.edges, name='SteelSet')

# Assign steel section
steel_part.SectionAssignment(
    region=steel_region,
    sectionName='SteelSection',
    offset=0.0,
    offsetType=MIDDLE_SURFACE,
    offsetField='',
    thicknessAssignment=FROM_SECTION
)

return steel_part

def assembly(model, steel_part, concrete_part):
    """Assemble model in instance"""

    # Import concrete into instance
    assem = model.rootAssembly
    assem.DatumCsysByDefault(CARTESIAN)

    # Create concrete instance
    concrete_instance = assem.Instance(name='ConcreteInstance',
    part=concrete_part, dependent=ON)

    # Create steel instance
    if steel_part is not None:
        steel_instance = assem.Instance(name='SteelInstance',
        part=steel_part, dependent=ON)
    else:
        steel_instance = None

    return assem, concrete_instance, steel_instance

def step(model):
    """Create Step"""

    # Create non linear step
    if 'Nonlinear' not in model.steps:
        model.StaticStep(name='Nonlinear',
            previous='Initial',
            maxNumInc=5000,
            stabilizationMagnitude=0.0002,
            stabilizationMethod=DISSIPATED_ENERGY_FRACTION,
            continueDampingFactors=False,
            adaptiveDampingRatio=0.05,
            initialInc=0.01, minInc=1e-10, maxInc=0.1,
            nlgeom=ON)

```

```

model.fieldOutputRequests['F-Output-1'].setValues(variables=(
    'S', 'PE', 'PEEQ', 'PEEQT', 'LE', 'U', 'RF'))

def edges(assem, concrete_instance, concrete, load):
    """Define Concrete edges"""

    # Import parameters
    load_points = load.load_points
    load_distributions = load.load_distribution

    support_points = load.support_points
    support_distributions = load.support_distributions

    height = concrete.height
    tol = 1e-03

    # Import concrete edges
    concrete_edges = concrete_instance.edges

    if len(load_points) != len(load_distributions):
        raise ValueError("load_points and constraint_distribution must have
            same length")

    # Create list for value storage
    load_surfaces = []
    valid_indices = []

    # Define top edge surface for constraint application
    for i, (x_center, width) in enumerate(zip(load_points, load_distributions),
        start=1):

        x1 = x_center - width / 2.0
        x2 = x_center + width / 2.0

        top_edges = concrete_edges.getByBoundingBox(
            xMin=x1 - tol,
            yMin=height - tol,
            zMin=-tol,
            xMax=x2 + tol,
            yMax=height + tol,
            zMax=tol,
        )

        if len(top_edges) == 0:
            print("WARNING: No TOP edges found for load {}".format(i))
            continue

        valid_indices.append(i-1)

```

```

name='LoadSurface-{}'.format(i)

if name in assem-surfaces:
    del assem-surfaces[name]

surface = assem.Surface(
    sideEdges=top-edges,
    name=name
)

load-surfaces.append(surface)

# Create list for value storage
bottom-surfaces = []

# Define bottom edge surface for constraint application
for i, (x-center, width) in enumerate(zip(support-points,
support-distributions), start=1):

    x1 = x-center - width / 2.0
    x2 = x-center + width / 2.0

    bottom-edges = concrete-edges.getByBoundingBox(
        xMin=x1 - tol,
        yMin=0 - tol,
        zMin=-tol,
        xMax=x2 + tol,
        yMax=0 + tol,
        zMax=tol,
    )

    if len(bottom-edges) == 0:
        print("WARNING: No BOTTOM edges found for load {}".format(i))
        continue

    name='BottomSurface-{}'.format(i)

    if name in assem-surfaces:
        del assem-surfaces[name]

    bottom-surface = assem.Surface(
        sideEdges=bottom-edges,
        name=name
    )

    bottom-surfaces.append(bottom-surface)

return bottom-surfaces, valid-indices, load-surfaces

```

```

def refpt(assem, load, concrete, valid_indices):
    """Create reference points"""

    # Import parameters
    load_points = load.load_points
    support_points = load.support_points

    height = concrete.height

    # Create empty list for value storage
    rp_top_regions = []

    # Create reference points on top surface
    for idx in valid_indices:
        x = load_points[idx]
        i = idx + 1
        rp_top_feature = assem.ReferencePoint(point=(x, height, 0.0))
        rp_top_obj = assem.referencePoints[rp_top_feature.id]

        # Create a set for each reference point
        rp_top_set = assem.Set(
            name='ASSEMBLY_REFPOINT-{}'.format(i),
            referencePoints=(rp_top_obj,)
        )

        rp_top_regions.append(rp_top_set) # Add to list

    # Create empty list for value storage
    rp_bottom_regions = []

    # Create reference points on bottom surface
    for i, x in enumerate(support_points, start=1):
        rp_bottom_feature = assem.ReferencePoint(point=(x, 0.0, 0.0))
        rp_bottom_obj = assem.referencePoints[rp_bottom_feature.id]

        rp_bottom_set = assem.Set(
            name='ASSEMBLY_BOTTOM_REFPOINT-{}'.format(i),
            referencePoints=(rp_bottom_obj,)
        )

        rp_bottom_regions.append(rp_bottom_set)

    return rp_top_regions, rp_bottom_regions

def coupling(model, rp_top_regions, rp_bottom_regions, load_surfaces,
bottom_surfaces, load):
    """Create coupling constraint"""

    # Import parameters

```

```

coupling_type = load.coupling_type

# Assign top surface coupling constraints to reference points
for i, (rp_top_region, load_surface) in enumerate(zip(rp_top_regions,
load_surfaces), start=1):

    if coupling_type==KINEMATIC:

        name='Kinematic-{}'.format(i)

        if name in model.constraints:
            del model.constraints[name]

        model.Coupling(
            name=name,
            controlPoint=rp_top_region,
            surface=load_surface,
            influenceRadius = WHOLE_SURFACE,
            couplingType=KINEMATIC,
            alpha=0.0,
            localCsys=None,
            u1=ON,
            u2=ON,
            ur3=OFF
        )
    elif coupling_type==DISTRIBUTING:

        name='Distributing-{}'.format(i)

        if name in model.constraints:
            del model.constraints[name]

        model.Coupling(
            name=name,
            controlPoint=rp_top_region,
            surface=load_surface,
            influenceRadius=WHOLE_SURFACE,
            couplingType=DISTRIBUTING,
            weightingMethod=UNIFORM,
            localCsys=None,
            u1=ON,
            u2=ON,
            ur3=OFF
        )
    else:
        print('Invalid coupling constraint')

# Assign bottom surface coupling constraints to reference points

```

```

for i, (rp_bottom_region, bottom_surface) in enumerate(zip(rp_bottom_regions,
bottom_surfaces), start=1):

    # Assign coupling constraint to reference point
    if coupling_type==KINEMATIC:

        name='Bottom_Kinematic-{}'.format(i)

        if name in model.constraints:
            del model.constraints[name]

        model.Coupling(
            name='Bottom_Kinematic-{}'.format(i),
            controlPoint=rp_bottom_region,
            surface=bottom_surface,
            influenceRadius = WHOLE_SURFACE,
            couplingType=KINEMATIC,
            alpha=0.0,
            localCsys=None,
            u1=ON,
            u2=ON,
            ur3=OFF
        )
    elif coupling_type==DISTRIBUTING:

        name='Bottom_Distributing-{}'.format(i)

        if name in model.constraints:
            del model.constraints[name]

        model.Coupling(
            name=name,
            controlPoint=rp_bottom_region,
            surface=bottom_surface,
            influenceRadius=WHOLE_SURFACE,
            couplingType=DISTRIBUTING,
            weightingMethod=UNIFORM,
            localCsys=None,
            u1=ON,
            u2=ON,
            ur3=OFF
        )
    else:
        print('Invalid coupling constraint')

def bc_case1(model, rp_top_regions, rp_bottom_regions, load):
    """Create splitting boundary conditions"""

    # Import parameters

```

```

displacement = load.displacement

# Define allowed displacement in top reference point
for i, rp_top_set in enumerate(rp_top_regions, start=1):
    model.DisplacementBC(
        name='RP-disp-{}'.format(i),
        createStepName='Nonlinear',
        region=rp_top_set,
        u1=UNSET,
        u2=displacement,
        ur3=UNSET,
        amplitude=UNSET,
        fixed=OFF,
        distributionType=UNIFORM,
        fieldName='',
        localCsys=None
    )

# Define fixed dofs in supports
for i, rp_bottom_set in enumerate(rp_bottom_regions, start=1):
    model.DisplacementBC(
        name='Bottom_RP-disp-{}'.format(i),
        createStepName='Nonlinear',
        region=rp_bottom_set,
        u1=SET,
        u2=SET,
        ur3=SET,
        amplitude=UNSET,
        fixed=OFF,
        distributionType=UNIFORM,
        fieldName='',
        localCsys=None
    )

def bc_case2(model, rp_top_regions, rp_bottom_regions, load):
    """Create bending boundary conditions"""

    # Import parameters
    displacement = load.displacement

    # Define allowed displacement in top reference point
    for i, rp_top_region in enumerate(rp_top_regions, start=1):
        model.DisplacementBC(
            name='RP-disp-{}'.format(i),
            createStepName='Nonlinear',
            region=rp_top_region,
            u1=UNSET,
            u2=displacement,
            ur3=SET,

```

```

        amplitude=UNSET,
        fixed=OFF,
        distributionType=UNIFORM,
        fieldName='',
        localCsys=None
    )

# Define fixed and roller supports
    for i, rp_bottom_region in enumerate(rp_bottom_regions, start=1):

        if i ==1:
            model.DisplacementBC(
                name='Bottom_RP_Fixed-{}'.format(i),
                createStepName='Initial',
                region=rp_bottom_region,
                u1=SET,
                u2=SET,
                ur3=UNSET,
                amplitude=UNSET,
                fixed=OFF,
                distributionType=UNIFORM,
                fieldName='',
                localCsys=None)

        else:
            model.DisplacementBC(
                name='Roller_RP-{}'.format(i),
                createStepName='Initial',
                region=rp_bottom_region,
                u1=UNSET,
                u2=SET,
                ur3=UNSET,
                amplitude=UNSET,
                fixed=OFF,
                distributionType=UNIFORM,
                fieldName='',
                localCsys=None)

def bc(model, rp_top_regions, rp_bottom_regions, load):

    if load.load_case == 1:
        bc_case1(model, rp_top_regions, rp_bottom_regions, load)

    elif load.load_case ==2:
        bc_case2(model, rp_top_regions, rp_bottom_regions, load)

    else:
        raise ValueError("Unknown load case")

```

```

def concrete_mesh(concrete_part, concrete, concrete_faces):
    """ Mesh concrete part """

    # Import parameters
    size = concrete.elem_size

    # Delete earlier mesh
    concrete_part.deleteMesh()

    # Define mesh size
    concrete_part.seedPart(size=size, deviationFactor=0.1, minSizeFactor=0.1)

    # Define allowed element types
    quad = mesh.ElemType(elemCode=CPS4, elemLibrary=STANDARD)
    tri = mesh.ElemType(elemCode=CPS3, elemLibrary=STANDARD)

    # Assign region to be meshed
    concrete_mesh_region = (concrete_faces, )

    # Generate mesh
    concrete_part.setElementType(regions=concrete_mesh_region,
                                elemTypes=(quad, tri))
    concrete_part.generateMesh()

def steel_mesh(steel_part, steel):
    """ Mesh steel part """
    if steel_part is None:
        return

    # Import parameters
    size = steel.elem_size

    # Delete earlier mesh
    steel_part.deleteMesh()

    # Mesh size
    steel_part.seedPart(size=size, deviationFactor=0.1, minSizeFactor=0.1)

    # Define allowed element types
    truss = mesh.ElemType(elemCode=T2D2, elemLibrary=STANDARD)

    # Assign region to be meshed
    steel_edges = steel_part.edges
    steel_mesh_region = (steel_edges, )

    # Generate mesh
    steel_part.setElementType(regions=steel_mesh_region, elemTypes=(truss, ))
    steel_part.generateMesh()

```

```

def interaction(model, assem, concrete_instance, steel_instance):
    """ Define embedded interaction between concrete and steel """
    if steel_instance is None:
        return

    # Create sets for assembly
    concrete_asm_region = assem.Set(
        name='Concrete_assem_Region',
        elements=concrete_instance.elements[:]
    )
    steel_asm_region = assem.Set(
        name='Steel_assem_region',
        elements=steel_instance.elements[:]
    )

    # Create constraint with rebar embedded in concrete
    model.EmbeddedRegion(
        name='ReinforcementConstraint',
        embeddedRegion=steel_asm_region,
        hostRegion=concrete_asm_region,
        weightFactorTolerance=1e-06,
        absoluteTolerance=0.0,
        fractionalTolerance=0.05,
        toleranceMethod=BOTH
    )

def spring_interaction(assem, steel_instance, concrete_instance,
steel, concrete):
    """ Define spring interaction between concrete and steel """
    if steel_instance is None:
        return

    # Import parameters
    d = steel.diameter
    n = steel.num_rebars
    L = steel.elem_size
    f_ck = concrete.f_ck

    # Define shear force and slip according to fib
    tau = 2.5 * math.sqrt(f_ck + 8e6)
    s1 = 1e-3

    # Calculate spring stiffness
    k_per_length = n * tau * math.pi * d / s1
    bond_k = k_per_length * L

    # Import steel and concrete nodes
    steel_nodes = steel_instance.nodes
    concrete_nodes = concrete_instance.nodes

```

```

# Connect closest steel and concrete nodes with springs
for i, s_node in enumerate(steel_nodes):

    coord = s_node.coordinates

    closest = concrete_nodes.getClosest(coordinates=(coord,))

    if not closest:
        continue

    c_node = closest[0]

    rgn1 = regionToolset.Region(
        nodes=steel_nodes.sequenceFromLabels((s_node.label,)))
    rgn2 = regionToolset.Region(
        nodes=concrete_nodes.sequenceFromLabels((c_node.label,)))

    region = ((rgn1, rgn2),)

    for dof in [1, 2]:
        assem.engineeringFeatures.TwoPointSpringDashpot(
            name='Spring-{}-{}'.format(i, dof),
            regionPairs=region,
            axis=FIXED_DOF,
            dof1=dof,
            dof2=dof,
            springBehavior=ON,
            springStiffness=bond_k,
        )

```